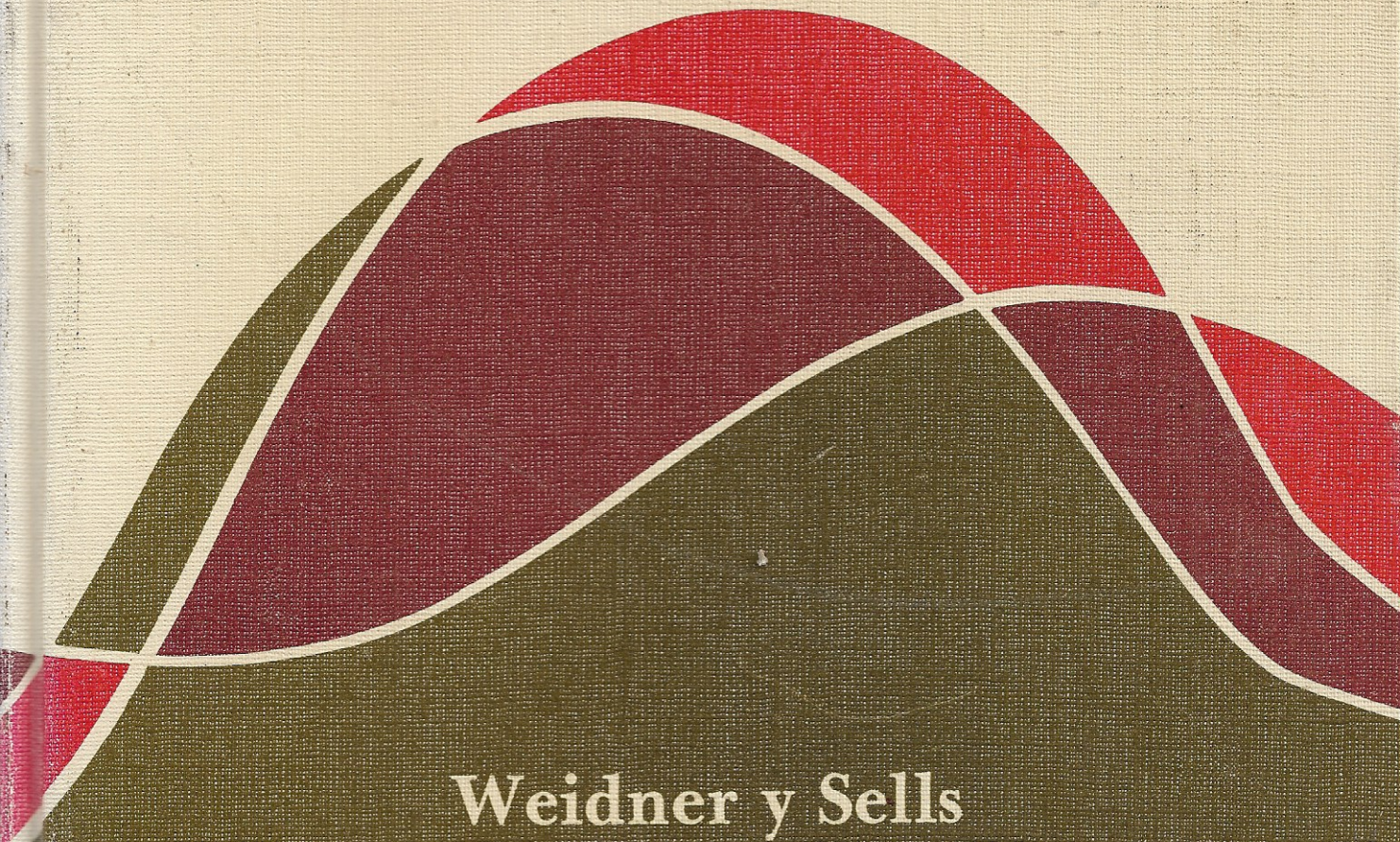
FISICA ELEMENTAL

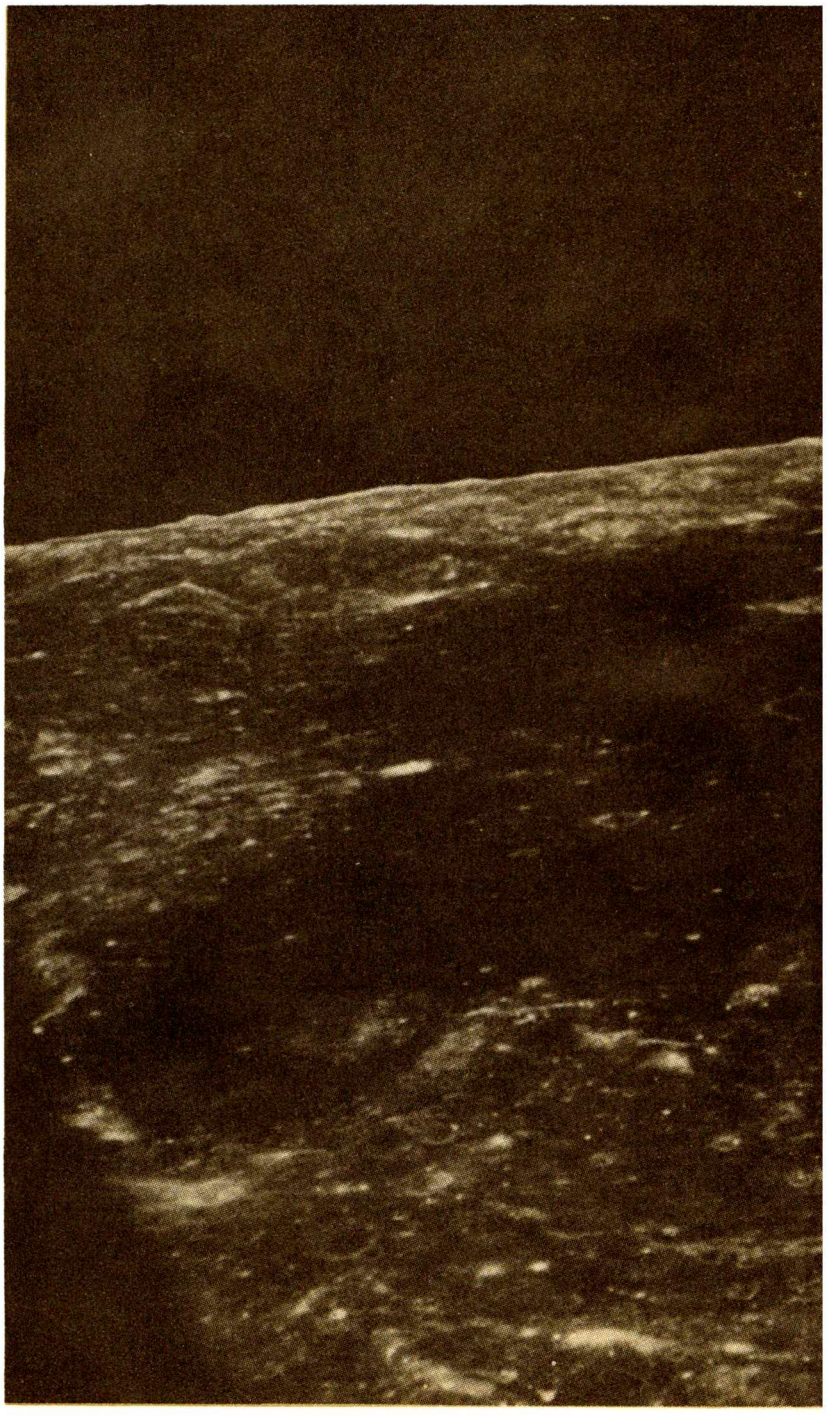
Clásica y Moderna



Weidner y Sells

C.E.C.S.A.

FISICA ELEMENTAL:
Clásica y Moderna

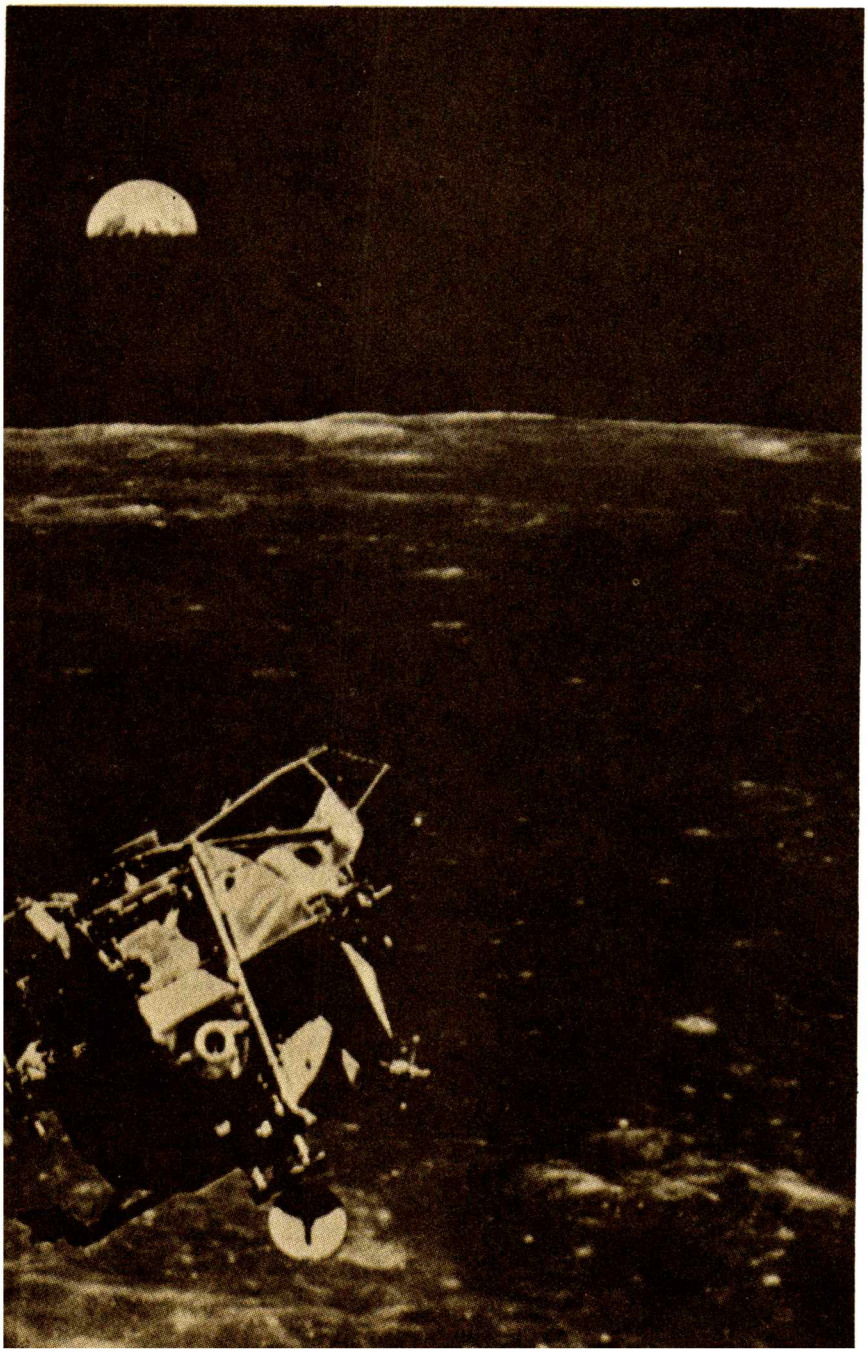


El módulo lunar del Apolo 11 fotografiado desde el comando del módulo de servicio en su etapa de ascensión durante la unión en la órbita lunar. La Tierra sale sobre el horizonte lunar. (Cortesía de National Aeronautics and Space Administration).

Richard T. Weidner
Professor of Physics
Rutgers University
New Brunswick, New Jersey

Robert L. Sells
Professor of Physics
State University College of Arts and Sciences
Geneseo, New York

Con la colaboración de Arthur E. Walters



COMPAÑIA EDITORIAL
CONTINENTAL, S. A. MEXICO

DISTRIBUIDORES:

ESPAÑA – ARGENTINA – CHILE
VENEZUELA – COLOMBIA

Bolivia — Brasil — Costa Rica — Dominicana
Ecuador — El Salvador — Estados Unidos
Guatemala — Honduras — Nicaragua —
Panamá — Paraguay — Perú — Portugal
Puerto Rico — Uruguay

Título original en inglés:
ELEMENTARY PHYSICS: CLASSICAL AND MODERN

Traducido por:
RAUL GOMEZ GONZALEZ, Ph. D.
Ing. MARIO JAIME VELASCO HERNANDEZ
Ing. ALEJANDRO FELIX ESTRADA

Edición autorizada por:
ALLYN AND BACON, INC.

Copyright © 1975 By Allyn and Bacon, Inc.

ISBN 0-205-04647-9
0-205-04778-5 (Internacional)

Primera edición en español:
agosto de 1979

ISBN-968-26-0078-2

Derechos Reservados © en Lengua Española 1979, *Primera Publicación*

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.
CALZ. DE TLALPAN NÚM. 4620, MÉXICO 22, D. F.

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

DISTRIBUIDORES PRINCIPALES EN:

AV. REP. ARGENTINA NÚM. 168, BARCELONA 23, ESPAÑA
AV. CANNING NÚMS. 96, 98 Y 100, ESQ. PADILLA 1414,
BUENOS AIRES, ARGENTINA
AMUNÁTEGUI NÚM. 458, SANTIAGO DE CHILE, CHILE
CRUZ VERDE A VELÁZQUEZ NÚM. 71, CARACAS, VENEZUELA
CALLE DEL CHORRO DE EGIPTO (ONCE) NÚM. 2-56, BOGOTÁ, COLOMBIA

IMPRESO EN MEXICO PRINTED IN MEXICO

INDICE DE MATERIAS

INTRODUCCION — CAPITULO 1

1-1 Eventos 19 / 1-2 Longitud 19 / 1-3 Tiempo 20 / 1-4 Sistemas de unidades 21.

VECTORES — CAPITULO 2

2-1 Vectores y escalares 23 / 2-2 El desplazamiento como un vector 23 / 2-3 Representación de vectores por sus componentes 26 / 2-4 Suma vectorial por el método de las componentes 28 / 2-5 Vectores en tres dimensiones 30 / 2-6 Productos escalar y vectorial 30.

LA CINEMATICA EN LA RECTA — CAPITULO 3

3-1 El significado de una partícula 35 / 3-2 Velocidad promedio 35 / 3-3 Velocidad instantánea 37 / 3-4 Aceleración 41 / 3-5 Movimiento rectilíneo con aceleración constante 42 / 3-6 Caída libre de los cuerpos 47 / ***Resumen 49.***

CINEMATICA EN DOS DIMENSIONES — CAPITULO 4

4-1 Velocidad y aceleración como cantidades vectoriales 53 / 4-2 Movimiento con aceleración constante 57 / 4-3 Movimiento de

proyectiles 60 / 4-4 Movimiento circular uniforme 63 / 4-5 Rapidez angular 66 / ***Resumen 67.***

CAPITULO 5

LEY DE LA INERCIA, CONSERVACION DE LA MASA Y CONSERVACION DEL IMPETU

5-1 La Ley de la inercia 74 / 5-2 Masa inercial 75 / 5-3 El patrón de masa 77 / 5-4 La ley de la conservación de la masa 78 / 5-5 Conservación del ímpetu en choques de frente 78 / 5-6 Conservación del ímpetu en dos o tres dimensiones 84 / 5-7 Conservación del ímpetu en choques atómicos 88 / ***Resumen 88.***

CAPITULO 6

CENTRO DE MASA Y MARCOS DE REFERENCIA

6-1 Velocidad del centro de masa 91 / 6-2 Localización del centro de masa 93 / 6-3 Marcos de referencia y velocidades relativas 96 / 6-4 Conservación del ímpetu en el marco de referencia del centro de masa 101 / ***Resumen 103.***

CAPITULO 7

FUERZA

7-1 Orígenes fundamentales de la fuerza 107 / 7-2 Definición de la fuerza 108 / 7-3 El principio de superposición para las fuerzas 110 / 7-4 Pares de fuerzas 112 / 7-5 Peso 114 / 7-6 Impulso del ímpetu 116 / ***Resumen 120.***

CAPITULO 8

MECANICA NEWTONIANA Y SUS APLICACIONES

8-1 Leyes de Newton del movimiento 123 / 8-2 Aplicaciones de las leyes de Newton 125 / 8-3 Fricción 131 / 8-4 Sistemas de partículas interactuantes 134 / 8-5 Movimiento circular uniforme 137 / ***Resumen 140.***

CAPITULO 9

TRABAJO Y ENERGIA CINETICA

9-1 Definición de la inercia cinética 145 / 9-2 Definición del trabajo 146 / 9-3 Teorema general de trabajo-energía 148 / 9-4 Trabajo realizado por un resorte 155 / 9-5 Potencia 159 / ***Resumen 160.***

CAPITULO 10

ENERGIA POTENCIAL Y CONSERVACION DE LA ENERGIA

10-1 Energía potencial de un resorte 165 / 10-2 Energía potencial gravitacional 169 / 10-3 Definición general de la energía potencial 176 / 10-4 Propiedades de la energía potencial 178 / 10-5 La ley de la conservación de energía 182 / ***Resumen 189.***

MOMENTO ANGULAR

CAPITULO 11

11-1 La velocidad angular como vector 195 / 11-2 Algunas características cualitativas del momento angular 196 / 11-3 La torca como la rapidez de cambio del momento angular 199 / 11-4 Una partícula con momento angular constante 204 / 11-5 Momento angular de un cuerpo rígido 208 / 11-6 La energía cinética de un cuerpo rígido giratorio 209 / 11-7 Ley de la conservación del momento angular 210 / ***Resumen 214.***

DINAMICA DE LA ROTACION

CAPITULO 12

12-1 Cinemática de la rotación 221 / 12-2 La segunda ley de Newton para la rotación 224 / 12-3 El trabajo y la energía cinética en el movimiento de rotación 230 / 12-4 Centro de gravedad 233 / 12-5 Equilibrio de un cuerpo rígido 235 / ***Resumen 237.***

GRAVITACION

CAPITULO 13

13-1 La ley de la gravitación universal 243 / 13-2 Experimento de Cavendish 248 / 13-3 El campo gravitacional 250 / 13-4 Las leyes de Kepler del movimiento planetario 252 / 13-5 Energía potencial gravitacional 258 / ***Resumen 264.***

MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

CAPITULO 14

14-1 Dinámica y cinemática del movimiento armónico simple 269 / 14-2 Energía del movimiento armónico simple 273 / 14-3 El péndulo simple 275 / 14-4 Las oscilaciones pequeñas y el movimiento armónico simple 277 / 14-5 Oscilaciones amortiguadas y resonancia 281 / ***Resumen 283.***

ONDAS EN UNA CUERDA

CAPITULO 15

15-1 Comportamiento básico de las ondas 287 / 15-2 El principio de superposición y la interferencia 291 / 15-3 Reflexión de las ondas 292 / 15-4 Ondas sinusoidales 294 / 15-5 Ondas estacionarias 298 / 15-6 Resonancia 303 / ***Resumen 305.***

ONDAS DE COMPRESION

CAPITULO 16

16-1 Ondas longitudinales 309 / 16-2 Velocidades de las ondas de compresión 312 / 16-3 Superposición, reflexión y ondas estacio-

narias 313 / 16-4 Sonido y acústica 316 / 16-5 Frentes de onda y rayos 316 / 16-6 Variación de la intensidad con la distancia a la fuente 317 / 16-7 Principio de Huygens 318 / ***Resumen 319.***

CAPITULO 17

LA TEMPERATURA Y LAS PROPIEDADES MACROSCOPICAS DE UN GAS IDEAL

17-1 La temperatura y la ley cero de la termodinámica 324 / 17-2 Termometría 325 / 17-3 Presión de un gas 328 / 17-4 El termómetro de gas a volumen constante 330 / 17-5 La ley general de los gases 332 / 17-6 Cambios en el estado de un gas 335 / ***Resumen 336.***

CAPITULO 18

LA TEORIA CINETICA Y LOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TERMODINAMICA

18-1 Tamaño molecular 339 / 18-2 La teoría cinética aplicada a un gas ideal 340 / 18-3 El significado de la temperatura y de la energía interna 344 / 18-4 El significado del calor y la primera ley de la termodinámica 347 / 18-5 El desorden y la segunda ley de la termodinámica 351 / ***Resumen 356.***

CAPITULO 19

PROPIEDADES TERMICAS DE SOLIDOS Y LIQUIDOS

19-1 Sólidos y líquidos como sistemas térmicos 359 / 19-2 La primera ley de la termodinámica 362 / 19-3 Calores específicos y unidades de calor 363 / 19-4 Conducción térmica 367 / 19-5 Transmisión de energía térmica por radiación 370 / ***Resumen 372.***

CAPITULO 20

LA FUERZA ELECTRICA ENTRE LAS CARGAS

20-1 Carga eléctrica 377 / 20-2 Ley de Coulomb 380 / 20-3 Unidades eléctricas 384 / 20-4 Conservación de la carga 386 / 20-5 Cuantización de la carga 387 / ***Resumen 388.***

CAPITULO 21

EL CAMPO ELECTRICO

21-1 Definición del campo eléctrico 391 / 21-2 Líneas del campo eléctrico 394 / 21-3 Los campos eléctricos en tres casos de geometría sencilla 396 / 21-4 Campos eléctricos y conductores 399 / 21-5 El experimento de Millikan 400 / ***Resumen 401.***

LEY DE GAUSS CAPITULO 22

22-1 Flujo eléctrico 405 / 22-2 Ley de Gauss 407 / 22-3 Líneas del campo eléctrico 411 / 22-4 Distribuciones de carga con simetría esférica 413 / 22-5 La ley de Gauss y los conductores 414 / ***Resumen 418.***

POTENCIAL ELECTRICO, CAPACITANCIA Y DIELECTRICOS CAPITULO 23

23-1 Energía potencial de dos cargas puntuales 423 / 23-2 Definición de potencial eléctrico 428 / 23-3 Potencial eléctrico de cargas puntuales 430 / 23-4 Relaciones entre **V** *y* ***E*** *432 / 23-5 Superficies equipotenciales 433 / 23-6 El potencial eléctrico y los conductores 435 / 23-7 Definición de capacitancia 438 / 23-8 La capacitancia de algunas configuraciones sencillas 439 / 23-9 Circuitos con capacitor 442 / 23-10 Energía de un capacitor cargado y de un campo eléctrico 445 /* ***Resumen 447.***

CORRIENTE ELECTRICA Y RESISTENCIA CAPITULO 24

24-1 Corriente eléctrica 453 / 24-2 La corriente y la conservación de la energía 456 / 24-3 Resistencia y ley de Ohm 457 / ***Resumen 460.***

CIRCUITOS DE CD CAPITULO 25

25-1 La Fem de una batería 465 / 25-2 Circuitos sencillos de CD 468 / 25-3 Resistores en serie y en paralelo 471 / 25-4 Circuitos con varias mallas 475 / 25-5 Instrumentos para circuitos CD 478 / ***Resumen 482.***

LA FUERZA MAGNETICA CAPITULO 26

26-1 Definición del campo de inducción magnética 487 / 26-2 Flujo magnético 490 / 26-3 El movimiento de las partículas cargadas en un campo magnético uniforme 492 / 26-4 Partículas cargadas en campos uniformes **B** *y* ***E*** *495 / 26-5 Fuerza magnética que recibe un conductor con corriente 499 / 26-6 Torca magnética en una espira de corriente 502 /* ***Resumen 504.***

LAS FUENTES DEL CAMPO MAGNETICO CAPITULO 27

27-1 El experimento de Oersted 509 / 27-2 La ley de Biot y Savart 510 / 27-3 El campo magnético de algunas geometrías sencillas

513 / 27-4 La fuerza magnética entre conductores que llevan corriente 516 / 27-5 Ley de Gauss en el magnetismo 518 / 27-6 Ley de Ampere 519 / 27-7 El solenoide 523 / ***Resumen 525.***

CAPITULO 28 — INDUCCION ELECTROMAGNETICA E INDUCTANCIA

28-1 Fem de movimiento 531 / 28-2 Ejemplos de inducción electromagnética 537 / 28-3 Ley de Lenz 538 / 28-4 La ley de Faraday y el campo eléctrico 540 / 28-5 Definición de autoinducción 543 / 28-6 La energía de un inductor y del campo magnético 546 / ***Resumen 548.***

CAPITULO 29 — OSCILACIONES ELECTRICAS, CIRCUITOS RC y RL

29-1 Oscilaciones eléctricas libres 553 / 29-2 Analogías electromecánicas 538 / 29-3 El circuito RC 560 / 29-4 El circuito LR 561 / ***Resumen 564.***

CAPITULO 30 — ECUACIONES DE MAXWELL Y ONDAS ELECTROMAGNETICAS

30-1 La ley de Ampere y la corriente de desplazamiento de Maxwell 567 / 30-2 Ecuaciones de Maxwell 570 / 30-3 Las ondas electromagnéticas a partir de las ecuaciones de Maxwell 571 / 30-4 Intensidad y densidad de energía electromagnética; el vector de Poynting 577 / 30-5 Fuerza y presión de la radiación: el ímpetu lineal de una onda electromagnética 580 / 30-6 Cargas aceleradas y ondas electromagnéticas 584 / 30-7 Ondas electromagnéticas sinusoidales 587 / 30-8 El espectro electromagnético 590 / 30-9 Mediciones de la velocidad de la luz 591 / ***Resumen 594.***

CAPITULO 31 — LA OPTICA DE LOS RAYOS: REFLEXION, REFRACCION Y LENTES

31-1 Optica de rayos y óptica de ondas 599 / 31-2 El principio de reciprocidad 601 / 31-3 Reglas de la reflexión y de la refracción 603 / 31-4 Reflexión 604 / 31-5 Indice de refracción 606 / 31-6 Refracción 608 / 31-7 Reflexión total interna 610 / 31-8 Lentes delgadas 611 / 31-9 Instrumentos ópticos 620 / ***Resumen 621.***

CAPITULO 32 — OPTICA ONDULATORIA, INTERFERENCIA Y DIFRACCION

32-1 Superposición e interferencia de ondas 627 / 32-2 Interferencia de dos fuentes puntuales 629 / 32-3 Reflexión y cambio de fase

633 / 32-4 Fuentes coherentes e incoherentes 634 / 32-5 Experimento de Young de la doble rendija 637 / 32-6 Interferencia en películas delgadas 639 / 32-7 El interferómetro de Michelson 642 / 32-8 Radiación de una final de fuentes puntuales 643 / 32-9 Difracción por una sola rendija 646 / 32-10 La cratícula o retícula de difracción 648 / 32-11 Otros ejemplos de difracción 651 / 32-12 Difracción y resolución 652 / ***Resumen 654.***

POLARIZACION CAPITULO **33**

33-1 Superposición de movimientos armónicos simples 659 / 33-2 Propiedades de polarización de las ondas de un dipolo eléctrico oscilador 660 / 33-3 Polarización de la luz visible 662 / 33-4 Polarización por dispersión 666.

LA CINEMATICA RELATIVISTA: EL ESPACIO Y EL TIEMPO CAPITULO **34**

34-1 La constancia de la rapidez de la luz 672 / 34-2 La dilatación del tiempo 674 / 34-3 La contracción del espacio 680 / 34-4 Las transformaciones de Lorentz de las coordenadas 682 / 34-5 Las relaciones relativistas de la velocidad 684 / ***Resumen 687.***

LA DINAMICA RELATIVISTA: EL IMPETU Y LA ENERGIA CAPITULO **35**

35-1 La invariancia de las leyes de la física 693 / 35-2 La masa y el ímpetu relativista 696 / 35-3 La energía relativista 704 / 35-4 La equivalencia entre la masa y la energía y los sistemas ligados 709 / 35-5 Cálculos y unidades en la mecánica relativista 712 / ***Resumen 716.***

LOS EFECTOS CUANTICOS: LOS ASPECTOS CORPUSCULARES DE LA RADIACION ELECTROMAGNETICA CAPITULO **36**

36-1 La cuantización en la física clásica 719 / 36-2 El efecto fotoeléctrico 721 / 36-3 Producción de rayos X y Bremsstrahlung 730 / 36-4 El efecto Compton 732 / 36-5 Producción y aniquilamiento de pares 739 / 36-6 Interacciones entre un fotón y un electrón 743 / ***Resumen 745.***

CAPITULO 37

LOS EFECTOS CUANTICOS: LOS ASPECTOS ONDULATORIOS DE LAS PARTICULAS MATERIALES

37-1 Las ondas de De Broglie 751 / 37-2 La ley de Bragg 753 / 37-3 Difracción de rayos X y de electrones 755 / 37-4 El principio de complementariedad 759 / 37-5 La interpretación probabilística de las ondas de De Broglie 762 / 37-6 El principio de incertidumbre 766 / 37-7 La descripción cuántica de una partícula encerrada 775 / ***Resumen 784.***

CAPITULO 38

LA ESTRUCTURA ATOMICA

38-1 La dispersión de las partículas 789 / 38-2 El aspecto del hidrógeno 792 / 38-3 La teoría de Bohr del átomo de hidrógeno 796 / 38-4 Los cuatro números cuánticos de la estructura atómica 804 / 38-5 El principio de exclusión de Pauli y la tabla periódica 809 / ***Resumen 814.***

CAPITULO 39

LA ESTRUCTURA NUCLEAR

39-1 Los constituyentes nucleares 821 / 39-2 La fuerza entre los nucleones 822 / 39-3 El deuterón 824 / 39-4 Núcleos estables 827 / 39-5 La ley de decaimiento radiactivo 831 / 39-6 Los decaimientos α, β, γ, 834 / 39-7 Los aceleradores de partículas de altas energías 844 / 39-8 Las reacciones nucleares 851 / ***Resumen 855.***

CAPITULO 40

LAS PARTICULAS ELEMENTALES

40-1 La interacción electromagnética 862 / 40-2 Otras interacciones fundamentales 868 / 40-3 Las propiedades de las partículas fundamentales 870 / 40-4 Las leyes de conservación universalmente válidas 874 / 40-5 El isoespín, la extrañeza y la paridad 879 / 40-6 Partículas resonantes 884.

APENDICES

I Constantes fundamentales 891 / II Factores de conversión 893 / III Unidades y factores de conversión eléctrica y magnéticas 897 / IV Las masas atómicas 901 / V Relaciones matemáticas 908 / VI Funciones de Trigonometría natural 909 / VII El alfabeto griego 911 / VIII Cálculos de momento de inercia 913.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS IMPARES 917

Indice 925

PREFACIO

La *Física Elemental: Clásica y Moderna* intenta dar primariamente la base para un curso introductorio de física para estudiantes de ciencias e ingeniería, con un fuerte énfasis, no sólo en los principios básicos de la física clásica, sino también en los temas fundamentales de la física moderna. El texto tiene como meta dar una introducción completa a todo el rango de temas esenciales de la física, pero a un nivel realista de sofisticación conceptual y matemática para los estudiantes principiantes en el estudio de la física. Un estudio simultáneo del cálculo elemental será más que suficiente para cualquier aplicación implicada aquí; en efecto, el cálculo elemental se necesita a partir del Cap. 6.

Basándose en el grupo formado por tres volúmenes de los autores, *Física Clásica Elemental,* Vol. 1 y 2, y *Física Moderna Elemental,* este texto da primordial atención a los temas absolutamente centrales. Esto se llevó a cabo, no por haber abreviado el tratamiento de todos los temas que aparecen en los volúmenes originales, sino más bien por haberlos retenido muy intencionalmente de los temas fundamentales de la física clásica y moderna, y tratándolos con tal profundidad que los estudiantes no tienen que olvidarlos en cursos subsecuentes. Los temas menos centrales han sido eliminados. En resumen, no hemos tratado los temas más brevemente para "cubrir" más material; hemos revisado los volúmenes anteriores para obtener una unidad nueva y completa para un curso más breve.

Los capítulos dedicados a la física moderna constituyen aproximadamente una cuarta parte de todo el libro. Reconociendo la necesidad de los futuros científicos y tecnólogos de una introducción temprana a la física contemporánea, también aquí hemos decidido dar un tratamiento razonablemente completo de la teoría de la relatividad especial, de la teoría cuántica, de la estructura

atómica y nuclear, y de las partículas elementales, en lugar de cubrir superficialmente el rango completo de temas que se puede considerar que incluye la física contemporánea. A pesar de que los temas de la denominada física moderna aparecen en los últimos capítulos, se pueden introducir mucho antes, a elección del profesor. Por ejemplo, el Cap. 34 de cinemática relativista se puede tratar después del Cap. 4 y el Cap. 35 de la dinámica relativista, después del Cap. 10. En efecto, nuestra intención al respecto es desarrollar cada tema principal esencialmente completo e independiente de los otros, de tal manera que el orden pueda alterarse permitiendo la flexibilidad para satisfacer las necesidades de ciertos profesores y estudiantes.

La estrategia general al tratar la mecánica clásica ha sido la de dar primordial énfasis a las leyes de conservación. Después de algunos preliminares en vectores y cinemática se introduce la ley de conservación del ímpetu (también llamado momento lineal) antes de las leyes de Newton, un orden que a nuestro parecer y el de numerosos lectores, es lógico y pedagógicamente preferible al orden contrario. Análogamente, el momento angular y su conservación preceden al tema más especializado (y opcional) de la dinámica de la rotación. Otro énfasis general es en el punto de vista atómico y la correlación de la física clásica con sus contrapartes contemporáneas. Los temas especializados tales como la hidrodinámica, la termodinámica formal y las máquinas térmicas y los circuitos a-c se han omitido.

Las características especiales del texto incluyen: un gran número de ejemplos desarrollados completamente, siendo directos pero no triviales; resúmenes sucintos de cada capítulo impresos en color diferente; el uso (casi) exclusivo del Sistema Internacional de Unidades (mksa); y numerosos problemas al final de los capítulos, de los cuales un tercio son nuevos y dan énfasis especial a las aplicaciones de la física a otras áreas relacionadas.

Para escoger el número relativamente limitado de temas centrales que están incluidos en el texto, hemos sido ayudados por las opiniones de muchos profesores de física, así como de sus estudiantes, transmitidas por medio de encuestas hechas por los representantes del editor y del cuerpo editorial. La selección final corresponde fielmente a esta opinión predominante. Las revisiones detalladas del manuscrito hechas por el Profesor Bernard Chasan de la Universidad de Boston, el Profesor Hans Courant de la Universidad de Minnesota, el Profesor F. Alan McDonald de la Universidad Southern Methodist y el Profesor Dan W. Schlitt de la Universidad de Nebraska han sido particularmente útiles. Sin embargo, los autores asumen la responsabilidad de todos los errores de omisión o comisión. Los autores reconocen con gratitud la asistencia y colaboración del Dr. Arthur E. Walters en la preparación de una gran parte del manuscrito revisado, incluyendo la elaboración de nuevos problemas para los capítulos de física

clásica. El coautor de mayor antigüedad fue quien realizó el trabajo de reescribir los capítulos de física moderna.

Los editores y autores solicitan las opiniones sobre este texto de los usuarios, tanto profesores como estudiantes y para su conveniencia se ha añadido al final del libro un cuestionario sencillo.

Richard T. Weidner
Robert L. Sells

Capítulo 1

INTRODUCCION

La física es *la* ciencia experimental fundamental. Su propósito es el de poder entender el comportamiento del universo físico. La física comienza con observaciones o experimentos controlados, en los cuales algún fenómeno es examinado cuantitativamente por medio de medidas. Las relaciones entre las cantidades físicas observadas en la experimentación son formuladas con precisión y economía en el lenguaje de las matemáticas. Cuando una relación resume fielmente numerosos experimentos, pudiéndose decir que refleja un comportamiento universal en la Naturaleza, entonces se dice que es una "ley" de la física. Afortunadamente, las leyes de la física son pocas, y toda la variedad de fenómenos físicos están comprendidos en un número notablemente pequeño de leyes fundamentales.

La teoría y el experimento desempeñan papeles esenciales en el desarrollo de la física. El experimento muestra los hechos de la Naturaleza y la teoría les da sentido. Más aún, la teoría sugiere otros experimentos como prueba de las leyes físicas y el experimento descubre puntos en los cuales la teoría puede ser imperfecta.

La física no se ha completado —y probablemente nunca lo estará. Cuando los físicos contemporáneos examinaron el núcleo del átomo y sus partículas constituyentes, encontraron fenómenos inexplicables por las leyes actuales de la física. Probablemente si conociéramos completamente las partículas "elementales" de la física y las formas en las cuales ellas interaccionan, se podrían explicar todos los fenómenos —la estructura atómica y nuclear, el comportamiento y las propiedades de los materiales ordinarios y aun las colisiones de las galaxias. Pero ese día no ha llegado.

A pesar de que todas las leyes de la física se pueden considerar como incompletas y tentativas en mayor o menor grado, hay un conjunto de conocimientos en física que se puede considerar como esencialmente completo y correcto: éste es el de la *física clásica*. La

llamada física clásica trata del comportamiento de cuerpos de tamaño ordinario (mayor que el del átomo, que es de 10^{-10} m) moviéndose a velocidades mucho menores que la de la luz (3×10^8 m/s). Esta tiene sus orígenes en la mecánica, en los trabajos de Galileo y de Newton. Sus últimos capítulos fueron escritos a finales del siglo XIX, cuando las teorías de la termodinámica y del electromagnetismo alcanzaron su completo desarrollo clásico. Los primeros 33 capítulos del presente texto están dedicados principalmente a la física clásica.

La mecánica clásica y el electromagnetismo se puede decir que son "correctos" porque sus teorías describen adecuadamente el comportamiento de todos los cuerpos de tamaño ordinario. Pero la física clásica falla cuando se aplica a movimientos de objetos de tamaño atómico o nuclear (para los cuales debe usarse la teoría cuántica) o a partículas con velocidades muy altas (para las cuales se aplica la teoría de la relatividad). La física clásica se estudia no sólo porque es correcta en un dominio muy amplio, sino también porque los mismos conceptos y lenguaje aparecen en la física moderna de partículas atómicas con velocidades muy altas.

El término *física moderna* aún se sigue usando para describir la nueva física originada a principios del siglo XX, especialmente a la teoría de la relatividad, a la teoría cuántica y a sus aplicaciones a la estructura del núcleo atómico y a las características de las partículas elementales. La física moderna es el tema de los Cap. 34 al 40.

Como el principal objetivo de este texto es la exposición de los principios fundamentales, se da relativamente menos atención a temas relacionados, como son el desarrollo histórico de la física clásica y de la moderna; el rechazo de teorías alguna vez verosímiles pero inadecuadas; numerosos experimentos cuidadosamente ejecutados para verificar los principios fundamentales de la física, incluyendo el análisis de errores y el tratamiento de datos experimentales; y la influencia de la sociedad en el desarrollo de la física (y viceversa). Todos estos temas son parte importante de la historia de la física. Por supuesto que el estudiante debe experimentar mediante el laboratorio, el hecho es que la física es una ciencia *experimental*. Como en todas las ciencias experimentales, no hay un "método científico" único por el cual se hayan logrado los avances de la física. Experimentos imaginativos, así como pedestres, conjeturas intuitivas y aun atrevidos vuelos de fantasía, análisis matemáticos tediosos y reexaminación radical de presuposiciones aún no probadas, pero aparentemente obvias, todo esto participa en el trabajo científico. Pero los siguientes criterios deben ser satisfechos siempre: Los datos experimentales deben realmente reflejar el comportamiento de los fenómenos naturales, y la estructura teórica debe resumir las observaciones no sólo con la mayor generalidad posible, sino también con mayor simplicidad.

1—1 EVENTOS

El nacimiento de Galileo ocurrió en la latitud 43.7° Norte, longitud 10.4° al este de Greenwich, altitud 1,500 pies sobre el nivel del mar, en el año 1564 d. de C. Para especificar este hecho histórico fueron necesarios cuatro números, tres para su localización en el espacio y uno para su localización en el tiempo. La física clásica también trata de eventos en el espacio y en el tiempo. Un evento en física puede ser simplemente la aparición de una partícula, pero se distingue de un evento histórico en que representa un comportamiento que ilustra las leyes simples y generales de la física.

Un evento en física también está completamente descrito por tres cantidades que dan la localización relativa a un origen arbitrariamente elegido (no necesariamente el centro de la Tierra o la ciudad de Greenwich) y una sola cantidad que da el tiempo relativo a un cero en el tiempo también arbitrariamente escogido. Esto es, los eventos en física, como los eventos ordinarios, se describen en términos de la posición y el tiempo.

1—2 LONGITUD

La determinación de la posición necesita una medición de la longitud, y a su vez una medida de longitud requiere la selección de un patrón de longitud universalmente aceptado, con respecto al cual están relacionadas finalmente todas las medidas de distancia. En el Sistema Internacional de Unidades (abreviado SI) el patrón de longitud es el *metro*. El metro fue escogido inicialmente de tal manera que la distancia del polo norte de la Tierra a su ecuador a lo largo del meridiano que pasa por París midiera 10 000 000 m. Después, el metro se definió como la distancia entre dos marcas finas en una barra de platino iridiado, cuidadosamente conservada. Hoy en día el metro se define en términos de la longitud de onda en el vacío de la radiación naranja-roja, correspondiente a la transición inalterada entre los niveles $2p_{10}$ y $5d_5$ del átomo de criptón 86:

$$1\ \text{m} = 1\,650\,763.73 \text{ veces la longitud de onda de la luz del criptón 86}$$

Un patrón de longitud debe satisfacer los requisitos de ser asequible y de gran precisión y que la influencia de alteraciones tales como cambios de temperatura o de presión sea despreciable. La barra de platino iridiado que fue el patrón de longitud hasta antes de 1960, puede expandirse con un aumento de la temperatura o encogerse al aumentar la presión. Esto da lugar a ambigüedades, junto con la anchura de las marcas y, peor aún, ¡la barra se puede perder o destruir!

La línea espectral del criptón 86 supera ampliamente estas dificultades. La longitud de onda de esta radiación electromagné-

tica es (casi) independiente de cambios externos y depende solamente de la estructura de los átomos del criptón 86, que, por supuesto, es idéntica en todos ellos.

La longitud patrón en el Sistema de Unidades habitual en los E.U.A. (o inglés) es el *pie*. Por definición, el pie es exactamente igual a una tercera parte de la yarda, la que por acuerdo legal, 1 yd = 0.9144 m. Para los factores de conversión entre otras unidades véase el Apéndice II.

La medición de la longitud de un cuerpo consiste, en su forma más sencilla, simplemente en contar las veces que el patrón de longitud —por ejemplo una regla de un metro— está contenido en el objeto que se mide. *Todas* las medidas en física se caracterizan por los mismos pasos: la selección del patrón y el conteo de múltiplos (o submúltiplos) del patrón en la cantidad medida.

1—3 TIEMPO

Al igual que uno puede describir la longitud de un objeto como la que se mide con una regla de un metro, el tiempo se puede definir mejor como la cantidad física que uno lee en un reloj. Pero, ¿qué es un reloj, y, especialmente, cuál es un reloj confiable? Cualquier objeto o conjunto de objetos que muestren un movimiento repetitivo regular se pueden usar como reloj. El latido del corazón y el pulso pueden usarse como un reloj muy rudimentario. Un péndulo o un resorte oscilando son mejores relojes. La rotación de la Tierra alrededor de su eje es aún una mejor base para la medición de intervalos de tiempo. Pero el reloj más preciso es un *reloj atómico*. Efectivamente, el *segundo*, la unidad patrón del tiempo, se define ahora en términos del tiempo de una oscilación en la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental de los átomos de cesio 133:

$$1\ \text{s} = 9\,192\,631\,770 \text{ periodos de radiación del cesio 133}$$

Las ventajas del reloj atómico son su alta precisión (1 parte en 10^{11} o mejor) y la accesibilidad para cualquiera que pueda construir tal reloj.

En la forma que se acaba de definir, el segundo es tal que hay 86 400 $(60 \times 60 \times 24)$ en un día, que es el tiempo que tarda la Tierra en completar una rotación.

Los rangos de las medidas de longitud y de tiempo que se pueden encontrar en las observaciones humanas son: *Longitud:* desde 10^{-15} m, el tamaño del núcleo de un átomo hasta 10^{25} m, el tamaño del Universo. *Tiempo:* desde 10^{-23} s, tiempo nuclear, hasta 10^{17} s, la edad del Universo. El hombre en el espacio y el tiempo parece estar entre los límites microscópico y macroscópico.

1—4 SISTEMAS DE UNIDADES

El Sistema Internacional (o métrico) es el que se usa casi universalmente en trabajos científicos porque es simple. A diferencia del sistema habitual en los Estados Unidos, en el cual varias unidades de longitud están relacionadas una con otra por múltiplos que no son simples (la milla equivale a 5 280 pies, el pie a 12 plg), las unidades métricas siempre se relacionan por múltiplos de 10. Por ejemplo, el kilómetro equivale a 1 000 m.

En la Tabla 1—1 se indican los prefijos que se usan comúnmente al cambiar las unidades por múltiplos de 10.

Tabla 1-1

Prefijo	*Abreviatura*	*Significado*
pico	p	10^{-12}
nano	n	10^{-9}
micro	μ	10^{-6}
mili	m	10^{-3}
centi	c	10^{-2}
deci	d	10^{-1}
kilo	k	10^{3}
mega	M	10^{6}
giga	G	10^{9}
tera	T	10^{12}

Así, 1 km corresponde a mil metros y 1 ns es un billonésimo de segundo.

La longitud y el tiempo, representados por el metro y el segundo, son dos de las tres dimensiones fundamentales de medida. La tercera dimensión fundamental es la masa, para la cual el patrón métrico es el kilogramo. El patrón de masa será estudiado en la Sec. 5—3; aquí solamente aclararemos que *todas* las cantidades físicas en mecánica se pueden expresar en términos de estas cantidades fundamentales e independientes: longitud L, tiempo T y masa M. Esto es, dada una cantidad física, se describe por sus *dimensiones,* simplemente por una combinación de M, L y T. Evidentemente, la distancia tiene dimensiones de longitud L y las dimensiones de la rapidez son la longitud dividida entre el tiempo L/T. Como veremos las dimensiones de la fuerza son ML/T^2 y de la energía son ML^2/T^2

Capítulo 2

VECTORES

Este capítulo trata del álgebra vectorial, un lenguaje matemático sumamente útil para expresar las relaciones en física. Además de definir las relaciones básicas para la suma vectorial y la descomposición de vectores en sus componentes equivalentes, damos la definición del producto escalar (o producto punto) y del producto vectorial (o producto cruz) de dos vectores.*

2—1 VECTORES Y ESCALARES

En la física elemental encontramos dos grupos de cantidades físicas; las *cantidades vectoriales* y las *cantidades escalares* (o más simplemente *vectores* y *escalares*). Una cantidad escalar tiene solamente magnitud y obedece las leyes usuales del álgebra. Son ejemplos de escalares los números puros de la aritmética y las magnitudes físicas tales como de tiempo, de volumen y de masa. Una cantidad escalar de carácter físico se especifica por completo dando un número junto con una unidad apropiada, por ejemplo, 10.4 s, 10^4 m^3, o 9.11×10^{-31} kg.

Por otra parte, una cantidad vectorial tiene tanto (1) dirección y sentido, como (2) magnitud y (3) satisface las leyes del *álgebra vectorial,* que se ha visto que son válidas para los vectores desplazamiento. En este capítulo solamente nos ocuparemos de las propiedades vectoriales del desplazamiento, ya que éste sirve como prototipo de otras magnitudes vectoriales.

2—2 EL DESPLAZAMIENTO COMO UN VECTOR

Considérese la Fig. 2—1, que muestra la posición de un pequeño objeto en un plano en tres tiempos diferentes. Inicialmen-

---

*Los productos punto y cruz se necesitarán hasta las Secs. 9-2 y 11-3, respectivamente, y la discusión sobre ellos puede posponerse hasta que se traten estos temas.

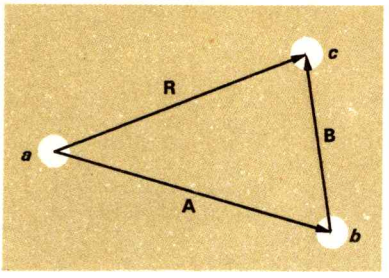


FIG. 2-1. Un objeto en las posiciones *a*, *b* y *c*.

te, el objeto estuvo en el punto *a*, después en *b* y finalmente en *c*. El *desplazamiento* se define como el *cambio* en la *posición* del objeto. Podemos representar el desplazamiento desde *a* hasta *b* por una flecha entre dichos puntos, con su extremo en *b*, indicando así que el desplazamiento fue desde *a* hasta *b*. La longitud del segmento de recta representa, en una escala apropiada, la distancia de *a* a *b*. Nótese especialmente que *no* decimos (ni sabemos) si el objeto viajó a lo largo de la *recta* de *a* a *b* —la trayectoria entre los dos puntos pudo haber sido, de hecho, muy sinuosa; todo lo que sabemos es que *b* fue la *posición* final y *a* la inicial.

Al vector que va desde *a* a *b*, lo representamos con la letra negrilla **A**. Como es difícil escribir letras negrillas en la escritura manual o en el pizarrón, una cantidad vectorial como **A**, se distingue de una cantidad escalar por medio de una flecha colocada arriba de la letra, $\vec{A}$, o usando una raya ondulada abajo de la letra, A, símbolo del impresor para las negrillas. La magnitud del vector **A** es un escalar y se representa por medio de letras delgadas como A o por $\mathbf{A}$. Así, si *b* dista 10 m de *a*, $A = 10$ m.

En la Fig. 2—1 el desplazamiento del punto *b* al punto *c* se escribe **B**, y **R** representa al vector desplazamiento desde *a* hasta *c*. De la geometría de la figura resulta que si un objeto se desplaza de *a* hacia *b* y después de *b* hacia *c*, el desplazamiento total, o *resultante*, es equivalente a un desplazamiento directo de *a* a *c*. Con la notación del álgebra vectorial, podemos escribir la *ecuación vectorial*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{R} \tag{2-1}$$

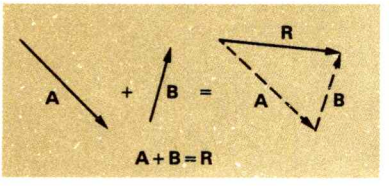


FIG. 2-2. Representación gráfica del vector suma **A** + **B** = **R**.

Esto implica que el desplazamiento **R** sólo da el mismo cambio en la posición de dos desplazamientos consecutivos **A** y **B**. (Véase la Fig. 2—2.)

La Ec. (2—1) representa una clase muy especial del álgebra, el álgebra vectorial, y en ella el signo de más tiene un significado especial. La resultante **R** es el *vector suma* de **A** y **B**. A menos que **A** y **B** tengan la misma dirección y sentido, la ecuación escalar $A + B = R$ *no* es cierta. Efectivamente, si **A** es un vector fijo tanto en magnitud como en dirección y sentido, mientras que **B** tiene solamente magnitud fija, entonces, la *magnitud* de **R** puede tomar cualquier valor desde $A + B$, que es el caso en el que **A** y **B** tienen igual dirección y sentido, hasta $A - B$, que es cuando éstos tienen la misma dirección pero sentidos opuestos.

Enunciaremos nuevamente la definición de vector. *Es una cantidad,* tal como el desplazamiento, *que tiene magnitud, dirección y sentido, que satisface la ley de la suma vectorial, ilustrada en la Fig. 2-2 y representada por la Ec. (2-1).* Recíprocamente, una cantidad que tenga magnitud, dirección y sentido *no* es un vector, *a menos* que satisfaga la ley de la suma de los vectores.

Igualdad de dos vectores. Decimos que dos vectores son iguales cuando tienen la misma magnitud y apuntan en la misma dirección con el mismo sentido, aunque se encuentren en diferentes puntos en el espacio. Recordando que el desplazamiento es el *cambio* en la posición, se sigue que dos desplazamientos cualesquiera, digamos de 10 m hacia el norte, son idénticos aunque tengan diferentes puntos de origen (o puntos de aplicación). Así pues, todos los vectores de la Fig. 2-3, representan, de hecho, a un mismo vector. Esta propiedad es importante, ya que nos permite trasladar a un vector de un punto a otro de un diagrama, sin cambiarlo en forma alguna, siempre y cuando la magnitud, la dirección y el sentido no varíen.

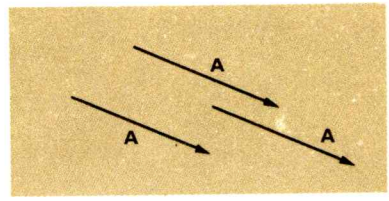


FIG. 2-3. Los tres vectores representan al mismo vector **A**.

Negativo de un vector. Si **A** representa al desplazamiento desde *a* hasta *b*, entonces $-\mathbf{A}$ es el desplazamiento desde *b* hasta *a*. Claramente, $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$, como se muestra en la Fig. 2-4. Los vectores **A** y $-\mathbf{A}$ tienen la misma magnitud y dirección, pero sentido opuesto. Para encontrar el negativo de **A** se invierte el sentido de la punta de la flecha.

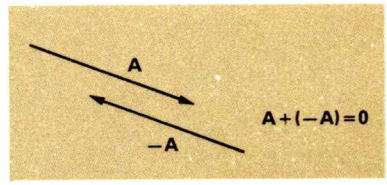


FIG. 2-4. El negativo de un vector se encuentra cambiando solamente el sentido de la punta de la flecha.

Ley conmutativa de la suma vectorial. El vector resultante *R* se puede escribir ya sea como **A** + **B**, o bien, como **B** + **A**. (Véase la Fig. 2-5.) Ya que no importa el orden de los sumandos, podemos sumar **B** a **A**, o **A** a **B** para obtener **R**:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

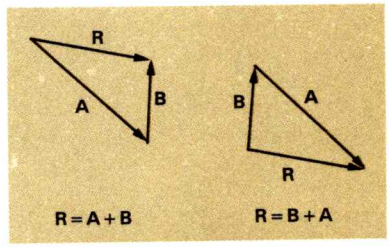


FIG. 2-5. Ilustración de la ley conmutativa de la suma vectorial: **A** + **B** = **B** + **A**.

Ley asociativa de la suma vectorial. El vector suma de tres o más desplazamientos sucesivos no depende del orden que éstos se sumen. Por consiguiente, $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ como se muestra en la Fig. 2-6

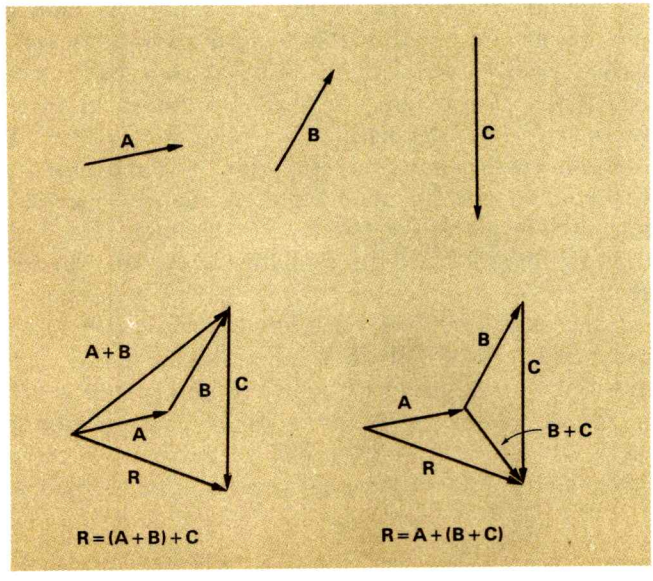


FIG. 2-6. Ilustración de la ley asociativa de la suma vectorial: (**A** + **B**) + **C** = **A** + (**B** + **C**).

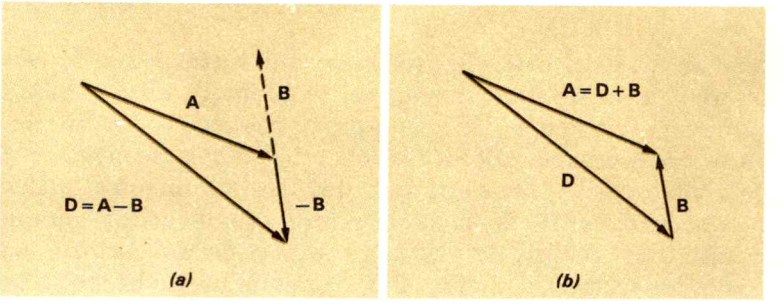


FIG. 2-7. La diferencia vectorial **D** = **A** − **B**: (*a*) sumando −**B** a **A** y (*b*) sumando **D** a **B** para obtener **A**.

Resta de vectores. Para restar **B** de **A**, sumamos **A** con −**B**. El vector diferencia **D** es **D** = **A** − **B** = **A** + (−**B**). (Véase la Fig. 2-7.)

Esto se puede ver en otra forma. Cuando añadimos **B** a ambos lados de **D** = **A** + (−**B**), obtenemos **D** + **B** = **A**. De manera que el vector diferencia **D** entre **A** y **B** es aquel vector que debe ser sumado a **B** para producir **A**.

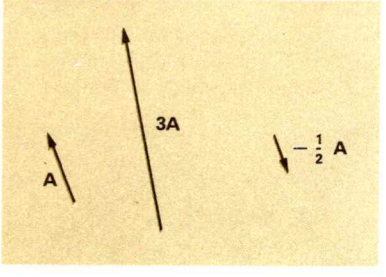


FIG. 2-8. La multiplicación de un vector por un escalar cambia la longitud y/o, el sentido del vector pero no así su dirección.

Multiplicación de un vector por un escalar. El vector 2**A** se define como la suma de **A** con **A**, considerándoseles como dos desplazamientos sucesivos e idénticos, **A** y **A**, produciendo un vector resultante, con la misma dirección que **A** pero con el doble de su magnitud. Así, 2**A** = **A** + **A**.

En general, la multiplicación del vector **A** por un escalar *a*, origina otro vector con la misma dirección y sentido que **A** pero con la magntiud de *s***A**. Si *s* es negativo, el sentido de *s***A** es opuesto al de **A**. (Véase la Fig. 2—8.)

2—3 REPRESENTACION DE VECTORES POR SUS COMPONENTES

Como los vectores tienen una representación geométrica simple, es posible encontrar la magnitud y dirección de la suma de varios vectores simplemente dibujando a los vectores a escala, con la regla y el transportador, dibujando en el extremo del primer vector el origen del siguiente. (Véase la Fig. 2-9.) Sin embargo, el método gráfico para la resolución de los problemas en el álgebra vectorial es con frecuencia inconveniente y de precisión limitada, por lo que es mejor hacer el cálculo de las sumas de vectores usando métodos analíticos basados en las componentes de cada vector.

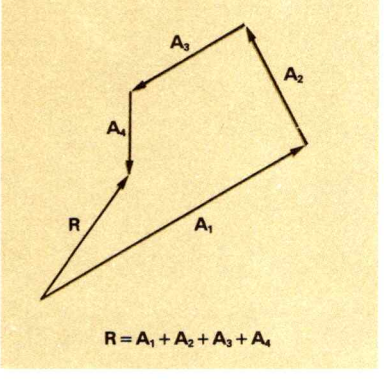


FIG. 2-9. Podemos encontrar gráficamente la resultante R de varios vectores A_1, A_2, A_3 y A_4 al colocar en el extremo de un vector el origen del siguiente.

La componente de un vector **A** con respecto a una recta es la proyección ortogonal de **A** sobre dicha recta. En la Fig. 2-10 se muestra que la componente de **A** con respecto a la recta *p* es el vector $\mathbf{A}_p$ (es decir, $\mathbf{A}_p$ es la proyección ortogonal de **A** sobre la recta *p*). La componente con respecto a la recta *q* es $\mathbf{A}_q$, y la componente con respecto a una recta perpendicular a **A** es cero.

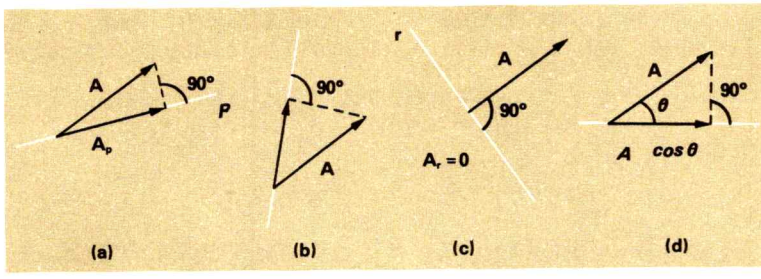


FIG. 2-10. Las componentes del vector A sobre diferentes direcciones: (*a*) sobre la recta *p*; (*b*) sobre la recta *q*; (*c*) sobre la recta *r*, en ángulo recto con A; y (*d*) en general la componente como $A \cos \theta$.

La magnitud de la componente de **A** sobre cualquier recta es **A** cos θ, donde θ es el ángulo entre **A** y la recta escogida.

Si determinamos las componentes de **A** sobre dos direcciones mutuamente perpendiculares, entonces la suma vectorial de estas dos componentes es igual al vector original **A** (Fig. 2-11). Cualquier vector (en el plano) puede entonces ser representado por, o descompuesto en, dos componentes vectoriales mutuamente perpendiculares o rectangulares. Los dos ejes coordenados perpendiculares generalmente se identifican como los ejes X y Y. Por supuesto, la localización del origen y de la orientación de los ejes es arbitraria. Fijando las direcciones positiva y negativa de los ejes coordenados, es posible determinar completamente cualquier vector en un plano, al dar sus componentes X y Y, los signos + o — dan el sentido de las componentes (izquierda o derecha, arriba o abajo). En la Fig. 2-11 el vector **A** tiene las componentes rectangulares

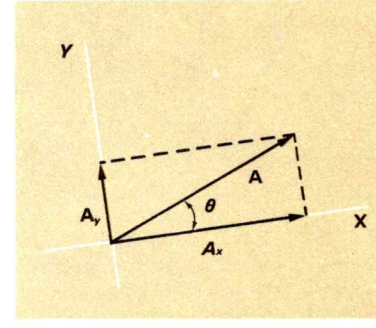


FIG. 2-11. El vector suma de las componentes rectangulares de un vector A es igual a **A**.

$$A_x = A \cos \theta$$
$$A_y = A \operatorname{sen} \theta \qquad (2\text{-}2)$$

donde, usando la convención usual, medimos el ángulo θ en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde la parte positiva del eje X. Inversamente, las dos componentes rectangulares de un vector (en un plano), determinan en forma única al vector. Si conocemos A_x y A_y, entonces sabemos que el vector **A** tiene la

Magnitud dada por: $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

Dirección dada por: $\tan \theta = \dfrac{A_y}{A_x}$ (2-3)

donde θ se mide con respecto al eje X. En resumen, se requieren dos números para especificar al vector **A** en el plano: ya sean A y θ, o A_x y A_y.

Considere el desplazamiento cuya magnitud es de 10.0 m y su dirección es 30° al norte del este. Encuentre las componentes de

este vector a lo largo de las rectas norte-sur y este-oeste.

Identificamos $+X$ como el este, $-X$ como el oeste, $+Y$ como el norte y $-Y$ como el sur. A partir de la ecuación (2—2), tenemos:

$$A_x = A \cos 30° = (10.0 \text{ m})(0.866) = 8.66 \text{ m al este}$$
$$A_y = A \text{ sen } 30° = (10.0 \text{ m})(0.500) = 5.00 \text{ m al norte}$$

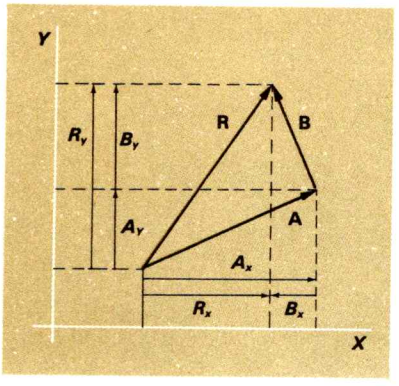


FIG. 2-12. Las componentes rectangulares de la resultante son iguales a las sumas algebraicas de las componentes de los vectores a lo largo del mismo eje: $R_y = A_y + B_y$; $R_x = A_x - B_x$.

2—4 SUMA VECTORIAL POR EL METODO DE LAS COMPONENTES

Las componentes rectangulares son útiles para encontrar la suma de varios vectores. Por ejemplo, considere los dos vectores **A** y **B** de la Fig. 2-12 y su suma **R.**

De la geometría de la Fig. 2-12 vemos que la componente del vector **R** en dirección de cualquier recta es igual a la suma de las componentes de los vectores **A** y **B** a lo largo de la misma recta. A lo largo del eje X: $R_x = A_x + B_x$, a lo largo del eje Y: $R_y = A_y + B_y$ La magnitud y la dirección del vector resultante son entonces:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

El procedimiento general para determinar sumas vectoriales, descomponiendo primero los vectores individuales en componentes rectangulares, es el siguiente:

1. Escoja los ejes coordenados rectangulares convenientemente orientados (la orientación que haga que el mayor número posible de vectores estén a lo largo de X o Y).
2. Descomponga cada vector en sus componentes X y Y.
3. Sume (algebraicamente) las componentes X de cada vector individual para determinar la componente X de la resultante, análogamente para las componentes Y.
4. Encuentre la magnitud y la dirección de la resultante a partir de sus componentes X y Y.
5. Para detectar errores grandes en el cálculo, trace los vectores dibujando en el extremo del primer vector el origen del siguiente, para encontrar la resultante aproximada por construcción geométrica y compare esta resultante con la obtenida analíticamente.

Ejemplo 2-2

Un hombre camina 7.00 km 30° al norte del este, después 3.46 km 60° al norte del oeste, después 3.00 km 30° al sur del oeste y finalmente 2.00 km al sur. Encuentre su distancia total final y la orientación relativa con respecto a su punto de partida.

Estos cuatro desplazamientos y su suma se muestran en la Fig. 2-9. Por conveniencia para encontrar las componentes, hemos puesto los puntos de aplicación de los cuatro desplazamientos en el origen (ver Fig. 2-13*a*). (Recuérdese que cualquier vector puede ser relocalizado sin que su valor se altere, siempre que su magnitud y

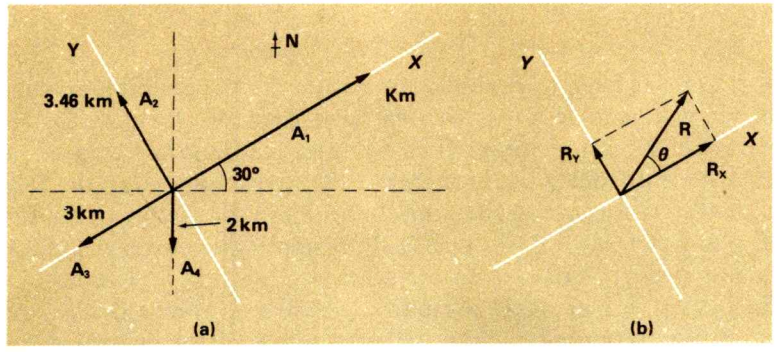


FIG. 2-13. (*a*) Cuatro vectores de desplazamiento cuya resultante se va a determinar. Nótese que las componentes rectangulares se calculan fácilmente al orientar los ejes X y Y como se muestra en la figura. (*b*) La resultante y sus componentes a lo largo de los ejes escogidos X y Y.

dirección no se cambien.) Los cuatro desplazamientos están denotados por $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ y $\mathbf{A}_4$, respectivamente. Por la orientación de los ejes X y Y mostrados en la Fig. 2-13*a* todos los vectores excepto uno están a lo largo de los ejes coordenados.

En seguida determinamos las componentes rectangulares de cada vector. Por ejemplo, las componentes de $\mathbf{A}_4$ (2.00 km al sur) son:

$$A_{4x} = (2.00 \text{ km}) \cos 240° = -(2.00 \text{ km}) \cos 60° = -1.00 \text{ km}$$
$$A_{4y} = (2.00 \text{ km}) \operatorname{sen} 240° = -(2.00 \text{ km}) \operatorname{sen} 60° = -1.73 \text{ km}$$

Las componentes de todos los vectores se indican en la siguiente tabla (esta tabla es una demostración de un método útil para tener la información ordenada).

Vector	*componente X* (en km)	*componente Y* (en km)
$A_1 = 7.00$ km 30°N del E	+7.00	0
$A_2 = 3.46$ km 60°N del O	0	+3.46
$A_3 = 3.00$ km 30°S del O	−3.00	0
$A_4 = 2.00$ km S	−1.00	−1.73
	$R_x = +3.00$ km	$R_y = +1.73$ km

La resultante $\mathbf{R}$ tiene las componentes: $R_x = 3.00$ km, $R_y = 1.73$ km, entonces la magnitud R y la dirección θ de la resultante son:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(3.00)^2 + (1.73)^2} \text{ km} = 3.46 \text{ km}$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{1.73 \text{ km}}{3.00 \text{ km}} = 0.577$$

$$\theta = 30°$$

La resultante es 3.46 km 60° al norte del este o 30° al este del norte, como se muestra en la Fig. 2-13*b*.

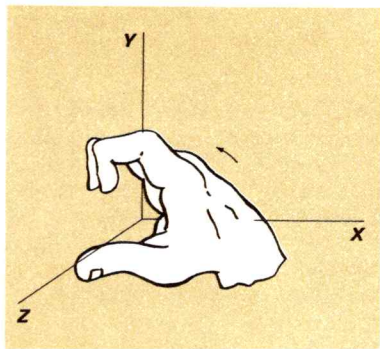


FIG. 2-14. Los ejes X, Y y Z que se muestran, forman un sistema derecho.

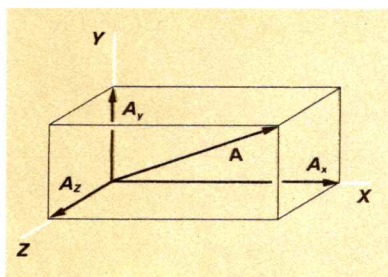


Fig. 2-15. Las componentes rectangulares de un vector en tres dimensiones.

2—5 VECTORES EN TRES DIMENSIONES

Los tres ejes coordenados mutuamente perpendiculares entre sí X, Y y Z que se muestran en la Fig. 2-14, forman un sistema *derecho*. Si uno se imagina que el eje $+X$ se gira hacia el eje $+Y$ en dirección del ángulo menor (90°) con los dedos de la mano *derecha*, la dirección y el sentido del eje $+Z$, que es perpendicular al plano XY, está dado por la dirección y el sentido del pulgar de la mano derecha. Así, en un sistema derecho, si $+X$ es hacia la derecha y $+Y$ es hacia arriba, $+Z$ es hacia afuera del papel.

Las componentes rectangulares de un vector en tres dimensiones son las proyecciones ortogonales de dicho vector sobre los ejes X, Y y Z. Las componentes A_x, A_y y A_z del vector **A** se muestran en la Fig. 2-15. De su geometría se sigue que

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

Por lo tanto, la magnitud de **A** es

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (2\text{-}4)$$

El método analítico para la suma vectorial se extiende con facilidad para el caso de tres dimensiones. Descompóngase cada vector en sus componentes X, Y y Z. En seguida súmense algebraicamente todas las componentes X para obtener la componente X de la resultante, análogamente para Y y Z. Por último, use (2-4) para encontrar la magnitud de la resultante.

A una ecuación *vectorial* tal como

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

le corresponden *tres* ecuaciones *escalares:*

$$R_x = A_x + B_x + C_x$$
$$R_y = A_y + B_y + C_y$$
$$R_z = A_z + B_z + C_z$$

En esto consiste la economía, la generalidad y la elegancia del álgebra vectorial. Una sola ecuación vectorial reemplaza tres ecuaciones escalares. Más aún, la ecuación vectorial expresa una relación que es independiente de la selección particular de los ejes coordenados.

2—6 PRODUCTOS ESCALAR Y VECTORIAL

Además de la multiplicación de un vector por un escalar, hay dos productos importantes entre un par de vectores: el producto escalar (o punto) y el producto vectorial (o cruz). Como veremos, el producto escalar simplifica la definición del trabajo (Sec. 9-2), y el producto vectorial simplifica el tratamiento del momento angular y de la torca (Sec. 11-3).

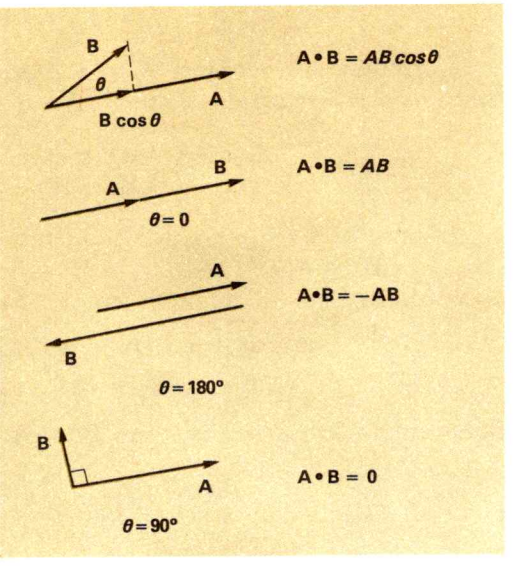


FIG. 2-16. El producto escalar de dos vectores **A** y **B** para varios valores del ángulo θ formado entre ellos.

El Producto Escalar. Considérense dos vectores **A** y **B** que forman un ángulo θ entre ellos. El producto escalar de **A** y **B** se presenta por **A** · **B**. Por definición **A** · **B** es

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \tag{2-5}$$

Esto es, el producto escalar de **A** y **B** es el producto de las magnitudes de **A** y **B** multiplicado por el coseno de θ. Alternativamente, la magnitud de **A** · **B** es la magnitud de **A** multiplicada por la componente de **B** en la dirección de **A**, como en la Fig. 2-16 (o |**B**| multiplicada por la componente de **A** en la dirección de **B**). Las dimensiones de **A** · **B** son el producto de las dimensiones de **A** y **B**. Cuando **A** y **B** son colineales ($\theta = 0°$), se tiene que **A** · **B** = AB. Cuando **A** y **B** son opuestos ($\theta = 180°$), se tiene que **A** · **B** = $-AB$. Cuando **A** y **B** son perpendiculares entre sí ($\theta = 90°$), se tiene que **A** · **B** = 0. (Ver la Fig. 2-16.)

Las *leyes conmutativa y distributiva* del producto escalar se siguen directamente de su definición. Así,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta = BA \cos \theta = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Refiriéndonos a la Fig. 2-17, podemos probar fácilmente la relación distributiva: Si **C** = **A** + **B**, se tiene

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \tag{2-6}$$

porque la componente del vector **C** en la dirección de **D** es la suma de las componentes de los vectores **A** y **B** en la dirección de **D**. Así se satisface la ley distributiva.

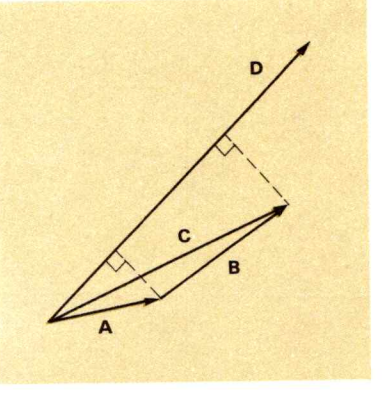


FIG. 2-17. prueba gráfica de la ley distributiva para los productos escalares: **D**·**C** = **D**·(**A** + **B**) = **D**·**A** + **D**·**B**.

Considere los vectores **A** y **B** escritos como la suma de sus componentes vectoriales rectangulares:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z$$

y

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y + \mathbf{B}_z$$

Debido a la perpendicularidad mutua entre los ejes coordenados, $\mathbf{A}_x \cdot \mathbf{B}_x = A_x B_x$; pero $\mathbf{A}_x \cdot \mathbf{B}_y = 0$, y análogamente para las otras combinaciones. Se sigue entonces que:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}_x \cdot \mathbf{B}_x + \mathbf{A}_y \cdot \mathbf{B}_y + \mathbf{A}_z \cdot \mathbf{B}_z$$

o

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{2-7}$$

Como un caso especial, cuando $\mathbf{B} = \mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

o

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$$

El producto vectorial. El producto vectorial de **A** y **B** es otro vector **C** representado por

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{2-8}$$

El producto vectorial **C** es perpendicular al plano que contiene a los vectores **A** y **B**. Por convención, la dirección y el sentido de **C** se toma como la dirección y el sentido del pulgar derecho cuando imaginamos que el vector **A** gira con los dedos de la mano derecha hacia el segundo vector **B** en la dirección del ángulo menor formado entre **A** y **B** para alinearlo con el segundo vector **B**. (Ver Fig. 2-18.)

La magnitud de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ está dada por

$$C = AB \operatorname{sen} \theta \tag{2-9}$$

donde θ es el ángulo entre **A** y **B**. Si **A** y **B** son los lados de un paralelogramo, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es un vector normal al plano del paralelogramo, cuya magnitud es igual al área del paralelogramo.

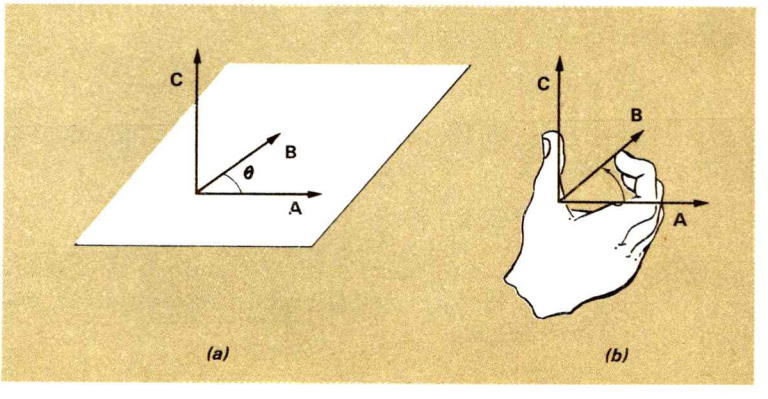


FIG. 2-18. (*a*) el producto vectorial $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y (*b*) la regla de la mano derecha para los productos vectoriales.

Es importante el orden en el cual los dos vectores están escritos en un producto vectorial, ya que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$. El producto vectorial *no* satisface la ley conmutativa. En efecto, si se intercambia el orden de los vectores, también cambia la dirección y el sentido de su producto vectorial. Por lo tanto,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Sin embargo, la ley distributiva sí se satisface para el producto vectorial:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{D} + \mathbf{E}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

Si los vectores **A** y **B** son paralelos o antiparalelos, el ángulo entre ellos es de 0° o 180°, respectivamente, entonces $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$, puesto que el factor sen θ es cero. Así, $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$.

Los productos escalar y vectorial deben distinguirse cuidadosamente. El producto vectorial es un vector; el producto escalar es un escalar. El producto vectorial no satisface la ley conmutativa mientras que el producto escalar sí. El producto vectorial es cero cuando los dos vectores son paralelos, el producto escalar es cero cuando los vectores son perpendiculares.

PROBLEMAS

2-1. El desplazamiento **D** es de 12 m hacia el norte. ¿Cuáles son (*a*) $-\mathbf{D}$, (*b*) $\mathbf{D}/2$ y (*c*) $-\mathbf{D}/3$?

2-2. Partiendo del punto *A*, un individuo camina 5.0 cuadras hacia el este y después 15.0 cuadras hacia el sur, llegando al punto *B*. ¿Cuál es el desplazamiento (en cuadras) del punto *B* relativo al punto *A*, y del punto *A* relativo a *B*?

2-3. El vector **A** es un desplazamiento de 60.0 m a 210°. ¿Cuáles son las componentes *X* y *Y* de (*a*) **A**, (*b*) $-\mathbf{A}/3$ y (*c*) $-3\mathbf{A}$?

2-4. Los vectores **A** y **B** tienen magnitudes de 12 y 5 m, respectivamente. ¿Cómo deben estar orientados para dar una resultante de (*a*) 7 m, (*b*) 12 m, (*c*) 13 m, (*d*) 17 m?

2-5. Un objeto se desplaza 12 m hacia abajo de la parte superior de un plano inclinado que tiene 60° de inclinación con respecto a la horizontal. ¿Cuáles son las componentes de dicho desplazamiento (*a*) a lo largo del plano inclinado y (*b*) con respecto a la perpendicular al plano?

2-6. Encuentre (*a*) el vector suma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, (*b*) el vector diferencia $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, de los vectores $\mathbf{A} = 15.0$ mi al sudeste y $\mathbf{B} = 25.0$ mi a 60° al norte del oeste.

2-7. Ecuentre la resultante de los siguientes desplazamientos: 4.0 m a 30° al norte del este, 5.0 m a 60° al oeste del norte y 6.0 m al sudeste.

2-8. Encuentre el vector suma de los siguientes desplazamientos: 50 mi a 37.1° al este del norte, 60 mi a 30° al norte del oeste y 30 mi al sur.

2-9. El vector **A** es de 5.0 m a 45°, **B** es de 10 m a 60°, **C** de 15.0 m a 270° y $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} = 0$. ¿Cuál es **D**?

2-10. El vector **A** forma un ángulo θ con el vector **B**. Demuestre que la magnitud de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es $(A^2 + B^2 + 2AB \cos\theta)^{1/2}$.

2-11. Suponga que $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, donde **C** es de 5.0 mi al noreste y **B** es de 8.0 mi al oeste. Encuentre a **A**.

2-12. Determine a *A* y *B* dados los siguientes datos: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$; **A** señala a 30° al este del norte, **B** está dirigido al noroeste, y **C** es de 12.0 m al norte.

2-13. ¿Cuáles deben ser las orientaciones relativas de **A** y **B** si la magnitud de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es igual a la magnitud de $\mathbf{A} - \mathbf{B}$?

2-14. Las componentes rectangulares de un vector con respecto a los ejes *X* y *Y* son *x* y *y*, respectivamente. Otro sistema de ejes mutuamente perpendiculares,

X' y Y', tiene su origen en el origen de X y Y; pero el eje X' forma un ángulo θ con respecto al eje X. (*a*) Demuestre que las componentes x' y y' a lo largo de X' y Y' están dadas por $x' = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta$ y $y' = y \cos x - x \operatorname{sen} \theta$ respectivamente. (Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones de transformación de coordenadas para rotación pura.) (*b*) Compruebe que la magnitud de un vector es independiente del sistema coordenado que se use, demostrando que $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$.

2-15. El vector **A** = 5 unidades al este y el **B** = 10 unidades a 37.1° al norte del este. (*a*) Determine **A**·**B**. (*b*) ¿Cuál es la magnitud de un vector con dirección 30° al norte del este que también da el mismo producto escalar con el vector **A**?

2-16. Considere los tres vectores **A** = 15 unidades al norte, **B** = 10 unidades a 30° al este del norte y **C** = 5 unidades al este. Determine (*a*) **A**(**B** · **C**), (*b*) **C**(**B** · **A**).

2-17. Obtenga la ley de los cosenos para triángulos oblicuángulos a partir de las reglas que gobiernan el producto escalar. (Sugerencia: Tome el vector **C** = **A** + **B** y use los resultados del problema 2-10.)

2-18. El vector **A** es de 20 plg en la dirección oeste. El vector **B** es de 30 plg en la dirección sudeste. ¿Cuáles son las magnitudes y direcciones de (*a*) **A** × **B**, (*b*) **B** × **A**?

2-19. Los vectores **A** y **B** representan los lados de un paralelogramo. Demuestre que la magnitud de **A** × **B** es el área del paralelogramo y que la dirección de **A** × **B** es paralela a la normal del plano del paralelogramo.

2-20. El vector **A** es de 3 unidades hacia arriba, el **B** tiene magnitud de 5, y el producto escalar **A** · **B** es cero. ¿Cuáles son las direcciones posibles (!) y la magnitud de **A** × **B**?

2-21. El vector **A** es de 5 unidades al sur y el **B** es de 10 unidades a 30° al oeste del norte. ¿Cuáles son (*a*) **A** · **B** y (*b*) **A** × **B**?

2-22. El vector **A** es de 7 en la dirección $+X$; el **B** es de 3 en la dirección $-Y$. ¿Cuáles son (*a*) **A** · **B** y (*b*) **A** × **B**?

2-23. Dados $C = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 7.5$, $D = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = 13.0$ y $A = 1.5$, determinar B.

2-24. Demuestre que **A** × **B** · **C** representa el volumen de un paralelepípedo con lados **A**, **B** y **C** y que, por lo tanto, **A** × **B** · **C** = **A** · **B** × **C**.

Capítulo

3

LA CINEMATICA EN LA RECTA

La dinámica se ocupa del movimiento de los objetos y de su relación con los conceptos físicos de masa, fuerza, ímpetu y energía, y con las leyes generales que unifican estos conceptos. Por otra parte, la cinemática tiene un programa más modesto. Combinando las ideas de la geometría y del tiempo, describe el movimiento sin prestar atención a lo que lo causa. Así, la cinemática es un preliminar necesario para el estudio de la dinámica y de la investigación de las leyes físicas. En este capítulo estudiaremos la cinemática de una partícula moviéndose sobre una recta (en una dimensión), el significado de los términos desplazamiento, velocidad y aceleración y las relaciones matemáticas que se usan en el caso especial del movimiento con aceleración constante.

3—1 EL SIGNIFICADO DE UNA PARTICULA

¿Qué es una partícula? No es necesariamente una esfera dura, pequeña, como se imagina comúnmente; más bien, podemos considerar una partícula simplemente como un objeto que es lo suficientemente pequeño para que su tamaño no tenga importancia en la escala de nuestras observaciones. No tiene estructura interna que nos interese. Así, una estrella puede considerarse apropiadamente como una partícula cuando la consideramos como parte de una galaxia; pero un átomo es muy grande para considerarlo como una partícula, cuando examinamos sus componentes. Todo es cuestión de escala. La partícula es la contraparte física del punto en matemáticas; no sólo tiene la propiedad de localización precisa, sino que también tiene propiedades físicas como son la masa y la carga eléctrica.

3—2 VELOCIDAD PROMEDIO

En este capítulo restringiremos nuestra discusión a una partícula en *movimiento rectilíneo,* movimiento a lo largo de una línea recta. Una línea recta puede ser definida como la trayectoria de un

rayo de luz a través del vacío. La localización de la partícula a lo largo de la línea recta, llamada aquí el eje X, está indicada por la coordenada x, con alguna unidad de longitud apropiada. Las posiciones a la derecha o a la izquierda del origen se distinguen por el signo algebraico de x.

El *desplazamiento* de la partícula se define como el *cambio de posición* (para una dimensión, el cambio en su coordenada). El desplazamiento lo representaremos por el símbolo Δx (donde el símbolo delta significa "el cambio en"). Si x_i es la coordenada inicial y x_f la coordenada final después de cierto tiempo, entonces

$$\Delta x = x_f - x_i \tag{3-1}$$

Claramente se ve que el signo de Δx denota el sentido en el cual la partícula cambia de posición a lo largo del eje; cuando $x_f > x_i$, Δx es positiva para un desplazamiento hacia la derecha, y viceversa. El desplazamiento se debe distinguir de la distancia recorrida, o sea, de la longitud total de la trayectoria trazada por la partícula, la cual es siempre positiva. Una partícula que efectúa un viaje redondo hacia el punto de origen tiene un desplazamiento nulo, aunque haya recorrido una distancia finita.

Consideremos la Fig. 3-1 en la cual la coordenada x de alguna partícula en movimiento se grafica como función del tiempo t para cada posición de la partícula. (Por ejemplo, esta clase de datos puede obtenerse de películas de cine, en las cuales cada cuadro muestra un evento en la historia de la partícula, o de una fotografía estroboscópica con imágenes múltiples que dan la posición de la partícula a intervalos iguales de tiempo.)

La *velocidad promedio* $\bar{v}$ se define como el desplazamiento que experimenta una partícula *dividido entre el tiempo* transcurrido

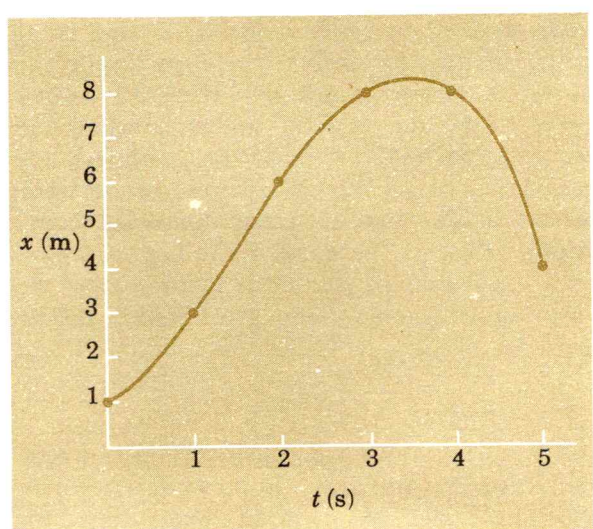


FIG. 3-1. El desplazamiento x de una partícula, graficado como una función del tiempo t.

para este desplazamiento. En símbolos

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{3-2}$$

donde $\Delta t = t_f - t_i$ y $\Delta x = x_f - x_i$. A partir de su definición, la velocidad tiene dimensiones de longitud dividida entre tiempo (L/T), por ejemplo, m/s, mi/h o año luz/año.

Aplicando esta definición a los datos de la Fig. 3-1, calculamos la velocidad promedio para cierto número de intervalos de tiempo: Para $t_i = 1$ s y $t_f = 2$ s:

$$\bar{v}_{12} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{(6-3)\text{ m}}{(2-1)\text{ s}} = 3\text{ m/s}$$

Para $t_i = 2$ s y $t_f = 4$ s:

$$\bar{v}_{24} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{(8-6)\text{ m}}{(4-2)\text{ s}} = 1\text{ m/s}$$

Para $t_i = 3$ s y $t_f = 4$ s:

$$\bar{v}_{34} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{(8-8)\text{ m}}{(4-3)\text{ s}} = 0\text{ m/s}$$

Y para $t_i = 4$ s y $t_f = 5$ s:

$$\bar{v}_{45} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{(4-8)\text{ m}}{(5-4)\text{ s}} = -4\text{ m/s}$$

Para los datos de la Fig. 3-1, el valor de la velocidad promedio depende claramente del intervalo de tiempo escogido: $\bar{v}_{12}$ es positiva, $\bar{v}_{24}$ tiene una magnitud positiva menor (una velocidad promedio menor en este intervalo), $\bar{v}_{34}$ es 0 (no hay desplazamiento en este intervalo) y $\bar{v}_{45}$ es negativa (movimiento hacia el origen). Unicamente si la gráfica desplazamiento-tiempo consiste en una simple línea recta, la velocidad promedio tendrá la misma magnitud para todas las parejas posibles de puntos en la línea; es entonces cuando tenemos velocidad constante (uniforme).

3—3 VELOCIDAD INSTANTANEA

La pendiente de cualquier recta es el cambio de la ordenada (aquí Δx) entre el correspondiente cambio de la abscisa (aquí Δt). Para la recta desplazamiento-tiempo, la *pendiente* $\Delta x/\Delta t$ es la *velocidad promedio* sobre el intervalo escogido Δt. Una recta horizontal, con pendiente cero, indica el reposo; las pendientes

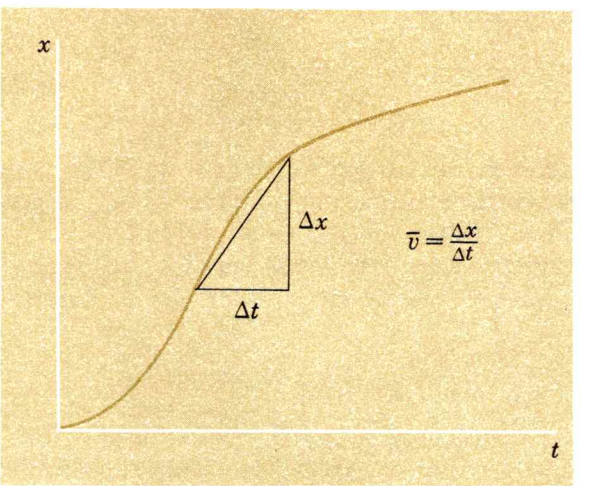


FIG. 3-2. Gráfica de desplazamiento-tiempo. La velocidad promedio durante el intervalo de tiempo mostrado es $\bar{v} = \Delta x/\Delta t$.

positivas o negativas implican movimiento alejándose o acercándose al origen de las coordenadas respectivamente (para valores positivos de x).

El movimiento mostrado en la Fig. 3-2, es el de un objeto que se mueve primero lentamente, después aumenta su velocidad y finalmente va frenando. En la Fig. 3-2 cualquier pareja de puntos puede dar valores diferentes para $\bar{v}$. Para caracterizar la velocidad con mayor precisión necesitamos la *velocidad instantánea,* la velocidad en un instante, que tomaremos como la *velocidad promedio durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño.*

El cálculo de la velocidad instantánea se ilustra en la Fig. 3-3, el intervalo escogido para Δt es tan pequeño que la curva no se puede distinguir de la línea recta que une a los dos puntos extremos. Ya que una recta dibujada tangente a la curva desplazamiento-tiempo será idéntica a la curva sobre una pequeña región en el punto de contacto, la velocidad instantánea es la pendiente de la tangente a la curva. En términos formales: La velocidad instantánea v en el tiempo t es el límite del desplazamiento Δt dividido entre el intervalo de tiempo Δx correspondiente, cuando el intervalo de tiempo Δt, tiende a cero, el intervalo Δt está centrado en t. En símbolos,

$$\text{Velocidad instantánea} = v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (3\text{-}3)$$

En la notación del cálculo* $v = dx/dt$, la derivada de x con respecto a t o a razón de cambio del tiempo del desplazamiento.

*A pesar de que para definir la velocidad y la aceleración instantáneas se usa la notación del cálculo, en el texto el cálculo no se requiere de ninguna manera esencial sino hasta el Cap. 6.

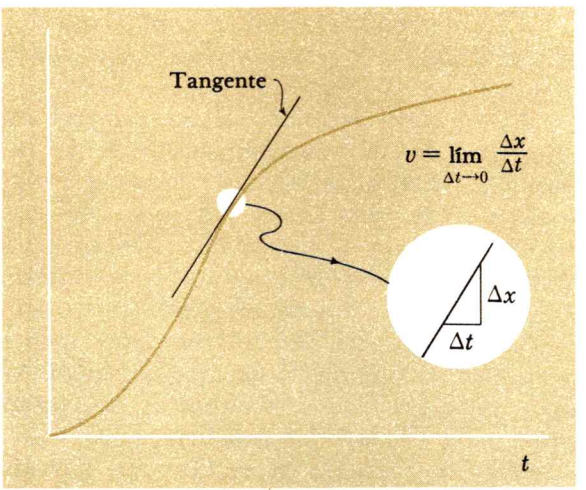


FIG. 3-3. La velocidad instantánea es la tangente en la gráfica desplazamiento-tiempo, la cual es el límite de la velocidad promedio para un pequeño intervalo de tiempo.

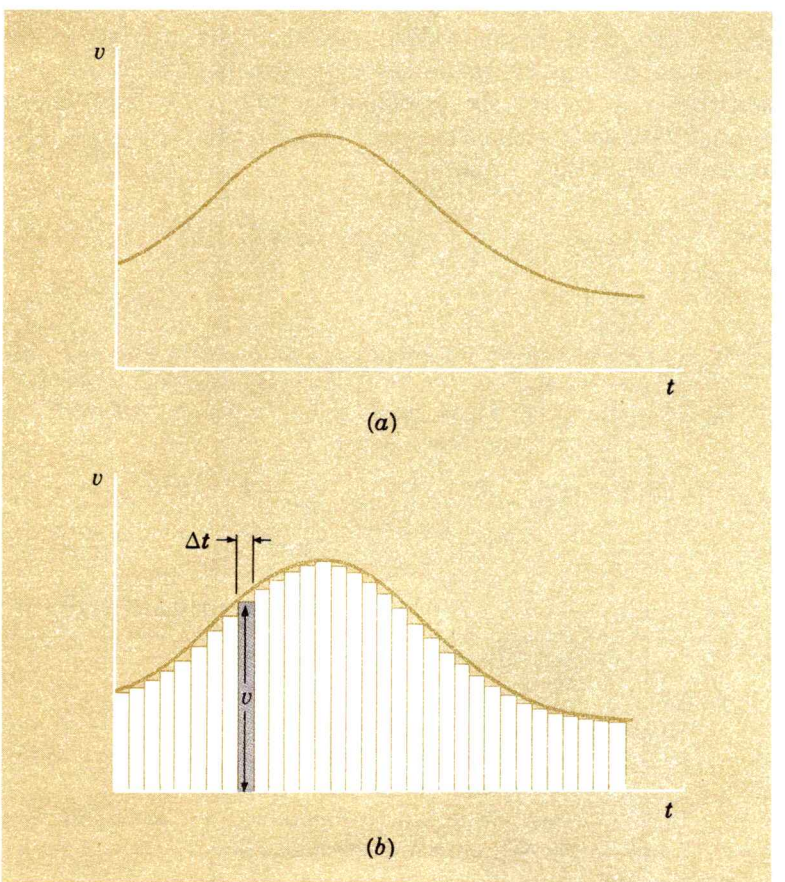


FIG. 3-4. (*a*) Velocidad instantánea de la función del tiempo. (*b*) El desplazamiento es igual al área bajo la curva en la gráfica de velocidad-tiempo.

En lo sucesivo, el símbolo v representará la velocidad instantánea y lo mismo el término velocidad, a menos que se especifique otra cosa.

El término *rapidez instantánea* se usa para designar la magnitud de la velocidad instantánea; la rapidez es siempre positiva. Además, velocidad indica la dirección del movimiento (positivo si es hacia la derecha, negativo si es hacia la izquierda). La Fig. 3-4*a* da la velocidad instantánea como una función del tiempo. Se obtuvo de la curva desplazamiento-tiempo de la Fig. 3-3 por el método de tomar pendientes.

Una curva de velocidad-tiempo se puede obtener de la pendiente de una curva de desplazamiento-tiempo; inversamente, uno puede llegar a una curva de desplazamiento-tiempo dando primero la curva velocidad-tiempo. Considere la Fig. 3-4*b*. Un número considerable de rectángulos angostos, cada uno con el ancho Δt, se ajustan bajo la curva. Durante un pequeño intervalo de tiempo Δt, la velocidad puede considerarse esencialmente constante. El desplazamiento Δx correpondiente es $v\,\Delta t$ que es, como se ve en la figura, el área del rectángulo sombreado. Entonces, si se quiere encontrar el desplazamiento total x (desde el comienzo hasta el tiempo t), sumamos todos los rectángulos elementales, lo que quiere decir que el desplazamiento es igual al área total bajo la curva de velocidad-tiempo. Si la velocidad es negativa y la curva de velocidad-tiempo está bajo el eje del tiempo, la contribución del área "bajo" la curva es negativa. En el lenguaje del cálculo integral,

$$x_f - x_i = \lim_{\Delta t \to 0} \Sigma v\,\Delta t = \int_{t_i}^{t_f} v\,dt$$

Ejemplo 3-1

El desplazamiento de un objeto está dado como una función del tiempo por la relación $x = 4t^3$. Calcule la velocidad promedio con las siguientes condiciones: (*a*) $\Delta t = 2$ y centrado en $t = 3$, y (*b*) $\Delta t = 0.2$ y también centrado en $t = 3$.

(*a*) $x_i = 4(2)^3 = 32$ y $x_f = 4(4)^3 = 256$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{256 - 32}{2} = 112$$

(*b*) $x_i = 4(2.9)^3 = 97.556$ y $x_f = 4(3.1)^3 = 119.164$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{119.164 - 97.556}{0.2} = 108.04$$

Tomando Δt, aún menor, encontraremos que la velocidad promedio se aproxima mucho a 108.000 . . .; esto es, la velocidad instantánea en $t = 3$ es exactamente $v = 108$.

El mismo resultado se obtiene tomando la derivada con respecto al tiempo de $x = 4t^3$, para encontrar la relación para la velocidad instantánea:

$$v = \frac{dx}{dt} = 12t^2 = 12(3)^2 = 108$$

3—4 ACELERACION

La velocidad instantánea es la rapidez de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo. Indica cómo cambia el desplazamiento al transcurrir el tiempo. Otra cantidad muy útil nos indica cómo cambia la velocidad con el tiempo. Esta cantidad, la *aceleración,* es la rapidez de cambio de la velocidad en el tiempo. La aceleración promedio $\bar{a}$ se define como el cambio de velocidad Δv dividido entre el intervalo de tiempo Δt transcurrido:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{3-4}$$

Así, la aceleración promedio es la pendiente de la línea recta dibujada entre dos puntos de una curva de velocidad-tiempo. La *aceleración instantánea* a es la aceleración promedio en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño (véase la Fig. 3-5). De modo equivalente, a es la pendiente de la curva velocidad-tiempo En símbolos:

$$\text{Aceleración instantánea} \quad = a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{3-5}$$

De aquí en adelante "aceleración" significará aceleración instantánea.

La aceleración tiene las unidades de la velocidad divididas entre las de tiempo. Sus dimensiones son longitud/tiempo^2, (L/T^2),

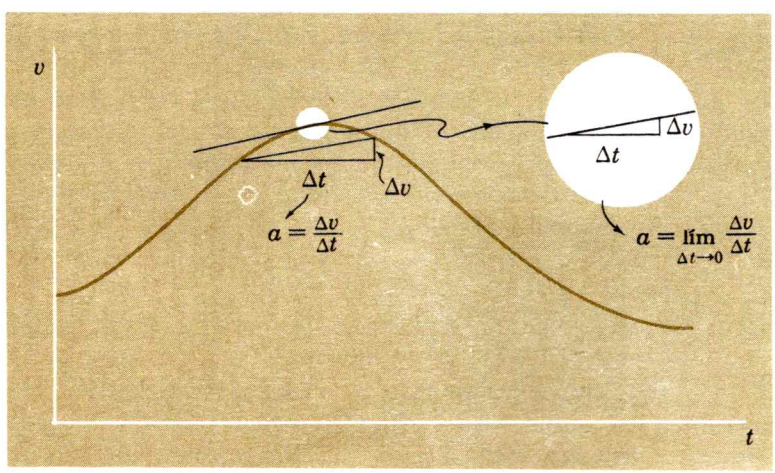


FIG. 3-5. La aceleración instantánea es la tangente de la gráfica velocidad-tiempo, o sea, el límite de la aceleración promedio para un intervalo de tiempo extraordinariamente pequeño.

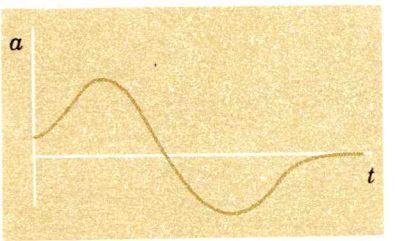


FIG. 3-6. La aceleración instantánea como una función del tiempo.

por ejemplo mi/(h)(s), m/(s)(s), nudo/s. Se acostumbra escribir a m/(s)(s) en la forma m/s^2. Asi, un cuerpo que tenga una aceleración constante de $+10$ m/s^2 tiene un aumento en su velocidad de 10 m/s durante cada intervalo de 1 s.

La Fig. 3-6 es una gráfica de la aceleración instantánea como una función del tiempo, derivada de la curva de velocidad-tiempo de las Figs. 3-4 o 3-5. Al principio la aceleración es positiva, después cero, en seguida negativa y finalmente cero de nuevo. Así, la Fig. 3-6 indica que, respectivamente, la velocidad del cuerpo hacia la derecha primero aumenta, después momentáneamente no cambia, en seguida la velocidad hacia la derecha disminuye y finalmente la velocidad fue constante.

El procedimiento que hemos seguido de definir la velocidad como la rapidez de cambio en el tiempo del desplazamiento y a la aceleración como la rapidez de cambio de la velocidad, podría extenderse a otra cantidad que diera la rapidez de cambio de la aceleración (que correspondería a la medida de la "sacudida" del movimiento); pero esto no es necesario habitualmente. Los conceptos de velocidad y aceleración son suficientes para describir el movimiento adecuadamente. Las razones para ello se basan en la física, o la dinámica, del movimiento, no en las matemáticas o la cinemática del movimiento —como veremos después.

Como otro ejemplo, considérense las curvas de desplazamiento-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo indicadas en la Fig. 3-7. La partícula se encontraba primero en reposo en la región A, después acelerada (positivamente) en la región B. Se deslizó con velocidad constante durante C. En la región D el cuerpo disminuyó su velocidad, llegó al reposo momentáneamente e invirtió el sentido de su movimiento. En la región E el cuerpo se movió con rapidez constante hacia la izquierda, aproximándose a y al fin pasando su punto de partida. Este es el movimiento familiar ejemplificado por un objeto puesto en movimiento por un empujón hacia la derecha y después empujando hacia la izquierda. Nótese, sin embargo, que en la cinemática no tenemos nada que ver con las causas del movimiento, sino sólo con su descripción.

La velocidad es la pendiente de la curva de desplazamiento-tiempo y la aceleración es la pendiente de la curva de velocidad-tiempo. Recíprocamente, el desplazamiento es el área bajo la curva velocidad-tiempo y la velocidad es el área bajo la curva aceleración-tiempo.

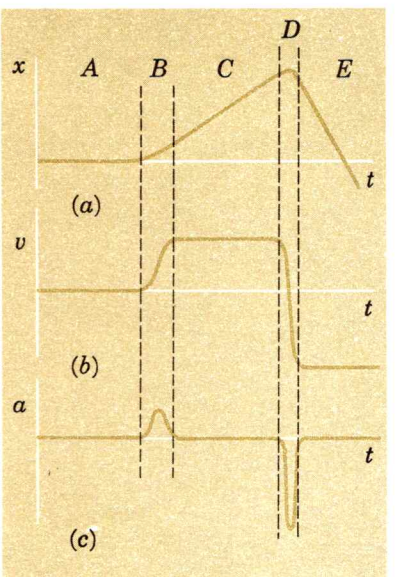


Fig. 3-7. (*a*) Gráfica de desplazamiento-tiempo. (*b*) Gráfica de velocidad-tiempo derivada de (*a*). (*c*) Gráfica de aceleración-tiempo derivada de (*b*). (Nótese que la aceleración no es constante en el tiempo.)

3—5 MOVIMIENTO RECTILINEO CON ACELERACION CONSTANTE

Un tipo simple, especial, pero importante, del movimiento rectilíneo es aquel en el que la aceleración es constante, o uniforme. Por supuesto, si la aceleración se mantiene con un valor

constante de *cero,* la partícula tiene una *velocidad constante:* o se mueve con velocidad invariable en línea recta o permanece en reposo.

Considérese la Fig. 3-8, una gráfica de velocidad-tiempo, con la aceleración constante a. Aquí la pendiente no cambia. La velocidad aumenta cantidades iguales en tiempos iguales, el cambio de la velocidad es proporcional al intervalo de tiempo. Identificamos la velocidad cuando $t = 0$ como la *velocidad inicial* v_0. La velocidad en cualquier tiempo t es simplemente v.

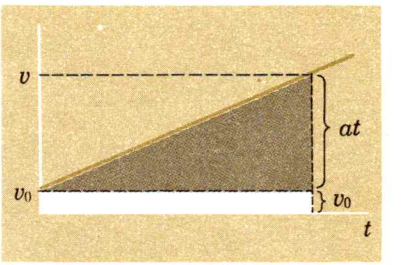


FIG. 3-8. Gráfica de velocidad-tiempo para aceleración constante.

Debido a que la aceleración se considera como constante, la aceleración promedio en cualquier intervalo de tiempo y la aceleración instantánea son iguales. Podemos escoger cualesquiera dos puntos de la curva de velocidad-tiempo para determinar la pendiente, o sea la aceleración. Por conveniencia, escogemos el intervalo de tiempo que va del tiempo 0 al tiempo t, durante el cual la velocidad cambia de v_0 a v. Así,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0}$$

o

$$v = v_0 + at \tag{3-6}$$

La ecuación (3-6) da la velocidad en el tiempo t en términos de la velocidad inicial, la aceleración y el tiempo transcurrido. La velocidad final v corresponde a dos partes: la velocidad inicial v_0 y el cambio de velocidad at, como se muestra en la Fig. 3-8.

Expresemos el desplazamiento x en términos del tiempo t y las constantes v_0 y a. Determinamos el desplazamiento a partir de la curva velocidad-tiempo, calculando el área bajo ella. Se ve claramente que el área total bajo la línea recta en la Fig. 3-8 es un rectángulo que tiene el largo t y la altura v_0 más un triángulo rectángulo con los lados t y at. Así, el desplazamiento x es la suma de v_0t más $\frac{1}{2}(at)(t)$, o

$$x = x_0 + v_0t + \tfrac{1}{2}at^2 \tag{3-7}$$

donde el término adicional x_0 es el desplazamiento para $t = 0$, esto es $x = x_0$ cuando $t = 0$. El hecho de tomar que el desplazamiento inicial es x_0, nos lleva a las situaciones en las que las partículas no parten del origen. Los términos en (3-7) tienen una interpretación muy simple: El primero da el desplazamiento inicial, el siguiente el desplazamiento que tendría lugar si la velocidad fuera constante v_0 y el tercero el desplazamiento adicional que resulta de la aceleración.

La Fig. 3-9 es una curva de desplazamiento-tiempo para aceleración constante. La Ec. (3-7) indica que es una parábola. La pendiente aumenta uniformemente, correspondiendo a la aceleración constante.

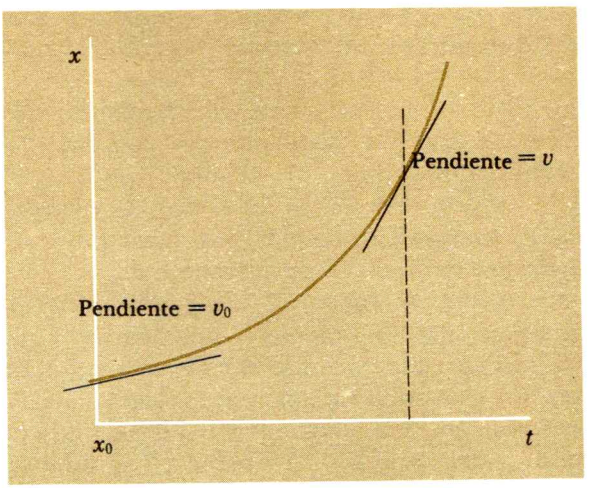


FIG. 3-9. Gráfica de desplazamiento-tiempo para aceleración constante.

Las fórmulas cinemáticas (3-6) y (3-7) permiten proyectar la historia futura (y pasada) de una partícula; esto es, dan el desplazamiento y la velocidad para cualquier tiempo futuro cuando se conocen el desplazamiento inicial x_0, la velocidad inicial v_0 y la aceleración constante a.

Podemos llegar a otra fórmula cinemática muy útil, aplicable únicamente *para aceleración constante,* si observamos que la velocidad promedio $\bar{v}$, definida como el desplazamiento total dividido entre el tiempo transcurrido, es simplemente la media (algebraica) de las velocidades inicial y final:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \tag{3-8}$$

Esto se deduce del hecho de que el área del trapezoide que se encuentra bajo la curva de velocidad-tiempo (el desplazamiento) es idéntica al área del rectángulo bajo la curva de velocidad-tiempo para la velocidad constante igual a $\bar{v}$, como se da por (3-8). (Véase la Fig. 3-10.) Como el desplazamiento neto $x - x_0 = \bar{v}t$,

$$x = x_0 + \frac{v_0 + v}{2} t \tag{3-9}$$

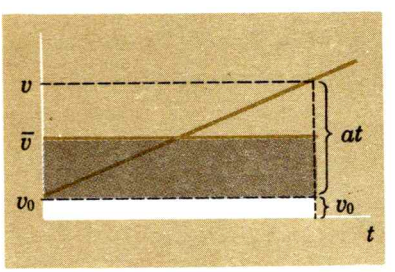


FIG. 3-10. Gráfica para la aceleración constante. El área bajo la velocidad promedio $\bar{v}$ contra el tiempo es igual al área bajo el trapezoide en la Fig. 3-8.

Una cuarta fórmula cinemática se obtiene fácilmente despejando a t en (3-6) y sustituyendo el valor obtenido en (3-9):

$$x - x_0 = \frac{(v + v_0)(v - v_0)}{2a}$$

Reacomodando los términos se tiene

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{3-10}$$

Estas cuatro fórmulas cinemáticas (3-6), (3-7), (3-9) y (3-10) relacionan seis cantidades: las constantes x_0, v_0 y a y las variables x, v y t. La Ec. (3-6) contiene v_0, v, a y t, pero no a x. Similarmente, (3-7), (3-9) y (3-10) no contienen a v, a y t, respectivamente. Estas relaciones pueden usarse para resolver todos los problemas en los que intervienen movimientos con aceleración constante a lo largo de una recta. Ellas no hacen sino expresar en lenguaje matemático las consecuencias lógicas y algebraicas de las definiciones de la velocidad y de la aceleración constante.

Las relaciones cinemáticas para la aceleración constante se verifican fácilmente por el cálculo diferencial*

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

$$a = \frac{dv}{dt} = a$$

Recíprocamente, por la integración podemos obtener las fórmulas de velocidad-tiempo y desplazamiento-tiempo directamente de las definiciones.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

o

$$dv = a\,dt$$

Integramos la velocidad desde el valor inicial v_0 al final v, los límites correspondientes en el tiempo son cero y t:

$$\int_{v_0}^{v} dv = a\int_0^t dt$$

$$v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at \qquad (3\text{-}6)$$

Integramos de nuevo para determinar x:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

o

$$dx = v_0\,dt + at\,dt$$

El desplazamiento va de x_0 cuando $t = 0$ a x en el tiempo t. Así, la integral definida es

$$\int_{x_0}^{x} dx = v_0\int_0^t dt + a\int_0^t t\,dt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad (3\text{-}7)$$

*En realidad no se necesita el cálculo en esta etapa de nuestro estudio.

Nótese que las constancias consideradas de v_0 y a fueron una parte esencial del análisis.

Ejemplo 3-2

Un automóvil parte del reposo y recorre 100 m en 10 s. (*a*) ¿Cuál es la aceleración, suponiendo que ésta es constante? (*b*) ¿Cuál es la velocidad final del automóvil?

(*a*) Conocemos x_0 (tomado como cero), v_0, x y t y se tiene que determinar a. La ecuación utilizable aquí es

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2}at^2 \quad \text{porque } x_0 = 0 \quad \text{y} \quad v_0 = 0$$

despejando a a tenemos

$$a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \times 100 \text{ m}}{(10 \text{ s})^2} = 2.0 \text{ m/s}^2$$

(*b*) Vamos ahora a calcular v, conociendo v_0, a y t. La Ec. (3-6) $v = v_0 + at$ se puede usar:

$$v = 0 + (2.0 \text{ m/s}^2)\,(10 \text{ s}) = 20 \text{ m/s}$$

o, si queremos convertir las unidades a millas por hora

$$v = \frac{20 \text{ m}}{\text{s}} \times \frac{3.28 \text{ pie}}{\text{m}} \times \frac{1 \text{ mi}}{5\,280 \text{ pie}} \times \frac{3{,}600 \text{ s}}{\text{h}} = 45 \text{ mi/h}$$

Nótense dos puntos, ilustrados en este ejemplo y aplicables a todos los problemas de cinemática — aún más, aplicables a todos los problemas de física:

1. Se despeja algebraicamente la incógnita *antes* de sustituir por valores numéricos a los símbolos.
2. Las unidades se manejan con los números y se tratan algebraicamente. Una prueba necesaria (aunque no suficiente) de que la solución es correcta, es que siempre las dimensiones son apropiadas. En *física* todas las fórmulas deben ser dimensionalmente homogéneas; esto es, todos sus términos deben tener las mismas dimensiones. Por ejemplo, los términos $x, x_0, v_0 t$ y $\frac{1}{2}at^2$ en la ecuación $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ deben tener las mismas *unidades;* por ejemplo, las longitudes deben estar todas en metros. Por supuesto, ninguna respuesta es completa si no se especifican las unidades.

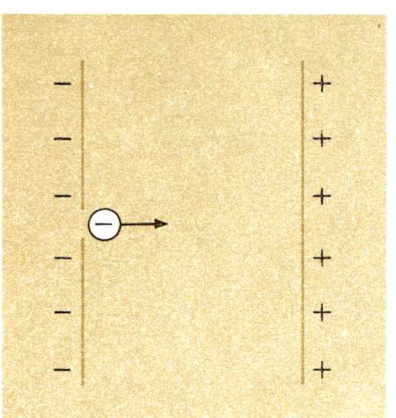


FIG. 3-11. Un electrón se mueve con aceleración constante entre dos placas paralelas cargadas con cargas opuestas.

Ejemplo 3-3

Un electrón se mueve a 4.0×10^6 m/s hacia la derecha entrando a la región que hay entre dos placas metálicas verticales, paralelas, cargadas eléctricamente y separadas por 2.0 cm; véase la Fig. 3-11. Dentro de esta región el electrón se mueve con una aceleración constante de 7.9×10^{14} m/s^2 hacia la derecha. (El electrón tiene una carga eléctrica negativa: las placas de la izquierda y la derecha tienen cargas menos y más, respectivamente, debido a su conexión a las terminales de la batería. Aquí la aceleración constante se debe

a las cargas eléctricas.) (*a*) ¿Con qué velocidad chocará el electrón con la placa de la derecha? (*b*) ¿Cuánto tardará en llegar a dicha placa?

(*a*) Sabemos que $v_0 = 4.0 \times 10^6$ m/s y que $a = 7.9 \times 10^{14}$ m/s^2; tratamos de encontrar el valor de v cuando $x - x_0 = 2.0 \times 10^{-2}$ m. Se puede usar la Ec. (3-10), $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$,

$$v^2 = (4.0 \times 10^6 \text{ m/s})^2 + 2(7.9 \times 10^{14} \text{ m/s}^2)(2.0 \times 10^{-2} \text{ m})$$
$$v = 6.9 \times 10^6 \text{ m/s}$$

(*b*) Calcularemos t a partir de la Ec. (3-9), $x - x_0 = (v_0 + v)t/2$, conociendo v_0, v y $x - x_0$:

$$t = \frac{2(x - x_0)}{v_0 + v} = \frac{2(2.0 \times 10^{-2} \text{ m})}{(4.0 + 6.9) \times 10^6 \text{ m/s}} = 3.7 \times 10^{-9} \text{ s}$$

El electrón se mueve con una aceleración extraordinariamente grande, pero sólo en un tiempo muy corto.

3—6 CAIDA LIBRE DE LOS CUERPOS

Cerca de la superficie de la Tierra, los cuerpos que caen libremente tienen una aceleración hacia el centro de ella de magnitud casi constante. Los cuerpos que "caen" no sólo son aquellos que parten del reposo, sino también los objetos que se arrojan (cerca de la superficie de la Tierra). En realidad un cuerpo cae *libremente* sólo cuando se mueve en el vacío, pero para velocidades relativamente bajas y para cuerpos lisos, compactos y densos, la resistencia del aire es despreciable y su movimiento corresponde aproximadamente a la caída libre. Así, los paracaidistas que descienden, los pájaros en vuelo y las hojas secas de los árboles al caer, no se pueden considerar como cuerpos que caen libremente. Si no se indica lo contrario, de aquí en adelante ignoraremos los efectos de la resistencia del aire.

La aceleración de los cuerpos que caen libremente no depende de su masa ni de su peso. Los experimentos demuestran que una manzana, un neutrón (una partícula eléctricamente neutra muy pequeña, que tiene la masa de sólo 1.7×10^{-27} kg), o cualquier otro objeto que se encuentre cerca de la superficie de la Tierra caen con una aceleración constante de 9.80 m/s^2 o 32.2 pie/s^2. Esta aceleración tiene un papel tan importante en la física que se designa con el símbolo especial g y recibe el nombre de *aceleración de la gravedad* (*no* como "gravedad" y menos aún como "fuerza de la gravedad"). La forma en la que g se relaciona con el fenómeno general de la gravitación se considerará después; aquí sólo trataremos cinemáticamente a los cuerpos que caen*.

*Los descubrimientos fundamentales, teóricos y experimentales, relacionados con el movimiento de los cuerpos que caen y la cinemática del movimiento acelerado, fueron hechos por Galileo Galilei (1564-1642), el primer físico de la era moderna y uno de los físicos más prominentes de todos los tiempos. Las contribuciones de Galileo a la ciencia se esquematizan en el Cap. 5.

Debemos restringir un poco algunas de nuestras aseveraciones. Estrictamente, g no es constante. El valor de g difiere (en menos de 0.4 %) en los diferentes lugares de la superficie de la Tierra. Además, g disminuye al aumentar la distancia al centro de la Tierra (la Luna "cae" alrededor de la Tierra, pero con una aceleración de sólo 2.7×10^{-3} m/s^2). Para altitudes hasta de 40 mi sobre el nivel del mar, g es constante dentro del 2 %.

El movimiento de los cuerpos que caen es una de las pocas situaciones físicas en que se trata de movimientos con aceleración constante (otro ejemplo es el de una partícula cargada que se mueve entre dos placas metálicas y paralelas, que se encuentran cargadas de electricidad).

Ejemplo 3-4

Un objeto se arroja verticalmente hacia arriba a 30 m/s. (*a*) ¿Cuál es su desplazamiento después de 4.0 s? (*b*) ¿Cuál es su velocidad después de 4.0 s? (*c*) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza? (*d*) ¿Qué tiempo tarda el objeto en regresar al piso? (*e*) ¿Cuál es la velocidad con que choca con el piso?

Aquí se aplican las relaciones cinemáticas obtenidas para la aceleración constante. Como la dirección del movimiento es a lo largo de la vertical, es más apropiado designar al desplazamiento por y en lugar de por x, con el sentido positivo del eje Y verticalmente hacia arriba. Entonces $a = -g$. Para simplificar el cálculo, tomamos $g = 10$ m/s^2 y $y_0 = 0$.

(*a*) Sabemos que $v_0 = +30$ m/s y que $a = -10$ m/s^2; vamos a determinar y para $t = 4.0$ s. La Ec. (3-7) $y - y_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, se convierte en

$$y = (30 \text{ m/s})(4.0 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-10 \text{ m/s}^2)(4.0 \text{ s})^2 = +40 \text{ m}$$

(*b*) ¿Cuánto vale v después de 4.0 s?. Aquí se puede usar la Ec. (3-6), $v = v_0 + at$:

$$v = (30 \text{ m/s}) + (-10 \text{ m/s}^2)(4.0 \text{ s}) = -10 \text{ m/s}$$

Cuatro segundos después de que el objeto se arroja, se encuentra a 40 m sobre el piso y se mueve hacia abajo con una velocidad instantánea de 10 m/s. Sin embargo, la *distancia* total recorrida *no* es de 40 m.

(*c*) A su altura máxima, donde el objeto cambia el sentido de su movimiento, su velocidad es de cero (¡aunque la aceleración sigue siendo de g!). Por lo que, nosotros queremos saber y cuando $v = 0$, usando la Ec. (3-10), $v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$,

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (30 \text{ m/s})^2}{2(-10 \text{ m/s}^2)} = +45 \text{ m}$$

(*d*) El desplazamiento y es cero cuando el objeto choca con el piso (la magnitud de la *distancia* total del recorrido es el doble de la altura máxima). Queremos encontrar el correspondiente tiempo de

vuelo. Usando la Ec. (3-7) $y - y_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, para determinar t para $y = 0$, tenemos:

$$0 = (v_0 + \tfrac{1}{2}at)t$$

$$t = 0 \quad \text{o} \quad t = -\frac{2v_0}{a} = -\frac{2(30\ \text{m/s})}{(-10\ \text{m/s}^2)}$$

$$t = 0 \quad \text{o} \quad t = 6.0\ \text{s}$$

El tiempo de vuelo es de 6.0 s.

(*e*) La velocidad media $\bar{v}$ dèl movimiento total es cero, al mismo tiempo que el desplazamiento total y es nulo. Por lo que la Ec. (3-8) $\bar{v} = (v_0 + v)/2$, da

$$v = 2\bar{v} - v_0 = 0 - 30\ \text{m/s} = -30\ \text{m/s}$$

[Alternativamente, podemos determinar v para $t = 6.0$s usando (3-6).] El cuerpo choca con el piso con la misma rapidez con que se arroja. El movimiento total es, de hecho, simétrico en el tiempo con respecto al tiempo medio. Indicándolo diferencialmente, es el mismo movimiento que si el tiempo corriera hacia atrás; no podemos distinguir en las películas cinematográficas de objetos que se arrojan, si la película se mueve hacia adelante o hacia atrás.

Las gráficas de desplazamiento-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo de la Fig. 3-12, exhiben toda la información que hemos encontrado (y aún más). Nótese que el desplazamiento es nulo para 6.0 s, como se indica no sólo en la gráfica de desplazamiento-tiempo, sino también en las áreas netas sombreadas, en la gráfica de velocidad-tiempo.

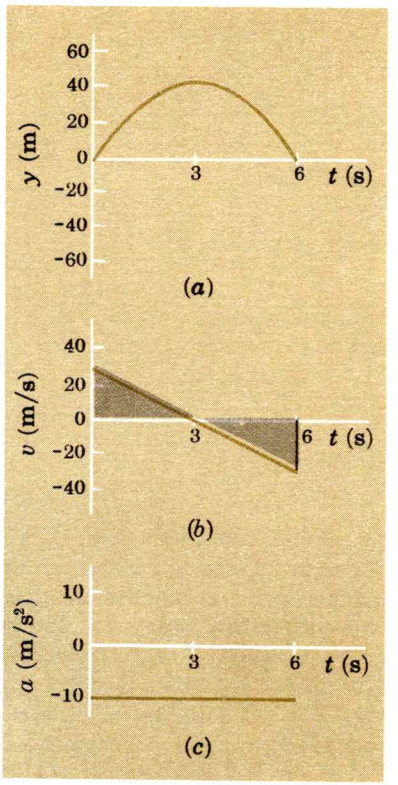


FIG. 3-12. (*a*) Desplazamiento-tiempo, (*b*) velocidad-tiempo, y (*c*) aceleración-tiempo, para un proyectil arrojado verticalmente hacia arriba a 30 m/s.

RESUMEN

Para movimiento rectilíneo a lo largo de x, la velocidad instantánea v es la rapidez de cambio del desplazamiento:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (3\text{-}3)$$

La aceleración instantánea a es la rapidez de cambio de la velocidad con el tiempo:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad (3\text{-}5)$$

Las relaciones cinemáticas que describen el movimiento rectilíneo con aceleración *constante* a son:

$$v = v_0 + at \tag{3-6}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \tag{3-7}$$

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t \tag{3-9}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{3-10}$$

donde x es el desplazamiento y v es la velocidad en el tiempo t, siendo x, x_0 y v, v_0 cuando $t = 0$.

Todos los cuerpos que caen libremente cerca de la superficie de la Tierra tienen la aceleración constante hacia abajo de $g = 9.80$ m/s^2.

PROBLEMAS

3-1. En la Olimpiada de 1972 el tiempo del triunfador en la carrera de 1 500 m fue de 3 min 36.3 s. ¿Cuál fue la velocidad promedio (*a*) en m/s y (*b*) en mi/h? (*c*) Suponiendo la misma velocidad promedio, ¿qué tiempo transcurrirá para que se recorra una milla?

3-2. Usando la gráfica de desplazamiento-tiempo de la Fig. P3-2, calcule las siguientes cantidades: (*a*) La velocidad promedio $\bar{v}_{01}$ (desde $t = 0$ a $t = 1$s), (*b*) $\bar{v}_{12}$, (*c*) $\bar{v}_{23}$, (*d*) $\bar{v}_{34}$, (*e*) $\bar{v}_{45}$, (*f*) $\bar{v}_{03}$, (*g*) $\bar{v}_{35}$, (*h*) $\bar{v}_{05}$. Grafique la velocidad como una función del tiempo.

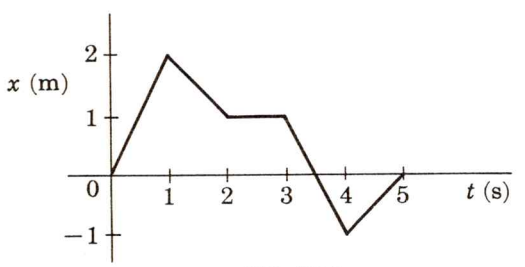


FIG. P3-2

3-3. Un automóvil se mueve hacia el este a 80 km/h durante 1 h, se detiene 15 min, en seguida se mueve al oeste a 120 km/h hasta el punto de partida. Para el viaje completo, ¿cuánto valen (*a*) la velocidad promedio, (*b*) la rapidez promedio y (*c*) la distancia recorrida? (*d*) Si el tiempo de parada se extendiera a 30 min, ¿con qué rapidez tendría que regresar el chofer para lograr la misma rapidez media en todo el recorrido?

3-4. Un automóvil se mueve hacia el este con la rapidez constante de 20 m/s e inmediatamente que llega a un punto a la distancia d, regresa con la rapidez constante de 50 m/s. ¿Cuáles son (*a*) la velocidad media y (*b*) la rapidez media, ambas sobre el viaje completo? (¡Ninguna de las dos es de 35 m/s!)

3-5. Un automóvil de carreras impulsado por cohete llega a la rapidez de 900 km/h después de haberse movido 1 200 m desde su punto de partida. Suponiendo que la aceleración es constante, determine (*a*) la aceleración y (*b*) el tiempo transcurrido.

3-6. Una partícula tiene la velocidad inicial de -60 m/s. Su aceleración constante es de 4.0 m/s^2. (*a*) ¿Cuáles son el desplazamiento del cuerpo y la velocidad a $t = 2.0$ s? (*b*) ¿Cuáles son el desplazamiento del cuerpo y la velocidad a $t = 5.0$ s? (*c*) ¿En qué tiempo la velocidad del cuerpo es cero? (*d*) ¿Qué tiempo tomará al cuerpo para alcanzar el desplazamiento cero? (*e*) ¿En qué tiempo la velocidad será de -20 m/s?

3-7. En un tubo de imágenes típico para televisión de colores, los electrones se mueven 40 cm desde la pistola de electrones hasta la pantalla, chocando con ella con la rapidez de 8.0×10^7 m/s. (*a*) ¿Cuál es la aceleración de los electrones, suponiendo que es constante? (*b*) ¿Qué tiempo toma a los electrones el moverse a lo largo de esos 40 cm si parten del reposo?

3-8. Partiendo del reposo un objeto aumenta su rapidez de 40 m/s a 50 m/s, sobre una distancia de 90 m. Si la aceleración es constante en todo el recorrido, ¿qué distancia se recorre antes de alcanzar los 20 m/s?

3-9. Un automóvil que se mueve a 60 m/s puede desacelerarse a 5 m/s^2. (*a*) ¿Qué tiempo tarda en detenerse? (*b*) ¿Qué tanto se mueve, suponiendo que la aceleración permanece constante?

3-10. Las siguientes relaciones dan el desplazamiento x de un cuerpo como una función del tiempo t; los otros símbolos representan a constantes. Encuentre la velocidad y la aceleración en cada instante como una función del tiempo tomando derivadas y dé las dimensiones apropiadas para las constantes: (*a*) $x = At^4$, (*b*) $x = B \operatorname{sen} Ct^2$, (*c*) $x = De^{-kt}$, (*d*) $x = Et + Ft^2 + Gt^3$.

3-11. Las siguientes relaciones dan la aceleración a de un cuerpo como una función del tiempo t; los otros símbolos representan constantes. Suponiendo que $x_0 = 0$ y que $v = v_0$ cuando $t = 0$. Encuentre la velocidad y el desplazamiento en cada caso como una función del tiempo, integrando y dando las dimensiones apropiadas a las constantes: (*a*) $a = -At^2$, (*b*) $a = B \cos Ct$, (*c*) $a = D + Et^3$.

3-12. Dibuje las gráficas aproximadas de velocidad-tiempo y aceleración-tiempo correspondientes a los movimientos considerados en las gráficas de desplazamiento-tiempo de la Fig. P3-12.

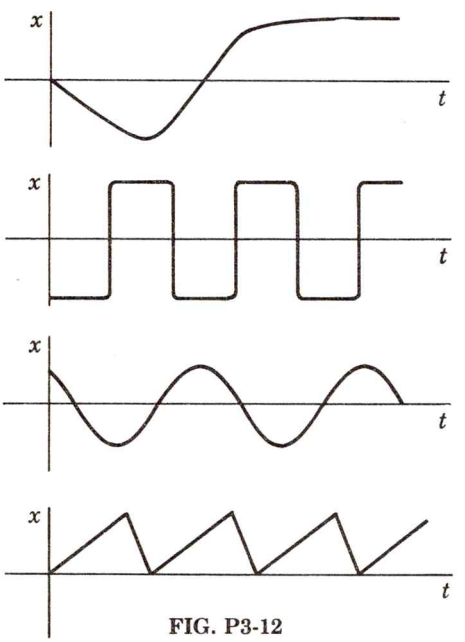
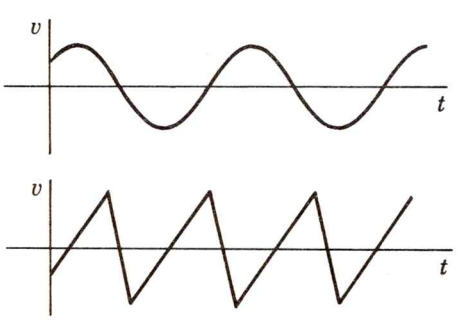


FIG. P3-12

3-13. Dibuje las gráficas aproximadas de desplazamiento-tiempo y aceleración-tiempo que corresponden a los movimientos representados en las gráficas de velocidad-tiempo de la Fig. P3-13.



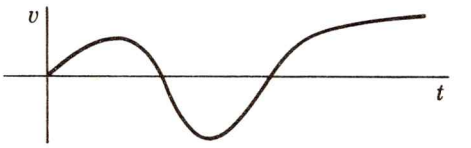


FIG. P3-13

3-14. La Fig. P3-14 muestra la aceleración graficada como una función del tiempo. Dibújese (*a*) la velocidad y (*b*) el desplazamiento como unas funciones del tiempo, suponiendo que $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$.

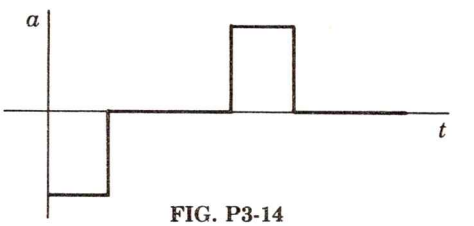


FIG. P3-14

3-15. Dos automóviles se mueven a 90 km/h en la misma dirección y directamente uno detrás del otro. El chofer del automóvil delantero aplica bruscamente los frenos desacelerando a 7.5 m/s^2. El otro aplica los frenos después de un retraso de 0.40 s, y su automóvil baja su velocidad con una rapidez de 6.0 m/s^2. (Sus llantas estaban desgastadas.) Si no debe haber un choque, ¿cuál es la mínima separación entre los automóviles en el instante en que se aplican los frenos del automóvil delantero? Dibuje una gráfica del cuadrado de la rapidez vs. distancia para cada vehículo.

3-16. Una pelota que se mueve verticalmente choca con el piso con la rapidez de 15 m/s y rebota a 9 m/s. La duración de su contacto con el piso es de 1.0×10^{-2} s. Suponiendo que su aceleración es constante mientras se encuentra en contacto con el piso, ¿cuál es la dirección, sentido y magnitud de la aceleración de la pelota?

3-17. Un camión se movía a 120 km/h acercándose a un automóvil que se trasladaba en la misma dirección a 90 km/h. (*a*) Encuentre cuál debe ser la separación mínima entre los dos vehículos en el instante en que se apliquen los frenos del camión para que no se produzca el choque, suponiendo que el camión puede bajar su velocidad con la rapidez de 6.0 m/s^2 y que la velocidad del automóvil no cambia. (*b*) Encuentre la mínima separación que debe haber en el momento en que el chofer del camión se da cuenta del peligro, si su tiempo de reacción es de 0.30 s. (*c*) Dibuje una gráfica que muestre los hechos en esta situación.

3-18. Suponga que un cañón antiaéreo dispara una granada verticalmente hacia arriba con la velocidad en la boca de 1 000 m/s. (*a*) ¿Con qué distancia debe "adelantarse el artillero a un avión de reacción que se mueve horizontalmente a 2 400 km/h y a una altura de 500 m? (*b*) ¿Cuál es el ángulo formado por la visual al avión y la vertical en el instante del disparo?

3-19. Demuestre que la siguiente aseveración de Galileo es correcta, tomada de *Two New Sciences* (1683) « ...por lo que yo conozco, ninguno había puesto de manifiesto que las distancias recorridas en iguales intervalos de tiempo por un cuerpo que cae desde el reposo, están en la misma relación que los números impares comenzando por la unidad".

3-20. Experimentalmente se ha encontrado que el tiempo que tarda un electrón que parte del reposo en la placa de la izquierda (Fig. 3-11) para llegar a la placa de la derecha varía inversamente con la raíz cuadrada del número de baterías (en serie) conectadas a las placas metálicas paralelas. ¿En qué forma depende la aceleración de un electrón que se encuentra en la región que hay entre las placas, del número de baterías?

3-21. Una niña arroja una pelota hacia arriba. Choca con el piso 3.0 s después. (*a*) ¿Con qué velocidad se arrojó la pelota? (*b*) ¿Hasta qué altura llegó?

3-22. Una pelota *A* se arroja verticalmente hacia arriba con la rapidez de 15 m/s. Dos segundos después otra pelota *B* se proyecta hacia arriba con una velocidad de 30 m/s. ¿Cuándo y donde chocarán estas dos pelotas? Supóngase que $g = 10$ m/s^2.

3-23. Un individuo suelta una pelota de béisbol desde la ventana de un edificio alto y luego, 1.00 s después lanza otra pelota de béisbol verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 13.0 m/s. (*a*) ¿Qué tiempo después de que se arrojó la segunda pelota alcanza ésta a la primera? (*b*) ¿A qué distancia hacia abajo? (Supóngase que las pelotas no chocan.)

3-24. Un automóvil parte del reposo con la aceleración constante de 1.20 m/s^2 en el momento en que la luz del semáforo pasó a verde. En el mismo momento un camión que se mueve con la velocidad constante de 30 m/s se encuentra a 45 m del mismo semáforo. (*a*) ¿Se emparejarán el automóvil y el camión? (*b*) Si esto sucede, ¿dónde y cuándo? (*c*) Dibuje la gráfica de desplazamiento-tiempo para ambos vehículos en el mismo diagrama.

3-25. Un elevador que tiene 3.0 m desde el piso hasta el techo asciende con la velocidad constante de 1.5 m/s. Se suelta un objeto del techo y cae hasta el piso. ¿Qué tiempo tardará el objeto en chocar con el piso? (Resuelva este problema desde dos puntos de vista, de un observador en reposo en el edificio y el de un observador que se mueve con el elevador.)

3-26. Un globo asciende a 8 m/s. Suelta un saco de arena cuando el globo se encuentra a 40 m sobre el piso. (*a*) ¿Qué tiempo tarda el saco de arena en chocar con el piso? (*b*) ¿Qué velocidad tiene entonces?

3-27. Varias piedras se amarran a una cuerda de tal manera que la distancia entre piedras adyacentes aumente en una proporción constante de un par de piedras al siguiente. La cuerda se cuelga desde el extremo donde las piedras están más separadas y de tal manera que la piedra mas baja toque el piso. Demuestre que si se suelta la cuerda del reposo, las piedras chocan con el piso a intervalos de tiempo igualmente espaciados.

3-28. Un habitante de un edificio de departamentos vio que una maceta (originalmente colocada en una ventana superior), pasaba la ventana de 2.0 m de altura de su departamento del quinto piso en 0.12 s. Si la distancia entre los pisos es de 4.0 m, ¿de qué piso provenía la maceta?

Capítulo

4

CINEMATICA EN DOS DIMENSIONES

En este capítulo consideramos la cinemática de una partícula moviéndose en un plano. Encontraremos que la velocidad y la aceleración son cantidades vectoriales. Se tratan analíticamente los casos especiales del movimiento con aceleración constante y el movimiento circular uniforme.

4—1 VELOCIDAD Y ACELERACION COMO CANTIDADES VECTORIALES

Considere la fotografía de multidestello simulada de la Fig. 4-1. La posición de un pequeño objeto relativa a algún origen arbitrario, que aquí se escogió como el punto de partida a, se especifica por el vector de desplazamiento $\mathbf{r}$. Si designamos el desplazamiento del punto g al punto k por $\Delta\mathbf{r}$, entonces, como se ve en la fig. 4-1,

$$\mathbf{r}_g + \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_k$$

(Note que $\Delta\mathbf{r}$ *no* depende del origen escogido para los vectores $\mathbf{r}_g$ y $\mathbf{r}_k$.) El intervalo de tiempo transcurrido entre la aparición del cuerpo en g y después en k, es Δt. Entonces la velocidad promedio $\bar{v}_{gk}$ en el intervalo Δt es $\bar{\mathbf{v}}_{gk} = (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_g)/\Delta t$, la velocidad promedio en general se define como el vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ (un vector) dividido entre el tiempo transcurrido Δt (un escalar):

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (4\text{-}1)$$

La velocidad promedio es, desde luego, una cantidad vectorial, puesto que representa a la cantidad vectorial $\Delta\mathbf{r}$ multiplicada por la cantidad escalar $1/\Delta t$. Como Δt siempre es positivo, la dirección y el sentido del vector $\bar{\mathbf{v}}$ son los mismos que los del vector

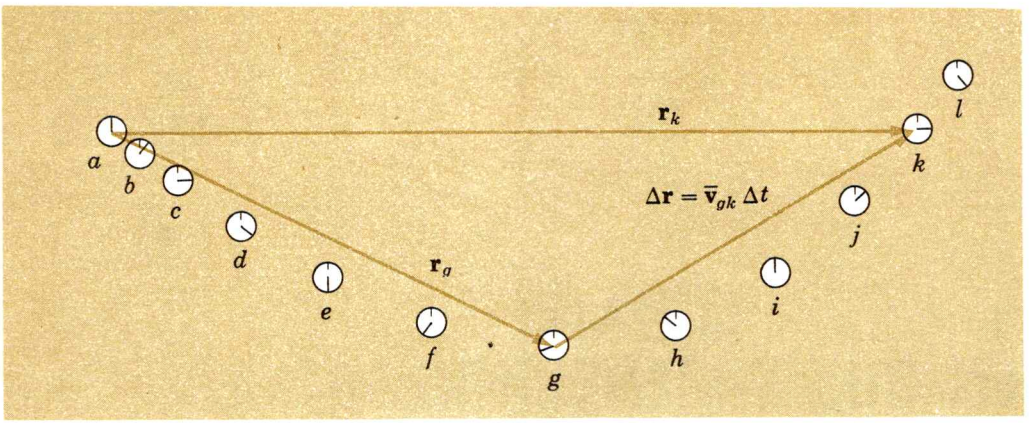


FIG. 4-1. Una fotografía de multidestello simulada. La velocidad promedio de g a k es $\mathbf{v}_{gk}$. Los discos sucesivos representan la carátula de un reloj en la que se ve la manecilla que gira en sentido normal con rapidez constante.

$\Delta\mathbf{r}$. Claramente se ve que el movimiento de g a k en la Fig. 4-1 no es con velocidad constante, pero la velocidad promedio de g a k da la *velocidad constante* que debería tener la partícula si hubiera de llevar a cabo el mismo desplazamiento en el mismo intervalo de tiempo, que llevó a cabo durante el desplazamiento real de g a k.

La velocidad instantánea $\mathbf{v}$, la rapidez de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo, es el límite de la velocidad promedio cuando el intervalo de tiempo se hace infinitamente pequeño:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{4-2}$$

El intervalo de tiempo es suficientemente pequeño como para dar la velocidad instantánea cuando el desplazamiento recto $\Delta\mathbf{r}$ no se puede distinguir del camino real de la partícula en el intervalo Δt. Por lo tanto, la velocidad instantánea de la partícula siempre es tangente a su trayectoria, apuntando en la dirección y con el sentido del movimiento. Se sigue de (4-2) que, si Δt es suficientemente pequeño, la velocidad $\mathbf{v}$ se puede tomar como constante en dirección, sentido y magnitud sobre este pequeño intervalo de tiempo, y el desplazamiento incremental $\Delta\mathbf{r}$, será igual a $\mathbf{v}\,\Delta t$. (Véase la Fig. 4-2.) Desde luego, las dimensiones de la velocidad son las de longitud dividida entre el tiempo.

En la Fig. 4-3*a*, se indican los vectores que representan las velocidades instantáneas en varios puntos a lo largo de la trayectoria. Note que todos los vectores velocidad son tangentes a la trayectoria; sus longitudes representan, (a una escala arbitrariamente escogida para la velocidad), las distancias cubiertas por cada unidad de tiempo, sobre intervalos infinitesimales de tiempo. La magnitud de la velocidad instantánea se llama rapidez instantánea.

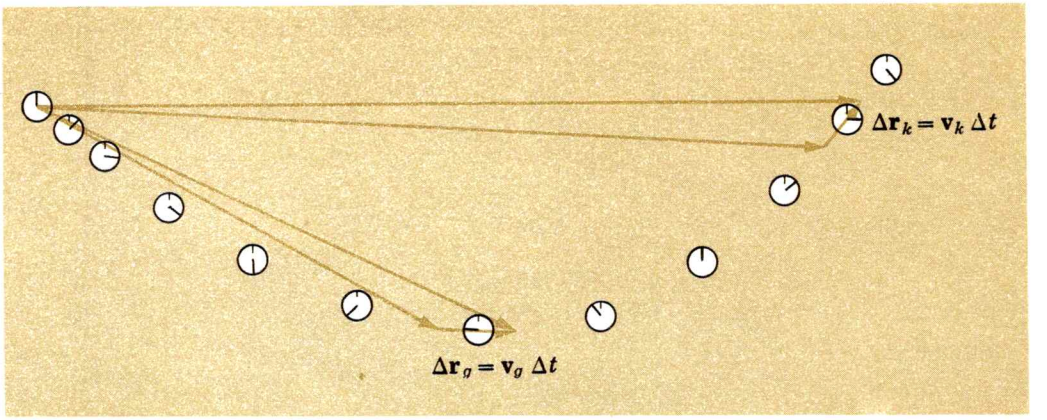
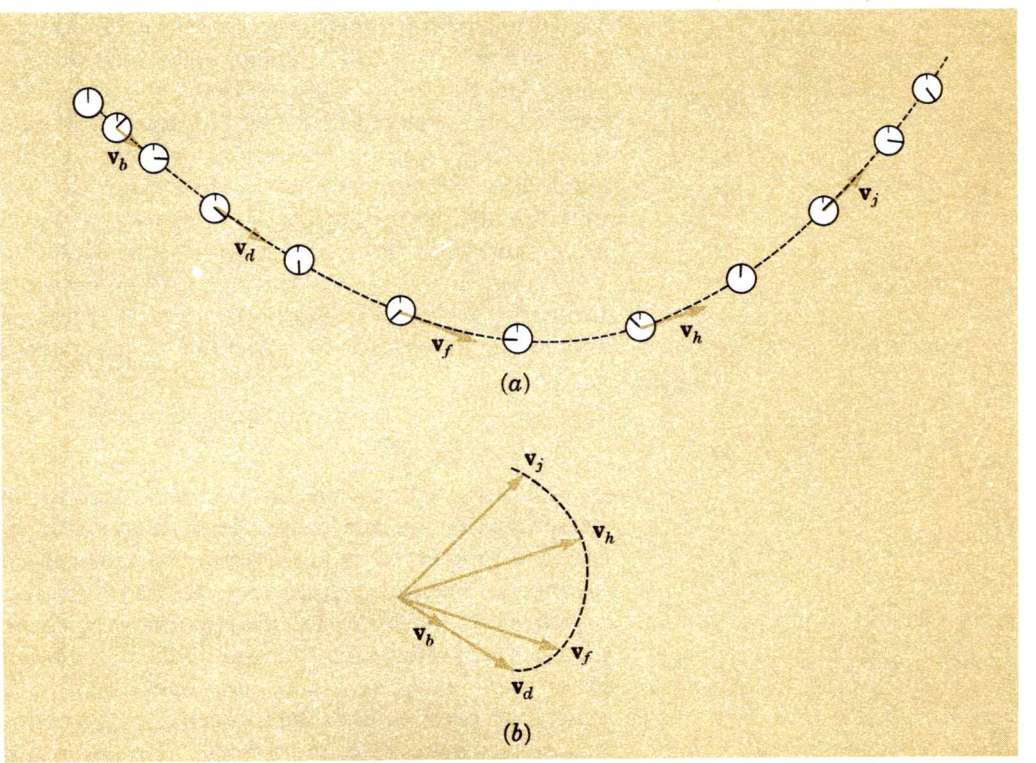


FIG. 4-2. Las velocidades instantáneas en g y k son v_g y v_k, respectivamente.

Note además que un diagrama como el de la Fig. 4-3*a*, en el que los vectores velocidad se superponen en la trayectoria de la partícula, es una combinación, por así decirlo, de dos diagramas: uno que da la localización espacial de la partícula (de acuerdo con una escala de distancias arbitrariamente escogida) y el segundo, que muestra los vectores velocidad instantánea (a una escala

FIG. 4-3. (*a*) los vectores velocidad instantánea en varios puntos. Las colas de los vectores velocidad están colocadas en las correspondientes posiciones de la partícula móvil. (*b*) Los vectores de la velocidad instantánea de (*a*) dibujados a partir de un origen común (a escala doble).



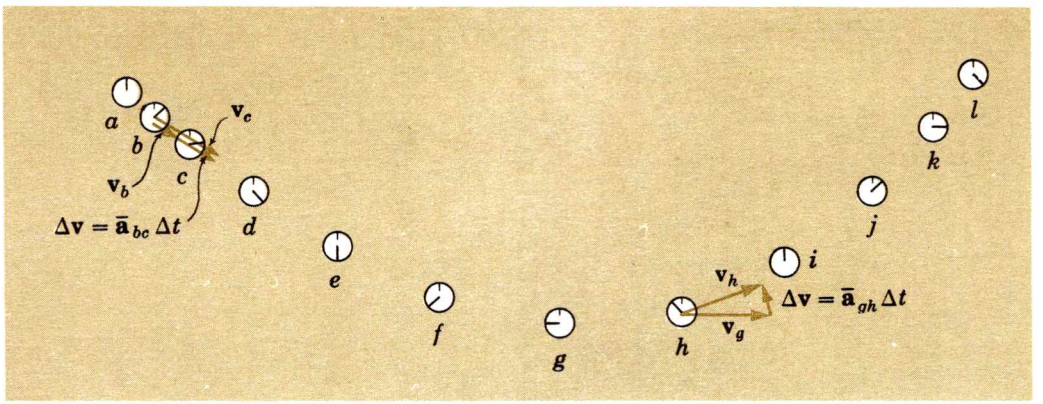


FIG. 4-4. Vectores aceleración promedio $\mathbf{a}_{bc}$ y $\mathbf{a}_{gh}$.

diferente). Por conveniencia cada vector se localiza con su cola en la posición de la partícula en ese instante. Como podemos relocalizar a cualquier vector sin cambiar su valor, los vectores velocidad se pueden indicar también como se ve en la Fig. 4-3*b*, con las colas en el mismo origen.

La aceleración promedio $\bar{\mathbf{a}}$ se define como el cambio (instantáneo) en la velocidad por unidad de tiempo:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \tag{4-3}$$

La aceleración promedio es un vector debido a que es el producto del vector $\Delta\mathbf{v}$ y un escalar $1/\Delta t$. Sus dimensiones son las de velocidad divididas entre el tiempo. La Ec. (4-3) indica que el cambio en la velocidad $\Delta\mathbf{v}$ en el intervalo Δt es $\bar{\mathbf{a}}\,\Delta t$. (Véase la Fig. 4-4.) Note que la dirección de $\Delta\mathbf{v}$, y por ello de $\bar{\mathbf{a}}$, no se encuentra necesariamente a lo largo de $\mathbf{v}$, la dirección del movimiento. Se produce una aceleración si la velocidad cambia de magnitud, o de dirección, o de ambos, dirección y magnitud.

La aceleración instantánea simplemente es la aceleración promedio sobre un intervalo de tiempo infinitesimal, esto es, es la rapidez de cambio de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\mathbf{a} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{4-4}$$

La Fig. 4-5 indica los vectores aceleración instantánea superpuestos en un diagrama de la trayectoria de la partícula. La escala de los vectores aceleración es arbitraria (pero diferente de las escalas para el desplazamiento y la velocidad). Al iniciarse el movimiento (*a*, *b*, *c*) la aceleración es constante en dirección y magnitud, quedando a lo largo de la dirección del movimiento. En los puntos vecinos *g*, *h*, *i* y *j*, donde el cuerpo se mueve con rapidez constante pero cambia la dirección, los vectores aceleración son perpendiculares a la trayectoria. En los puntos como *f* y *l* la

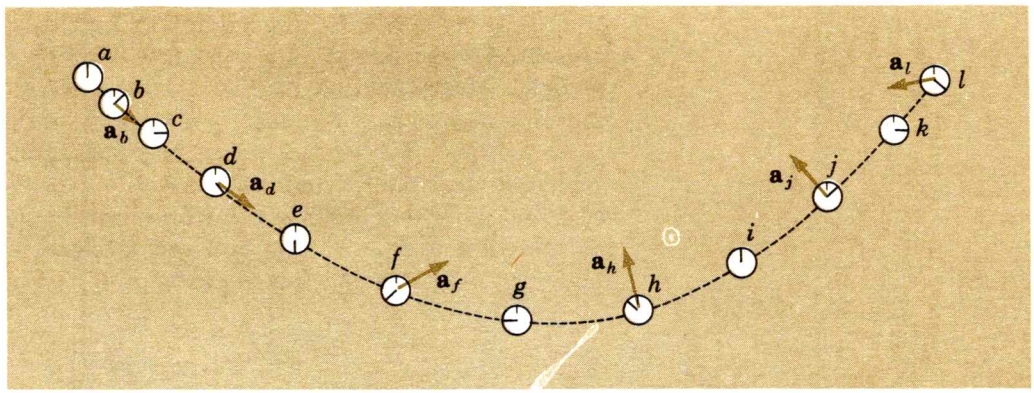


FIG. 4-5. Vectores aceleración instantánea en varios puntos. Las colas de los vectores aceleración se colocan aquí en las posiciones correspondientes de la partícula móvil.

aceleración ni se encuentra a lo largo, ni es perpendicular a la trayectoria. En todos los casos, la aceleración instantánea da la magnitud y la dirección del *cambio* en el *vector velocidad* por unidad de tiempo.

Frecuentemente conviene mostrar diferentes tipos de vectores en un mismo diagrama. La Fig. 4-6 indica vectores de desplazamiento, velocidad instantánea y aceleración instantánea para dos puntos a lo largo de la trayectoria. Debe enfatizarse que los desplazamientos se pueden adicionar a los desplazamientos, las velocidades a las velocidades y las aceleraciones a las aceleraciones. Pero no podemos sumar juntas cantidades vectoriales diferentes, como desplazamientos y velocidades.

4—2 MOVIMIENTO CON ACELERACION CONSTANTE

Un tipo importante de movimiento es aquel en el que la aceleración es constante, tanto en magnitud como en dirección y sentido. Aunque especial, esta situación se realiza en dos situaciones físicas importantes: un cuerpo pequeño lanzado con velocidad

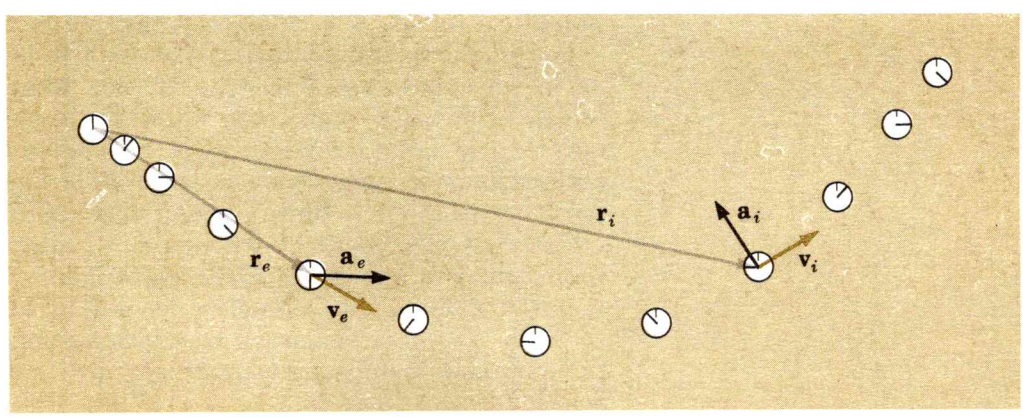


FIG. 4-6. Vectores de desplazamiento, velocidad instantánea y aceleración instantánea para diferentes posiciones de una partícula móvil.

moderada cerca de la superficie de la tierra y una partícula cargada eléctricamente que se mueve entre dos placas metálicas paralelas cargadas (una partícula con masa gravitacional en un campo uniforme gravitacional, y una partícula con carga eléctrica en un campo eléctrico uniforme, respectivamente). Insistimos en que en la cinemática unidimensional, el desplazamiento x y la velocidad v, de una partícula que tenía un desplazamiento x_0 y una velocidad v_0 iniciales, junto con una aceleración constante a, se encuentran dados en términos del tiempo t por

$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

Fácilmente se encuentra que las relaciones correspondientes en dos (o tres) dimensiones son

Para **a** constante: $$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \tag{4-5}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \tag{4-6}$$

Aquí $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ son los *desplazamientos* relativos al origen, $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{v}$ son los vectores velocidad instantánea en los tiempos 0 y t, respectivamente, y $\mathbf{a}$ es el vector aceleración constante. Es importante reconocer que $\mathbf{r}$ *no* representa la distancia recorrida por la partícula.

La Ec. (4-5) se deduce directamente de la definición de la aceleración promedio; puesto que si la aceleración es constante, la aceleración instantánea $\mathbf{a}$ es idéntica con la aceleración promedio $\bar{\mathbf{a}}$. Entonces la diferencia de velocidad (vector) $\Delta\mathbf{v}$ es $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$, y el intervalo de tiempo Δt, es el tiempo transcurrido después de $t = 0$. Por lo tanto, (4-3) toma la forma

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{t}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \tag{4-5}$$

También se puede obtener fácilmente la Ec. (4-6). Para simplificar tomamos $\mathbf{r}_0 = 0$. Suponga que la aceleración es cero; entonces el desplazamiento $\mathbf{r}$ se efectúa a lo largo de la dirección de la velocidad constante $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t$. Ahora suponga que la velocidad inicial es cero, pero no así la aceleración; el desplazamiento a lo largo de cierta línea está dado por $\frac{1}{2}at^2$, donde la aceleración a se encuentra a lo largo de la línea. Esta relación se puede escribir en la forma vectorial como $\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$, donde los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{a}$ se encuentran ahora en la misma dirección. De la misma manera que el desplazamiento sigue las reglas del álgebra vectorial, el desplazamiento $\mathbf{r}$, en general, será igual a la suma vectorial del desplazamiento $\mathbf{v}_0 t$ a velocidad constante y el desplazamiento $\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$ logrado de acuerdo con un cambio uniforme de la velocidad:

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \quad \text{con} \quad \mathbf{r}_0 = 0 \tag{4-6}$$

Las ecuaciones vectoriales (4-5) y (4-6) se ilustran en la Fig. 4-7. Note que el desplazamiento **r** no se encuentra necesariamente a lo largo de la dirección de $\mathbf{v}_0$, **v**, o **a**.

Si el origen del vector **r** se coloca como el origen de los ejes X e Y, podemos escribir las ecuaciones vectoriales (4-5) y (4-6) equivalentes en forma escalar usando las componentes del desplazamiento, la velocidad y la aceleración a lo largo de las direcciones X e Y, como se muestra en la Fig. 4-8:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \tag{4-7}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

$$x = v_{0x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2 \tag{4-8}$$

$$y = v_{0y} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2$$

El movimiento de una partícula con aceleración constante en un plano se describe completamente por dos movimientos independientes y simultáneos a lo largo de los ejes X e Y con las aceleraciones constantes a_x y a_y, respectivamente.

La estrategia para resolver problemas de cinemática en dos dimensiones y con aceleración constante es esta: Descomponemos los vectores desplazamiento, velocidad y aceleración en componentes a lo largo de los ejes X e Y, y se usan las Ecs. (4-7) y (4-8) para las componentes de las velocidades y desplazamientos a lo largo de X e Y. El lazo de unión entre estas ecuaciones es el tiempo común t.

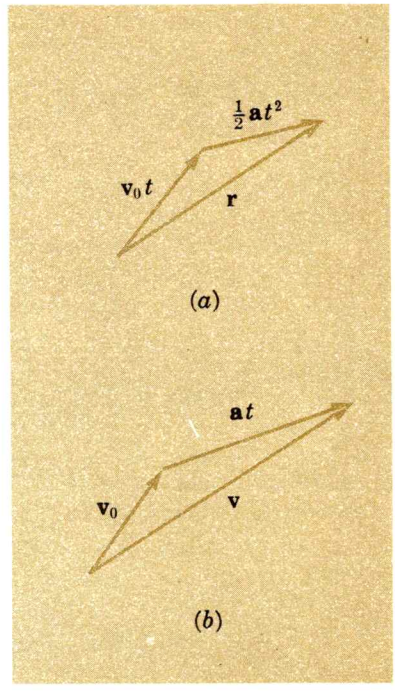
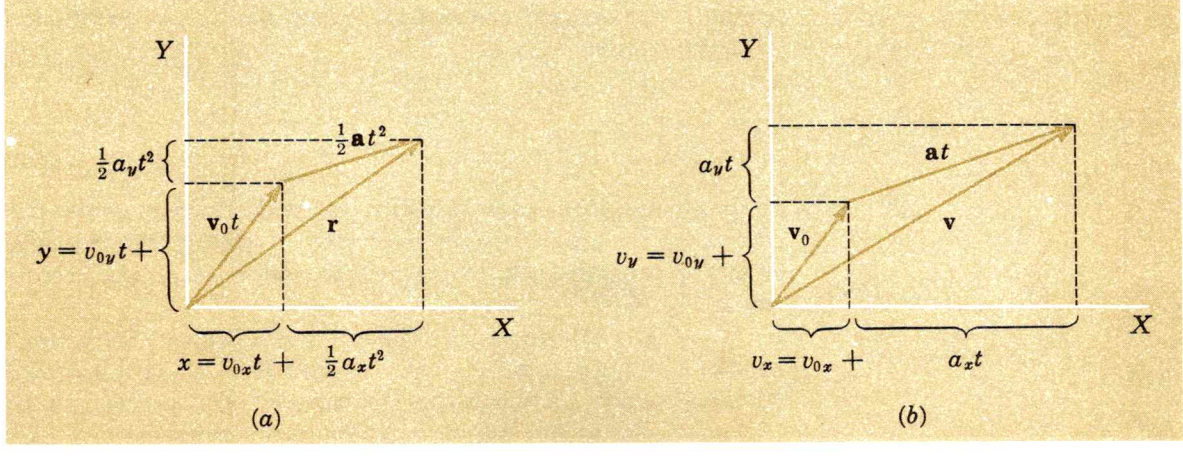


FIG. 4-7. Relaciones vectoriales que dan (*a*) el desplazamiento y (*b*) la velocidad para movimiento con aceleración constante.

FIG. 4-8. Relaciones escalares y cinemáticas que dan las componentes rectangulares de (*a*) el desplazamiento (*b*) la velocidad, como obtenidas a partir de relaciones cinemáticas.



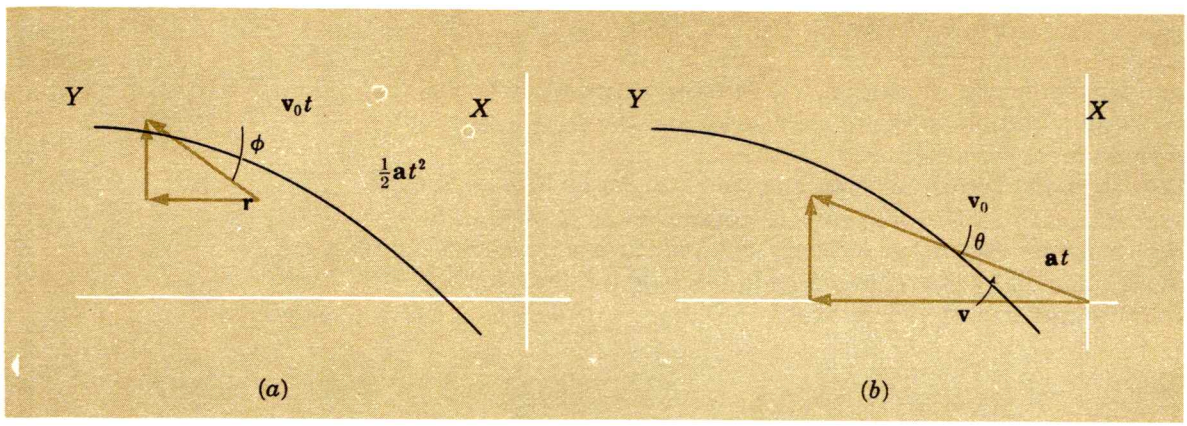


FIG. 4-9. Un proyectil se arroja horizontalmente: (*a*) los vectores desplazamiento y (*b*) los vectores velocidad

4—3 MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Suponga que un proyectil se arroja horizontalmente y cae bajo la influencia de la gravedad. La Fig. 4-9 muestra los diagramas de los vectores desplazamiento y velocidad (sobrepuestos en los ejes X e Y y la trayectoria de la partícula). Para este caso simple $\mathbf{v}_0$ es horizontal y **a** vertical hacia abajo. Originalmente la velocidad se encuentra en la dirección X; por ello, $v_{0y} = 0$. Además, la aceleración se encuentra en dirección vertical, y $a_x = 0$. Considerando que el sentido positivo del eje Y es hacia arriba, escribimos a_y como $-g$, donde g vale 9.8 m/s². Las Ecs. (4-7) y (4-8) se convierten en

$$v_x = v_{0x} \qquad v_y = -gt$$
$$x = v_{0x}t \qquad y = -\tfrac{1}{2}gt^2$$

El cuerpo se desliza a lo largo de la horizontal mientras acelera a partir del reposo con una rapidez constante a lo largo de la vertical. Eliminando a t entre las ecuaciones de x y de y, podemos encontrar la ecuación de la trayectoria, dando a y en función de x y las constantes v_{0x} y g:

$$y = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 \tag{4-9}$$

La trayectoria es una parábola cuyo eje de simetría es paralelo a la dirección de la aceleración constante; el vector velocidad instantánea **v** es tangente a la trayectoria en todos los puntos, como se ve en la Fig. 4-9*b*.

La Fig. 4-10 muestra el movimiento junto con las proyecciones del movimiento a lo largo de los ejes X e Y para intervalos de tiempo iguales. Debido a que las componentes vertical y horizontal del movimiento son independientes, el movimiento *vertical* de un

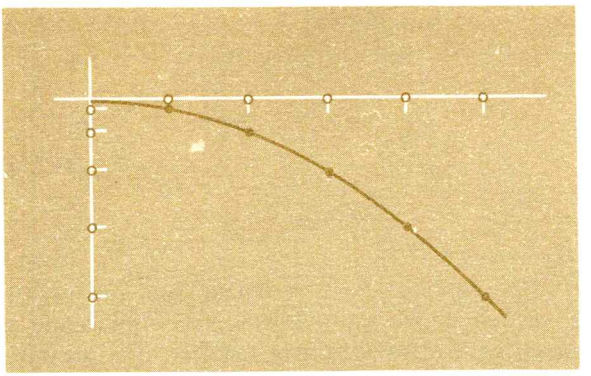


FIG. 4-10. Fotografía de fotodestello simulada correspondiente a la Fig. 4-9.

objeto lanzado horizontalmente es idéntico con el de un objeto que se suelta del reposo. Si uno arroja un objeto horizontalmente y simultáneamente suelta un segundo cuerpo del reposo, los dos objetos chocan con un plano horizontal en el mismo instante. El objeto lanzado choca con la superficie con una velocidad mayor (tiene ambas componentes horizontal y vertical), pero las *componentes verticales* de los cuerpos arrojados horizontalmente y de los objetos que caen son idénticas en cualquier tiempo dado.

El caso más general, en el que la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ no está en ángulo recto con la aceleración constante **a**, se muestra en la Fig. 4-11. La componente horizontal de la velocidad, que se encuentra en ángulo recto con la aceleración, permanece sin cambio, mientras que la componente vertical de **v** cambia constante con el tiempo.

La Fig. 4-11 ilustra el movimiento de los proyectiles sobre un campo pequeño comparado con el radio de la Tierra. La aceleración es constante y tiene una magnitud de g. Cuando un cuerpo se arroja oblicuamente en el aire cambia, del movimiento rectilíneo que tendría de otra manera, debido a la aceleración de la gravedad. Considérese una bala disparada por una pistola apuntada directamente a un objeto distante; este objeto se encuentra a cierta altura sobre la Tierra y se suelta desde el reposo en el instante en que se dispara la bala. Si uno pudiera, por así decir, "eliminar la gravedad", la bala recorrería una trayectoria recta, el objeto no caería cuando se soltara y la bala pegaría al objeto. Ahora supóngase que la bala y el objeto caen, como lo hacen todos los objetos cerca de la Tierra con la misma aceleración constante. El objeto cae una distancia de $\frac{1}{2}gt^2$ desde el reposo, y durante este mismo tiempo la bala "cae" la misma distancia vertical $\frac{1}{2}gt^2$ a partir del movimiento en línea recta. Consecuentemente, la bala siempre le pega al blanco, sin importar la magnitud de la velocidad o aun la magnitud de g.

Para un objeto que tenga aceleración constante, las ecuaciones que dan las componentes X e Y del deplazamiento y la velocidad

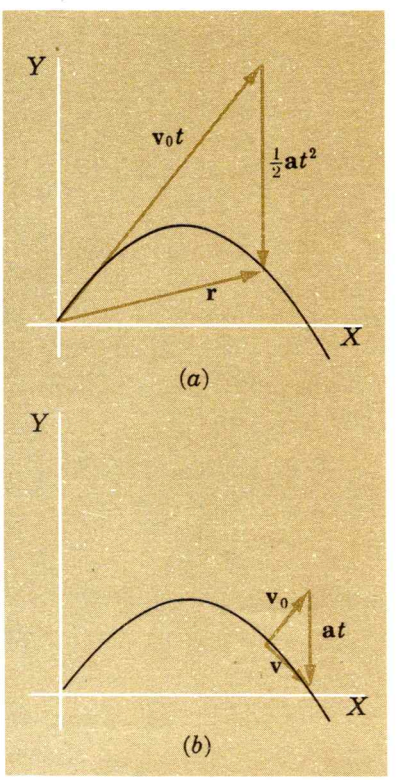


FIG. 4-11. Un proyectil lanzado oblicuamente: (*a*) los vectores desplazamiento y (*b*) los vectores velocidad.

como una función del tiempo se escriben fácilmente a partir de las Ecs. (4-7) y (4-8) como sigue:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} & v_y &= v_{0y} - gt \\ x &= v_{0x}t & y &= v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{4-10}$$

Ejemplo 4-1

Un pequeño objeto se arroja con una rapidez de 25 m/s en un ángulo de 53° sobre la horizontal. Ignorando la resistencia del aire, encuentre (*a*) la altura máxima que alcanza el proyectil, (*b*) el alcance horizontal (la distancia horizontal recorrida cuando el proyectil se encuentra de nuevo a su altura inicial) y (*c*) el desplazamiento y la velocidad del proyectil 3 s después del disparo.

Las componentes de $\mathbf{v}_0$ son:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = (25 \text{ m/s}) \cos 53° = 15 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 = (25 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 53° = 20 \text{ m/s}$$

Entonces, las ecuaciones del movimiento son (cuando tomamos que $g = 10 \text{ m/s}^2$):

$$v_x = 15 \text{ m/s}$$
$$v_y = (20 \text{ m/s}) - (10 \text{ m/s}^2)t$$
$$x = (15 \text{ m/s})t$$
$$y = (20 \text{ m/s})t - (5 \text{ m/s}^2)t^2$$

Esto da la posición y la velocidad del objeto como una función del tiempo t. Las preguntas relacionadas con el movimiento pueden resolverse usando estas ecuaciones.

(*a*) Para determinar la altura máxima y_m primero determinamos el tiempo t_m en el que el proyectil alcanza su punto más alto. En la altura máxima el proyectil momentáneamente se mueve en sentido horizontal y $v_y = 0$. Así, con $v_y = 0$, tenemos

$$v_y = 0 = (20 \text{ m/s}) - (10 \text{ m/s}^2)t_m$$
o $$t_m = 2.0 \text{ s}$$
Entonces $$y_m = (20 \text{ m/s})(2.0 \text{ s}) - (5 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ s})^2$$
$$y_m = 20 \text{ m}$$

(*b*) Para calcular el alcance horizontal, primero se calcula el tiempo que el proyectil tarda en encontrarse de nuevo en el eje X; esto es, calculamos t para $y = 0$ y sustituimos este tiempo de vuelo en la ecuación para x:

$$y = 0 = (20 \text{ m/s})t - (5 \text{ m/s}^2)t^2$$
$$t = 0 \quad \text{y} \quad 4 \text{ s}$$

El objeto se encontraba a $y = 0$ en ambos tiempos $t = 0$ y en $t = 4$ s, el tiempo de vuelo.
El alcance horizontal es entonces:

Alcance: $x = (15 \text{ m/s})t = (15 \text{ m/s})(4.0 \text{ s}) = 60 \text{ m}$

(*c*) Calcularemos las componentes del desplazamiento y la velocidad del objeto después de haber estado en vuelo 3 s.

$$v_x = 15 \text{ m/s}$$
$$v_y = (20 \text{ m/s}) - (10 \text{ m/s}^2)(3 \text{ s}) = -10 \text{ m/s}$$

Las componentes del desplazamiento a $t = 3$ s son

$$x = (15 \text{ m/s})(3 \text{ s}) = 45 \text{ m}$$
$$y = (20 \text{ m/s})(3 \text{ s}) - (5 \text{ m/s}^2)(3 \text{ s})^2 = 15 \text{ m}$$

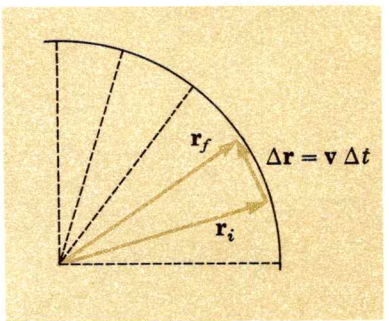


FIG. 4-12. El desplazamiento Δr sobre un intervalo de tiempo Δt de una partícula que se mueve con movimiento circular uniforme.

4—4 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Se dice que se encuentra en movimiento circular uniforme cualquier partícula que se mueve en un arco circular con rapidez constante. Recorre distancias iguales a lo largo de la circunferencia en tiempos iguales, mientras que continuamente cambia la dirección de su movimiento. La velocidad, aunque tiene magnitud constante, continuamente cambia de dirección, y consecuentemente, hay una aceleración. Queremos encontrar la magnitud y la dirección de esa aceleración.

Es conveniente (aunque no necesario) indicar la localización de la partícula recorriendo un círculo por medio del vector desplazamiento, o *radio vector,* **r**, cuya cola se encuentra en el centro del círculo. Entonces, si la rapidez del cuerpo es constante, el radio vector barre ángulos iguales en tiempos iguales. Considérese el desplazamiento pequeño $\Delta\mathbf{r}$ que ocurre en un intervalo de tiempo muy chico Δt. El vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ no se puede distinguir de la trayectoria real de la partícula a lo largo de un segmento corto de arco circular. (Véase la Fig. 4-12). Los radios vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_f$, ambos con la magnitud r, dan el desplazamiento inicial y final sobre el pequeño intervalo Δt. Como se indica en la figura,

$$\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i = \Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\,\Delta t$$

donde **v** es la velocidad en el intervalo Δt.

El vector velocidad siempre forma un ángulo recto con el radio vector. Mientras **r** gira, lo mismo hace **v**. (Véase la Fig. 4-13*a*, donde se indican los vectores velocidad, todos con la misma magnitud y con sus colas sobre la circunferencia del círculo, y la Fig. 4-13*b*, donde los mismos vectores velocidad se colocaron con sus colas sobre un punto común.)

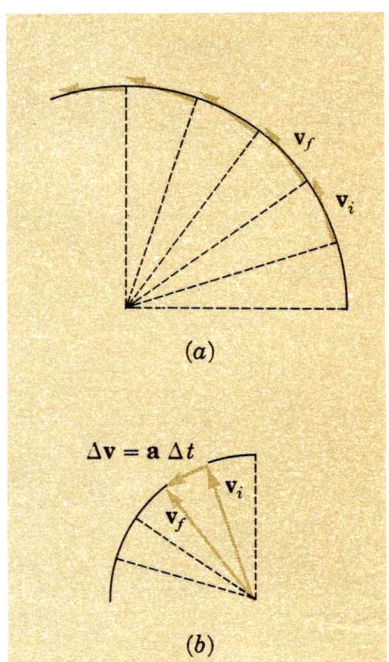


FIG. 4-13. (*a*) Vectores velocidad instantánea acomodados con sus colas en las posiciones correspondientes de la partícula. (*b*) Los mismos vectores velocidad (a escala doble) acomodados con sus colas en un origen común.

Las velocidades inicial y final, $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{v}_f$, ambos con la magnitud v, difieren sólo en dirección. Su diferencia vectorial $\Delta\mathbf{v}$ se encuentra dada por

$$\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i = \Delta\mathbf{v} = \mathbf{a}\,\Delta t$$

donde $\mathbf{a}$ es la aceleración en el intervalo de tiempo Δt durante el cual la velocidad cambia de $\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{v}_f$. Ahora bien, los radios vectores $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_f$ y $\Delta\mathbf{r}$ forman un triángulo isósceles que es semejante al triángulo formado por los vectores velocidad correspondientes $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_f$ y $\Delta\mathbf{v}$. Esto se debe a que los vectores desplazamiento barren el mismo ángulo que los vectores velocidad durante el tiempo Δt. Consecuentemente, las magnitudes de los lados correspondientes se encuentran en la misma relación:

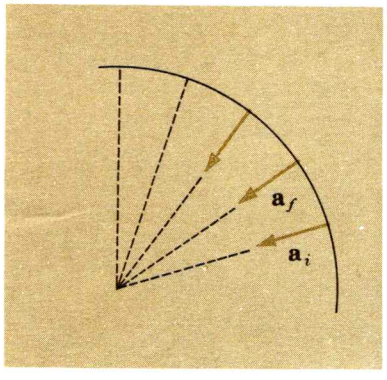


FIG. 4-14. Vectores de aceleración instantánea acomodados con su colas en las posiciones correspondientes de la partícula.

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

o

$$\frac{v\,\Delta t}{r} = \frac{a\,\Delta t}{v}$$

Así,

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad (4\text{-}11)$$

La aceleración de una partícula que se mueve con rapidez constante v en un círculo de radio r tiene la magnitud constante de v^2/r. Ahora encontremos la dirección de la aceleración.

Como se deduce a partir de las Figs. 4-12 y 4-13, el vector $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\,\Delta t$ es perpendicular a $\mathbf{r}$, y el vector $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{a}\,\Delta t$ es perpendicular a $\mathbf{v}$. Por lo tanto, la dirección de la aceleración siempre es opuesta a la del desplazamiento $\mathbf{r}$; esto es, se dirige hacia el centro del círculo. Entonces, el movimiento circular uniforme se caracteriza por una aceleración que es constante en magnitud, cambia de dirección y sentido, pero siempre es radial con sentido hacia el centro. (Véanse las Figs. 4-14 y 4-15.) Para designar a esta aceleración, se usan los términos *aceleración radial* y algunas veces, *centrípeta*.

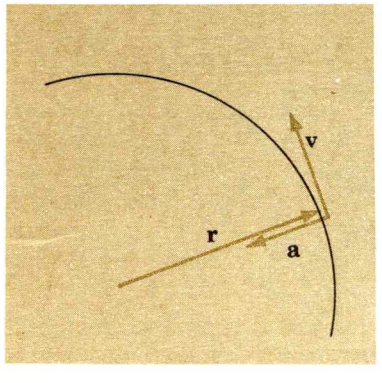


FIG. 4-15. Los vectores de velocidad instantánea y aceleración para una partícula animada de movimiento circular uniforme.

Lo inverso es correcto. Cuando un cuerpo se mueve con una aceleración que es constante en magnitud y siempre perpendicular a la dirección del movimiento, el cuerpo ejecuta un movimiento circular con rapidez constante. Podemos escribir una ecuación vectorial para la aceleración centrípeta como la siguiente:

$$\mathbf{a} = -\left(\frac{v}{r}\right)^2 \mathbf{r} = -\frac{v^2}{r}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \qquad (4\text{-}12)$$

El signo menos indica que la dirección de $\mathbf{a}$ es opuesta a la de $\mathbf{r}$. La magnitud de $\mathbf{a}$ es $(v/r)^2$ multiplicada por la magnitud de $\mathbf{r}$; así, $a = (v/r)^2 r = v^2/r$, de acuerdo con la Ec. (4-11).

Cuando una partícula se mueve en línea recta, la dirección de la velocidad constantemente se encuentra sobre su trayectoria, y se

presentan cambios en la rapidez debidos a la aceleración, la que también se encuentra a lo largo de la trayectoria. Por otro lado, cuando una partícula se mueve en un arco circular con rapidez constante, la dirección de la velocidad cambia de manera constante y la aceleración ahora forma ángulos rectos con la trayectoria, radialmente hacia el centro de curvatura. Así, una aceleración *a lo largo* de la trayectoria se identifica con un cambio de la *magnitud* de la velocidad, mientras que una aceleración *perpendicular* a la trayectoria se identifica con un cambio de *dirección* de la velocidad.

Ejemplo 4-2

Suponga que se arroja un objeto horizontalmente desde el pico de una montaña imaginaria que se extendiera hasta muy arriba de la atmósfera terrestre, pero dentro de los límites donde todavía la aceleración de la gravedad se pueda tomar como de 9.8 m/s^2 (Fig. 4-16). Su trayectoria es una parábola y choca contra la Tierra después de haber recorrido menos de varios cientos de millas.

Si el objeto se arroja con mayor rapidez, de tal manera que recorra una distancia comparable al radio terrestre antes de chocar contra el piso, la aceleración *no* puede considerarse como constante en su dirección y la trayectoria ya no es una parábola. Por otro lado, si la velocidad inicial es enorme, el objeto se pierde en el espacio. Pero hay una cierta velocidad a la que el objeto caerá siempre la misma distancia hacia la Tierra, que la que lo separa de su movimiento rectilíneo; lo que es lo mismo que decir que hay cierta velocidad particular para la cual el objeto se mueve a lo largo de un círculo. El objeto se convierte en un satélite de la Tierra. Los argumentos desarrollados aquí fueron expresados antes por Isaac Newton (1642-1727).

Calculemos la rapidez y el periodo (tiempo que tarda en dar una revolución completa) de un satélite en órbita circular cercana a la superficie de la Tierra (pero fuera de la atmósfera). El radio medio de la Tierra es de 6.37×10^6 m.

Como la aceleración radial tiene la magnitud de 9.8 m/s^2, tenemos, a partir de la Ec. (4-11)

$$a = \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{ar} = \sqrt{(9.8 \text{ m/s}^2)(6.37 \times 10^6 \text{ m})}$$
$$= 7.9 \times 10^3 \text{ m/s}$$

El tiempo T para una revolución es la circunferencia dividida entre la rapidez:

$$T = \frac{2\pi(6.37 \times 10^6 \text{ m})}{7.9 \times 10^3 \text{ m/s}} = 5.1 \times 10^3 \text{ s} = 85 \text{ min}$$

Ahora estamos en una posición que nos permite entender los aspectos cinemáticos más simples del lanzamiento y la recuperación

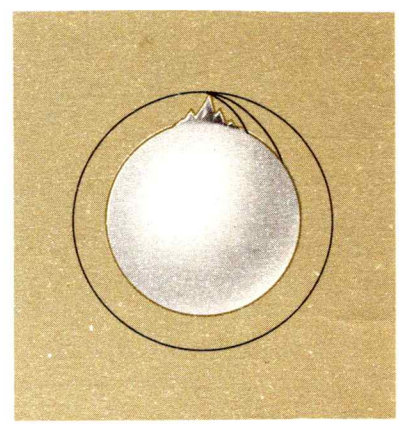


FIG. 4-16. Se lanza un objeto horizontalmente desde el pico de una montaña a varias velocidades.

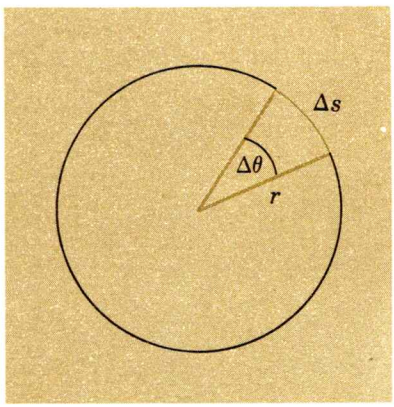


FIG. 4-17. El ángulo $\Delta\theta$ en radianes corresponde a una distancia Δs sobre la circunferencia de un círculo de radio r.

de un satélite. Después de encender el cohete, primero se sigue una trayectoria casi parabólica. En su punto más alto, cuando la velocidad es paralela a la superficie de la Tierra, se enciende otro cohete para aumentar la rapidez hasta que se logra el valor requerido para el movimiento orbital. Si el satélite se encuentra suficientemente arriba de la superficie de la Tierra, lo que hace que la acción retardadora de la atmósfera sea despreciable, su rapidez permanece constante y el satélite orbita indefinidamente; por otro lado, si la acción retardadora de la atmósfera es apreciable, recorrerá una espiral hacia abajo.

4—5 RAPIDEZ ANGULAR

En la Fig. 4-17, el ángulo $\Delta\theta$ subtiende un arco cuyo largo es Δs. Por definición, el ángulo en radianes es (2π rad = 360°)

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r}$$

o

$$\Delta s = r\,\Delta\theta \tag{4-13}$$

Suponga que una partícula recorre la distancia Δs a lo largo del arco en un tiempo Δt, mientras que el radio vector de longitud r barre el ángulo $\Delta\theta$. La rapidez lineal de la partícula es

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

y la *rapidez angular* ω del radio vector giratorio es, por definición,

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{4-14}$$

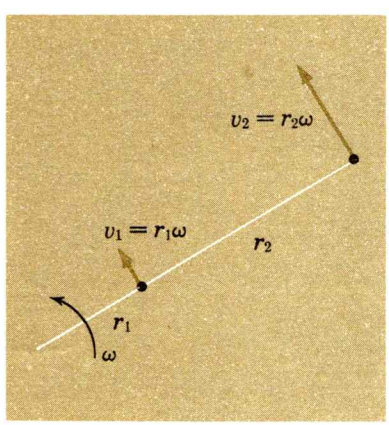


FIG. 4-18. Las rapideces de los puntos de un objeto giratorio son proporcionales a sus respectivas distancias al eje de rotación.

La rapidez angular es la rapidez de cambio del desplazamiento angular con respecto al tiempo. Las unidades apropiadas para la rapidez angular son radianes/segundo. Así, una rotación por segundo es $\omega = 2\pi$ rad/s, o más simplemente, 2π s^{-1}.

A partir de (4-13) y (4-14) se sigue que

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = r\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

o

$$v = r\omega \tag{4-15}$$

La Ec. (4-15) muestra que la rapidez *tangencial* v de cualquier partícula que se mueve en un arco circular a una distancia r del centro de rotación, se encuentra dada por $r\omega$, donde ω es la rapidez a la cual el radio vector que va del centro a la partícula barre ángulos. (Véase la Fig. 4-18.)

Usando (4-15) podemos reescribir la relación para la acelera-

ción radial como sigue:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = \omega^2 r \qquad (4\text{-}16)$$

Un punto colocado a una distancia fija r del centro de un círculo tiene una aceleración radial que es proporcional al cuadrado de la rapidez angular. También podemos escribir (4-16) en forma vectorial, haciendo hincapié en que la dirección y sentido de **a** son opuestos a los del radio vector **r**:

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r} \qquad (4\text{-}17)$$

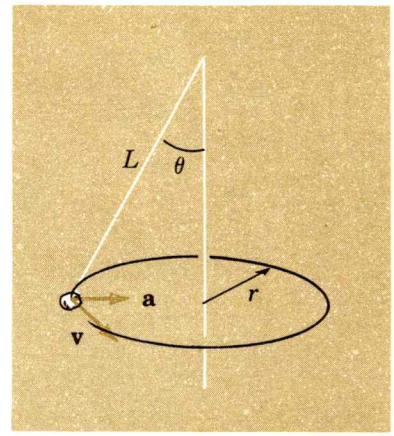


FIG. 4-19. Una piedra atada a una cuerda gira en la parte exterior de un cono vertical con rapidez constante. Nótese que la aceleración queda contenida en el plano del círculo horizontal.

Ejemplo 4-3

Se amarra una piedra al extremo inferior de una cuerda de 1.0 m de largo y se hace girar en un círculo horizontal, como se indica en la Fig. 4-19. Se encuentra que, cuando la cuerda forma con la vertical un ángulo constante de 30°, la piedra ejecuta 32 revoluciones en 1 min. ¿Cuáles son la dirección y la magnitud de la aceleración radial de la piedra?

La rapidez angular es de

$$\omega = (32 \text{ rev/min})\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right) = 3.35 \text{ rad/s}$$

El radio de la trayectoria circular de la piedra es de (1.0 m) sen 30°, y la aceleración centrípeta tiene la magnitud

$$a = \omega^2 r = (3.35 \text{ s}^{-1})^2 (1.0 \text{ m}) \text{ sen } 30° = 5.6 \text{ m/s}^2$$

La aceleración radial se encuentra en un plano horizontal con sentido hacia el centro del círculo horizontal.

RESUMEN

La velocidad instantánea **v** es la rapidez de cambio con respecto al tiempo del vector desplazamiento:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (4\text{-}2)$$

La aceleración instantánea **a** es la rapidez de cambio con respecto al tiempo del vector velocidad

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad (4\text{-}4)$$

Para la aceleración constante **a**, la velocidad y el desplazamiento están dados por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \qquad (4\text{-}5)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \qquad (4\text{-}6)$$

donde $\mathbf{r}$ es el desplazamiento y $\mathbf{v}$ la velocidad en el tiempo t, $\mathbf{r}$ corresponde a $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}_0$ cuando $t = 0$.

Una partícula que se mueve en un arco circular de radio de curvatura r con la rapidez v tiene una aceleración radial hacia adentro de

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad (4\text{-}11),\ (4\text{-}16)$$

donde ω es la rapidez angular del radio vector en radianes por unidad de tiempo.

PROBLEMAS

4-1. Las siguientes son las coordenadas del espacio y el tiempo (x, y, t) de una partícula en metros y segundos, respectivamente: (3, 0, 0), (4, −2, 1), (6, 3, 2) y (4, 6, 3). ¿Cuáles son las componentes X e Y de la velocidad promedio sobre los siguientes intervalos de tiempo: (*a*) Δt_{01} (de $t = 0$ a $t = 1$ s), (*b*) Δt_{12}, (*c*) Δt_{23}, (*d*) Δt_{03} y (*e*) Δt_{13}?

4-2. Las ecuaciones del movimiento de una partícula son $x = +10t - 20t^2$ y $y = -15t + 30t^2$, donde x e y están en metros y t en segundos. ¿Cuáles son las magnitudes y direcciones de (*a*) la velocidad inicial y (*b*) la aceleración? (*c*) Dibuje aproximadamente la trayectoria de la partícula.

4-3. En la Fig. 4-1, se imagina que el cuerpo partió del punto *a* y se movió a *b*, *c*, etc. Supóngase ahora, que el movimiento se invierte (o que el tiempo se invierte) y que el cuerpo parte de *l* y se mueve a *k*, *j*, etc., llegando finalmente al punto *a*. ¿Cómo son los vectores de (*a*) la velocidad y (*b*) la aceleración, comparados con los que aparecen en las Figs. 4-3 y 4-5? La inversión del sentido de la velocidad y la no inversión del sentido de la aceleración se basan en el hecho de que la velocidad es la *primera* derivada con respecto al tiempo del desplazamiento, y la aceleración es la *segunda* derivada con respecto al tiempo del desplazamiento. (*c*) ¿Cómo se comportará la derivada con respecto al tiempo de la aceleración cuando se invierte el tiempo?

4-4. Una pelota rueda sobre el borde de una mesa de 2.0 m de altura con una rapidez de 8.0 m/s. ¿A qué distancia horizontal de dicho borde de la mesa pegará la pelota contra el piso?

4-5. De acuerdo a la forma como se mueven los neutrones, uno que tenga la rapidez de 2,200 m/s (un neutrón térmico) es un neutrón lento. ¿Qué distancia tiene que recorrer ese neutrón para caer verticalmente 1.0 mm?

4-6. Un objeto se arroja con la rapidez inicial v_0 y la inclinación de θ sobre la horizontal desde un punto que se encuentra a la altura h sobre un plano horizontal. Demuestre que la rapidez con la que el objeto choca con el plano horizontal está dada por $(v_0^2 + 2gh)^{1/2}$, *independientemente del ángulo* θ, aunque sea positivo o negativo (arriba o abajo de la horizontal).

4-7. Se arroja un proyectil con la rapidez inicial de v_0 y con el ángulo θ con respecto a la superficie horizontal (*a*) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil (en términos de v_0, θ y g)? (*b*) ¿Cuál es el tiempo de vuelo de su movimiento completo? (*c*) Demuestre que su alcance horizontal está dado por (v_0^2/g) sen 2θ. (*d*) Demuestre que cualquier par de ángulos complementarios θ (como 20° y 70°) dan el mismo alcance (comprobado por primera vez por Galileo). (*e*) Demuestre que el alcance es máximo para $\theta = 45°$.

4-8. En la olimpiada de 1972 el lanzamiento de bala que triunfó fue de 21.18 m. ¿Cuáles eran (*a*) la rapidez inicial, (*b*) la altura máxima y (*c*) el tiempo de vuelo, si la bala se lanzó con el ángulo de 45° relativo a la vertical? Suponga que $g = 9.80$ m/s². Dé sus resultados con tres cifras significativas.

4-9. Un avión suelta una bomba desde una altura de 1,000 m; en el instante en que la soltó, el avión tenía la velocidad de 900 km/h y se movía con un ángulo de

60° con respecto a la vertical. (*a*) ¿Qué tiempo tarda la bomba en llegar al piso? (*b*) ¿Cuál es la rapidez y la dirección de la bomba en el momento del impacto? Suponga que $g = 10$ m/s².

4-10. (*a*) ¿Cuáles son los *dos* ángulos relativos a la horizontal a que deberá apuntarse un cañón para que el alcance horizontal del proyectil sea de 1,000 m, la velocidad en la boca del cañón es de 140 m/s? (*b*) Calcule el tiempo de vuelo para cada trayectoria de la pregunta (*a*).

4-11. Los cuerpos que caen libremente en la Luna tienen la aceleración debida a la gravedad de 1.6 m/s². ¿Cómo serán (*a*) la altura máxima (*b*) el tiempo de vuelo, y (*c*) el alcance de los proyectiles en la superficie de la Luna, comparados con los correspondientes valores en la Tierra?

4-12. Un bateo de béisbol a 45° de la horizontal apenas pasa sobre una pared de 21.0 pies de altura que se encuentra a 300 pies de la placa de bateo. Determine (*a*) La rapidez inicial de la pelota, (*b*) el tiempo que necesita para llegar a la pared y (*c*) la rapidez y la dirección con que pasa la pared. Suponga que el impacto del bat sobre la pelota se efectúa a 5 pies de altura sobre el piso y que $g = 32.0$ pies/s².

4-13. Un elevador tiene una fuente luminosa que lanza un rayo de luz horizontal hasta la pared opuesta que se encuentra a 3.0 m. La fuente de la luz es capaz de emitir partículas luminosas que se mueven con la rapidez de 3.0×10^8 m/s. ¿A qué aceleración constante hacia arriba se deberá mover el elevador para que el punto de luz que recibe la pared se desplace hacia abajo en 1.0 mm, como lo vería un observador que se encuentra en el elevador?

En realidad, un observador en un elevador cerrado no está capacitado para distinguir entre el movimiento acelerado hacia arriba que se describió, del efecto de una atracción gravitacional. El podría concluir que el rayo se desvió hacia abajo debido a su peso. La equivalencia entre el movimiento acelerado y la atracción gravitacional es la suposición básica de la teoría general de la relatividad; ya fue observada la desviación de la luz cuando pasa cerca del Sol, predicha por la teoría general.

4-14. Considérese la Fig. P4-14. Se aceleran horizontalmente partículas cargadas de electricidad a partir del reposo y entre dos placas verticales. Después las partículas entran en la región que hay entre dos placas horizontales, donde se aceleran en sentido vertical. Cuando las partículas por último chocan contra la pantalla, su desplazamiento vertical es de y. Demuestre que y no cambia si la *relación* de aceleraciones entre las placas, respectivamente verticales y

FIG. P4-14

horizontales no cambia. Debido a que la aceleración de una partícula cargada entre un par de placas eléctricamente cargadas es directamente proporcional a la carga eléctrica de la partícula, *cualquier* partícula cargada chocará en el mismo punto y (despreciando la caída debida a la gravedad, desde luego).

4-15. Un electrón que se mueve en sentido horizontal hacia la derecha con una rapidez de v_0 está entrando en la región comprendida entre dos placas metálicas eléctricamente cargadas, como se ve en el centro de la Fig. P4-14. La aceleración es constante y vertical en la región comprendida entre las placas paralelas y cero fuera de esa región. Demuestre que el desplazamiento y del electrón en una pantalla distante (relativa a su posición en la pantalla cuando la aceleración es cero) es directamente proporcional a la aceleración entre las placas. El desplazamiento y es proporcional a la aceleración entre las placas, la que a su vez es proporcional a la diferencia de potencial o voltaje, que hay entre las placas. Así, el desplazamiento y es una medida del voltaje aplicado y el aparato puede usarse como voltímetro.

4-16. Considere el arreglo mostrado en la Fig. P4-14. Electrones que tienen una velocidad horizontal de 1.0×10^6 m/s entran en la región que hay entre las placas horizontales, donde la aceleración es de 80×10^{13} m/s² hacia arriba. La dimensión horizontal de las placas es de 3.0 cm. La pantalla se encuentra a 20 cm a la derecha del extremo de la derecha de las placas. (*a*) Calcule la magnitud y la dirección de la velocidad de los electrones cuando salen de las dos placas paralelas. (*b*) Calcule el desplazamiento y del haz de electrones en la pantalla. (*c*) ¿Cuál es el tiempo de vuelo desde el momento en que el electrón entra en la región que hay entre las placas horizontales hasta que choca con la pantalla?

4-17. El radio de la Luna es de 1.74×10^6 m; la aceleración de la gravedad en su superficie de 1.6 m/s². ¿Cuál es el período de un satélite que orbite cerca de la superficie lunar?

4-18. Suponga que el piloto de un avión cohete quiere limitar su aceleración radial a $5\ g = 50$ m/s². ¿Cuál será el radio de curvatura mínimo admisible, si el piloto quiere cambiar de dirección mientras vuela

a 600 m/s? (Esta rapidez es representativa de los aviones supersónicos modernos.)

4-19. Un proyectil lanzando en sentido horizontal caerá la distancia vertical de $\frac{1}{2}gt^2$ en el tiempo t. Si el proyectil tiene la rapidez suficientemente alta, se convierte en satélite y la distancia de caída, $\frac{1}{2}gt^2$, será entonces exactamente igual a la distancia que se aparta la curvatura de la Tierra de la línea recta, debido a su forma esférica. Demuestre, a partir de la geometría de la Fig. P4-19, que la magnitud de la aceleración g es v^2/r, donde v es la rapidez del objeto y r el radio de curvatura. Este método alternativo para derivar las relaciones de la aceleración radial fue usado por Newton.

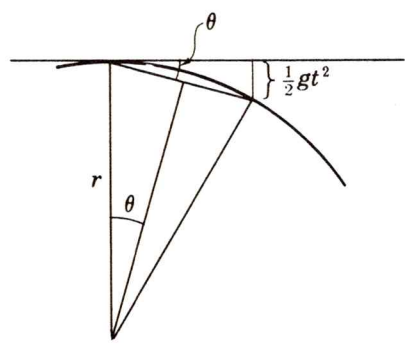


FIG. P4-19

4-20. (*a*) ¿Con qué rapidez debe tomar un automóvil una curva que tiene el radio de curvatura de 40 m para que su aceleración radial sea igual a g? (*b*) Suponga que el automóvil viaja con esta rapidez a lo largo de una carretera recta, pero sobre una loma que tiene el radio de curvatura de 40 m. ¿Qué comportamiento tendrán los objetos sueltos dentro del automóvil?

4-21. Una partícula se mueve en un círculo de radio r completando un ciclo en el tiempo T. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración promedio de la partícula en el tiempo (*a*) t y (*b*) $\frac{1}{2}T$?

4-22. Un volante gira a 1.0×10^3 rpm (revoluciones por minuto). ¿Cuál es la rapidez y la aceleración de un punto a (*a*) 1.0 cm y (*b*) 2.0 cm del eje de rotación?

4-23. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno se *imagina* un electrón que se mueve con una rapidez de 2.2×10^6 m/s en una órbita circular de 5.3×10^{-11} m de radio. (*a*) ¿Cuál es la aceleración radial del electrón? (*b*) ¿Cuántas revoluciones completa el electrón en 1 s?

4-24. Un disco fonográfico LP gira con la velocidad angular de $33\frac{1}{3}$ rpm. La distancia radial r del centro de rotación a la aguja cambia de un mínimo de 5.0 cm a un máximo de 15.0 cm. (*a*) ¿Cuál es la rapidez lineal de la superficie del disco relativa a la aguja para $r = 10.0$ cm, y (*b*) ¿Cuál es la distancia a lo largo del canal que representa una vibración de un sonido que tiene la frecuencia de 15 kHz (15,000 vibraciones por segundo)?

4-25. (*a*) ¿Cuál es la rapidez angular de la Tierra (en rad/s) debida a la rotación diaria? ¿Cuál es la velocidad instantánea de un punto de la superficie de la Tierra (*b*) en el ecuador y (*c*) a la latitud de ±60°? El radio medio de la Tierra es de 6.37×10^6 m.

4-26. Debido a que la Tierra gira alrededor de su eje, los objetos que están en reposo sobre su superficie tienen una aceleración radial hacia el eje de rotación. Calcule la aceleración radial de un objeto en las latitudes (*a*) 0°, (*b*) 45°, y (*c*) 90°, con g como unidad. El radio medio de la Tierra es 6.37×10^6 m.

4-27. Las órbitas de los planetas alrededor del Sol son casi circulares. Los radios medios y periodos (con dos cifras significativas) de algunos de los planetas son:

	Radio orbital (m)	*Periodo* (días)
Mercurio	5.8×10^{10}	88
Marte	2.3×10^{11}	690
Júpiter	7.8×10^{11}	4300
Saturno	1.4×10^{12}	11,000

(*a*) Demuestre que si la aceleración de cualquier planeta hacia el Sol es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al Sol R, la cantidad, R^3/T^2 tiene el mismo valor para todos los planetas, donde T es el periodo. (*b*) Demuestre que los datos anteriores corresponden a una aceleración radial inversa al cuadrado. (*c*) Usando el hecho de que el radio medio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es 1.5×10^{11} m, calcule el periodo de rotación de la Tierra y compárelo con el periodo conocido (1 año).

4-28. La Luna circunda a la Tierra una vez cada 27.3 días. Suponga que su distancia a la Tierra es de 240,000 mi. (*a*) ¿Cuál es la aceleración relativa a la de la Tierra? (*b*) Demuestre que la aceleración de la Luna es menor que g sobre la superficie de la Tierra por el factor $(60)^2$. (El radio orbital de la Luna es 60 veces el radio de la Tierra.)

4-29. Demuestre que la aceleración de una partícula que se mueve con una rapidez constante debe ser perpendicular a su velocidad instantánea usando el hecho de que $d(v^2)/dt = d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})/dt = 0$.

4-30. Una centrífuga es un aparato para separar materiales de acuerdo con sus densidades relativas.

Las partículas giran en una centrífuga de alta velocidad adquiriendo aceleraciones extraordinariamente altas. ¿Cuál es la aceleración centrípeta (con g como unidad) de una partícula en una centrífuga a la distancia de 5.0 mm del eje de rotación si da 10,000 vueltas por segundo?

4-31. ¿Cuál es la rapidez angular (en rpm) de las llantas de 30 plg de diámetro de un automóvil que se mueve a 60 mi/h, suponiendo que se mueve sin patinar? (*Sugerencia.* Vea la rueda que gira como un observador fijo al automóvil. Después que el eje de las ruedas se fija y la carretera se mueve hacia atrás con la rapidez de 60 mi/h. Si las ruedas no patinan en la carretera, la rapidez de un punto de la llanta que toque la carretera deberá ser de 60 mi/h.

Capítulo

5

LEYES DE LA INERCIA, CONSERVACION DE LA MASA Y CONSERVACION DEL IMPETU

En este capítulo iniciaremos nuestro estudio de la mecánica, la rama de la Física que al mismo tiempo que es la más básica es la más antigua. La mecánica constituye el fundamento de toda la física y la ingeniería, y con los refinamientos de la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad desarrollados en este siglo, la mecánica es la base de nuestro conocimiento actual del átomo, su núcleo y de sus constituyentes elementales.

Nos referiremos a la *mecánica clásica*. Esta trata de los movimientos y las interacciones de los objetos ordinarios —objetos que son grandes si se les compara con el tamaño de los átomos (10^{-10} m) y que se mueven con velocidades apreciablemente menores a la rapidez de la luz (3×10^8 m/s). Nos adelantaremos a la cinemática, que sólo describe el movimiento de los objetos, pero que no relaciona el movimiento de uno con el de otro, ni se refiere a las causas del movimiento: Esta es la función de la mecánica, o dinámica.

La mecánica clásica tuvo sus orígenes en los estudios de Galileo Galilei (1564-1642) y, después, de Isaac Newton (1642-1727). Galileo fue el primer "físico" en el significado moderno de la palabra. Sus contribuciones específicas a la física y la astronomía fueron enormes*. Pero quizás sea de mayor importancia la

*Algunas de las contribuciones de Galileo a la física: el reconocimiento de la aceleración constante de todos los cuerpos al caer libremente, la cinemática del movimiento de los proyectiles, incluyendo su descomposición en componentes independientes, las transformaciones galileanas de las coordenadas y la velocidad, la independencia entre el periodo de un péndulo de su masa y de su amplitud, y la ley de la inercia. En la astronomía: el telescopio galileano; la observación de las fases de Venus, los anillos de Saturno, las lunas de Júpiter, las manchas solares, el brillo de la Tierra (sobre la Luna), la altura de las montañas lunares; la observación de la Vía Láctea como un grupo discreto de estrellas; y la configuración del modelo de Copérnico del universo heliocéntrico.

estrategia y el programa de Galileo para el ataque de los problemas de física, que permanece esencialmente sin cambio y con igual éxito en la física actual.

Galileo insistía en que primero estudiemos cosas simples por observación controlada (experimento), eliminando o disminuyendo los disturbios no esenciales, y que los resultados deben expresarse en el lenguaje compacto y preciso de las matemáticas. Estos elementos de la estrategia de la física se ilustran en el movimiento de los cuerpos que caen. Primero estudiamos un cuerpo que cae en un experimento en el que el efecto de la alteración y complicación de la resistencia del aire se disminuyen al mínimo. Entonces, el hecho de que los cuerpos que caen tienen aceleración constante se refleja en el resultado experimental de que el desplazamiento de un cuerpo que cae del reposo es proporcional, al cuadrado del tiempo transcurrido ($y = \frac{1}{2}gt^2$). El mismo procedimiento se aplica cuando estudiamos una situación más simple, el movimiento de un cuerpo sobre un plano horizontal liso. La fricción, que de otra manera oscurece e interfiere al experimento, debe eliminarse o disminuirse al mínimo. Consideraciones de esta clase llevaron a Galileo a dar respuestas simples y profundas a preguntas que habían preocupado a los pensadores por siglos.

¿Qué se necesita para mantener a un cuerpo en reposo? *Nada.* ¿Qué se necesita para mantener a un cuerpo en movimiento? Dice Galileo: *Nada.* Esencialmente esto es la *ley de la inercia.*

5—1 LA LEY DE LA INERCIA

Un disco de hockey se desliza en una superficie horizontal y lisa de hielo. La fricción entre el disco y la superficie es pequeña, pero no se puede despreciar completamente. Si se encuentra en reposo, el disco permanece en reposo; si se pone en movimiento, sin que se le afecte después, el disco se mueve en línea recta por una distancia considerable antes de que finalmente quede en reposo.

Suponga ahora, que el disco se construye de tal manera que flote en el aire sobre una superficie horizontal lisa y que los efectos de la fricción se reduzcan drásticamente. Un tipo simple de un disco suspendido en el aire se muestra en la Fig. 5-1. Cuando un disco como este se pone en movimiento, se desliza por una distancia impresionantemente grande antes de ponerse en reposo. Podemos por ello imaginar, que si el disco se encontrara completamente aislado de alteraciones externas, continuaría en movimiento indefinidamente en línea recta con rapidez constante.

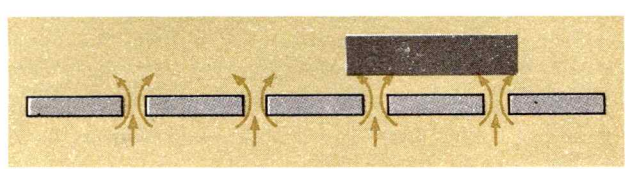


FIG. 5-1. Un tipo simple de disco suspendido en el aire.

Observaciones de esta clase nos llevan a la generalización: *Si un objeto se aisla de la influencia externa, su velocidad es constante, tanto si es nula como si no es nula. Un cuerpo aislado continúa en movimiento uniforme —a lo largo de una línea recta, recorriendo distancias iguales en intervalos de tiempo iguales.* (Vea la Fig. 5-2.) Esta es la *ley de la inercia,* en algunas ocasiones se dice que es la primera de las tres leyes de Newton del movimiento.

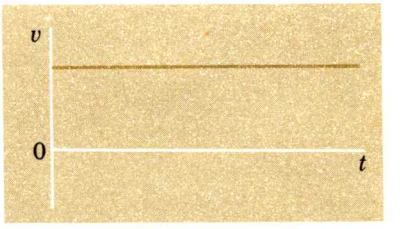


FIG. 5-2. Gráfica de velocidad-tiempo observada para el movimiento de un disco flotando sobre una capa de aire y sobre una superficie horizontal lisa.

Nos hemos referido antes a una influencia externa, o fuerza, que actúa sobre el objeto. En el Cap. 7 daremos una definición precisa de la fuerza. Para nuestros propósitos actuales, una fuerza externa es una influencia que puede hacer que un cuerpo que se mueve en una superficie lisa sin fricción se aparte de su movimiento con velocidad constante.

Al marco de referencia en el que se encuentre un cuerpo que al no ser afectado por agentes exteriores se encuentra que tiene velocidad constante, se le llama *marco inercial.* La ley de la inercia se verifica cuando un observador se encuentra en un marco de referencia inercial, pero no si se encuentra en un marco de referencia que se acelere relativamente a un marco inercial. La superficie de la Tierra aproximadamente es un marco inercial —aproximadamente porque la Tierra gira sobre su eje y da vuelta alrededor del Sol. El marco de referencia más cercano a ser perfectamente inercial es uno que se encuentre en reposo con respecto a las estrellas fijas.

En el Cap. 6 consideraremos cómo se relacionan las velocidades cuando se observan en dos marcos de referencia diferentes con movimiento relativo entre sí con velocidad constante. Por lo pronto, sea suficiente decir que, si una partícula tenía una velocidad constante cuando se observaba en un marco de referencia, tendrá una velocidad diferente, pero aún constante, cuando se le observa en un segundo marco de referencia que se mueva a velocidad constante relativa al primero. Así, si un observador se mueve relativamente a la Tierra con la misma rapidez y en la misma dirección que un disco flotante, él observa que el disco se encuentra en reposo. Recíprocamente, en su marco de referencia móvil, este observador vería que un disco en reposo sobre la Tierra, se mueve con velocidad constante que no es nula. Lo que se diga para el movimiento uniforme es equivalente a lo que se diga para el reposo. Desde el punto de vista de la ley de la inercia, el movimiento es tan "natural" como el reposo.

Mientras no se indique específicamente lo contrario, consideraremos de aquí en adelante que todas las observaciones que hagamos se llevarán a cabo desde el punto de vista de un marco inercial. En realidad, las leyes de la física ordinariamente se aplican sólo en marcos inerciales.

5—2 MASA INERCIAL

Los experimentos con discos suspendidos en el aire nos llevan a la conclusión de que cualquier objeto aislado, cuando se observa

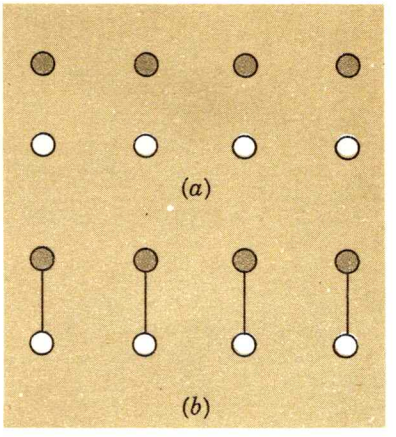


FIG. 5-3. Dos discos se mueven hacia la derecha con la misma velocidad constante, (*a*) sin ninguna conexión entre ellos y (*b*) conectados con una varilla.

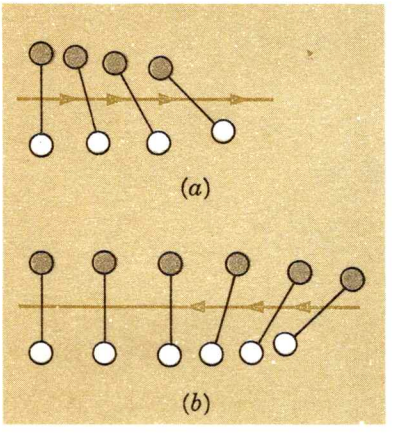


FIG. 5-4. La varilla de unión se empuja en forma brusca en su centro. (*a*) ambos discos se encontraban inicialmente en reposo. (*b*) Los dos discos se movían inicialmente hacia la derecha con rapidez constante y el empujón sobre la varilla de conexión es hacia la izquierda. El disco sombreado muestra una resistencia mayor a cambiar en su estado de reposo o de movimiento. Las flechas indican la dirección del impulso.

desde un marco de referencia inercial, mantiene un estado de velocidad constante. A esta propiedad de un objeto se llama su inercia. Nuestra labor ahora es la de desarrollar una medida cuantitativa de la inercia.

Considere dos discos sin fricción diferentes que se ponen en movimiento en la misma dirección y con la misma rapidez sobre una superficie lisa horizontal. Mientras los discos permanecen aislados, se mueven lado con lado, manteniendo la misma separación relativa. (Vea la Fig. 5-3.) Si unimos los dos discos con una varilla rígida delgada, nada cambia. Dándoles la misma velocidad, de nuevo se mueven juntos y la varilla no gira.

¿Qué pasa si empujamos la varilla por su centro? En general la varilla gira, como se ve en la Fig. 5-4. El disco sombreado en la figura se resiste más a cambiar en su estado de movimiento que el disco no sombreado. Si ambos discos se encontraban originalmente en reposo, el disco sombreado se queda atrás del disco no sombreado cuando se empuja la varilla en el centro, Fig. 5-4*a*. Si los discos estaban originalmente en movimiento y se empuja en el centro la varilla para retardar el movimiento, el disco sombreado se adelanta al disco no sombreado, Fig. 5-4*b*. En pocas palabras, el disco sombreado tiene una resistencia mayor al cambio de velocidad. Se dice que tiene una *inercia* mayor, o *masa inercial* mayor, que el disco no sombreado. De aquí en adelante llamaremos a la masa inercial simplemente "la masa". Note que *no* es necesario que el empuje que recibe el centro de la varilla le dé a este una aceleración *constante;* todo lo que se necesita es que la velocidad de ese punto cambie.

Entonces, ¿cuándo tienen los dos objetos la misma masa? Cuando los dos objetos se mueven juntos sin que ninguno se adelante ni se atrase, por *definición,* son idénticos en su masa. (Véase la Fig. 5-5.) Los objetos tienen masas iguales porque presentan la misma respuesta inercial a un cambio de su estado de movimiento.

El sencillo aparato que se usó aquí para comparar masas es una *balanza inercial.* Si dos masas se balancean cuando se comparan en un marco inercial, se balancearán en cualquier otro marco inercial, ya sea en el marco inercial (aproximado) de la superficie de la Tierra, o en un marco de referencia que se mueva con velocidad constante relativa a la Tierra, o aún en un marco inercial que se encuentre en el espacio interestelar (donde, desde luego, no se necesita una superficie horizontal lisa). La masa es una propiedad intrínseca de cada objeto. Esto es, a diferencia del *peso* del objeto (sobre el que se tratará ampliamente después), es la misma en todos los puntos del espacio. La masa de un objeto es independiente de otras propiedades como su temperatura, su forma y su color. La masa solamente es la medida cuantitativa de la inercia.

Una balanza inercial como la de la Fig. 5-5 no es un

instrumento conveniente. Cuando dos objetos tienen la misma masa inercial, como se establece experimentalmente por medio de una balanza inercial, no nos sorprendemos (pero deberíamos hacerlo) al encontrar que los dos objetos se balancean cuando se colocan en una balanza de dos platillos muy sensible, como se ve en la Fig. 5-6. Esto es, si dos objetos con masa inercial idéntica se colocan simultáneamente en los dos platillos de una balanza, el fiel, como la varilla de la balanza inercial, no gira. Una balanza de platillos es una *balanza gravitacional.* En realidad, como veremos después, la equivalencia de la balanza inercial, la que compara la inercia de los cuerpos, y la balanza gravitacional, que compara las fuerzas gravitacionales que reciben los cuerpos, no es obvia. La equivalencia de la masa inercial medida por medio de una balanza inercial y la masa gravitacional medida por una balanza gravitacional, es un resultado sumamente notable y profundo.

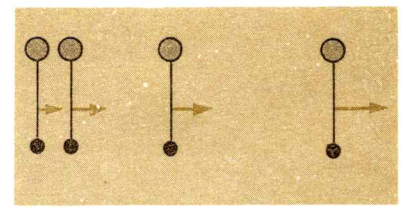


FIG. 5-5. Una balanza inercial. Ambos objetos tienen la misma masa inercial si se mueven juntos cuando se empuja el punto central de la varilla.

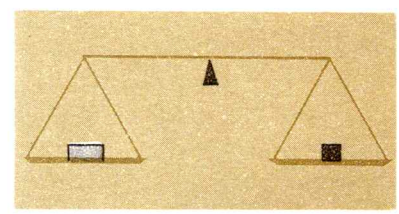


FIG. 5-6. Una balanza gravitacional. Ambos objetos tienen la misma masa gravitacional si la balanza permanece horizontal.

Las masas se suman como cantidades escalares. La masa de un cuerpo es igual a la suma de las masas de sus partes. Tampoco es obvia a priori esta aseveración; debe ser confirmada experimentalmente, y lo ha sido (después de todo, los volúmenes físicos *no* siempre se suman como escalares: 1.0 m^3 de agua mezclados con 1:0 m^3 de alcohol *no* dan lugar a 2.0 m^3.) La aditividad de la masa se establece nada más porque la masa de un objeto compuesto no depende de la forma como están unidas sus partes constituyentes. La masa de las partes usadas, es igual a la masa del todo. Por ejemplo, la masa de la molécula de agua, dentro de los errores experimentales, es igual a la masa de dos átomos de hidrógeno y un átomo de oxígeno. Así, la aditividad escalar de las masas se verifica extremadamente bien aun en los dominios atómicos. Sin embargo, se han registrado algunas diferencias en los dominios nucleares, debidas a la equivalencia masa-energía relativista.

5—3 EL PATRON DE MASA

Como en el caso de las unidades fundamentales de longitud y de tiempo, debemos escoger, arbitrariamente, algún objeto como patrón de masa, el patrón de masa, con respecto al cual se relacionan todas las masas al fin y al cabo, es un cilindro de platino-iridio cuidadosamente conservado en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas cercana a París. La masa de este cilindro es, *por definición,* exactamente *un kilogramo* (1 kg). Se han hecho réplicas del kilogramo patrón y una de ellas se conserva protegida por una campana doble de vidrio en el U.S. Bureau of Standards, es el patrón de masa para los Estados Unidos de Norteamérica*.

*Otra réplica se conserva en la Oficina de Normas de la Secretaría de Industria y Comercio en México, D. F., que es el patrón de masa en la República Mexicana. (N. del T.)

El kilogramo es la unidad de masa del sistema mks (*m*etro-*k*ilogramo-segundo) o Sistema Internacional de Unidades (SI).

La unidad familiar, la libra, aparece como una unidad de peso; *no* de masa, en el Sistema de Unidades habitual de los E.U.A., (o Británico). Aproximadamente, 1 lb corresponde a 454 g; exactamente, una libra se define como el peso de una masa de 0.45359237 kg localizada en un lugar donde $g = 32.\ 17398$ pie/s^2.

Debido a que las masas de los átomos son muy pequeñas, se emplea para medirlos un sistema especial de unidades. La unidad básica se llama *unidad atómica de masa,* u. Por definición, la masa de un átomo del isótopo 12 del carbono eléctricamente neutro, es exactamente de 12 u. Las mediciones indican que 1 u = 1.660×10^{-27} kg.

5—4 LA LEY DE LA CONSERVACION DE LA MASA

Supóngase que construimos un recipiente completamente a prueba de fugas, a través de cuyas paredes no pueden pasar partículas, ni hacia adentro, ni hacia afuera. Independientemente de la naturaleza del contenido y a pesar de los cambios químicos o de otro tipo que se lleven a cabo en su interior, la masa total de este sistema aislado es constante, cuando se mide, por ejemplo, con una balanza de platillos. Esta es la clásica *ley de la conservación de la masa,* la primera de varias leyes fundamentales de conservación de la física: La masa total de un sistema aislado es constante.

Todos los objetos a una temperatura finita radían energía en forma de calor, luz y otros tipos de radiación electromagnética. Radiación que también puede ser absorbida por los cuerpos. Como lo indica la teoría de la relatividad, a estas radiaciones se les asocia masa. En su forma moderna, más general, la ley de la conservación de la masa se puede enunciar como sigue: La masa de un sistema aislado del que, o hacia el que, no pueden fugarse partículas *o radiación,* es constante. Sin embargo, la ley de la conservación de la masa incluye la masa asociada con la radiación mientras que el recipiente sea a prueba de fugas o el sistema esté aislado de la radiación.

La masa equivalente a la radiación, ordinariamente es tan pequeña, que puede despreciarse. Por ejemplo, la luz de un iluminador fotográfico pierde alrededor de 10^{-16} kg/s en forma de radiación; en cambio, el Sol pierde 4.2×10^9 kg/s (de su masa total de 10^{30} kg) en forma de luz y calor. (Véase el Cap. 35.)

5—5 CONSERVACION DEL IMPETU EN CHOQUES DE FRENTE

Ya hemos considerado la situación física más sencilla que se puede concebir, la de una sola partícula aislada. Su velocidad es constante. Vamos ahora a tratar de la situación que le sigue en complejidad, la de dos partículas aisladas del resto del universo, pero que interactúan entre sí. En el estudio de la interacción más

sencilla entre dos partículas —un choque de frente— llegaremos a obtener la ley fundamental de la conservación del ímpetu.

Consideremos un experimento sencillo, en el que un objeto choca de frente con otro. Ya hemos adelantado que cuando están en movimiento sobre una superficie horizontal sin fricción, ambos se mueven sin cambio en su velocidad. Cada uno de los objetos sólo se apartará de su velocidad uniforme al grado en que interactúe —digamos que choque— con otro.

Un objeto de 1.00 kg que se movía inicialmente a 2.00 m/s hacia la derecha, choca con un objeto de 3.00 kg que se encontraba originalmente en reposo. Los resultados observados se indican en la Fig. 5-7*a*; el objeto más ligero retacha hacia la izquierda a 0.70 m/s y el objeto más masivo se pone en movimiento hacia la derecha a 0.90 m/s. Las velocidades se grafican como una función del tiempo en la Fig. 5-7*b* y *c*. Cada uno de los objetos tenía una velocidad constante antes del choque y tiene una velocidad constante (pero diferente) después del mismo. Las velocidades cambian sólo mientras los objetos interactúan. La velocidad del objeto de 1.00 kg cambia en $\Delta v_1 = -2.70$ m/s; el

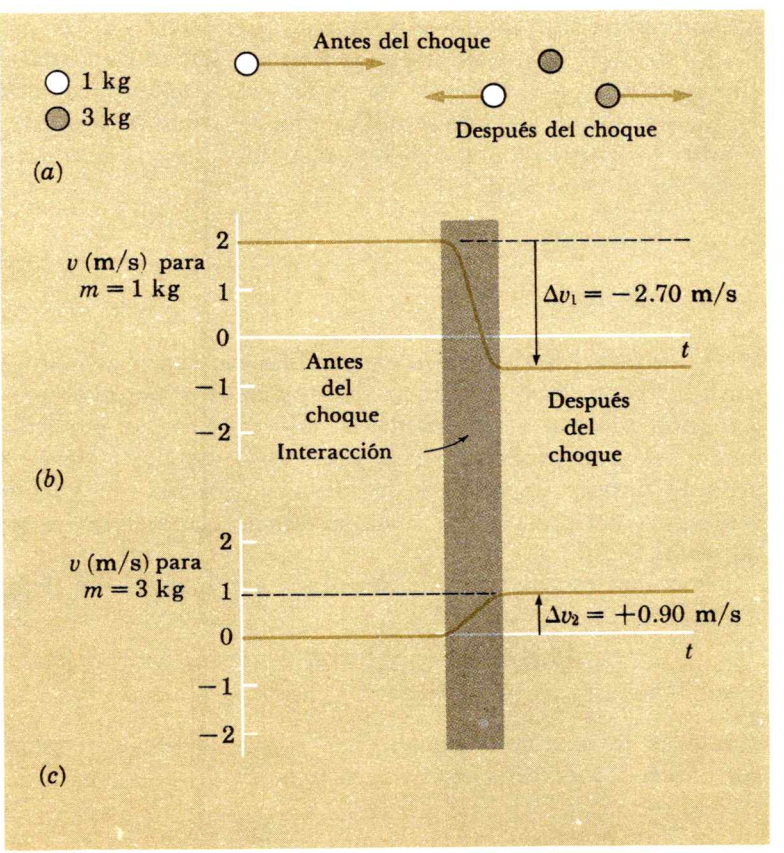


FIG. 5-7. (*a*) Velocidades de dos objetos antes y después de un choque de frente. (*b*) Gráfica de velocidad-tiempo del objeto de 1.0 kg. (*c*) Gráfica de velocidad-tiempo del objeto de 3.0 kg.

correspondiente cambio de velocidad para el objeto de 3.00 kg es $\Delta v_2 = 0.90$ m/s (los subíndices 1 y 2 designan los objetos de 1 y 3 kg, respectivamente). Los cambios de velocidad Δv_1 y Δv_2 de las masas m_1 y m_2 se encuentran relacionados en una forma muy simple:

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{-2.70 \text{ m/s}}{0.90 \text{ m/s}} = -3.00$$

y

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{3.00 \text{ kg}}{1.00 \text{ kg}} = 3.00$$

esto es

$$m_1 \Delta v_1 = -m_2 \Delta v_2$$

o

$$m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2 = 0 \qquad (5\text{-}1)$$

Experimentos adicionales establecen que el resultado sencillo expresado en (5-1) también es válido para otros choques de frente. Realmente, se verifica para *todos* los choques, independientemente de la naturaleza de los objetos que interactúan, siempre que el sistema, como un todo, esté aislado.

La Ec. (5-1) expresa una notable regularidad de la naturaleza que merece el nombre de *ley física*. Esta ley puede representarse en forma más simple cuando se define una cantidad **p** conocida con el nombre de *ímpetu lineal* del cuerpo, equivalente al *producto de la masa por la velocidad.*

$$\text{Impetu lineal} = \mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (5\text{-}2)$$

El ímpetu lineal, o simplemente ímpetu (para acortar) es una cantidad vectorial (el producto de un escalar m por el vector **v**). Su dirección y sentido son los de la velocidad de la partícula y su magnitud es el producto de la masa y la rapidez. (Véase la Fig. 5-8.) El ímpetu lineal tiene las dimensiones ML/T. Una unidad apropiada para el ímpetu lineal es kilogramo-metro por segundo (kg-m/s).

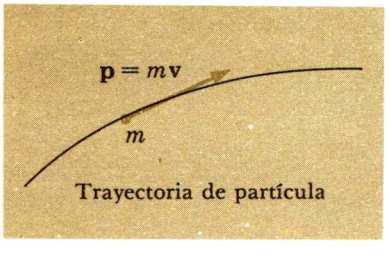


FIG. 5-8. Impetu lineal **p** de una partícula de masa m y velocidad **v**.

Podemos escribir (5-1) en términos del ímpetu. Por definición:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad \Delta\mathbf{p} = \Delta(m\mathbf{v}) = m\,\Delta\mathbf{v}$$

donde en la última parte se supone que la masa m permanece constante. La Ec. (5-1) toma la forma

$$\Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2$$

o
$$\Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = 0 \qquad (5\text{-}3)$$

La Ec. (5-3) dice: Cuando dos objetos aislados interactúan entre sí, la pérdida en el ímpetu de un objeto es igual a la ganancia en el ímpetu del segundo objeto. O, el cambio total en el ímpetu del sistema es cero. Un choque es un proceso en el que el ímpetu se transmite de un cuerpo a otro, sin cambio en el ímpetu total del sistema. Así, si $\mathbf{p}_1$ es el ímpetu del objeto 1 y $\mathbf{p}_2$ el del objeto 2, *el ímpetu total del sistema aislado es constante:*

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{constante (en dirección y magnitud)} \qquad (5\text{-}4)$$

Esta es la ley de la *conservación del ímpetu.*

Regresando al ejemplo original (Fig. 5-7), ahora graficamos el ímpetu vs. el tiempo. (Véase la Fig. 5-9.) El objeto de 1.00 kg perdió un ímpetu de 2.70 kg-m/s hacia la derecha, mientas que el objeto de 3.00 kg ganó el mismo ímpetu hacia la derecha. No hay cambio en el ímpetu total del sistema.

$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 =$ 2.00 kg-m/s hacia la derecha *antes* y *después* del choque.

La Fig. 5-9 muestra, además, que el ímpetu total es el mismo, no sólo antes y después del choque, sino también en todos los instantes durante éste.

La autoridad y generalidad de la ley de la conservación del ímpetu se puede enfatizar con amplitud. Siempre que las partículas estén aisladas de la influencia externa, el ímpetu total no cambia, independientemente de los detalles o aun del conocimiento de la interacción. Desde luego, después nos referiremos a estos detalles. Pero, ya sea que el choque sea "blando" (el ímpetu cambia lentamente) o "duro" (el ímpetu cambia rápidamente), o que las partículas se separen después del choque (como las pelotas de billar) o se mantengan juntas como un solo objeto compuesto (como dos trozos de plastilina), o que se "toquen" o que simplemente se acerquen (como en el caso de la repulsión entre imanes) - en resumen, en cualquier circunstancia— para un sistema aislado el ímpetu total **P** que entra al choque es igual al ímpetu total que sale.*

*Sin embargo, la relación $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ para el ímpetu lineal se restringe a velocidades mucho menores que la de la luz, 3×10^8 m/s. Para rapideces altas, la relación correcta para la cantidad vectorial p que se conserva en todos los choques en un sistema aislado es $\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}/\sqrt{1 - (v/c)^2}$, donde c es la rapidez de la luz y m_0 denota la llamada masa en reposo, la masa de un objeto con la rapidez cero. Esta expresión para el *ímpetu relativístico* se reduce a la relación clásica del ímpetu $\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}$, sólo para velocidades mucho menores que la de la luz, esto es $v/c \ll 1$. Por ejemplo, con v = 30 000 km/s, v/c = 1/10, y el denominador difiere de 1 en solo 0.5%. La ley de la conservación del ímpetu, Ec. (5-5), permanece válida a todas las rapideces. En la Sec. 35-2 se encuentra un estudio más detallado del ímpetu relativista.

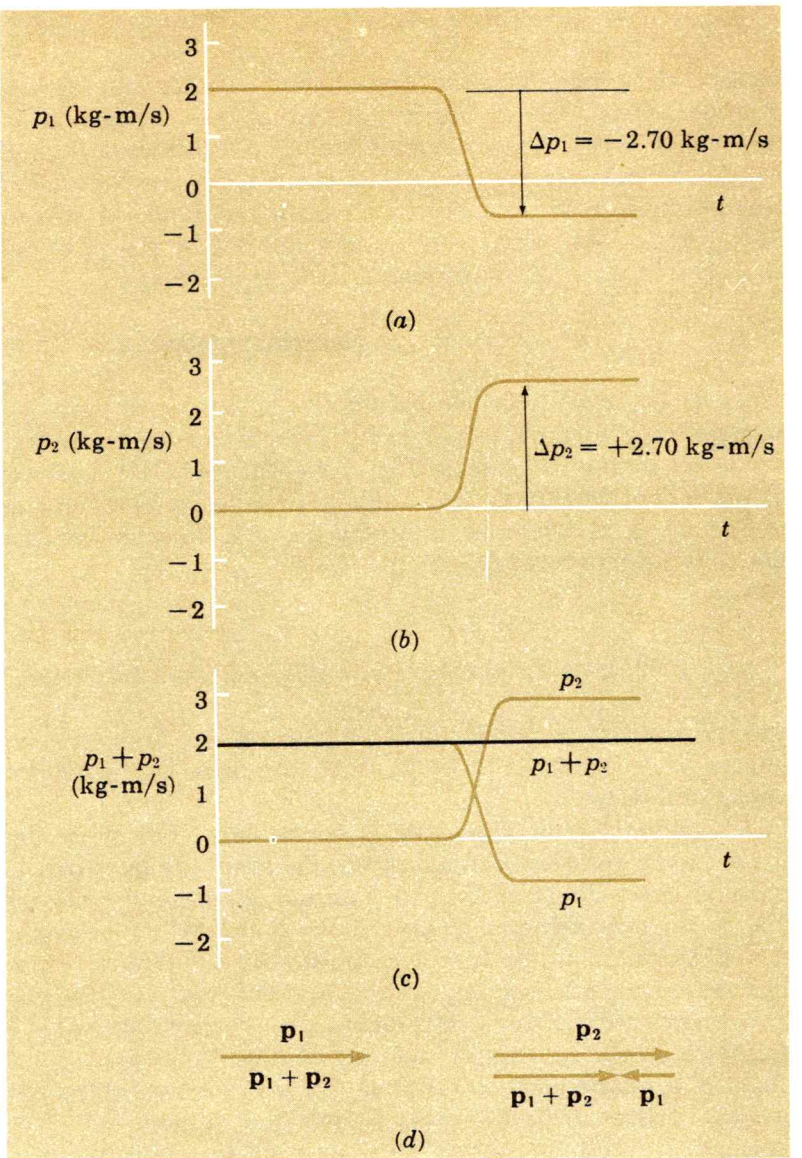


FIG. 5-9. Gráfica de ímpetu lineal correspondiente al choque de la Fig. 5-7 para (*a*) el objeto de 1.00 kg, (*b*) el objeto de 3.0 kg, (*c*) el ímpetu lineal del sistema de los dos objetos. (*d*) Vectores del ímpetu lineal antes y después del choque.

$$\mathbf{P} = \Sigma \mathbf{p}_i = \text{constante (en magnitud, dirección y sentido)} \quad (5\text{-}5)$$

Ejemplo 5-1

Un objeto que se encontraba inicialmente en reposo explota en dos pedazos con las masas m_1 y m_2, respectivamente. ¿Cómo se relacionan entre sí las velocidades de los dos pedazos?

Una explosión es simplemente un choque en el que los dos objetos que interactúan se encuentran inicialmente en reposo. Aquí el ímpetu total inicial es cero, y debe permanecer igual a cero.

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{v_2}{v_1}$$

Las rapideces se encuentran en razón inversa de las masas. El signo menos significa que los dos pedazos deben volar en direcciones opuestas. Para un disparo de rifle, la rapidez de la bala excede al retroceso del rifle por el mismo factor en el que la masa del rifle excede a la de la bala. Si las dos masas son iguales, $m_1 = m_2$, las velocidades son iguales en magnitud y dirección, pero de sentido contrario, $v_1 = -v_2$. Esto se puede usar como una prueba para la igualdad de las masas. Si dos pedazos vuelan con igual rapidez, sus masas deben ser iguales. Asimismo, si dos pedazos vuelan al mismo tiempo con rapideces iguales y se juntan para formar un objeto compuesto, que resulta en reposo, sabremos que los dos pedazos tienen masas iguales.

Ejemplo 5 2

Una bala de 5.00 g se dispara horizontalmente hacia un bloque de 10.0 kg que se encontraba en reposo sobre una superficie lisa horizontal. La bala quedó en reposo dentro del bloque, el cual se desplazó a 25.0 cm/s. ¿Cuál es la rapidez original de la bala?

La ley de la conservación del ímpetu demanda que el ímpetu de la bala antes del choque sea igual al ímpetu del bloque (y la bala) después del choque. Si m y v son la masa y la rapidez iniciales de la bala, respectivamente, y M y V la masa del bloque y la rapidez final, respectivamente, se tiene:

$$mv = (M + m)V$$

$$v = \frac{(M + m)V}{m} = \frac{(10.0\ \text{kg} + 5.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})\,(0.25\ \text{m/s})}{5.00 \times 10^{-3}\ \text{kg}} = 500\ \text{m/s}$$

Ejemplo 5-3

(*a*) Una esfera ligera de masa m moviéndose a una rapidez v golpea a una esfera masiva de masa M en reposo. La esfera ligera retacha con una rapidez casi igual. ¿Cuál es la rapidez V de la esfera masiva después del choque?

La conservación del ímpetu requiere que:

Impetu antes del choque = ímpetu después del choque

$$m\mathbf{v} = M\mathbf{V} - m\mathbf{v}$$

$$V = \frac{2mv}{M}$$

donde los símbolos representan las mismas cantidades que en el Ej. 5-2.

(*b*) Suponga ahora, que la esfera ligera se adhiere a la esfera masiva. ¿Cuál es la rapidez V' de la esfera masiva?

$$m\mathbf{v} = (M + m)\mathbf{V}' \approx M\mathbf{V}' \quad \text{porque } m \ll M$$

$$V' = \frac{mv}{M}$$

Comparando V' en la parte (*b*) con V en (*a*), vemos que cuando la esfera ligera se adhiere a la esfera masiva ésta se mueve con la mitad de la rapidez que tiene cuando retacha. Si la esfera ligera errara el tiro, transmitiría un ímpetu igual a cero. Cuando se adhiere, transmite el ímpetu mv y cuando retacha, el ímpetu transmitido es de 2 mv.

5—6 CONSERVACION DEL IMPETU EN DOS O TRES DIMENSIONES

La conservación del ímpetu no sólo se aplica a los choques de frente, en los que las partículas que interactúan viajan a lo largo de una sola línea, sino también al tipo más general de choque en el que las velocidades de las partículas pueden diferir en dirección. Los experimentos demuestran que la *suma vectorial* de los ímpetus de las partículas individuales de cualquier sistema aislado es constante.

Realmente, sólo esta observación nos permite hablar del ímpetu como una cantidad vectorial y escribir en general $\mathbf{P} = \Sigma\mathbf{p}_1$ = constante.

Cosidere el choque indicado en la Fig. 5-10. Aquí dos partículas se acercan entre sí, interactúan con una fuerza de

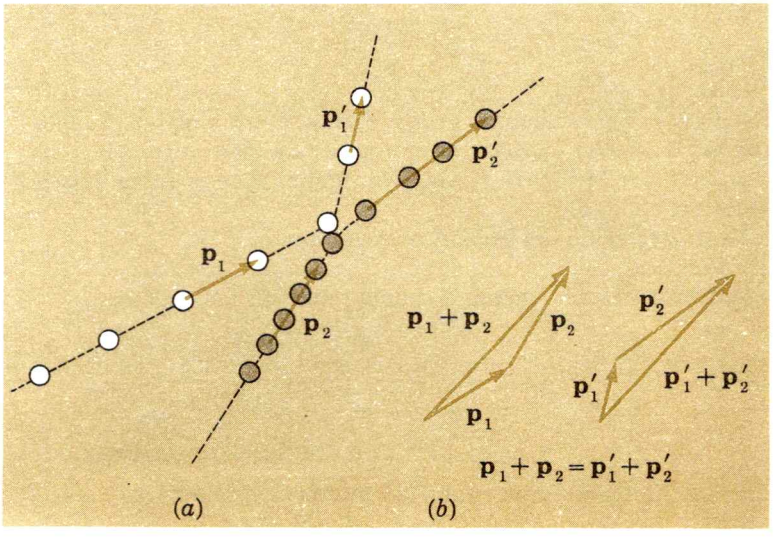


FIG. 5-10. Dos objetos en choque. El vector ímpetu total del sistema es constante.

repulsión y después se separan en diferentes direcciones. A distancias suficientemente alejadas del lugar de la interacción, cada partícula está aislada de la otra y se mueve en línea recta con ímpetu constante. Cuando interactúan, los ímpetus de ambas partículas cambian, tanto en magnitud como en dirección. Finalmente se separan moviéndose en líneas rectas. En cada instante, el ímpetu total del sistema es constante.

Como indican los vectores del ímpetu, el ímpetu total antes del choque, $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, es igual en dirección, sentido y magnitud al ímpetu total después del choque, $\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'$:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'$$

Como el ímpetu es un vector, y cualquier vector puede reemplazarse por sus componentes, sabemos no sólo que el vector ímpetu total de un sistema aislado es constante en magnitud dirección y sentido, sino también que la suma algebraica de las componentes del ímpetu de todas las partículas a lo largo de *cualquier dirección* en el espacio también es constante. Específicamente, si

$$\Sigma \mathbf{p}_i = \text{vector constante}$$

se tiene $\Sigma p_{ix} = \text{una constante}$

y $\Sigma p_{iy} = \text{una constante}$

donde p_{ix} y p_{iy} son las componentes X e Y de $\mathbf{p}_i$. (Se ignoran las componentes Z, porque el movimiento se confina al plano XY.)

Ejemplo 5-4

Un paquete que se encontraba originalmente en reposo explota en tres pedazos, todos con la misma masa. Una parte A vuela hacia el oeste a 80 m/s; otra, B vuela hacia el sur a 60 m/s. ¿Cuáles son (a) la rapidez v_C y (b) la dirección θ, con respecto al este, de la tercera parte C?

El ímpetu total del sistema inicialmente es cero y se mantiene nulo durante y después de la explosión. Por lo que

$$0 = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B + \mathbf{p}_C$$

y los vectores ímpetu están dispuestos como se indica en la Fig. 5-11.

Después del choque las componentes del ímpetu en la dirección este-oeste deben sumar algebraicamente cero, lo mismo que en la dirección norte sur y en la dirección perpendicular al plano del papel. La componente C del ímpetu perpendicular al papel debe ser cero; así, C se mueve en el plano de A y B. Tomando al este como positivo y al oeste como negativo, tenemos para las componentes este-oeste del ímpetu:

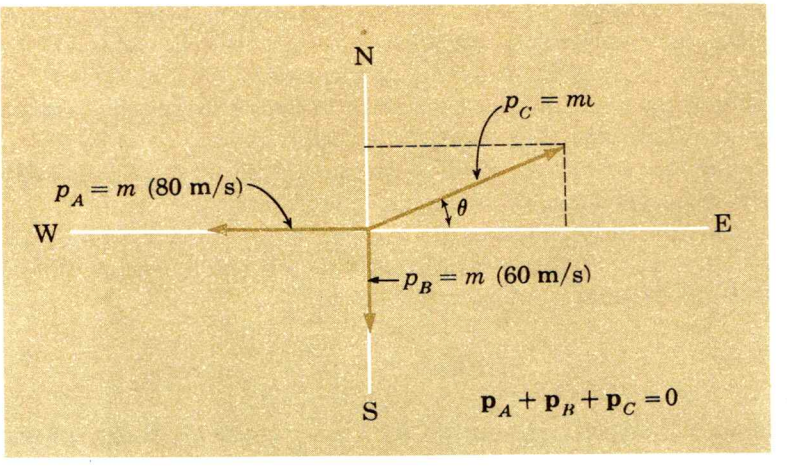


FIG. 5-11. Un paquete explota en tres partes con los ímpetus p_I, p_{II} y p_{III}, respectivamente.

$$0 = mv\cos\theta - m(80\text{ m/s})$$

Asimismo, para las componentes norte-sur,

$$0 = mv\,\text{sen}\,\theta - m(60\text{ m/s})$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera se obtiene

$$\tan\theta = \tfrac{60}{80} = 0.75$$

$$\theta = 37^\circ \text{ norte del este}$$

La primera ecuación da

$$v = \frac{80\text{ m/s}}{\cos 37^\circ} = 100\text{ m/s}$$

Ejemplo 5-5

Un objeto A de 1.0 kg con una velocidad de 4.0 m/s hacia la derecha golpea a un segundo objeto B de 3.0 kg que se encontraba originalmente en reposo. En el choque A se desvía de su dirección original en un ángulo de 50°; su rapidez después del choque es de 2.0 m/s. ¿Cuáles son (*a*) el ángulo θ de la velocidad de B después del choque con respecto a la dirección original de A y (*b*) la rapidez v'_B de B después del choque?

El sistema no está sujeto a fuerzas externas y la conservación del ímpetu demanda que

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}'_A + \mathbf{p}'_B$$

como se ve en la Fig. 5-12. donde $\mathbf{p}_A$ y $\mathbf{p}'_A$ son los ímpetus de A antes y después del choque, respectivamente, y $\mathbf{p}'_B$ es el ímpetu de B después del choque. El vector de ímpetu total es constante en todo el choque. Por lo tanto, la suma algebraica de las componentes de los ímpetus de A y B a lo largo de cualquier dirección dada también es

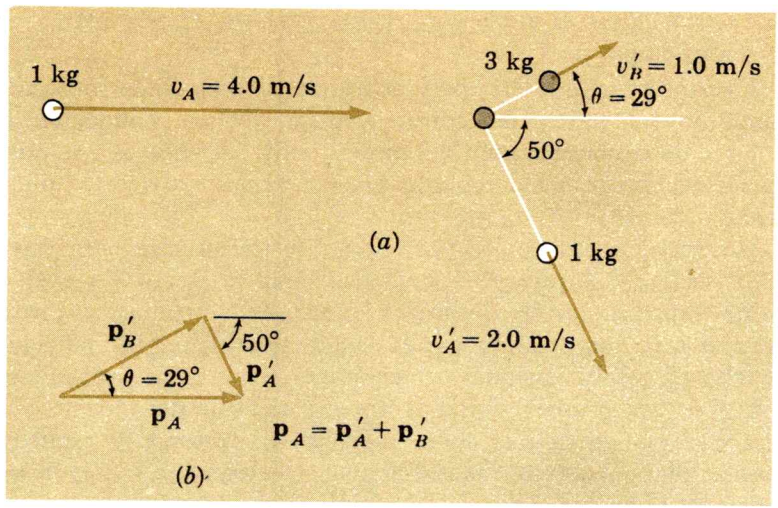


FIG. 5-12. (*a*) Los vectores velocidad para un choque que no es de frente. (*b*) Los vectores ímpetu para este choque.

constante. Escogemos primero la dirección de A como la dirección para calcular las componentes de los ímpetus:

$$p_A = p'_A \cos 50° + p'_B \cos \theta \tag{5-6}$$

$$(1.0 \text{ kg})(4.0 \text{ m/s}) = (1.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m/s}) \cos 50° + (3.0 \text{ kg})(v'_B) \cos \theta$$

La Ec. (5-6) implica que el ímpetu lineal total no cambia a lo largo de la dirección hacia adelante, el cuerpo B adquiere una componente de su ímpetu a lo largo de esta dirección que es exactamente igual a la componente del ímpetu que perdió A.

Ahora considere las componentes del ímpetu a lo largo de la dirección perpendicular a la dirección original de A:

$$0 = p'_A \operatorname{sen} 50° - p'_B \operatorname{sen} \theta \tag{5-7}$$

$$0 = (1.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 50° - (3.0 \text{ kg})(v'_B) \operatorname{sen} \theta$$

Antes del choque no hay componente del ímpetu a lo largo de esta dirección; después del choque la componente transversal del ímpetu de A está equilibrada exactamente por la de B. (No hay componente del ímpetu antes ni después del choque en una dirección perpendicular al plano de los vectores $\mathbf{p}'_A$ y $\mathbf{p}'_B$.)

Tenemos dos ecuaciones, (5-6) y (5-7), y dos incógnitas v'_B y θ. Podemos eliminar a v'_B en ambas ecuaciones, despejándola en (5-7) y sustituyendo su valor en (5-6). El resultado después de algunas manipulaciones algebraicas, es

$$\theta = 29.4° \approx 29°$$

Usando $\theta = 29°$ en (5-6) o en (5-7) nos da

$$v'_B = 1.0 \text{ m/s}$$

5—7 CONSERVACION DEL IMPETU EN CHOQUES ATOMICOS

La conservación del ímpetu se aplica a choques de moléculas, átomos y sus partículas constituyentes, De la aplicación del principio de la conservación del ímpetu a dichos choques, se puede obtener mucha información con respecto a las partículas subatómicas.

Las trayectorias de las partículas eléctricamente cargadas se hacen visibles y se pueden fotografiar cuando pasan a través del líquido sobrecalentado de una cámara de burbujas y forman burbujas a lo largo de su camino. Efectivamente, las partículas que chocan están aisladas, y el ímpetu que entra al choque atómico es exactamente igual al ímpetu que sale del mismo.

Todas las partículas como electrones, protones y neutrones tienen ímpetu. Además, las radiaciones electromagnéticas, ilustradas por las ondas de radio, la luz visible y los rayos X, también son portadoras del ímpetu lineal. (Véase la Sec. 30-5.) (La luz ejerce presión sobre los objetos con que choca.) La teoría cuántica indica que la radiación tiene características de partícula, y a las partículas de radiación electromagnética se les llamó "fotones". (Véase la Sec. 36-2.) Cada fotón lleva ímpetu y los choques entre un fotón y una partícula material también están gobernados por el principio de la conservación del ímpetu.

RESUMEN

De acuerdo con la ley de la inercia, el ímpetu lineal $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ de una sola partícula aislada es constante. De acuerdo con la ley de la conservación de la masa, la masa de un sistema aislado es constante. De acuerdo con la ley de la conservación del ímpetu, el ímpetu total $\Sigma\mathbf{p}$ de un sistema de partículas que interactúan, aislado de influencias externas, es constante tanto en magnitud como en dirección.

PROBLEMAS

5-1 Una limousine de 2.0×10^3 kg moviéndose a 100 km/h choca de frente con un automóvil de 1.0×10^3 kg que se movía en la misma dirección pero con sentido opuesto y con la misma rapidez. (*a*) Si los automóviles quedan unidos, ¿cuál es la rapidez, dirección y sentido de los restos del choque inmediatamente después del impacto? (*b*) Dibuje las gráficas de ímpetu-tiempo para los dos vehículos tanto antes como después del choque.

5-2. Un camión de 1.0×10^4 kg que viaja a 88 km/h choca con la parte posterior de un automóvil que se mueve a 80 km/h en la misma dirección y sentido. Si los vehículos quedan unidos entre sí, ¿cuál es la rapidez y dirección del movimiento de los restos del accidente inmediatamente después del choque?

5-3. Un rifle de 3.0 kg en reposo sobre una superficie lisa dispara una bala de 5.0 g con una rapidez en la boca de 500 m/s. ¿Cuál es la rapidez del retroceso del rifle?

5-4. Un objeto con la masa m se arroja con una velocidad inicial v_0 en un ángulo θ con respecto a la horizontal. Escriba las expresiones que den las componentes horizontal y vertical del ímpetu como funciones del tiempo.

5-5. ¿Cuál es el cambio en ímpetu de un objeto de 5.00 kg que primero se mueve hacia el sur a 16 m/s y después hacia el norte a 9.00 m/s?

5-6. Una bala de 5.0 g moviéndose horizontalmente a 400 m/s le pega a un bloque de acero de 500 g que se encontraba inicialmente en reposo. Después del choque la bala se mueve en sentido opuesto con la rapidez de 300 m/s. Dibuje las gráficas de ímpetu-tiempo para la bala y el bloque y calcule la rapidez final del bloque.

5-7. Una bala de 5.0 g moviéndose horizontalmente a 400 m/s pasa a través de un bloque de madera de 500 g que inicialmente se encontraba en reposo sobre una superficie sin fricción. La bala sale con una rapidez de 100 m/s. Dibuje las gráficas de ímpetu-tiempo para la bala y el bloque y calcule la velocidad final del bloque.

5-8. Un objeto de 6 kg se arroja verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s. ¿Con qué rapidez retrocederá la tierra (masa, 6×10^{24} kg)?

5-9. Un objeto de 6 kg se dispara verticalmente hacia arriba quedando en reposo momentáneamente a la altura h. (*a*) Demuestre que la tierra de masa M retrocede una distancia de $(n/M)h$ si la aceleración de la tierra es menor que la de m por el factor m/M. (*b*) ¿Qué tan grande debe ser la masa m para que alcanzando una altura máxima de 10 m, haga que la tierra (masa, 6×10^{24} kg) retroceda 10^{-10} m (aproximadamente el tamaño de un átomo)?

5-10. Un objeto que se movía inicialmente hacia el norte a 15 m/s explota en vuelo produciendo dos pedazos de igual masa. Uno va hacia el este a 10 m/s. ¿Cuál es la velocidad del segundo pedazo?

5-11. Un objeto en reposo explota produciendo 3 pedazos de igual masa. Uno se mueve hacia el este a 20 m/s; otro se mueve hacia el sudeste a 30 m/s. ¿Cuál es la velocidad del tercer pedazo?

5-12. Un helicóptero en vuelo a nivel a 90 km/h suelta una lata de 20 kg desde una altura de 30 m sobre un campo plano. Encuentre la magnitud y dirección del ímpetu de la lata (*a*) en el momento de soltarlo, (*b*) después de 2 s, y (*c*) al chocar con el piso. Considere que g vale 10 m/s^2. (y, desde luego, desprecie la fricción).

5-13. Una esfera de acero de 1.0 kg que estaba a 4.0 m sobre el piso se suelta, cae, choca con el piso y se eleva hasta una altura máxima de 2.5 m. Determine la transferencia de ímpetu al piso en el choque.

5-14. Una estrella y un planeta que gira alrededor de ella forman un sistema aislado. El ímpetu del planeta tiene magnitud constante, pero cambia de dirección continuamente. Demuestre que la estrella misma debe moverse en un círculo, aunque mucho más pequeño.

5-15. El núcleo del uranio-238 es inestable y decae al núcleo de torio-234 y una partícula α. La partícula α se emite con una rapidez de 1.4×10^6 m/s. ¿Cuál es la velocidad de retroceso del núcleo de torio-234, suponiendo que el átomo de uranio-238 se encontraba en reposo en el momento del decaimiento? Las masas del torio-234 y de la partícula α están en la relación de 234 a 4.

5-16. Un protón golpea a un átomo de oro y por ello es desviado de su dirección original en un ángulo de 30°. Su rapidez después del choque esencialmente es la misma que antes de él. ¿En qué dirección, relativa a la dirección original del protón retrocederá el átomo de oro? Un átomo de oro es mucho mas masivo que un protón.

5-17. Cuando un electrón encuentra a un positrón (una partícula que tiene la misma masa que el electrón, pero lleva una carga eléctrica positiva, en lugar de negativa), las dos partículas se aniquilan entre sí, desaparecen y aparece una radiación electromegnética en forma de fotones. (*a*) Demuestre que la aniquilación electrón-positrón debe producir cuando menos dos fotones. (*b*) ¿En qué direcciones relativas se deberán mover los dos fotones si el electrón y el positrón se encontraban inicialmente en reposo?

5-18. Una partícula α (núcleo de helio), que originalmente se movía a 1.0×10^7 m/s choca con el núcleo de un átomo de oro en reposo. Encuentre la rapidez de retroceso del núcleo de oro, si (*a*) la partícula α sale del choque en dirección opuesta con (esencialmente) su rapidez original, y (*b*) la partícula α sale del choque a lo largo de una dirección a 60° de su movimiento original y con su rapidez original. El núcleo de oro tiene una masa de 197 u; la masa de la partícula α es de 4 u.

5-19. Dos niñas sentadas en los extremos opuestos de un trineo de 6.0 m de largo se encontraban inicialmente en reposo sobre hielo, sin que existiera fricción. La masa de cada niña es de 50 kg; la masa del trineo es de 30 kg. Una niña arroja a la otra un objeto de 4.0 kg de tal manera que el objeto recorra 5.0 m/s horizontalmente respecto al hielo. ¿Cuál es la rapidez del trineo (*a*) antes de que la segunda niña reciba el objeto? (*b*) ¿Después de que lo reciba? (*c*)

¿Qué distancia recorre el trineo mientras el objeto se encuentra en vuelo?

5-20 Una pelota de beisbol se desplaza horizontalmente a 30 m/s en el instante en que el bateador la golpea hacia el campo central; la pelota se golpea con un ángulo de 60° sobre la horizontal y se desplaza 90 m en el aire. Determine (*a*) la *velocidad* inicial de la pelota bateada y (*b*) el vector de impulso impartido a la pelota el bate. Suponiendo que la dirección horizontal de la pelota bateada es exactamente opuesta a la de la pelota lanzada y que la trayectoria no es afectada por la resistencia del aire. Desprecie la altura sobre el piso a la que se afectúa el impacto del bate. La masa de la pelota es de 160 g; considere que g = 10.0 m/s^2.

5-21. En un cohete, se expulsa hacia atrás una cantidad de combustible con la masa de $-dm$ a la velocidad de salida constante de v_E, medida en relación al cohete. Al mismo tiempo la masa del cohete cambia de m a $m + dm$. (Note que dm es una cantidad *negativa.*) (*a*) Demuestre que $m\ dv = -v_E\ dm$, donde m y dv son la masa y el cambio en la velocidad del cohete residual, respectivamente. (*b*) Use este resultado para demostrar que $v_b = v_E \ln(M_0/M_b)$, donde v_b es la rapidez ganada al "apagar" M_0 la masa del cohete al despegar, y M_b su masa al apagarse — después de que se expulsó todo el combustible. (*c*) Finalmente, demuestre que este resultado puede escribirse en la forma $(M_0/M_b) = e^{(v_b/v_E)}$. (Este desarrollo es válido en el espacio libre de la gravitación.) Esta relación, la ecuación del cohete, fue derivada por primera vez en 1890 por Tsiolkovsky, un maestro de escuela ruso autodidacta.

5-22. El motor de un cohete típico produce una velocidad de expulsión v_E de 2 km/s. Si el cohete residual debe alcanzar la rapidez orbital de 8 km/s, uso los resultados del Prob. 5-21 para encontrar la relación de la masa inicial del cohete a su masa al apagar.

Capítulo

6

CENTRO DE MASA Y MARCOS DE REFERENCIA

La ley de la conservación del ímpetu, lo mismo que otras propiedades de un sistema de partículas que aún no se han estudiado, tienen un significado más simple, cuando se reconoce que un sistema de partículas completo puede ser reemplazado por una sola partícula equivalente. Esto se puede llevar a cabo con el auxilio del concepto de centro de masa. También podemos explorar las relaciones que traducen las cantidades físicas medidas en un marco de referencia a sus correspondientes valores en un segundo marco de referencia que se encuentra en movimiento. En particular, veremos la conveniencia especial que tiene el marco de referencia en el que el centro de masa del sistema se encuentra en reposo.

6—1 VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASA

De acuerdo con la ley de la inercia, el ímpetu de una sola partícula aislada es constante. Y de acuerdo con la ley de la conservación del ímpetu, el ímpetu de un sistema aislado de partículas es constante. Una partícula aislada es semejante a un sistema aislado de partículas en que ambas tienen ímpetu constante. Esto se aplica muy aparte de los detalles de, o aun del conocimiento de los movimientos de las partículas individuales del sistema, que puede ser en general muy complicado. Esto sugiere que, debido a la equivalencia del ímpetu de los sistemas aislados y la partícula aislada, podemos reemplazar el sistema completo por una sola partícula equivalente cuyo ímpetu sea igual al del sistema. Pensamos que esta partícula tiene una velocidad $\mathbf{V}$ y una masa M igual a las del sistema completo $M = \Sigma m$, donde m es la masa de una partícula que se mueve con la velocidad $\mathbf{v}$ en el sistema. Entonces, igualando el ímpetu de la partícula $M\mathbf{V}$ con el ímpetu total del sistema $\Sigma m\mathbf{v}$, tenemos

$$M\mathbf{V} = \Sigma m\mathbf{v}$$

donde **V** es la velocidad del *centro de masa*. [Note que las **v** individuales no son necesariamente constantes (las partículas que interactúan entre sí, pueden apartarse o acercarse en la forma más general); la *suma* $\Sigma m\mathbf{v}$ es la que permanece constante y por ello también **V**.]

Entonces, la ecuación anterior nos da la velocidad **V** del centro de masa como

$$\mathbf{V} = \frac{\Sigma m\mathbf{v}}{M} = \frac{\Sigma m\mathbf{v}}{\Sigma m} \tag{6-1}$$

Esta ecuación vectorial se puede reemplazar por ecuaciones escalares para las componentes de las velocidades (en este capítulo suponemos que el movimiento se confina al plano XY).

$$V_x = \frac{\Sigma m v_x}{M} = \frac{\Sigma m v_x}{\Sigma m} \tag{6-2}$$

y

$$V_y = \frac{\Sigma m v_y}{M} = \frac{\Sigma m v_y}{\Sigma m}$$

Ejemplo 6-1

Un objeto de 4 kg que se encontraba inicialmente en reposo explota en tres pedazos. Un pedazo de 1 kg vuela hacia el este a 5 m/s, y otro pedazo de 2 kg vuela a 60° al sur del oeste a 4 m/s ¿Cuál es la velocidad del centro de masa del sistema?

Inicialmente el ímpetu del sistema vale cero, y permanecerá siendo cero. Por lo tanto, independientemente de lo que sucede después de la explosión, sabemos que la velocidad del centro de masa inicialmente debe ser cero y además debe mantenerse en este valor.

Ejemplo 6-2

Una partícula de 1 kg que se movía hacia el este a 4 m/s, choca con una partícula de 3 kg que se encontraba inicialmente en reposo y las dos permanecen unidas después del choque. ¿Cuál es la velocidad del centro de masa del sistema?

Aplicando la Ec. (6-2), tenemos

$$V_x = \frac{\Sigma m v_x}{\Sigma m} = \frac{(1\text{ kg})(4\text{ m/s}) + (3\text{ kg})(0)}{(1+3)\text{kg}}$$

$$V_x = 1\text{ m/s}$$

$$V_y = \frac{\Sigma m v_y}{\Sigma m} = 0$$

La velocidad del centro de masa, 1 m/s hacia el este, es justamente la velocidad del objeto compuesto de 4 kg después del choque, lo cual no es de sorprender porque se usó el centro de masa para reemplazar a todo el sistema. Además, anticipando la definición de la localización del centro de masa, podemos pensar que el centro de masa se encuentra donde esté la partícula compuesta después del choque.

Ejemplo 6-3

Una partícula de 3.0 kg se mueve a 1.0 m/s en la dirección de 29° sobre el eje de las X, y una partícula de 1 kg se mueve con una rapidez de 2.0 m/s a 50° bajo el eje de las X. ¿Cuál es la velocidad del centro de masa de este sistema aislado?

Las velocidades de las partículas se indican en la Fig. 6-1. Estas velocidades de las partículas se descomponen en sus componentes X e Y y aplicamos las ecuaciones adecuadas para determinar V_x y V_y.

$$V_x = \frac{\Sigma m v_x}{\Sigma m} = \frac{(3.0\text{ kg})(1.0\text{ m/s})\cos 29° + (1.0\text{ kg})(2.0\text{ m/s})\cos 50°}{(3.0 + 1.0)\text{ kg}}$$

$$= 1.0\text{ m/s}$$

$$V_y = \frac{\Sigma m v_y}{\Sigma m} = \frac{(3.0\text{ kg})(1.0\text{ m/s})\,\text{sen}\,29° - (1.0\text{ kg})(2.0\text{ m/s})\,\text{sen}\,50°}{(3.0 + 1.0)\text{ kg}}$$

$$= 0$$

El centro de masa se mueve a lo largo del eje X positivo a 1.0 m/s. Esta es, en realidad, la misma respuesta que se dio en el Ej. 6-2. Y así debe ser, debido a que en estos dos ejemplos hemos calculado la velocidad del centro de masa antes y después del choque considerado antes en el Ej. 5-5 y mostrado en la Fig. 5-12.

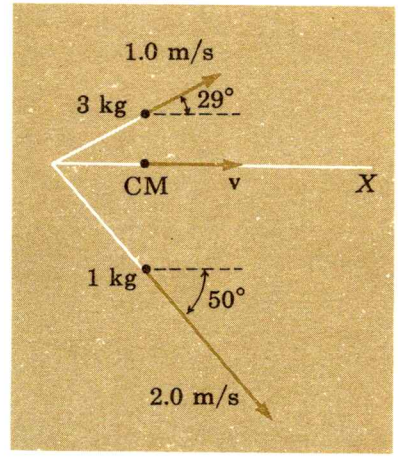


Fig. 6-1. Velocidad del centro de masa V.

6—2 LOCALIZACION DEL CENTRO DE MASA

Si consideramos que el desplazamiento del centro de masa de un sistema se representa por **R** y el desplazamiento de una partícula individual del sistema por **r**, por analogía con la Ec. (6-1), esperamos que la localización del centro de masa esté dado por

$$\mathbf{R} = \frac{\Sigma m\mathbf{r}}{\Sigma m} = \frac{\Sigma m\mathbf{r}}{M} \qquad (6\text{-}3)$$

Para comprobar la corrección de esta relación, primero suponemos que todas las partículas de un sistema tienen la misma localización **r**. Entonces, las partículas están agrupadas como una sola partícula compuesta en **r**, y esperamos que también sea la localización del centro de masa. Así, si todas las **r** son iguales, $\Sigma m\mathbf{r}/M = \mathbf{r}\Sigma m/M = \mathbf{r}M/M = \mathbf{r} = \mathbf{R}$, como se anticipó.

También es fácil comprobar que la relación de la velocidad del centro de masa se deduce de (6-3). Por definición, $\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt$, y para cada partícula $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. Calculando la derivada de (6-3) con respecto al tiempo, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{\Sigma m\, d\mathbf{r}/dt}{\Sigma m}$$

$$\mathbf{V} = \frac{\Sigma m\mathbf{v}}{\Sigma m} \tag{6-1}$$

Las ecuaciones escalares que dan las coordenadas X e Y del centro de masa en términos de las coordenadas X e Y de las partículas constituyentes son

$$X = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} \tag{6-4}$$

y

$$Y = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}$$

En general las partículas de un sistema pueden estar en movimiento de tal manera que los desplazamientos **R** y **r** o las coordenadas X, Y, x e y, no sean necesariamente constantes en el tiempo. Pero si el sistema de partículas es un cuerpo rígido, el centro de masa tiene una localización fija relativa al cuerpo y se mueve con él.

Para determinar el centro de masa de una distribución continua de masa, reemplazamos la suma Σmx por la integral $\int x\, dm$, donde dm es un pequeño elemento de masa, tan pequeño, que puede considerarse que todas las partículas atómicas se encuentran dentro de dm y tienen la misma coordenada x, pero suficientemente grande para que las partículas atómicas discretas sean equivalentes a una distribución de masa continua. Si la masa por unidad de volumen, o densidad, es ρ, el elemento de masa dm puede indicarse como $dm = \rho\, dv$, donde dv representa al elemento de volumen que contiene la masa dm de desidad ρ. Por lo tanto, las coordenadas del centro de masa pasan a ser

$$X = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\int \rho x\, dv}{\int \rho\, dv}$$

Para densidad constante ρ en toda la distribución de la masa

$$X = \frac{\int x\, dv}{\int dv} \tag{6-5a}$$

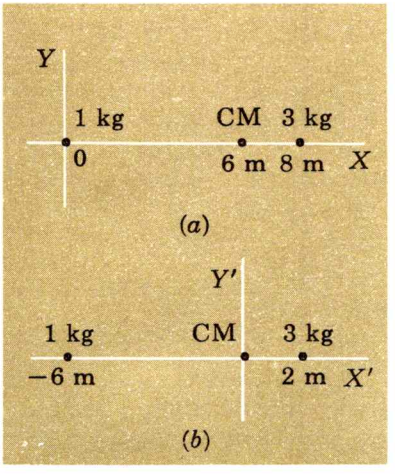


FIG. 6-2. Centro de masa para un sistema de dos partículas. (*a*) Origen en la partícula de 1 kg y (*b*) origen en el centro de masa.

donde los límites de las integrales corresponden a las fronteras físicas del objeto.

La relación correspondiente para la coordenada Y es, desde luego,

$$Y = \frac{\int y\, dv}{\int dv} \tag{6-5b}$$

Ejemplo 6-4

Una partícula de 1 kg se encuentra en el origen y otra partícula de 3 kg está en el eje de las X en $x = 8$ m. ¿Donde está el centro de masa del sistema?

Como para ambas partículas $y = 0$, $Y = 0$. Usando la Ec. (6-4), tenemos

$$X = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} = \frac{(1\text{ kg})(0) + (3\text{ kg})(8\text{ m})}{(1+3)\text{ kg}} = 6\text{ m}$$

Como muestra la Fig. 6-2*a*, el centro de masa está a 6 m de la partícula de 1 kg y a 2 m de la partícula de 3 kg; las distancias del centro de masa a las dos partículas están en razón inversa de sus masas. Este resultado es en general válido para cualquier sistema de partículas: Si el centro de masa está en el origen, se tiene que $X = 0$, entonces

$$0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

y

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{x_2}{x_1}$$

el signo menos implica que las dos partículas deben estar en lados opuestos de la línea recta que las une y pasa por el centro de masa. Así, si escogemos un nuevo origen de coordenadas en la localización del centro de masa ($X = 6$ m, pero ahora $X' = 0$), la partícula de 1 kg tiene la coordenada $x_1' = -6$ m y la partícula de 3 kg la coordenada $x_2' = +2$ m. (Vea la Fig. 6-2*b*.) Encontramos que

$$X' = \frac{\Sigma mx'}{\Sigma m} = \frac{(1\text{ kg})(-6\text{ m}) + (3\text{ kg})(2\text{ m})}{(1+3)\text{ kg}} = 0$$

y

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{x_2'}{x_1'} = \tfrac{1}{3}$$

Aunque las coordenadas del centro de masa dependerán de la selección del origen, la *localización* del centro de masa siempre es la *misma en relación* a las posiciones de las *partículas* constituyentes.

Ejemplo 6-5

Determine el centro de masa de una placa rectangular uniforme.

El largo es w, la altura h y el espesor t. Se opta porque el origen

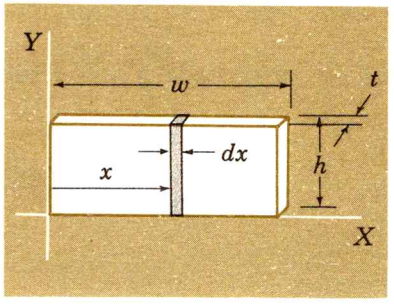


FIG. 6-3. Centro de masa de una placa rectangular. Una tira vertical de desplazamiento x, con el ancho dx y espesor t contiene a un elemento de masa.

de las coordenadas se encuentre en una de las esquinas del rectángulo, como se indica en la Fig. 6-3. Para determinar la componente X del centro de masa, imaginamos que el rectángulo está dividido en secciones verticales angostas, cada una del ancho dx. Todos los puntos de masa que se encuentran dentro de cada sección tienen la misma coordenada X, x. Entonces sumamos las contribuciones de las secciones verticales desde $x = 0$ hasta $x = w$. El elemento de volumen es $dv = ht\,dx$, y (6-5a) da

$$X = \frac{\int x\,dv}{\int dv} = \frac{\int_0^w x(ht\,dx)}{htw} = \frac{\int_0^w x\,dx}{w} = \frac{w^2/2}{w} = \frac{w}{2}$$

El centro de masa está a la mitad de la distancia entre los dos extremos. Asimismo, el centro de masa se encuentra a la mitad de la altura. En menos palabras, el centro de masa está en el centro de simetría del rectángulo.

El centro de masa de cualquier sólido uniforme y simétrico está en el centro, o sobre la línea de simetría —esto es, en el centro de una esfera, o casquete esférico, o anillo, o a lo largo del eje de simetría de un cilindro, o de un cono. En todos los casos, si el origen de coordenadas está en el centro, o en la línea de simetría, para cada contribución $m_i x_i$ de un lado hay otra contribución $-m_i x_i$ del lado opuesto, quedando, por tanto, el centro de masa en el centro de simetría, $X = 0$.

Ejemplo 6-6

Determine el centro de masa de una placa en forma de triángulo rectángulo de altura h y largo w.

Vea la Fig. 6-4, donde el elemento de volumen dv tiene el ancho dx, altura y y espesor t. La hipotenusa del triángulo es la línea $y = (h/w)\,x$. Por lo tanto, $dv = yt\,dx = (h/w)tx\,dx$, y (6-5) nos da

$$X = \frac{\int x\,dv}{\int dv} = \frac{\int_0^w (h/w)tx^2\,dx}{hwt/2} = \tfrac{2}{3}w$$

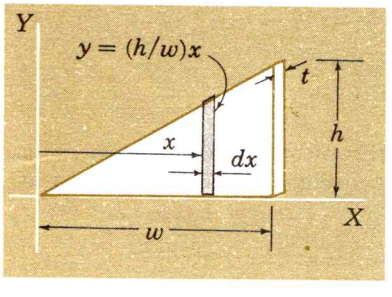


FIG. 6-4. Centro de masa de una placa uniforme con la forma de un triángulo rectángulo.

De una manera semejante $Y = h - \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}h$, de nuevo un tercio de la distancia desde el vértice correspondiente al ángulo recto.

6—3 MARCOS DE REFERENCIA Y VELOCIDADES RELATIVAS

Hasta aquí hemos considerado implícitamente que los desplazamientos, las velocidades, los ímpetus y las aceleraciones de los objetos se miden con respecto a un marco de referencia unido a la Tierra. Ahora queremos encontrar relaciones para trasladar los

valores de estas cantidades, de sus medidas en un marco de referencia, a los valores correspondientes medidos en un segundo marco de referencia, el cual se encuentra en movimiento con velocidad constante respecto al primero. Designamos al marco de referencia de la Tierra como S_1; las cantidades medidas con respecto a este marco llevan el subíndice 1. Un segundo marco de referencia S_2 se mueve hacia la derecha en relación a S_1 con la velocidad constante $\mathbf{v}$; las cantidades medidas en S_2 se identifican con el subíndice 2. Por conveniencia consideramos que los orígenes de S_1 y S_2 coinciden en el tiempo $t = 0$ y que los dos grupos de ejes están alineados. (Véa la Fig. 6-5.)

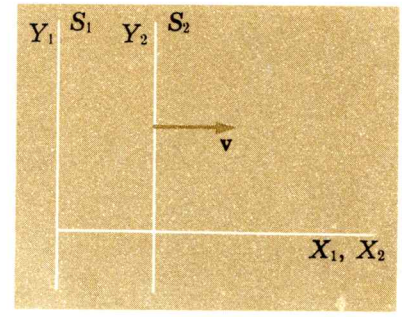


FIG. 6-5. El marco de referencia S_2 con la velocidad v con respecto a S_1.

Como S_2 se mueve hacia la derecha con la velocidad $+\mathbf{v}$ relativa a S_1, se deduce que un observador en S_2 diría que S_1 y todos los objetos que estén en reposo en este marco se mueven hacia la izquierda con la velocidad $-\mathbf{v}$. Estrictamente, *sólo* podemos hablar de *movimiento relativo* en cualquiera de los dos sistemas, su rapidez relativa v simplemente es la distancia de separación entre los dos orígenes dividida entre el tiempo transcurrido. El hecho de designar a S_1 como un marco unido a la Tierra simplemente es materia de conveniencia; S_1 podría ser cualquier marco de referencia.

Supóngase que en cierto tiempo t la localización de una partícula se encuentra dada por el radio vector $\mathbf{r}_1$, en S_1 y $\mathbf{r}_2$ en S_2. La forma como estos vectores están relacionados se indica en la Fig. 6-6, donde se encuentra que el desplazamiento del origen de S_2 respecto a S_1 en el tiempo t es $\mathbf{v}t$:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{v}t \tag{6-6}$$

Esta ecuación vectorial es equivalente a dos ecuaciones escalares que dan las componentes de $\mathbf{r}_1$ como las coordenadas x_1 y y_1 y las de $\mathbf{r}_2$ como x_2 y y_2.

$$x_2 = x_1 - vt \tag{6-7}$$

$$y_1 = y_2$$

La primera ecuación puede rearreglarse para tener

$$x_1 = x_2 + vt \tag{6-8}$$

Esto también se deduce de otra consideración: Como los dos marcos de referencia son totalmente equivalentes y como S_1 tiene la velocidad $-\mathbf{v}$ relativa a S_2 si S_2 tiene la velocidad $+\mathbf{v}$ relativa a S_1, podemos intercambiar los subíndices 1 y 2 si reemplazamos v por $-v$. Por este camino (6-8) se reduce a (6-7).

La velocidad de la partícula medida en S_1 es $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1/dt$; en forma similar, la velocidad de la misma partícula, pero ahora

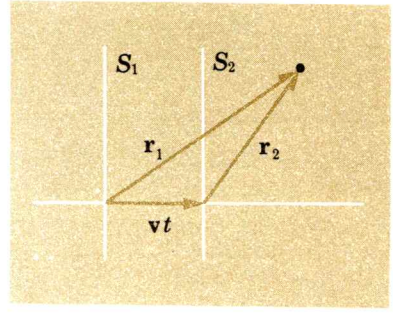


FIG. 6-6. La localización de la partícula respecto a S_1 es $\mathbf{r}_1$; la localización de la partícula respecto a S_2 es $\mathbf{r}_2$.

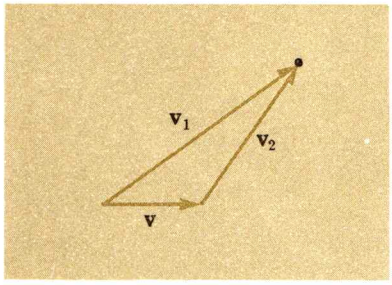


FIG. 6-7. Relaciones vectoriales para las velocidades relativas: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}$.

observada en S_2 es $\mathbf{v}_2 = d\mathbf{r}_2/dt$. Así pues, reconociendo que $\mathbf{v}$ es constante y derivando (6-6) con respecto al tiempo, se obtiene

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$$

o

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v} \tag{6-9}$$

En palabras, la velocidad instantánea de la partícula relativa a S_1, es la velocidad de la misma partícula relativa a S_2 más la velocidad de S_2 relativa a S_1. Vea la Fig. 6-7. Las relaciones de la velocidad —aunque sencillas y (aparentemente) obvias— simplemente expresan en lenguaje matemático formal, nuestras ideas del espacio y el tiempo de acuerdo con el sentido común. Sin embargo, estas relaciones no son completamente correctas. Para rapideces de las partículas cercanas a la de la luz (3×10^8 m/s) deben sustituirse por las relaciones de transformación generales para la velocidad en la teoría especial de la relatividad (Sec. 34-5), que, a las velocidades moderadas que se consideran en la mecánica clásica, se reducen, como debería ser, a las transformaciones galileanas.

Hay un útil procedimiento nemotécnico para identificar los significados correctos de los términos y sus símbolos en la Ec. (6-9). Si representamos la velocidad de la partícula relativa al sistema 1 por $\mathbf{v}_{p1}$, la velocidad de la partícula relativa a 2 por $\mathbf{v}_{p2}$, y la velocidad del sistema 2 con respecto al 1 por $\mathbf{v}_{21}$, (6-9) se convierte en

$$\mathbf{v}_{p1} = \mathbf{v}_{p2} + \mathbf{v}_{21}$$

Nótese que los subíndices "externos" del lado derecho corresponden a los subíndices del término de la izquierda. Esto se ilustra también en la Fig. 6-8. La cabeza del vector de cada velocidad se identifica con el objeto móvil (o el marco de referencia), y las colas tienen la identificación del marco de referencia con respecto al que se mide la velocidad.

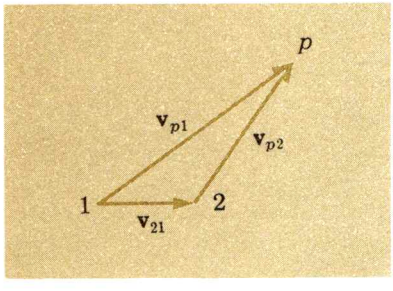


FIG. 6-8. Un artificio nemotécnico para las velocidades relativas. Las cabezas y las colas de los vectores se indican con p, 1 y 2 que corresponden a la partícula, al marco de referencia 1 y al marco de referencia 2, respectivamente; $\mathbf{v}_{p1}$ da la velocidad de la partícula relativa a 1, etc.

De (6-9) se deduce una conclusión sencilla: Si un cuerpo se mueve con velocidad constante en un marco de referencia, su velocidad relativa a cualquier otro marco de referencia también es constante (aunque diferente) estipulándose que los dos marcos de referencia tienen una velocidad relativa constante. Además, siempre se puede encontrar un marco de referencia en el que la velocidad del cuerpo es cero. Por ejemplo, si un bloque se desliza hacia la derecha a 20 m/s en relación a la Tierra, con respecto a un tren que se mueva a 20 m/s a la derecha, el bloque está (no sólo parece que está) *en reposo*. Así, *los estados de movimiento con velocidad constante y de reposo difieren* entre sí, *sólo debido a la elección arbitraria de un marco de referencia.*

Además, si un marco de referencia es inercial, se tiene que cualquier otro marco que se mueva con velocidad constante respecto a él también es un marco inercial. Como la Tierra es, cuando menos aproximadamente, un marco inercial, un tren que

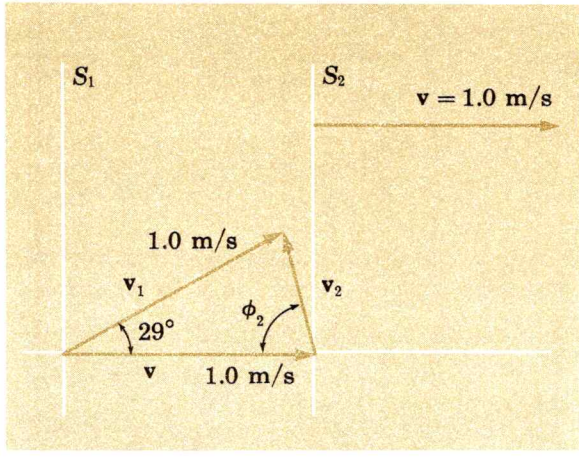


FIG. 6-9. La velocidad de una partícula relativa a los marcos de referencia S_1 y S_2.

se mueva con rapidez constante sobre rieles rectos, o un elevador que suba o baje con rapidez constante, también son marcos inerciales en los que cualquier cuerpo no perturbado mantendrá una velocidad constante relativa al marco escogido.

Ejemplo 6-7

Una partícula se mueve a 1.0 m/s en la dirección inclinada 29° hacia arriba del eje de las X. ¿Cuál es su velocidad respecto a un marco de referencia que se mueve a lo largo del eje de las X positivo a 1.0 m/s?

Los vectores de velocidad se indican en la Fig. 6-9, donde la velocidad de la partícula relativa al marco móvil S_2 es $\mathbf{v}_2$, que forma un ángulo ϕ_2 respecto al eje X negativo. En símbolos

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

Para las componentes X de los vectores de velocidad, tenemos

$$1.0 \text{ m/s} = (1.0 \text{ m/s}) \cos 29° - v_2 \cos \phi_2$$

donde v_2 es la magnitud de $\mathbf{v}_2$. Para las componentes Y de los vectores velocidad, tenemos

$$(1.0 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 29° = v_2 \operatorname{sen} \phi_2$$

Resolviéndolas simultáneamente para obtener v_2 y ϕ_2 encontramos que

$$v_2 = 0.51 \text{ m/s}$$

y

$$\phi_2 = 80°$$

Los observadores que se encuentran en dos marcos inerciales diferentes medirán velocidades diferentes para una partícula. Pero medirán la misma *aceleración*. Si la aceleración de una partícula

en S_1 es $\mathbf{a}_1 = d\mathbf{v}_1/dt$ y la aceleración de la misma partícula en S_2 es $\mathbf{a}_2 = d\mathbf{v}_2/dt$, al calcular las derivadas con respecto al tiempo de la Ec. (6-9) se obtiene

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Como la velocidad relativa $\mathbf{v}$ entre los dos marcos inerciales es constante, $d\mathbf{v}/dt = 0$, la ecuación anterior adquiere la forma

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \tag{6-10}$$

Así, si un objeto tiene una aceleración (constante o variable) en un marco de referencia en un instante dado, tiene, en el mismo instante, exactamente la *misma* aceleración en cualquier otro marco de referencia que se mueva con velocidad *constante* con respecto al primero.

Ejemplo 6-8

Un niño, parado en un tren que se mueve hacia el este a 20 m/s, arroja una pelota verticalmente hacia arriba a 10 m/s relativa al tren en el momento en que el tren pasa por un crucero. (*a*) ¿Qué tan lejos del crucero se encuentra el niño cuando recupera la pelota? (*b*) ¿Cuál es la trayectoria de la pelota como la ve un observador que se encuentra parado en el piso?

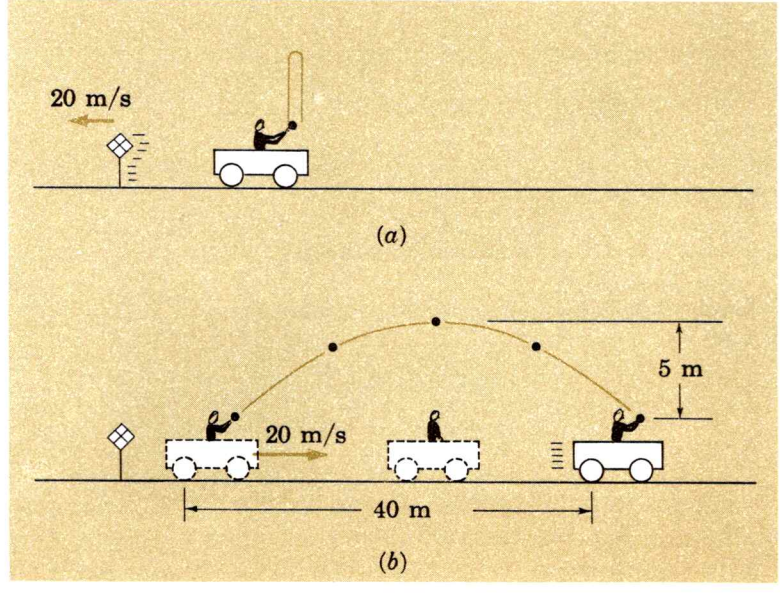


FIG. 6-10. Un niño que viaja en un tren arroja una pelota verticalmente hacia arriba. El movimiento como se ve (*a*) desde un marco de referencia en reposo con respecto al tren y (*b*) desde un marco de referencia en reposo con respecto a la tierra.

(*a*) El movimiento de la pelota es muy sencillo cuando se observa desde un marco de referencia que se mueva con el tren. Con respecto a este marco, el niño está en reposo y se ve como si la pelota subiera y bajara verticalmente. El tiempo de vuelo de la pelota se puede calcular por medio de la ecuación del movimiento. Con $y_0 = 0$,

$$y = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$
$$0 = (10 \text{ m/s})t + \tfrac{1}{2}(-10 \text{ m/s}^2)t^2$$
$$t = 0, \text{ o } 2.0 \text{ s}$$

Pasan dos segundos desde el momento en que la pelota abandona la mano del niño hasta que la recupera.

Un observador en el piso está de acuerdo con que la pelota estuvo en el aire por 2.0 s. Durante ese tiempo el tren avanzó la distancia de (20 m/s) (2.0*s*) = 40m.

(*b*) La Fig. 6-10 muestra las trayectorias de la pelota como se ve desde el tren y desde el piso.

6—4 CONSERVACION DEL IMPETU EN EL MARCO DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASA

El ímpetu se conserva y el centro de masa de un sistema aislado desarrolla una velocidad constante con respecto a cualquier marco de referencia. En particular hay un marco de referencia que tiene interés especial —*el marco de referencia del centro de masa*— debido a que en él el *ímpetu total* de un sistema aislado no sólo es constante, sino que también es igual a *cero* y que la *velocidad del centro de masa* no sólo es constante, sino que también es igual a *cero*. De la Ec. (6-1) se deduce directamente el hecho de que el marco de referencia del centro de masa en realidad es el marco en el que el ímpetu es nulo.

Por definición $M\mathbf{V} = \Sigma m\mathbf{v}$

si $\mathbf{V} = 0$

se tiene $\Sigma m\mathbf{v} = 0$

En palabras, si el centro de masa está en reposo, el ímpetu total $\Sigma m\mathbf{v}$ debe ser cero.

Reexaminemos el choque que consideramos antes en la Fig. 5-12, tanto desde el punto de vista de un observador que esté en el marco de referencia del laboratorio y ahora también desde el punto de vista de un observador que esté en el marco de referencia del centro de masa. En los Ejs. 6-2 y 6-3 encontramos al centro de masa de ese sistema moviéndose a la velocidad constante de 1.0 m/s hacia la derecha del laboratorio, tanto antes como después del choque. Como las dos partículas que chocaron tenían las masas de 1 kg y 3 kg, sus distancias al centro de masa siempre se encontraron en la relación de 3 a 1, como se muestra en el Ej. 6-1.

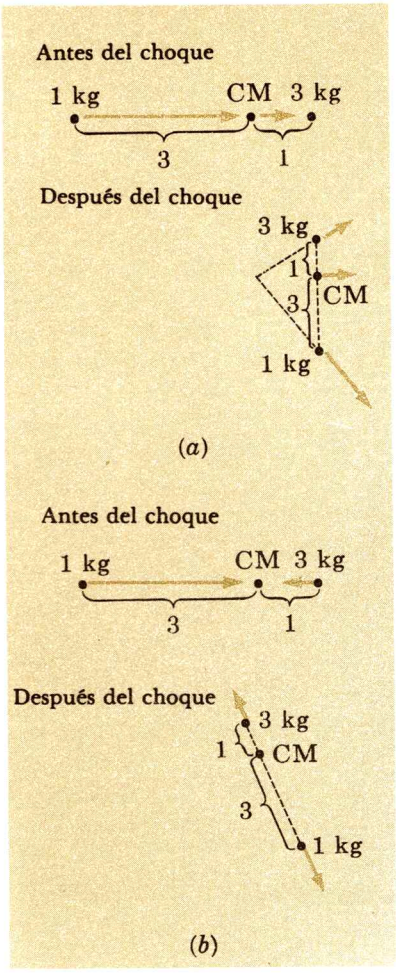


FIG. 6-11. Las velocidades de las partículas antes y después del choque, como se ven desde (*a*) el marco de referencia del laboratorio y (*b*) el marco de referencia del centro de masa.

Este mismo choque también se indica en la Fig. 6-11 en el marco de referencia en el que el centro de masa se encuentra en reposo. Calculemos las velocidades de las dos partículas en este marco de referencia aplicando la Ec. (6-9), la relación para la transformación de la velocidad. En realidad, el Ej. 6-7 da la velocidad de la masa de 1 kg después del choque en el marco de referencia del centro de masa. De nuevo las dos partículas mantienen las distancias de 3 a 1 del ahora centro de masa fijo. Las partículas siempre se mueven en direcciones opuestas, acercándose al centro de masa antes del choque y alejándose de él después, y el ímpetu total del sistema es cero durante todo el tiempo. Si conocemos el movimiento de una de las partículas interactuantes en el marco de referencia del centro de masa, inmediatamente podemos encontrar el movimiento de la otra. Por ejemplo, en la situación anterior, si conocemos la localización y velocidad de la partícula de 1 kg en cierto instante, la partícula de 3 kg deberá encontrarse sobre la línea que une la partícula de 1 kg con el origen en el centro de masa, a un tercio de la distancia a que se encuentra del origen, moviéndose en la misma dirección pero con sentido opuesto a un tercio de la rapidez.

Considérense las gráficas del ímpetu-tiempo para los marcos de referencia del laboratorio y del centro de masa, como se representan en las gráficas del ímpetu-tiempo para los marcos de referencia del laboratorio y del centro de masa, como se representan en la Fig. 6-12. Las componentes X e Y de los ímpetus se grafican separadamente. Las componentes X del ímpetu de las dos

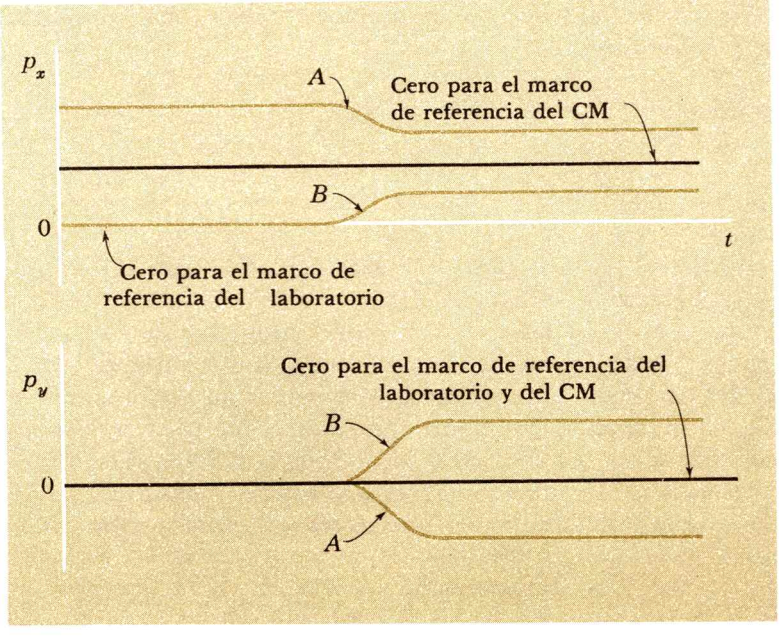


FIG. 6-12. Gráficas de ímpetu-tiempo para las componentes X e Y del choque indicado en la Fig. 6-11. Note que los ímpetus para los marcos de referencia del laboratorio y del centro de masa sólo difieren en el cero para el ímpetu. A representa el objeto de 1 kg, B el objeto de 3 kg.

partículas son diferentes en los dos marcos de referencia. De hecho, los dos marcos de referencia difieren simplemente en la selección del cero para el ímpetu. El ímpetu total del sistema sólo es cero en los marcos de referencia del centro de masa. Debido a que el centro de masa se mueve a lo largo del eje X, las componentes Y son iguales para los marcos de referencia del laboratorio y del centro de masa.

RESUMEN

La velocidad $\mathbf{V}$ y el desplazamiento $\mathbf{R}$ del centro de masa de un sistema están dados por

$$\mathbf{V} = \frac{\Sigma m\mathbf{v}}{\Sigma m} \tag{6-2}$$

$$\mathbf{R} = \frac{\Sigma m\mathbf{r}}{\Sigma m} \tag{6-3}$$

La velocidad de una partícula $\mathbf{v}_1$ relativa al marco de referencia 1 se relaciona con la velocidad de la misma partícula $\mathbf{v}_2$ medida en el marco 2 según

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v} \tag{6-9}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad de 2 con respecto a 1.

El marco de referencia para un ímpetu total cero, es aquel en el cual el centro de masa del sistema se encuentra en reposo.

PROBLEMAS

6-1. Según se mide en el laboratorio, un electrón se mueve a 1.0×10^6 m/s hacia un protón estacionario. ¿Cuáles son la magnitud, la dirección y el sentido de la velocidad del centro de masa del sistema electrón-protón? Las masas del electrón y el protón son 9.11×10^{-31} kg y 1.67×10^{-27} kg, respectivamente.

6-2. La esfera A con una masa de 2.0 kg choca con la esfera estacionaria B cuya masa es de 6.0 kg. Después del choque A se mueve hacia el noroeste a 30 m/s y B viaja hacia el este a 10 m/s. (*a*) Determine la rapidez, dirección y sentido del centro de masa del sistema. (*b*) ¿Cuál es la rapidez de A antes del choque? (Suponga que A y B forman un sistema aislado.)

6-3. Un proyectil en movimiento explota en dos fragmentos con masas que se encuentran en la relación de tres a uno. El fragmento menos masivo se mueve en la dirección Y a 200 m/s y el otro fragmento tiene la rapidez de 100 m/s en la dirección X. (*a*) Determine la rapidez, dirección, y sentido del centro de masa. (*b*) ¿Cuál es la rapidez original del proyectil? (Suponga que el proyectil está aislado de influencias externas.)

6-4. El objeto A moviéndose hacia el este a 10 m/s choca con el objeto B. Después del choque A se mueve en la dirección de 30° al norte del este a 10 m/s y B viaja hacia el sur a 20 m/s. A y B tienen la misma masa. (*a*) Determine la rapidez, dirección y sentido del centro de masa del sistema. (*b*) ¿Cuál era la rapidez original, la dirección y el sentido del objeto B?

6-5. Las siguientes son las masa, coordenadas X e Y y las componentes de la velocidad $(m; x, y; v_x, v_y)$ de

tres partículas: (1 kg; 0 m, 2 m; -2 m/s, 0); (2 kg; — 4 m, 0 m; 1 m/s, — 1 m/s); y (2 kg; 1 m, — 2 m; 0 m/s, 4 m/s). Determine (*a*) las coordenadas X y Y y (*b*) las componentes de la velocidad V_x y V_y del centro de masa del sistema.

6-6. La masa, las coordenadas X e Y y las componentes X e Y de la velocidad $(m;\ x,\ y;\ v_x,\ v_y)$ de dos partículas son: (1 kg; 2 m, — 2 m, 0 m/s, 4 m/s) y (2 kg; 0 m, 1 m; 2 m/s, 0 m/s). ¿Cuáles deberán ser las coordenadas y componentes de la velocidad de una tercera partícula de 2 kg de masa si el centro de masa del sistema formado por las tres partículas está en reposo en el origen?

6-7. Determine las coordenadas del centro de masa de la ménsula indicada en la Fig. P6-7. La ménsula se hizo de una lámina de metal plana de densidad uniforme. (Sugerencia: Subdivida la placa en rectángulos y localice en centro de masa de cada uno de ellos. Use el hecho de que la masa de cada rectángulo es proporcional a su área.)

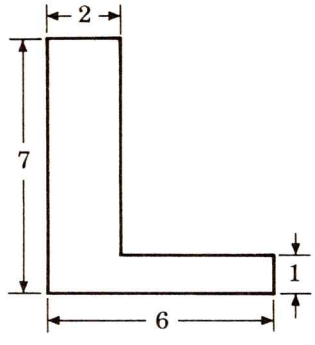


FIG. P6-7

6-8. Demuestre que el centro de masa de una placa triangular uniforme queda en la intersección de tres líneas que unen el centro de cada lado con el vértice opuesto.

6-9. Un aeroplano se mueve hacia 30° al este del norte con una rapidez con respecto a la Tierra de 800 km/h, y el viento se mueve hacia el este a 100 km/h. ¿Cuál es la rapidez del aire con respecto al aeroplano y la orientación del avión con respecto a la brújula?

6-10. Las gotas de lluvia caen verticalmente a 6.0 m/s, respecto al piso. ¿Cuál es la rapidez de las gotas y la dirección relativa a la vertical que mide un hombre que camina en la lluvia a 1.5 m/s?

6-11. El granizo cae en un ángulo de 60° con respecto a la vertical con la rapidez de 40 m/s. ¿En qué dirección, sentido y rapidez necesitará moverse un observador sobre el piso (si se mueve horizontalmente) para que le parezca que el granizo cae "verticalmente"?

6-12. Un telescopio debe capturar la luz de una estrella lejana que se encuentra directamente sobre él en el cenit. Debido a que la Tierra gira alrededor del Sol con la rapidez de 3.0×10^4 m/s y la luz se mueve con la rapidez finita de 3.0×10^8 m/s, el telescopio no puede apuntarse directamente hacia arriba, sino que debe inclinarse ligeramente con respecto a la vertical. (*a*) Si el telescopio está en el ecuador, ¿en qué dirección, este u oeste debe inclinarse? (Desprecie la rotación de la Tierra.) (*b*) ¿Cuál es el ángulo del telescopio con respecto a la vertical? (El fenómeno, conocido como *aberración estelar de la luz,* fue observado primero por J. Bradley en 1725; Bradley calculó la rapidez de la luz a partir del ángulo de aberración observado.)

6-13. Una mujer rema en un bote sobre aguas tranquilas a 3.0 mi/h. Trata de cruzar un río en el que la corriente es de 4 mi/h. ¿En qué dirección debe apuntar la proa, relativamente a la corriente de agua, para cruzar el río (*a*) en el tiempo mínimo, (*b*) recorriendo la distancia mínima, (*c*) con la mínima rapidez con respecto a las orillas del río?

6-14. Un hombre rema en un bote a 4.0 mi/h con respecto a aguas inmóviles. Debe cruzar un río de 1.0 mi de ancho en el que la corriente es de 3.0 mi/h. (*a*) Si el hombre constantemente dirige la proa corriente arriba del río con un ángulo de 30° con respecto a las orillas, ¿qué tiempo tardará en cruzar el río? (*b*) ¿En qué punto *corriente abajo* llegará a la orilla? (*c*) Si el hombre dirige la proa para cruzar el río en el tiempo mínimo, ¿hasta qué distancia corriente abajo del río será arrastrado? (*d*) ¿Entonces, cuál será el tiempo que tarda en cruzar? (*e*) El hombre dirige ahora la proa para que el bote se mueva la distancia mínima corriente abajo ¿cuál es dicha distancia? (*f*) ¿Cuál es el tiempo correspondiente que tarda en cruzar el río?

6-15. Un niño que se mueve hacia el este a 4.0 m/s arroja un periódico hacia el noreste a 3 m/s (como él lo ve). ¿Cuál es la rapidez, dirección y sentido del periódico de acuerdo con lo que ve alguien parado en el piso?

6-16. Los camiones A y B se acercan a un crucero, A se mueve hacia el este a 50 km/h y B hacia el norte a

80 km/h. Determine la velocidad de cada camión relativa al otro.

6-17. Una pelota se suelta desde el mástil de un barco que se mueve a 5.0 m/s. El mástil tiene 15 m de altura. Desprecie los efectos del aire. (*a*) ¿dónde choca la pelota con el barco en relación a la base del mástil? (*b*) ¿Con qué rapidez choca la pelota con la cubierta, en relación a un observador que se encuentra a bordo del barco? (*c*) ¿Con qué rapidez choca con la cubierta en relación a un observador que se encuentra en tierra? (*d*) ¿Qué distancia horizontal se mueve el barco mientras la pelota cae.

Galileo argumentó que un objeto soltado del mástil de un barco en movimiento choca con la cubierta en la base del mástil, en lugar de atrás de él. El cuerpo que cae tiene una velocidad horizontal cero relativa al barco, o lo que es equivalente, el objeto y el barco tienen la misma velocidad horizontal respecto a un observador en tierra. Este argumento fue usado para hacer plausible la cosmología propuesta por Copérnico, en la que se imagina que la Tierra y los objetos que están en su superficie están moviéndose en el espacio a velocidades extraordinariamente altas debido a la revolución alrededor del Sol y a la rotación en torno a su propio eje. Una objeción importante a la cosmología de Copérnico fue la siguiente: "Si la Tierra no está en reposo, sino que más bien se mueve en el espacio a velocidades altas, ¿por qué los objetos que se encuentran sobre la superficie de la Tierra no se quedan atrás, no hay fuertes vientos o los pájaros pueden volar serenamente en la atmósfera?"

6-18. Dos pelotas de billar se acercan con igual rapidez y chocan de frente. Cada pelota retrocede del choque con la misma rapidez con la que se acerca. Describa lo que pasa cuando una de las pelotas de billar choca de frente con una segunda pelota igual que inicialmente se encontraba en reposo.

6-19. Una caja se encuentra sobre una superficie sin fricción. Inicialmente, dentro de dicha caja se mueve una partícula hacia la derecha con rapidez constante y después choca con la pared de la derecha de la caja regresando hacia la izquierda. Después golpea la pared de la izquierda y retrocede hacia la derecha. Describa el movimiento de la caja.

6-20. Una pelota de tenis de mesa golpea a una pelota de billar en reposo y retrocede con la misma velocidad mientras que la pelota de billar esencialmente permanece en reposo. (*a*) Si una pelota de billar con la rapidez v golpea a la pelota de tenis de mesa inicialmente en reposo, ¿cuál es la rapidez de la pelota de tenis de mesa después del choque? (*b*) Si la pelota de billar tiene la velocidad $\mathbf{v}_b$ antes de chocar de frente con la pelota de tenis de mesa que tiene la velocidad $\mathbf{v}_p$, ¿cuál es la velocidad de la pelota de tenis de mesa después del choque?

6-21. Una sonda espacial se acerca al planeta Júpiter con la rapidez v_i, mientras el planeta mismo se mueve en una dirección aproximadamente opuesta con la rapidez v_J. La sonda gira alrededor del planeta, encontrándose que después se mueve en una dirección aproximadamente opuesta a su velocidad inicial y a la misma distancia del planeta con la velocidad v_f. (Vea la Fig. P6-21.) La masa de la sonda espacial

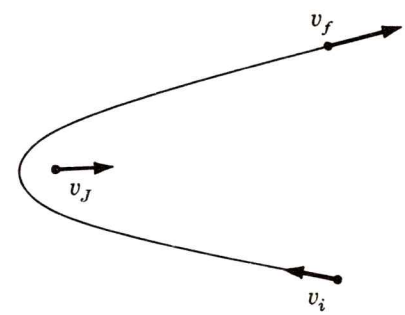


FIG. P6-21

es mucho menor que la de Júpiter, y su choque con el planeta es más bien como el de la pelota de tenis de mesa con la de billar. Demuestre que $v_f \approx v_i + 2v_J$; por esta interacción con el planeta la sonda espacial aumenta su rapidez en el *doble* de la rapidez del planeta. Esto ilustra el efecto de "tiro de honda" que se emplea en las sondas espaciales en el "Gran viaje" hacia varios planetas del sistema solar.

6-22. Dos partículas se fijan a los extremos de un resorte de masa despreciable. Se comprime el resorte y junto con las dos partículas que se le fijaron se pone en movimiento a lo largo de su dimensión mayor. Cada una de las dos partículas ejecuta un movimiento complicado, y el resorte se desliza en una dirección, miestras que se contrae y se estira. Demuestre que las dos partículas tienen la misma velocidad en aquellos momentos en que la longitud del resorte es un máximo o un mínimo. (Sugerencia: Considere el movimiento con respecto al marco del centro de masa.)

6-23. Una partícula tiene una rapidez v con respecto al laboratorio. Su rapidez también es v cuando se mide en el marco de referencia del centro de masa. (*a*) ¿Cuáles son las *dos* rapideces posibles del marco del centro de masa en relación al laboratorio? ¿Cuál es el ángulo entre la velocidad de la partícula y la velocidad del centro de masa cuando se mide con respecto a (*b*) el laboratorio y (*c*) el marco del centro de masa?

6-24. Un objeto que inicialmente se movía hacia el este a 10 m/s explota y vuela en dos pedazos de igual masa. Una viaja a 40 m/s en dirección a 60° al norte del este. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del segundo pedazo medida con respecto al laboratorio? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa del sistema (*c*) ¿Cuál es la velocidad del primer pedazo y (*d*) del segundo pedazo medidas con respecto al marco de referencia del centro de masa?

6-25. Una masa de 20 kg viaja hacia la derecha a 15 m/s, y otra masa de 10 kg viaja hacia la izquierda a 10 m/s. (*a*) ¿Cuál es el ímpetu lineal total del sistema de los dos cuerpos como se ve desde el laboratorio? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa del sistema? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de cada cuerpo relativa al centro de masa? (*d*) ¿Cual es el ímpetu lineal de cada uno de los cuerpos relativo al marco de referencia que se mueve con el centro de masa?

6-26. Una pelota de billar moviéndose inicialmente con la rapidez v choca con otra pelota de billar en reposo. Después del choque cada pelota se mueve con una rapidez de $v/\sqrt{2}$ y en un ángulo de 45° con respecto a la dirección de la velocidad de la pelota de billar incidente (el ángulo entre las velocidades con que salen las pelotas es de 90°). (*a*) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa del sistema? (*b*) ¿Cuáles son las velocidades de las dos pelotas antes del choque en el marco del centro de masa? (*c*) ¿Cuáles son las velocidades de las dos pelotas después del choque en el marco del centro de masa?

6-27. Un sistema aislado está formado por una partícula con la masa m_a y la velocidad $\mathbf{v}_{a1}$ en el laboratorio y otra partícula de masa m_b y la velocidad $\mathbf{v}_{b1}$ también en el laboratorio. Demuestre que la velocidad de m_a relativa al centro de masa del sistema es $\mathbf{v}_{a2} = m_b(\mathbf{v}_{a1} - \mathbf{v}_{b1})/(m_a + m_b)$ y que la velocidad de m_b relativa al centro de masa es $\mathbf{v}_{b2} = -m_a\mathbf{v}_{a2}/m_b = m_a(\mathbf{v}_{b1} - \mathbf{v}_{a2})/(m_a + m_b)$.

6-28. La ley de la conservación del ímpetu es una ley universal de física porque se aplica a cualquier marco de referencia. Los observadores en diferentes marcos de referencia en movimiento relativo atribuirán valores diferentes a la velocidad y al ímpetu del mismo objeto, pero todos estos observadores están de acuerdo en que en un choque entre dos objetos aislados diferentes, el ímpetu total es constante. Un observador en el marco S_1 escribe para el choque entre las masas m y M,

$$m\mathbf{v}_1 + M\mathbf{V}_1 = m\mathbf{v}_1' + M\mathbf{V}_1'$$

donde $\mathbf{v}_1$ es la velocidad de m antes y $\mathbf{v}_1'$ su velocidad después del choque, lo mismo para M. Use las transformaciones de velocidad para cambiar estas velocidades a las observadas en otro marco inercial S_2 y demuestre que

$$m\mathbf{v}_2 + M\mathbf{V}_2 = m\mathbf{v}_2' + M\mathbf{V}_2'$$

donde $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_2'$ son las velocidades antes y después del choque, y lo mismo para M. Lo que se comprueba con esto es que la ley de la conservación del ímpetu es invariante bajo la transformación de velocidad galileana.

Capítulo 7

FUERZA

Este capítulo se relaciona con la fuerza —sus orígenes fundamentales, sus relaciones con el ímpetu lineal, y su presencia en las leyes fundamentales de la mecánica. Primero consideraremos cualitativamente las fuentes u orígenes, de las fuerzas en las interacciones entre las partículas. Después definiremos la fuerza como la rapidez de cambio con respecto al tiempo del ímpetu lineal y exploraremos las consecuencias de esta definición. El principio de superposición para las fuerzas, que indica que las fuerzas simultáneas se suman como vectores, nos lleva a la segunda ley de Newton del movimiento. Se define el impulso de una fuerza y se desarrolla el teorema impulso-ímpetu. Enseguida, la aparición de pares de fuerzas iguales y opuestas de acción-reacción, conocida como la tercera ley de Newton del movimiento, se deriva de la ley de la conservación del ímpetu. Se define el peso y se da su relación con la masa.

En este capítulo trazamos los fundamentos y el significado de la fuerza y las leyes de Newton, el cimiento de la mecánica clásica.

7—1 ORIGENES FUNDAMENTALES DE LA FUERZA

Se dice que una partícula individual se encuentra bajo la acción de una fuerza, cuando su ímpetu *cambia;* para determinar cuándo un cuerpo está sujeto a una fuerza no balanceada, o neta, simplemente se observa si el cuerpo se aparta del movimiento a velocidad constante. La ilustración más simple de una fuerza es cuando se tienen dos partículas interactuantes; cada una de ellas influye en el movimiento de la otra, y podemos describir esta interacción en términos de una fuerza que actúa sobre cada partícula debida a la presencia de la otra. (Vea la Fig. 7-1.)

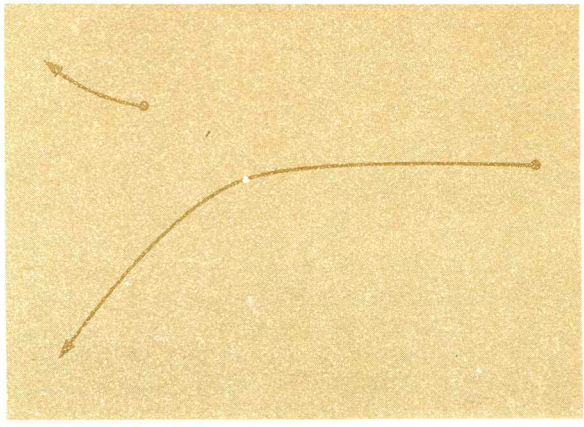


FIG. 7-1. Una partícula está afectada por una fuerza cuando, en la interacción con una o más partículas, su ímpetu cambia de dirección o de magnitud.

Existen diversas fuerzas con las que estamos familiarizados: un esfuerzo muscular que produce un empujón o un jalón, la fuerza de un objeto sólido sobre otro cuando se ponen en contacto, la fuerza gravitacional entre la Tierra y un satélite, la fuerza de un imán sobre un trozo de hierro o sobre otro imán, la fuerza electrostática de un aislador frotado sobre una varilla de plástico, o sobre pedacitos de papel. A pesar de la diversidad de estas fuerzas, es notable el hecho de que todas ellas —en realidad todas las fuerzas que ahora conocemos en física— se pueden derivar de cuatro fuerzas básicas: (1) la fuerza de atracción gravitacional universal entre dos objetos; (2) la llamada fuerza de interacción débil que gobierna el decaimiento β de ciertas partículas radiactivas y otros procesos subatómicos; (3) la fuerza que existe entre las cargas eléctricas, en reposo o en movimiento, que da lugar a las fuerzas eléctricas y magnéticas; y (4) la fuerza nuclear que es muy intensa y se presenta entre los constituyentes del núcleo atómico. Aunque la interacción débil y las fuerzas nucleares son importantes en la estructura del núcleo; virtualmente no tienen efecto ni aun en la estructura atómica. Por lo tanto, las únicas fuerzas que representan un papel en la física clásica, son las fuerzas gravitacionales, eléctricas y magnéticas. En último término, *todas* las demás fuerzas de la física clásica se pueden deducir de ellas.

7—2 DEFINICION DE LA FUERZA

Como un cambio en el ímpetu de una partícula implica que se encuentra bajo la acción de una fuerza, el tamaño de la fuerza debe estar relacionado con el tamaño de dicho cambio de ímpetu. Pero el solo cambio del ímpetu no puede ser una medida cuantitativa de la fuerza, debido a que se debe tener en cuenta el intervalo de tiempo en el que ocurre dicho cambio de ímpetu. El ímpetu de una partícula puede ocurrir lenta o bruscamente. Una fuerza pequeña cambia el ímpetu de un objeto; una fuerza grande

produce el mismo cambio de ímpetu en un intervalo de tiempo más corto. Lo que importa es la rapidez con la que el ímpetu cambia con respecto al tiempo. Realmente definimos a la *fuerza* que actúa sobre un objeto con *la rapidez de cambio del ímpetu* de un objeto *con respecto al tiempo.**

Si el ímpetu de un objeto $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ cambia en $\Delta\mathbf{p} = \Delta(m\mathbf{v})$ en el intervalo de tiempo Δt, la fuerza promedio $\overline{\mathbf{F}}$ que actúa sobre el objeto es

$$\overline{\mathbf{F}} = \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t} \tag{7-1}$$

La fuerza instantánea (de aquí en adelante nos referiremos a ella simplemente como fuerza) es la fuerza promedio calculada en un intervalo de tiempo extraordinariamente pequeño; lo que es equivalente, la fueza es la derivada del ímpetu con respecto al tiempo:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \tag{7-2}$$

Para una partícula clásica, cuya masa es una constante independiente de la rapidez o de otras circunstancias, podemos escribir

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \tag{7-3}$$

La fuerza que actúa sobre una partícula es simplemente igual a su masa multiplicada por su aceleración.

La fuerza es un vector que tiene la misma dirección y el mismo sentido que el cambio de ímpetu al que está asociada. Claramente se ve que una partícula cuya rapidez cambia se encuentra bajo la acción de una fuerza debido a que se acelera y un ímpetu cambia. Una partícula que se mueve en un círculo con rapidez constante también se encuentra bajo la acción de una fuerza, porque la dirección de su ímpetu cambia continuamente. En pocas palabras, una fuerza actúa siempre que una partícula cambia su ímpetu, tanto en magnitud como en dirección, o en ambas.

A partir de esta definición, de ímpetu dividido entre tiempo, la fuerza tiene las dimensiones de ML/T^2 y en el Sistema Internacional, las unidades kilogramos metros por segundo cuadrado, kg m/s^2. Esta combinación de unidades se conoce como *newton* y se abrevia con N.

---

*La definición se justifica, no sólo porque está de acuerdo con nuestro sentido común de lo que constituye un empuje o un tirón grande o pequeño, sino más especialmente debido a que encontramos que el definir la fuerza de esta manera, las fuerzas simultâneas se suman como vectores y que las fuerzas fundamentales como la fuerza gravitacional toman una forma matemática simple, lo mismo que las funciones de energía potencial relacionadas.

$$1 \text{ newton} = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg-m/s}^2$$

Así, una fuerza de 1 N hace que el ímpetu de un objeto cambie en 1 kg m/s en 1 s: en forma equivalente, 1 N imparte una aceleración de 1 m/s² a un objeto de 1 kg.

En el sistema métrico de unidades cgs (centímetro-gramo-segundo) la unidad de fuerza es la *dina*: 1 dina = 1 g-cm/s² = $(10^{-3}\text{ kg})(10^{-2}\text{ m/s}^2) = 10^{-5}$ N. En el Sistema de Unidades usual en los E.U.A. la unidad de fuerza es la libra: 1 lb = 4.448 N.

Ejemplo 7--1

Un cuerpo de 10 kg interactúa con un segundo cuerpo. Inicialmente el cuerpo de 10 kg se movía hacia el este a 20 m/s; $\frac{1}{2}$ s después se movía hacia el norte a 15 m/s. ¿Cuál es la fuerza promedio que actúa sobre el cuerpo de 10 kg durante el intervalo de tiempo de medio segundo?

Para calcular la fuerza, primero determinamos el cambio de ímpetu $\Delta\mathbf{p}$. Vea la Fig. 7-2. El diagrama vectorial del ímpetu indica que $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$ es de 250 kg m/s en dirección a 37° al norte del oeste. Por lo tanto, de la Ec. (7.1), la fuerza promedio es

$$\overline{\mathbf{F}} = \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{250 \text{ kg-m/s}}{0.50 \text{ s}}$$

$$= 500 \text{ N a } 37° \text{ al norte del oeste.}$$

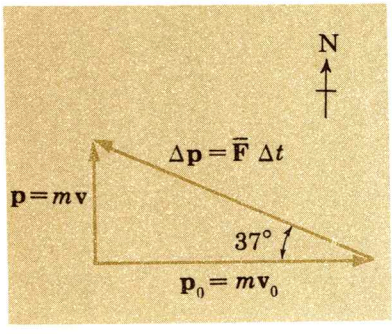


FIG. 7-2

Ejemplo 7-2

Un electrón (masa, 9.1×10^{-31} kg) parte desde el reposo en una placa con carga negativa y llega a la placa paralela, de carga positiva, que se encuentra a 2.0 cm de distancia en un tiempo de 1.4×10^{-7} s. Si la aceleración del electrón es constante en el movimiento, ¿qué fuerza actúa sobre él?

El desplazamiento de una partícula con aceleración constante que parte del reposo está dado por

$$x = \tfrac{1}{2}at^2 \qquad (3\text{-}7)$$

Por lo tanto, la fuerza constante que actúa sobre el electrón es

$$F = ma = \frac{m(2x)}{t^2} = \frac{(9.1 \times 10^{-31}\text{ kg})(4.0 \times 10^{-2}\text{ m})}{(1.4 \times 10^{-7}\text{ s})^2}$$

$$= 1.9 \times 10^{-18} \text{ N}$$

7—3 EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICION PARA LAS FUERZAS

Cuando un objeto interactúa con un segundo objeto, se encuentra sujeto a una fuerza que es, por definición, igual a la

rapidez de cambio con respecto al tiempo del ímpetu del objeto. En esta sección estableceremos que si un objeto interactúa con *dos* o *más* objetos y, por ello, está sujeto a varias fuerzas simultáneamente, la rapidez de cambio con respecto al tiempo de su ímpetu es igual a la *suma vectorial* de las fuerzas individuales que actúan sobre él.

Supóngase que tenemos un objeto de masa m sobre una superficie sin fricción y que se le une un resorte para que se produzca una fuerza sobre él. (Un resorte ordinario helicoidal cuando se estira o comprime produce una fuerza directamente proporcional al tamaño del estiramiento o la compresión.) Con un primer resorte unido, el objeto tiene una aceleración $\mathbf{a}_1$, por lo que la fuerza del resorte es $\mathbf{F}_1 = m\mathbf{a}_1$. Cuando se retira el primer resorte y el objeto se une con un segundo resorte, el objeto adquiere una aceleración de $\mathbf{a}_2$ (no necesariamente en la misma dirección que $\mathbf{a}_1$), de tal manera que la fuerza del segundo resorte es $\mathbf{F}_2 = m\mathbf{a}_2$.

Supóngase ahora que se unen los dos resortes al objeto, cada uno de ellos estirado con la misma intensidad y en la misma dirección y sentido que antes. El objeto se encuentra sujeto a dos fuerzas simultáneas. (Ver la Fig. 7-3.) Su aceleración es $\mathbf{a}$, donde, *experimentalmente*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$$

tanto en magnitud como en dirección y sentido. De esto se deduce que

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_1}{m} + \frac{\mathbf{F}_2}{m}$$

o

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m\mathbf{a}$$

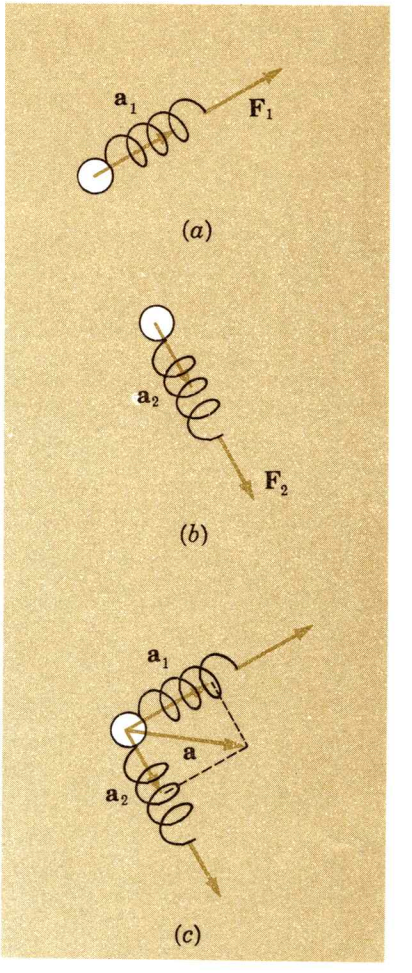


FIG. 7-3. El objeto bajo la acción de (*a*) la fuerza $\mathbf{F}_1$ sola, (*b*) la fuerza $\mathbf{F}_2$ sola, (*c*) las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ simultáneamente.

El lado izquierdo de esta ecuación es la *suma vectorial* de las fuerzas aplicadas simultáneamente. Dos o más fuerzas que actúen en forma simultánea sobre cualquier objeto, son equivalentes a una sola fuerza igual a su suma vectorial. Este es el *principio de superposición* para las fuerzas.

Si el vector suma de las fuerzas que actúan sobre un objeto se representa por $\Sigma\mathbf{F}$,

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a} \qquad (7\text{-}4)$$

La rapidez de cambio con respecto al tiempo del ímpetu de un objeto es igual, en magnitud, dirección y sentido, a la suma vectorial de las fuerzas que actúen sobre él. Este resultado, que proviene de la definición de la fuerza y el principio de superposición determinado experimentalmente, se conoce como la *segunda ley de Newton del movimiento*. Es este el principio fundamental

que gobierna los movimientos de los objetos que interactúan entre sí. El siguiente capítulo ilustrará su amplia aplicabilidad.

Una consecuencia simple, pero importante, del principio de superposición es la de que dos o más fuerzas al combinarse pueden producir una fuerza resultante *cero*. Entonces el ímpetu del objeto es constante y su aceleración es cero. Por esta razón la ley de la inercia debe indicarse como sigue: Una partícula tiene ímpetu constante cuando se encuentra bajo la acción de una fuerza *resultante* igual a cero.

7—4 PARES DE FUERZAS

Considérense dos partículas con los ímpetus $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ que interactúan entre sí, pero aparte de ello están aisladas. Su ímpetu total es constante:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{constante}$$

Tomando las derivadas con respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = 0$$

o

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}$$

Por definición, $d\mathbf{p}_1/dt$ es la fuerza ejercida sobre la partícula 1 debida a su interacción con la partícula 2,

$$\mathbf{F}_{2\text{ a }1} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt}$$

Similarmente, la fuerza ejercida sobre la partícula 2 debida a 1 es

$$\mathbf{F}_{1\text{ a }2} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene

$$\mathbf{F}_{2\text{ a }1} = -\mathbf{F}_{1\text{ a }2} \tag{7-5}$$

Estas dos fuerzas, frecuentemente llamadas fuerzas de *acción* y *reacción son iguales en magnitud y dirección* pero *opuestas en sentido*. Actúan sobre diferentes objetos —una sobre 1 y la otra sobre 2— y consecuentemente no pueden hacer que uno de los objetos interactuantes quede en equilibrio.

Esto mismo puede representarse en forma gráfica para dos objetos que interactúan en un choque de frente; las gráficas de ímpetu-tiempo y las correspondientes de fuerza-tiempo se indican

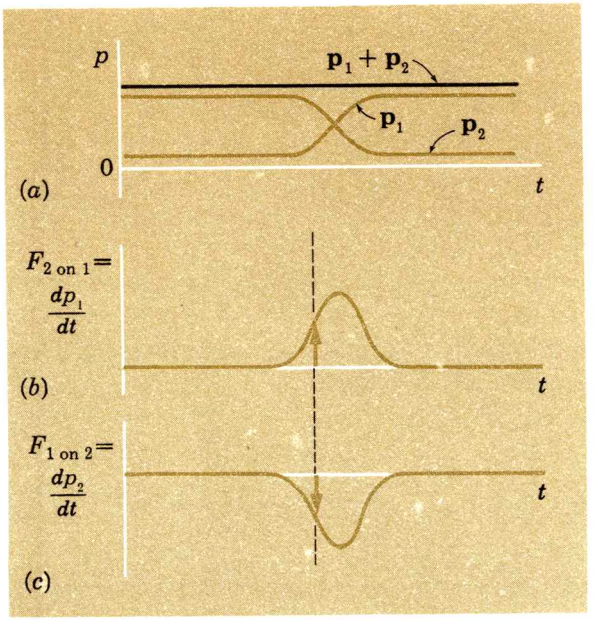


FIG. 7-4. (*a*) Gráfica de ímpetu-tiempo para los cuerpos que chocan. (*b*) Gráfica de fuerza-tiempo para el objeto 1. (*c*) Gráfica de fuerza-tiempo para el objeto 2.

en la Fig. 7-4. La conservación del ímpetu requiere que el ímpetu total de este sistema aislado permanezca constante en todo el tiempo. El ímpetu ganado por el objeto 1 está balanceado durante todo el tiempo por la pérdida igual de ímpetu del objeto 2: La gráfica de ímpetu-tiempo para el objeto 2 es igual a la del objeto 1, pero invertida. Las gráficas de fuerza-tiempo tienen la misma forma, pero la fuerza que actúa sobre 1 siempre es positiva mientras que la que actúa sobre 2 es negativa. Además, la fuerza instantánea de 2 a 1 es en todo momento igual en magnitud y dirección, pero de sentido opuesto a la fuerza de 1 a 2, tal como se encuentra dado por (7-5).

Este importante resultado, una consecuencia de la definición de la fuerza y la ley de la conservación del ímpetu, se conoce como la *tercera ley de Newton del movimiento*.

Las fuerzas sólo se presentan en pares. Cuando un martillo golpea a un clavo, la fuerza que ejerce el martillo sobre el clavo es precisamente igual en magnitud a la fuerza que el clavo ejerce sobre el martillo. Cuando una pelota golpea a una ventana, la fuerza de la pelota sobre la ventana es exactamente igual a la fuerza de la ventana sobre la pelota. La fuerza de un cohete sobre las partículas que expulsa es exactamente igual a la fuerza de estas partículas sobre el cohete. La fuerza de la tierra sobre una manzana que cae es precisamente igual en magnitud a la fuerza de la manzana sobre la tierra.

Podemos usar la tercera ley para comparar masas. Considere dos partículas que interactúan, pero que aparte de ello están aisladas. De (7-5)

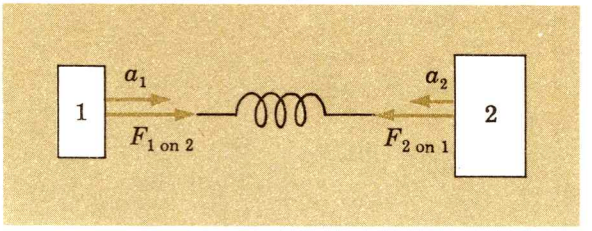


FIG. 7-5. La relación de las magnitudes de las aceleraciones de dos objetos que interactúan es igual a la relación inversa de sus respectivas masas.

$$\mathbf{F}_{2\text{ a }1} = -\mathbf{F}_{1\text{ a }2}$$

Sobre cada partícula actúa únicamente una fuerza y, por la segunda ley de Newton,

$$m_1\mathbf{a}_1 = -m_2\mathbf{a}_2$$

o

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{a_2}{a_1} \tag{7-6}$$

La relación de las masas es igual a la inversa de la relación de las aceleraciones. (Vea la Fig. 7-5.) Si las dos partículas que interactúan tienen la misma aceleración, sus masas son iguales.

7—5 PESO

Los experimentos demuestran que cualquier objeto en vuelo libre a lo largo de una distancia corta cerca de la Tierra tiene una aceleración constante g hacia el centro de la Tierra. Esto explica que todo objeto se encuentra sujeto a una fuerza constante debida a su interacción con la Tierra completa. El fenómeno de que un objeto sea atraído por la Tierra se llama *gravitación,* y la fuerza que recibe el objeto debida a su interacción gravitacional con la tierra se llama su *peso*.

Aplicando la segunda ley a un objeto que cae libremente de masa m, peso $\mathbf{w}$, y aceleración $\mathbf{g}$, tenemos (Fig. 7-6).

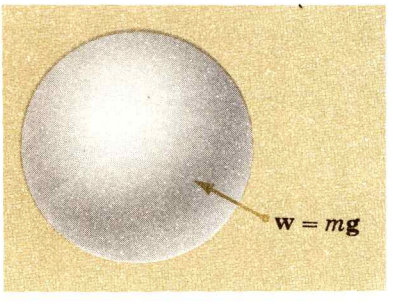


FIG. 7-6. La segunda ley de Newton aplicada a un objeto que cae libremente.

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\mathbf{w} = m\mathbf{g} \tag{7-7}$$

La magnitud del peso simplemente es igual a la masa multiplicada por g, la aceleración debida a la gravedad. La dirección y el sentido del peso es "hacia abajo", es decir, hacia el centro de la Tierra. Desde otro punto de vista, la aceleración de un objeto que cae libremente es, el vector $\mathbf{g} = \mathbf{w}/m$, que da la fuerza gravitacional por unidad de masa.

La llamada aceleración normal debida a la gravedad, cercana al valor medido a la latitud de 45° y casi al nivel del mar, es

$$g \text{ normal} = 9.80665 \text{ m/s}^2 = 32.17398 \text{ pie/s}^2$$

Por lo que, el peso de un objeto de 1 kg es de alrededor de 9.8 N.* Una manzana pequeña pesa aproximadamente 1 N.

En su uso no científico, los términos masa y peso son intercambiables. Sin embargo, masa y peso son cantidades muy diferentes.

El peso es un vector, es una medida del tirón a la Tierra sobre un objeto (o del tirón del objeto sobre la Tierra). El peso no es constante en magnitud sino que depende de la magnitud de g, que, aunque es constante en una localización cercana a la Tierra, muestra variaciones con la altitud y la latitud y es, de hecho, cero para objetos alejados de la Tierra en el espacio interestelar. Así, el peso de 1 kg masa es de 9.8 N en una localización donde g es de 9.8 m/s^2 en otro punto de la Tierra, donde g es de 9.79 m/s^2; el peso es de 9.79 N. Un objeto de 1 kg, o un objeto de cualquier masa, en realidad no tienen peso cuando se encuentran en el espacio interestelar, alejados de otros objetos.

Por otra parte, la masa es un escalar; es una propiedad intrínseca del objeto, independiente de su interacción con otros. Para producir una aceleración de 1 m/s^2, una fuerza de 1 N debe actuar sobre una masa de 1 kg ya sea que el objeto se encuentre sobre la superficie de la Tierra, o en su centro, o en cualquier otra localización.

Supóngase que comparamos los pesos de dos objetos de masas m_1 y m_2 en el mismo lugar. Ambos cuerpos tienen la misma aceleración g cuando caen; por lo que

$$\mathbf{w}_1 = m_1\mathbf{g} \qquad \mathbf{w}_2 = m_2\mathbf{g}$$

y

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{m_1}{m_2} \tag{7-8}$$

La relación entre las masas de dos objetos en el mismo lugar, es igual a la relación de sus pesos. Así, una balanza gravitacional ordinaria de platillos que compara *pesos* de dos cuerpos, también indica, cuando esté balanceada, que las *masas* son iguales. (Vea la Sec. 5-2.)

El peso de un objeto es independiente de su estado de movimiento. Podemos comprobar esto lanzando un objeto hacia arriba en el aire. Su aceleración *siempre* es **g**, ya sea que se dirija

*La libra es una unidad de fuerza, o peso, no es una unidad de masa. Como la masa de un objeto que tiene el peso w es $m = w/g$, podemos escribir la masa de, digamos un objeto de 64 lb como $m = (64 \text{ lb})/(32 \text{ pie/s}^2) = 2\text{lb}/(\text{pie/ s}^2)$. Algunas veces se usa el término *slug* para designar a la combinación de unidades lb/(pie/s^2), pero esto se puede evitar por completo simplemente escribiendo la masa de un objeto en el Sistema de Unidades acostumbrado en los E.U.A. como su peso dividido entre g.

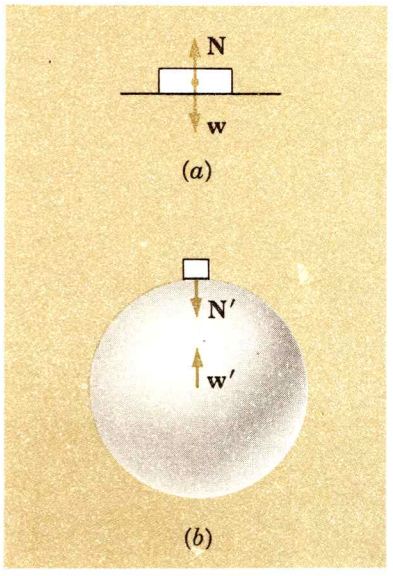


FIG. 7-7. (*a*) Fuerzas sobre un objeto en reposo sobre una superficie horizontal. (*b*) Las fuerzas de reacción a las fuerzas mostradas en (*a*) $N = N'$ y $w = w'$.

hacia arriba o hacia abajo o se encuentre momentáneamente en reposo en el cenit. Por lo que, la fuerza gravitacional $\mathbf{w} = m\mathbf{g}$, también es independiente del movimiento del objeto.

Por ejemplo, cuando un cuerpo de 1 kg está en reposo sobre una superficie horizontal, se dice que está en equilibrio. No hay fuerza neta sobre él. La Tierra ejerce la fuerza **w** hacia abajo; por lo que debe haber una fuerza hacia arriba **N**, igual en magnitud al peso, como se indica en la Fig. 7-7. La fuerza hacia arriba que actúa sobre el cuerpo proviene de su interacción con la superficie y es perpendicular (normal) a ella; se llama la *fuerza normal.* En magnitud, $N = w$ *para esta situación.* La fuerza normal y el peso, a pesar de ser dos fuerzas iguales y opuestas, *no* corresponden a un par acción-reacción.

Considere las fuerzas de reacción en la Fig. 7-7*b*. El peso es la fuerza de la Tierra sobre el bloque; la fuerza de reacción es el tirón del bloque sobre la Tierra. La fuerza normal es la fuerza de la superficie sobre el bloque; la fuerza de reacción es la fuerza del bloque sobre la superficie. Las únicas fuerzas que son apropiadas para describir el estado de movimiento, o de reposo *del bloque,* son las fuerzas que actúan *sobre él* —el peso y la fuerza normal. Las reacciones a estas fuerzas *no* actúan sobre el bloque y no son apropiadas para considerar su movimiento.

7—6 IMPULSO E IMPETU

De acuerdo con la Ec. (7-1), el cambio del ímpetu $\Delta\mathbf{p}$ que ocurre en un intervalo de tiempo Δt se puede indicar en la forma

$$\Delta\mathbf{p} = \overline{\mathbf{F}}\,\Delta t \tag{7-9}$$

donde $\overline{\mathbf{F}}$ es la fuerza media en este intervalo.

En forma similar, el cambio incremental del ímpetu $d\mathbf{p}$ sobre el tiempo dt es

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}\,dt$$

donde **F** es la fuerza instantánea. Integrando ambos lados de esta ecuación a partir de un tiempo incial t_i hasta un tiempo final t_f se obtiene

$$\int_{\mathbf{p}_i}^{\mathbf{p}_f} d\mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt$$

$$\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \Delta\mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt \tag{7-10}$$

donde $\mathbf{p}_f$ es el ímpetu final, $\mathbf{p}_i$ el ímpetu inicial y $\Delta\mathbf{p}$ el cambio en el ímpetu.

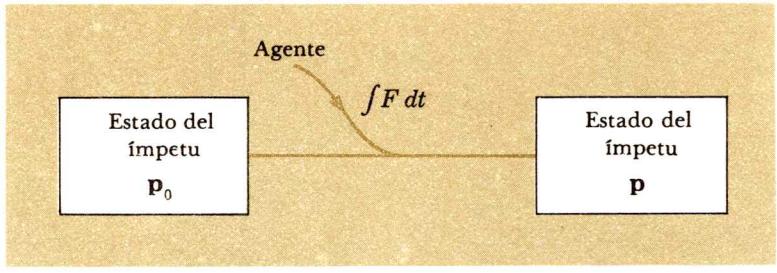


FIG. 7-8. Una representación esquemática de la transmisión del ímpetu desde un agente hasta un cuerpo.

La integral de la fuerza sobre el tiempo $\int \mathbf{F}\,dt$ se conoce como el *impulso* de la fuerza. Como indica (7-10), el *impulso es igual al cambio en el ímpetu.* Esto se conoce como el *teorema del impulso-ímpetu.*

La fuerza es la derivada del ímpetu con respecto al tiempo; el cambio del ímpetu es la integral de la fuerza sobre el tiempo, esa integral se denomina el impulso. La fuerza es una medida de la rapidez de flujo del ímpetu entre los objetos que interactúan; el impulso es una medida de la transmisión neta del ímpetu, como se ve esquemáticamente en la Fig. 7-8.

Cuando una fuerza cambia con el tiempo, a menudo es útil hablar de la fuerza promedio equivalente $\overline{\mathbf{F}}$. Combinando (7-9) y (7-10), tenemos

$$\text{Impulso} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt = \overline{\mathbf{F}}\,\Delta t \tag{7-11}$$

donde $\Delta t = t_f - t_i$. En palabras, una fuerza constante $\overline{\mathbf{F}}$ tiene el mismo impulso y produce el mismo cambio de ímpetu que la fuerza $\mathbf{F}$ que varía con el tiempo, cuando las fuerzas se relacionan como se indica en (7-11).

Aunque el uso coloquial del término *impulso* implica por lo general a una fuerza que actúa sólo por un tiempo muy corto, la definición formal del impulso incluye cualquier fuerza, independientemente del periodo durante el que actúa. Una *fuerza impulsiva* implica usualmente a una que actúa sólo por un tiempo muy corto, por ejemplo, la fuerza de un martillo sobre un clavo.

El impulso tiene unidades iguales a las del ímpetu: kg m/s o Ns.

Es útil examinar las relaciones gráficas entre el ímpetu, el tiempo, la fuerza y el impulso. La Fig. 7-9*a* muestra el ímpetu de un objeto graficado como una función del tiempo. El ímpetu es constante antes y después del periodo de interacción Δt; durante Δt el ímpetu aumenta con rapidez constante. La fuerza promedio que actúa sobre el objeto $\overline{\mathbf{F}} = \Delta\mathbf{p}/\Delta t$ es constante durante el tiempo Δt y en otras circunstancias cero, como se indica en la Fig. 7-9*b*. En términos gráficos la fuerza es la pendiente de la gráfica ímpetu-tiempo. A la inversa, el impulso $\overline{\mathbf{F}}\,\Delta t$ es el área bajo la gráfica fuerza-tiempo.

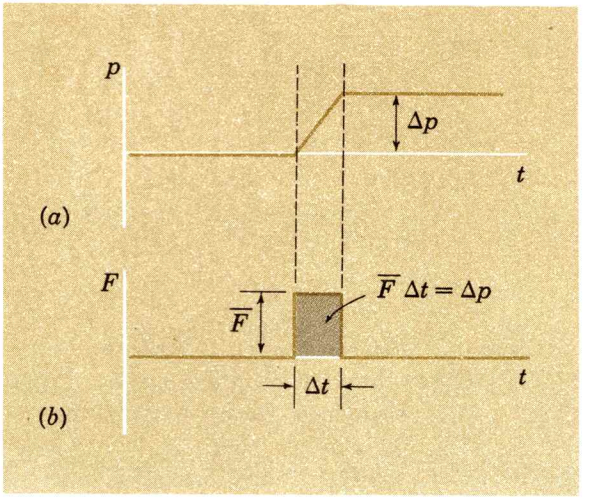


FIG. 7-9. Gráficas para una fuerza constante: (*a*) ímpetu-tiempo y (*b*) fuerza-tiempo. El impulso es el área bajo la gráfica fuerza-tiempo.

Las gráficas de ímpetu-tiempo y fuerza-tiempo correspondientes de la Fig. 7-10*a* y *b* presentan una situación más realista. Aquí el ímpetu cambia gradualmente, y la fuerza aumenta en forma continua hasta un máximo, cayendo de nuevo a cero. La fuerza instantánea $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ se grafica, según se deriva de la pendiente de la gráfica ímpetu-tiempo. De nuevo el impulso es el área bajo la gráfica de fuerza-tiempo: $\mathbf{F}\,dt$, es el área de un rectángulo angosto, y $\int \mathbf{F}\,dt$ es el área completa bajo la curva.

Ejemplo 7-3

Un bloque de 3.0 kg se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción, moviéndose primero a la izquierda a 50 m/s, como se indica en la Fig. 7-11*a*. Choca con el resorte, lo comprime y queda momentáneamente en reposo. En seguida el cuerpo es acelerado

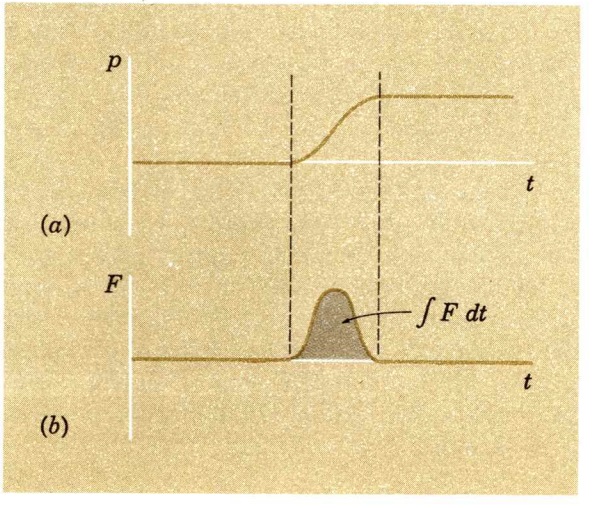


FIG. 7-10. Gráficas para fuerza variable: (*a*) ímpetu-tiempo y (*b*) fuerza-tiempo.

hacia la derecha por la fuerza del resorte comprimido. Finalmente, el cuerpo se mueve a la derecha a 40 m/s. El bloque se mantiene en contacto con el resorte durante 0.020 s. (*a*) ¿Cuál fue la dirección, sentido y magnitud del impulso del resorte sobre el bloque? (*b*) ¿Cuál fue la fuerza promedio del resorte sobre el bloque?

(*a*) No tenemos un registro de la fuerza que actúa sobre el bloque como una función del tiempo; por lo tanto, no es posible calcular el impulso por medio del área bajo la gráfica de fuerza instantánea-tiempo. Conocemos el cambio del ímpetu del bloque $\Delta\mathbf{p}$ que se debe a los impulsos. Esto es

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$$

Decidiendo que el sentido positivo sea hacia la derecha, tenemos

$$\Delta\mathbf{p} = (3.0 \text{ kg})(+40 \text{ m/s}) - (3.0 \text{ kg})(-50 \text{ m/s}) = +270 \text{ kg-m/s}$$

Note que el ímpetu inicial $\mathbf{p}_i$ es *negativo,* significando ello que es un ímpetu hacia la izquierda. Ahora conocemos el impulso por la Ec. (7-10):

$$\text{Impulso} = \Delta\mathbf{p} = 270 \text{ kg-m/s} = 270 \text{ N-s} \qquad \text{(a la derecha)}$$

(*b*) Para encontrar la fuerza promedio que actúa sobre el bloque durante el choque, usamos la Ec. (7-11),

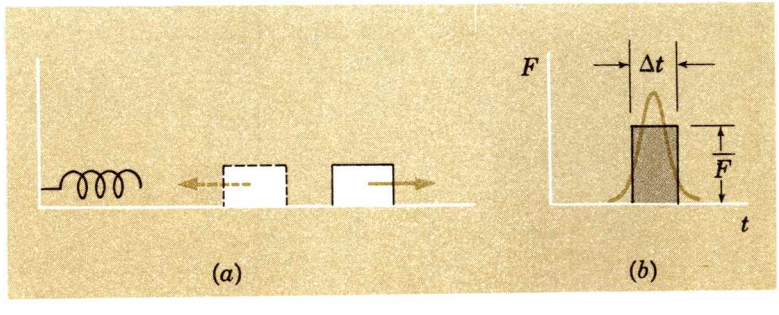
$$\text{Impulso} = \overline{\mathbf{F}}\,\Delta t = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt$$

donde Δt ahora es el tiempo de la interacción 0.020 s. Por lo tanto, podemos calcular la fuerza promedio:

$$\overline{\mathbf{F}} = \frac{\text{impulso}}{\Delta t} = \frac{270 \text{ N-s}}{0.020 \text{ s}}$$

$$\overline{\mathbf{F}} = 13{,}500 \text{ N} \approx 1.5 \text{ ton!} \qquad \text{(a la derecha)}$$

Una fuerza *constante* de 13 500 N actuando durante 0.020 s, produce el mismo impulso que el que produce la fuerza variable del resorte. Como la fuerza del resorte primero aumenta desde cero a un máximo y después disminuye a cero de nuevo, la fuerza instantánea *excede* a la fuerza promedio equivalente que es constante de 13 500 N, como se ve en la Fig. 7-11*b*. Por definición, la fuerza promedio



equivalente $\bar{\mathbf{F}}$ tiene un valor tal, que su impulso $\bar{\mathbf{F}}\,\Delta t$, sobre el tiempo de interacción Δt, es igual al impulso real $\int \mathbf{F}\,dt$; esto es, el área del rectángulo en la Fig. 7-11*b* es igual al área bajo la gráfica fuerza real-tiempo (ambas áreas representan la magnitud del impulso).

RESUMEN

Cuando dos partículas, 1 y 2, interactúan, la fuerza instantánea, $\mathbf{F}_{1\ a\ 2}$, de 1 sobre 2 se define como la derivada del ímpetu lineal de 2 con respecto al tiempo:

$$\mathbf{F}_{1\ a\ 2} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \tag{7-2}$$

En su forma general la segunda ley de Newton del movimiento para una partícula es

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a} \tag{7-4}$$

donde $\Sigma\mathbf{F}$ es el vector suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula y $\mathbf{p}$ es su ímpetu lineal.

La tercera ley de Newton del movimiento, una consecuencia directa de la conservación del ímpetu, asienta que cuando dos partículas interactúan lo hacen con dos fuerzas mutuas,

$$\mathbf{F}_{2\ a\ 1} = -\mathbf{F}_{1\ a\ 2} \tag{7-5}$$

Las fuerzas se presentan en pares: una fuerza de acción y una fuerza de reacción. Estas fuerzas actúan sobre cuerpos diferentes.

El peso es la fuerza gravitacional $\mathbf{w}$ de la tierra:

$$\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$$

El teorema del impulso-ímpetu es

$$\mathbf{w} = m\mathbf{g} \tag{7-7}$$

donde el miembro de la izquierda se llama el impulso de la fuerza $\mathbf{F}$ y el miembro de la derecha es el cambio resultante del ímpetu lineal.

PROBLEMAS

7-1. La Fig. P7-1 es una gráfica del ímpetu instantáneo de un objeto como una función del tiempo. ¿Cuál es la fuerza promedio sobre el objeto en los intervalos (*a*) $t = 0$ a 1 s, (*b*) t = 1 a 2 s, (*c*) t = 2 a 3 s, (*d*) t = 3 a 4 s, (*e*) t = 4 a 5 s, y (*f*) t = 5 a 6 s.

7-2. La Fig. P7-2 es una gráfica de la fuerza instantánea que se ejerce sobre un objeto de 2 kg como una función del tiempo. Cuál es el promedio en el tiempo de la fuerza sobre el objeto en los intervalos de tiempo (*a*) $t = 0$ a 1 s, (*b*) t = 1 a 2 s, (*c*) t = 2 a 3 s, (*d*) t = 3 a 4 s, (*e*) t = 4 a 5 s, y (*f*) $t = 0$ a 5 s.

7-3. La cabeza de un mazo pequeño de 2.0 kg se mueve a 6.0 m/s cuando golpea a una alcayata, clavándola en un tronco; la duración del impacto es de 0.0020 s. (*a*) Encuentre el promedio en el tiempo de la fuerza de impacto, y (*b*) estime la distancia que penetra la alcayata en el tronco como resultado de este golpe.

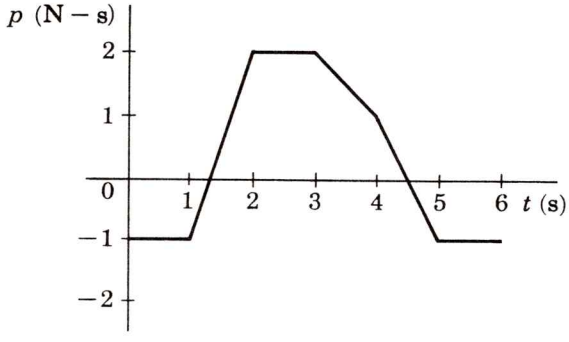


FIG. P7-1

7-4. Una partícula viaja hacia el suroeste con la rapidez constante de 80 km/h, siendo afectada por dos fuerzas, de 10 N hacia el noreste y de 10 N hacia el sudeste. ¿Qué otra tercera fuerza debe actuar sobre la partícula?

7-5. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza promedio que cambia la dirección, aunque no la magnitud, del ímpetu de una partícula mv en 60° en el tiempo Δt?

7-6. Una partícula de masa m se mueve en un círculo de radio r con la rapidez constante v. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza-tiempo promedio de la partícula para (*a*) un ciclo completo, (*b*) medio ciclo, y (*c*) un cuarto de ciclo?

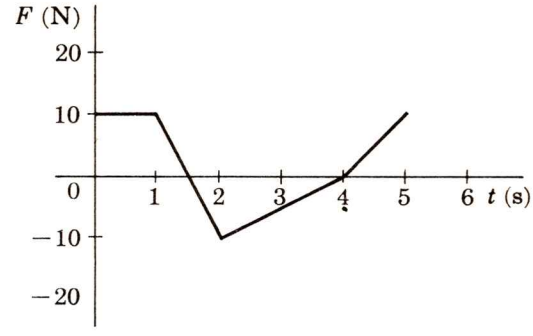


FIG. P7-2

7-7. Desde su punto de partida en reposo un automóvil de carreras de 2 400 lb recorre 1/4 de milla en 15.0 s. Encontrar (*a*) la rapidez final y (*b*) la fuerza promedio *horizontal* entre la superficie de la carretera y cada una de las dos ruedas que lo impulsan. Suponga que la aceleración es constante y considere que g = 32.0 pie/s².

7-8. Una arma de fuego cuyo cañón tiene 6.0 m de largo dispara un proyectil de 10.0 kg con una velocidad en la boca de 1 000 m/s. El proyectil es capaz de penetrar hasta 30 cm de blindaje. Encontrar (*a*) la fuerza promedio que se ejerce sobre el proyectil mientras se mueve en el cañón y (*b*) la fuerza promedio que ejerce el proyectil sobre el blindaje. (Note la relación que hay entre las dos fuerzas y la razón que hay para la diferencia.)

7-9. Una bala de 5.0 g que se mueve a 300 m/s traspasa un poste de 20 cm de grueso y sale con una rapidez de 100 m/s. ¿Cuál es la fuerza promedio ejercida por la bala sobre el poste?

7-10. Un chorro de moléculas de gas, cada una de las cuales tiene una masa de 3.0×10^{-27} kg y una rapidez de 360 m/s, choca con una pared perpendicularmente a su superficie. Las moléculas rebotan con la misma rapidez. ¿Cuál es la fuerza promedio que se ejerce sobre la pared por unidad de área si el chorro incidente contiene 2.0×10^{19} moléculas m^3?

7-11. Un astronauta usa una pistola espacial para maniobrar en las condiciones sin peso del espacio exterior. La emisión de moléculas gaseosas de alta velocidad produce una fuerza de retroceso de la

misma manera que en un cohete. (*a*) ¿Cuál es la fuerza promedio que produce una pistola espacial que emite moléculas de gas a razón de 14 g/s y con una rapidez de 0.6 km/s? (*b*) ¿Qué tanto cambiará la rapidez de un astronauta que tiene la masa de 100 kg y que mantiene prendida la pistola durante 5.0 s?

7-12. Un objeto de 5.0 kg que se suelta desde una altura de 180 cm sobre la superficie de la Luna cae en 1.5 s. ¿Cuál es su peso en ese lugar?

7-13. Una esfera de 1.0 kg se suelta desde la altura de 1.5 m sobre el piso. Rebota hasta 1.0 m. La esfera se encuentra en contacto con el piso durante 1.0×10^{-3} s. ¿Cuáles son el sentido y la magnitud de la fuerza promedio que se ejerce sobre la esfera (*a*) mientras se entran en contacto con el piso, (*b*) mientras desciende o asciende, y (*c*) durante todo su movimiento? Grafique, en función del tiempo la fuerza vertical que actúa sobre la esfera.

7-14. Una esfera de masa m se suelta desde una altura h. Da cierto número de rebotes antes de quedar en reposo en un intervalo de tiempo Δt. (*a*) ¿Cuál es la fuerza promedio que ejerce la esfera sobre el piso durante el tiempo Δt? (*b*) ¿Cuál es la fuerza promedio que ejerce el piso sobre la esfera durante el mismo intervalo de tiempo? Grafique la fuerza vertical instantánea que se ejerce sobre la esfera como una función del tiempo.

7-15. Una esfera de 1.0 kg se lanza en el aire con una rapidez de 10 m/s y a un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. (*a*) ¿Cuál es el impulso de la esfera durante los primeros 2.0 s? (*b*) ¿Cuál es el ímpetu de la esfera después de los 2.0 s? (*c*) Dibuje gráficas en las que se representen las componentes verticales del ímpetu y de la fuerza como una función del tiempo.

7-16. El peso de un recipiente que contiene un gas excede al peso del mismo, cuando se encuentra al vacío, exactamente por el peso de las moléculas contenidas en él. Las moléculas de gas se encuentran en constante movimiento, en direcciones aleatorias, chocando con las paredes del recipiente y rebotando con la misma rapidez, encontrándose "en contacto" con las paredes durante fracciones de tiempo sumamente pequeñas. Explique, en términos del impulso y los ímpetus de las moléculas, por qué un aparato que mida pesos, registrará exactamente el peso del recipiente más el de las moléculas que contiene.

7-17. Un cohete Saturno 5 tiene una masa de 2.80×10^6 kg, y el motor de su primera etapa genera una fuerza impulsora de 3.30×10^7 N. Si el cohete se lanza verticalmente, (*a*) ¿Cuál es su aceleración inicial y (*b*) ¿cuántos segundos requerira, el cohete para que se mueva hacia arriba una distancia igual a su propia longitud de 110 m? Suponga que $g = 9.80$ m/s^2.

7-18. Un proyectil de masa m se lanza desde la superficie de la Tierra con la rapidez inicial de v_0 dirigido con un ángulo θ sobre la horizontal. Usando la definición básica de la fuerza como se da en la Ec. (7-2) y las ecuaciones cinemáticas para el movimiento de los proyectiles — Ec. (4-10) — demuestre que la fuerza instantánea ejercida sobre el proyectil durante su trayectoria es (realmente) mg, dirigida verticalmente hacia abajo.

7-19. Una partícula con el ímpetu mv choca con una superficie dura y rebota con la misma rapidez. ¿Cuál es el impulso sobre la superficie golpeada si (*a*) la partícula se acerca y se aleja a lo largo de la normal a la superficie y (*b*) las velocidades inicial y final de la partícula forman un ángulo θ con respecto a la normal?

7-20. Una pelota de billar que se movía inicialmente con el ímpetu mv choca con una segunda pelota y con ello se desvía en un ángulo θ sin cambio en su rapidez. (*a*) ¿Cuál es la magnitud del impulso de cada pelota? (*b*) si las pelotas se encuentran en contacto durante un periodo de Δt, ¿cuál es la magnitud de la fuerza promedio que se ejerce sobre cada pelota?

7-21. Usando la misma notación que en el Prob. 5-21, el empuje del motor de un cohete es $v_E(dm/dt)$. (El *empuje* del cohete, $v_E(dm/dt)$, es la fuerza que el cohete ejerce sobre las partículas expulsadas y por ello es igual en magnitud a la fuerza que las partículas expulsadas ejercen sobre el cohete.) Al desprenderse la primera etapa del cohete Saturno 5 produce un empuje total de 3.3×10^7 N. Encuentre la rapidez con que se consume el combustible si la velocidad de expulsión v_E es de 2.6 km/s.

Capítulo

8

MECANICA NEWTONIANA Y SUS APLICACIONES

La mecánica clásica suele llamarse mecánica newtoniana debido a las importantes contribuciones de Sir Isaac Newton. Su formulación de la mecánica clásica fue, sin embargo, sólo una parte del trabajo científico de Newton. Descubrió el teorema del binomio e nventó el cálculo diferencial e integral. Hizo contribuciones importantes en el estudio de la luz, demostrando que el color era una propiedad intrínseca de la luz y no del medio refractor, desarrolló el telescopio de reflexión, y observó el fenómeno de los anillos de Newton. Formuló la ley de la gravitación universal (Sec. 13-1) y con ello estableció las leyes básicas de la mecánica celestial.

Quizás la contribución máxima de Newton fueron sus tres leyes del movimiento, estudiadas ya en el Cap. 7. Ahora reafirmaremos y discutiremos estas leyes y enseguida las aplicaremos a varios problemas físicos.

8—1 LEYES DE NEWTON DEL MOVIMIENTO

1. *Cuando un objeto no está sujeto a alguna fuerza resultante externa, se mueve con velocidad constante.*
   (Cuando $\Sigma\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m = \text{constante}$.)
2. *Cuando un objeto se encuentra sujeto a una o más fuerzas externas, la rapidez de cambio de su ímpetu es igual (en magnitud, dirección y sentido) al vector suma de las fuerzas externas que actúan sobre él.*
   ($\Sigma\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = m\mathbf{a}$.)
3. *Cuando un objeto interactúa con un segundo objeto, la fuerza del primer objeto sobre el segundo es igual en magnitud y dirección, pero opuesta en sentido a la fuerza del segundo objeto sobre el primero.*
   ($\mathbf{F}_{2\text{ a }1} = -\mathbf{F}_{1\text{ a }2}$.)

Consideraremos algunas implicaciones de estas leyes.

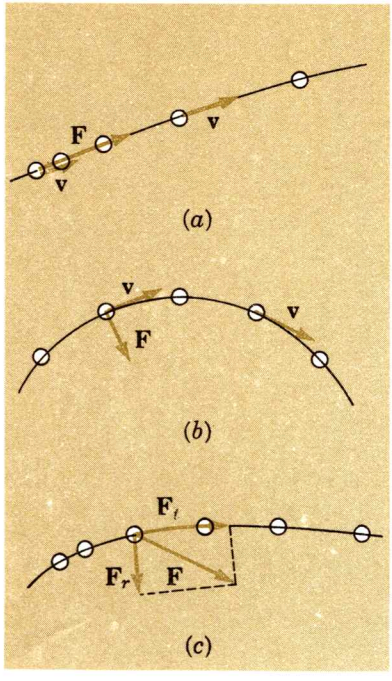


FIG. 8-1. (*a*) Una fuerza a lo largo de la velocidad instantánea, cambia la rapidez del objeto (pero no así su dirección). (*b*) Una fuerza en ángulo recto con la velocidad instantánea, cambia la dirección del objeto (pero no así su rapidez). (*c*) Componentes radial (F_r) y tangencial de la fuerza (F_t)

1. La primera ley es la ley de Galileo de la inercia. Define a un marco inercial, un sistema de referencia en el que un cuerpo aislado se mueve con velocidad constante.
2. La segunda ley se aplica sólo a observadores en marcos de referencia inerciales. La segunda ley proporciona un procedimiento para medir una fuerza desconocida; si en un experimento se registra el movimiento de un cuerpo y se calcula su aceleración en cada instante, la fuerza resultante sobre el cuerpo en cualquier instante es simplemente igual a la aceleración multiplicada por su masa. Recíprocamente, la segunda ley nos permite predecir con todo detalle la historia futura de un cuerpo, siempre que se conozcan las fuerzas que actúan sobre él; alguien que conozca las fuerzas y calcule la aceleración, puede derivar el desplazamiento futuro y la velocidad a partir del desplazamiento y y la velocidad presentes. Así, la cinemática y la dinámica se unen.

Cualquier fuerza sobre una partícula puede considerarse como la suma de dos fuerzas componentes, una tangente a la velocidad instantánea de la partícula y la otra en ángulo recto a ella.

La fuerza instantánea resultante que actúa sobre un objeto puede influir a su movimiento de dos maneras. (*a*) La fuerza componente a *lo largo* de la línea de la velocidad instantánea cambia la *magnitud* de la velocidad, pero *no* así su *dirección*; es decir una fuerza componente tangencial cambia la *rapidez* del objeto. (*b*) La componente de la fuerza en *ángulo recto* con la velocidad, cambia la *dirección* de la velocidad instantánea, pero no su *magnitud*; es decir, una componente de la fuerza perpendicular, o radial, desvía al objeto. Vea la Fig. 8-1.

La segunda ley engloba el principio de superposición para las fuerzas. Un grupo de fuerzas que actúan simultáneamente sobre un objeto puede reemplazarse por una sola fuerza resultante igual a su suma vectorial.

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Desde luego, esta ecuación vectorial es equivalente a tres ecuaciones escalares componentes:

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots &= \Sigma F_x = ma_x \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \cdots &= \Sigma F_y = ma_y \\ F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \cdots &= \Sigma F_z = ma_z \end{aligned} \tag{8-1}$$

donde $F_{1x}, F_{2x}, F_{3x}, \ldots$ son los componentes X de las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots$, respectivamente, y a_x es la componente X de la aceleración $\mathbf{a}$; lo mismo sucede para las componentes Y y Z. Frecuentemente, en la resolución de los problemas, es más conveniente usar las ecuaciones escalares componentes (8-1).

Si una partícula tiene aceleración cero, $\mathbf{a} = 0$ ($a_x = a_y = a_z = 0$). Entonces, la partícula tiene una velocidad constante (incluyendo, desde luego, el caso especial de velocidad cero, o reposo). Se dice que se encuentra en *equilibrio de traslación*. Por (8-1) vemos que una partícula puede estar en equilibrio de traslación sólo si la fuerza resultante que actúa sobre ella es nula o, lo que es equivalente, si la suma de las componentes de las fuerzas a lo largo de todas las

direcciones es cero. Así, el equilibrio (los objetos tienen velocidad constante) es un caso especial de la dinámica, y la estática (objetos en reposo) es un caso especial de equilibrio.

La segunda ley es, desde luego, consistente con la primera ley, porque cuando no actúa alguna fuerza neta externa, la segunda ley da $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} = 0$ y la velocidad es constante.

3. La tercera ley es una consecuencia directa de la ley de la conservación del ímpetu y la definición de la fuerza como la rapidez de cambio del ímpetu con respecto al tiempo.

Las leyes de Newton son "ciertas" porque son consistentes con los experimentos. Describen satisfactoriamente el movimiento de objetos tan pequeños como las moléculas (10^{-9} m) y tan grandes como las galaxias (10^{21} m). Así, la mecánica newtoniana tiene un rango de aplicabilidad enorme. Sólo para el mundo submicroscópico del átomo y el núcleo, lo mismo que para rapideces cercanas a la de la luz, las leyes clásicas de la mecánica son suplementadas por la mecánica más cercana a lo correcto de la teoría cuántica y la teoría de la relatividad.

8—2 APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

No es posible ni deseable seguir ciegamente un grupo de reglas prescrito en la resolución de problemas en los que intervengan las leyes de Newton. Por el contrario, casi siempre es útil el procedimiento siguiente:

1. Dibuje un diagrama claro y sencillo.
2. Elija el objeto cuyo movimiento debe analizarse. Frecuentemente es provechoso dibujar dicho objeto, aislado de lo que lo rodea, en un diagrama separado. Este esquema se llama diagrama de fuerzas, o diagrama del cuerpo libre.
3. Trace *todas* las fuerzas que actúan sobre el objeto elegido; por ejemplo, el peso del cuerpo, las fuerzas aplicadas por objetos con los que está en contacto el cuerpo elegido, y fuerzas no debidas al contacto (además del peso), tales como las fuerzas eléctricas y magnéticas que pueden actuar sobre el cuerpo. (Recuerde que cuando aplicamos la segunda ley de Newton, sólo nos interesan las fuerzas *externas* que actúan sobre el cuerpo escogido. Es cierto, desde luego, que el cuerpo escogido ejerce fuerzas sobre lo que lo rodea, pero esas fuerzas no vienen al caso porque no actúan sobre el objeto escogido.) En el diagrama de fuerzas indique la magnitud, dirección y sentido de cada fuerza, si se conocen; de otra manera use símbolos para representar las fuerzas desconocidas.
4. Escoja ejes apropiados para calcular las componentes de las fuerzas. Con frecuencia, una selección juiciosa de los ejes simplifica el cálculo de las componentes de las fuerzas. Enseguida descomponga cada vector fuerza en sus componentes a lo largo de los ejes escogidos.
5. Aplique la segunda ley de Newton en su forma de las componentes, Ecs. (8-1), para resolverlas algebraicamente y obtener las incógnitas. En los siguientes ejemplos detallados se ilustran estos pasos.

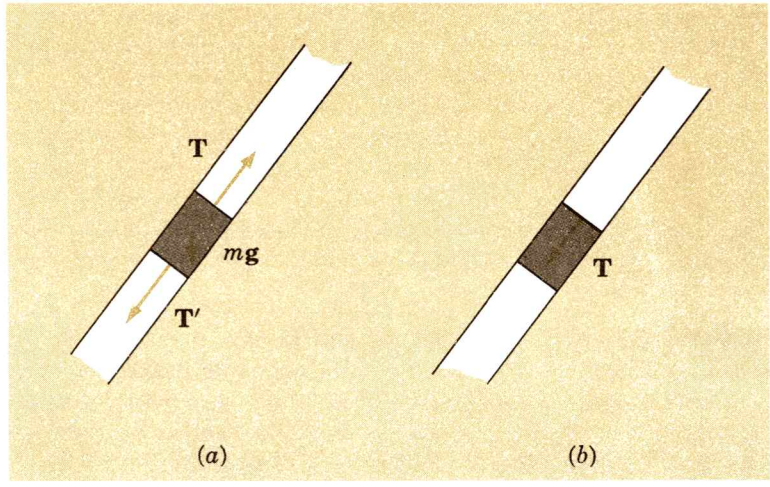


FIG. 8-2. (*a*) Fuerzas ejercidas sobre un segmento de cuerda. (*b*) El segmento corto produce una fuerza T sobre la cuerda contigua.

Ejemplo 8-1

¿Cuál es la naturaleza de las fuerzas ejercidas por una cuerda ideal, una que sea perfectamente flexible, inextensible y sin masa? Una cuerda como ésta (o cinta, o alambre, o cordel, o cable) no existe. Pero en muchas situaciones la cuerda real se comporta muy aproximadamente como si fuera la ideal.

Ahora comprobaremos que la tensión en la cuerda es la misma en todos sus puntos a lo largo de su longitud, tanto si la cuerda está acelerada como si está en equilibrio.

Concentraremos la atención primero en un segmento corto de la cuerda indicado en la Fig. 8-2*a*. Las fuerzas que las porciones contiguas de la cuerda ejercen sobre él en sus dos extremos las designamos por **T** y **T'**; su peso es $m\mathbf{g}$. Aplicando la segunda ley de Newton a esta partícula efectiva, tenemos

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\mathbf{T} + \mathbf{T}' + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

donde **a** es la aceleración del segmento. Pero si la masa m es despreciable por pequeña, podemos descartar a ambos términos, $m\mathbf{g}$ y $m\mathbf{a}$ y la ecuación anterior se convierte en

$$\mathbf{T} = -\mathbf{T}'$$

o en magnitud

$$T = T'$$

La *tensión* T tiene la misma magnitud en ambos extremos del pequeño segmento. Además, la tensión, definida como la fuerza ejercida por *cualquier* segmento de la cuerda sobre un segmento contiguo, es la misma en todos los puntos a lo largo de la cuerda, considerando que la masa y el peso de la cuerda son despreciables. Considérese la Fig. 8-2*b*, donde la fuerza que ejerce el pequeño segmento sobre la porción superior a él es de nuevo T. Por la tercera ley de Newton, la fuerza en un corte imaginario del pequeño segmento de la cuerda inmediatamente arriba de él, es igual en

magnitud a la fuerza que ejerce la parte superior de la cuerda sobre el segmento.

Cuando una cuerda flexible pasa sobre una polea ligera, la magnitud de la tensión de nuevo es igual en todos los puntos a lo largo de la cuerda y la polea cambia la dirección y el sentido de la fuerza sin afectar su magnitud. De aquí en adelante, si no se indica otra cosa, se considerará que cualquier cuerda es una cuerda ideal y por ello la tensión tendrá la misma magnitud en todos los puntos a lo largo de ella.

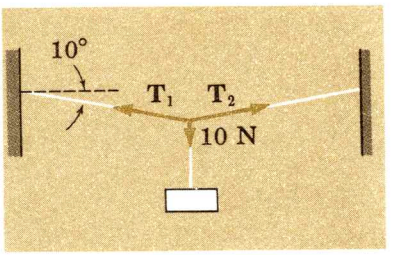


FIG. 8-3

Ejemplo 8-2

Un peso 10 N se suspende del centro de una cuerda sin peso. La cuerda se flexiona y sus segmentos forman un angulo de 10° con la horizontal. ¿Cuál es la tensión de los segmentos de la cuerda?

Este es un problema en equilibrio. Todas las partes del sistema en la Fig. 8-3 están en reposo y la fuerza resultante en cualquier parte — en el peso, en el segmento de la cuerda de la izquierda, en el segmento de la cuerda de la derecha, o en el nudo — es cero. ¿Qué parte debemos escoger como nuestro cuerpo? Escogemos el nudo, debido a que las fuerzas que actúan sobre él — la tensión $\mathbf{T}_1$ del segmento izquierdo de la cuerda, la tensión $\mathbf{T}_2$ del segmento derecho de la cuerda y el peso suspendido W — son las fuerzas que se conocen o que se quieren determinar.

Seleccionando los ejes X e Y como el horizontal y el vertical, respectivamente y descomponiendo las tensiones en sus componentes X e Y, tenemos, al usar las Ecs. (8-1)

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$-T_1 \cos 10° + T_2 \cos 10° = 0$$
$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$T_1 \operatorname{sen} 10° + T_2 \operatorname{sen} 10° - W = 0$$

Tanto a_x como a_y se consideran iguales a cero porque el nudo se encuentra en reposo. La primera ecuación indica que

$$T_1 = T_2$$

La magnitud de la tensión es la misma en los segmentos de la izquierda y de la derecha, como podríamos haber deducido con base en la simetría. Entonces, la segunda ecuación nos da, para la magnitud de la tensión,

$$T_1 = T_2 = \frac{W}{2 \operatorname{sen} 10°} = \frac{10 \text{ N}}{2 \times 0.174} = 29 \text{ N}$$

La tensión *excede* al peso. Si el ángulo fuera más pequeño, la tensión sería aún más grande.

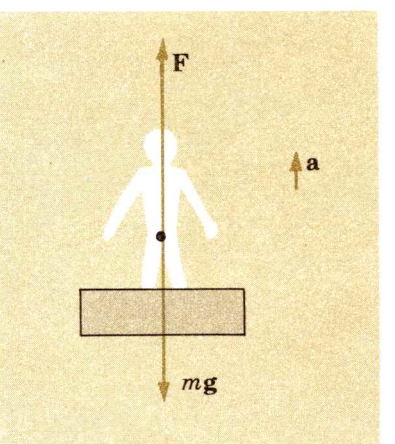


FIG. 8-4. Las fuerzas que actúan sobre un hombre en un elevador que se acelera hacia arriba.

Ejemplo 8-3

Un hombre de 160 lb se encuentra parado sobre una balanza en un elevador (Fig. 8-4). El elevador originalmente se movía hacia abajo

con rapidez constante, después desaceleró a 4 pie/s^2, y finalmente quedó en reposo. ¿Cuál fue la lectura de la balanza antes, durante y después de su aceleración?

Cuando el hombre se mueve con velocidad constante, como en los casos de antes y después de la desaceleración, la fuerza resultante sobre él es cero y la balanza registra su peso real, 160 lb.

Pero ahora vamos a encontrar la fuerza del hombre sobre la balanza mientras se está desacelerando. Esto lo haremos determinando la magnitud de la fuerza opuesta **F** que la balanza ejerce sobre el hombre. Como la velocidad decrece en sentido *hacia abajo*, su aceleración es *hacia arriba*. Hacemos que el sentido positivo sea el de la aceleración, que es hacia arriba. Por lo que, designando al peso del hombre como w y a su masa como w/g,

$$\Sigma F = F - w = \frac{w}{g}\, a$$

o

$$F = w\left(1 + \frac{a}{g}\right) = (160 \text{ lb})(1 + \tfrac{4}{32}) = 180 \text{ lb}$$

La balanza registra 180 lb. La fuerza de la balanza sobre el hombre (180 lb) excede el peso del cuerpo (160 lb); esto produce una fuerza resultante hacia arriba. Si el elevador se acelerara hacia abajo, la aceleración a sería negativa y la fuerza correspondiente **F** sería menor que w.

Ejemplo 8-4

Un bloque de 2.0 kg sobre un plano inclinado a 30° perfectamente liso, se encuentra bajo la acción de una fuerza de 15 N hacia arriba a lo largo de la dirección del plano (*a*) ¿Cuál es la aceleración del bloque a lo largo del plano inclinado? (*b*) ¿Qué fuerza a lo largo del plano inclinado hará que el bloque se mueva con velocidad constante?

(*a*) En este problema, como en todos los problemas, lo más sencillo consiste en usar símbolos para todas las cantidades y, sólo después de que el problema haya sido resuelto en símbolos, sustituir las cantidades numéricas específicas. Al hacerlo así, resolvemos, en realidad, todos los problemas de este tipo particular. Además, ¡ciertas cantidades se pueden simplificar! Aquí la masa del bloque es m, el ángulo de inclinación θ, y $\mathbf{F}_p$ la fuerza hacia arriba paralela al plano inclinado.

Las fuerzas que actúan sobre el bloque se indican en la Fig. 8-5: el peso $m\mathbf{g}$, la fuerza $\mathbf{F}_p$, y la fuerza normal **N** del plano inclinado. La fuerza **N** es normal, o perpendicular a la superficie, al mismo tiempo que la superficie es perfectamente lisa y por ello no actúan fuerzas de fricción a lo largo de ella.

Se escogió el eje X inclinado como el plano inclinado y el eje Y perpendicular a él. Entonces **N** se encuentra exactamente a lo largo de Y, y $\mathbf{F}_p$ se encuentra sobre el eje X. Podemos reemplazar el peso $m\mathbf{g}$, que actúa verticalmente hacia abajo, por dos fuerzas componentes: una de magnitud $mg \cos\theta$ a lo largo del eje Y negativo y la otra de magnitud $mg \operatorname{sen}\theta$ a lo largo del eje X positivo. (La Tierra jala al bloque verticalmente hacia abajo; sin embargo, dicho jalón es

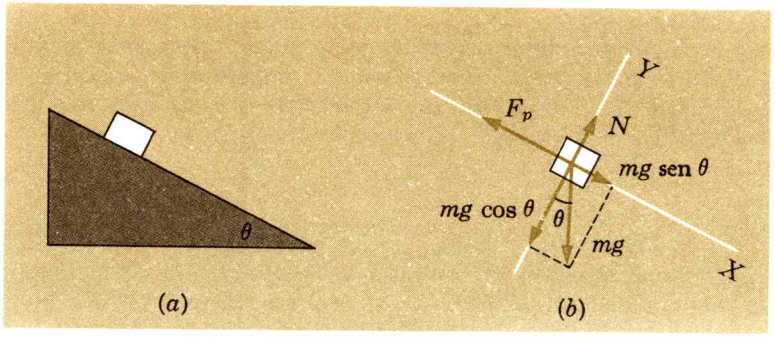


FIG. 8-5. (*a*) El bloque deslizándose sobre un plano inclinado en el ángulo θ. (*b*) Las fuerzas actúan sobre el bloque, descompuestas en sus componentes paralelas y perpendiculares al plano inclinado.

equivalente a la acción simultánea de las dos fuerzas componentes del peso.)

Aplicando la segunda ley de Newton en la forma dada en la Ec. (8-1), tenemos

$$\Sigma F_x = ma_x \tag{8-1}$$

$$mg \operatorname{sen}\theta - F_p = ma_x \tag{8-2}$$

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$N - mg\cos\theta = 0 \tag{8-3}$$

Consideramos que a_y sea igual a cero debido a que el bloque no se acelera a lo largo de Y. La Ec. (8-3) da la magnitud de la fuerza normal como $N = mg \cos \theta$. La fuerza normal *no* es igual al peso.

Podemos despejar a a_x de (8-2)

$$a_x = \frac{mg \operatorname{sen}\theta - F_p}{m}$$

Sustituyendo los valores numéricos, $m = 2.0$ kg, $mg = (2.0 \text{ kg}) \times (9.8 \text{ m/s}^2) = 19.6$ N, y $F_p = 15$ N, se obtiene

$$a_x = \frac{(19.6 \text{ N})(\operatorname{sen} 30°) - 15 \text{ N}}{2.0 \text{ kg}} = -2.6 \text{ m/s}^2$$

El signo menos indica que el cuerpo se acelera a lo largo del eje X *negativo,* esto es, *hacia arriba* en el plano.

(*b*) Si el cuerpo se debe mover con velocidad constante a lo largo del plano inclinado,

$$a_x = 0$$

Entonces (8-2) se reduce a

$$F_p = mg \operatorname{sen}\theta = (19.6 \text{ N})(\operatorname{sen} 30°) = 9.8 \text{ N}$$

Cuando se aplica una fuerza de 9.8 N hacia arriba y a lo largo del plano inclinado, el bloque se encuentra en equilibrio; podrá ir hacia arriba o hacia abajo del plano inclinado con rapidez constante, o permanecer en reposo.

Ejemplo 8-5

Un bloque se desliza hacia abajo de un plano inclinado en un ángulo θ siendo perfectamente liso. ¿Cuál es la magnitud de su aceleración?

Este problema se resuelve simplemente estableciendo que $F_p = 0$ en el Ej. 8-4. Entonces (8-2) se convierte en

$$mg \operatorname{sen}\theta = ma_x$$

o

$$a_x = g \operatorname{sen}\theta$$

La aceleración es constante e *independiente* de la masa del bloque. Si el "plano inclinado" se convierte en vertical ($\theta = 90°$), el cuerpo cae libremente con la aceleración g. Si el plano inclinado se convierte en horizontal ($\theta = 0$), el cuerpo no se encuentra acelerado. Para ángulos intermedios la aceleración es menor que g debido a que el factor sen θ es menor que 1. El movimiento hacia abajo en un plano inclinado liso, es un movimiento de caída libre retardado. Galileo reconoció esto como una manera de "atenuar" la gravedad. Demostró que un cuerpo que cae libremente tiene una aceleración constante al encontrar que un bloque se desliza libremente hacia abajo en un plano inclinado con una aceleración constante.

Ejemplo 8-6

Una masa m_1 sobre un plano inclinado en el ángulo θ y sin fricción se une, por medio de una cuerda sin masa que pasa por una pequeña polea también sin fricción, a una segunda masa m_2, como se indica en la Fig. 8-6*a*. ¿Cuál es la aceleración de las dos masas y la tensión de la cuerda que las une?

Aquí tenemos un sistema formado por dos objetos acoplados. Ambos tienen la misma magnitud de su aceleración debido a que se encuentran unidos a una cuerda tensa. Para resolver este problema primero consideramos cómo se aplica la segunda ley de Newton a la

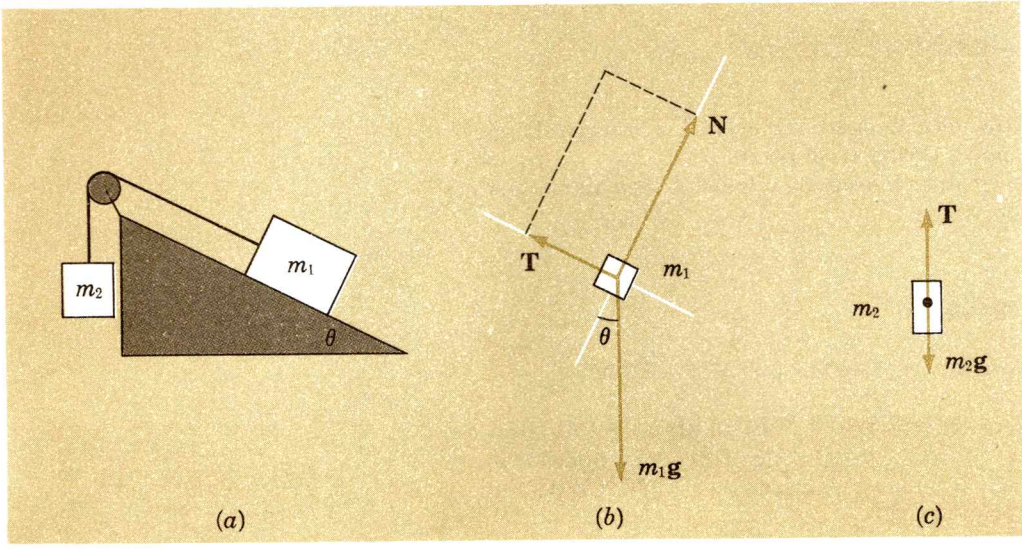


FIG. 8-6. (*a*) Dos bloques unidos por medio de una polea. (*b*) Las fuerzas sobre m_1. (*c*) Las fuerzas sobre m_2.

masa m_1 sola y las fuerzas que actúan sobre *ella*. Vea la Fig. 8-6*b*. Este problema es igual al del Ej. 8-4 (Fig. 8-5), cuando la tensión T reemplaza a la fuerza $\mathbf{F}_p$. Por lo que (8-2) se convierte en

$$m_1 g \operatorname{sen}\theta - T = m_1 a \tag{8-4}$$

donde la aceleración a es positiva cuando m_1 se acelera hacia abajo en el plano inclinado.

La Fig. 8-6*c* muestra las fuerzas que actúan sobre m_2: la tensión hacia arriba y el peso hacia abajo. La tensión T de la cuerda sobre m_2 es igual en magnitud a la tensión T que se ejerce sobre la masa m_1 en la Fig. 8-6*b* (Ej. 8-1). Sin embargo, esta tensión *no* es igual al peso $m_2 g$; si así fuera, no se aceleraría el cuerpo, sino que se movería con velocidad constante. Se escogió que el sentido positivo para el cuerpo m_1 (para fuerzas, aceleraciones, velocidades) fuera hacia *abajo* del plano inclinado. Para ser consistentes y para tener en cuenta el hecho de que los dos cuerpos están acoplados, debemos considerar el sentido hacia arriba *positivo*, para el cuerpo m_2. Aplicando la segunda ley de Newton, a m_2, se tiene

$$\Sigma F_y = T - m_2 g = m_2 a \tag{8-5}$$

Resolviendo (8-4) y (8-5) simultáneamente para las incógnitas a y T, se obtiene

$$a = \frac{(m_1 \operatorname{sen}\theta - m_2)g}{m_1 + m_2} \tag{8-6}$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g(1 + \operatorname{sen}\theta)}{m_1 + m_2} \tag{8-7}$$

Nótese que a es positiva, m_2 se acelera hacia arriba y m_1 se acelera hacia abajo en el plano inclinado, sólo si $m_1 \operatorname{sen}\theta$ excede a m_2; de otra manera, la aceleración se invierte.

8—3 FRICCION

Siempre que dos superficies se encuentran en contacto y una de ellas se mueve en relación a la otra, se producen las fuerzas de fricción. Un análisis exacto de ellas es muy complicado debido a que intervienen interacciones entre las protuberancias de las dos superficies y, al fin y al cabo, las fuerzas que se producen entre los átomos y las moléculas de las superficies. Nuestra discusión se reducirá a las relaciones empíricas aproximadas que se encontró se presentan para algunas superficies.

Considérese un bloque en reposo sobre una superficie horizontal. ¿Qué pasa cuando aplicamos una fuerza horizontal al bloque (Fig. 8-7)? Si la fuerza externa no es muy grande, el bloque permanece en reposo. Esto implica que hay otra fuerza que actúa sobre el bloque para que permanezca en estado de equilibrio. Esa

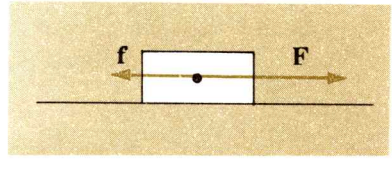


FIG. 8-7. Un bloque sujeto a dos fuerzas horizontales: la fuerza aplicada F y la fuerza de fricción f.

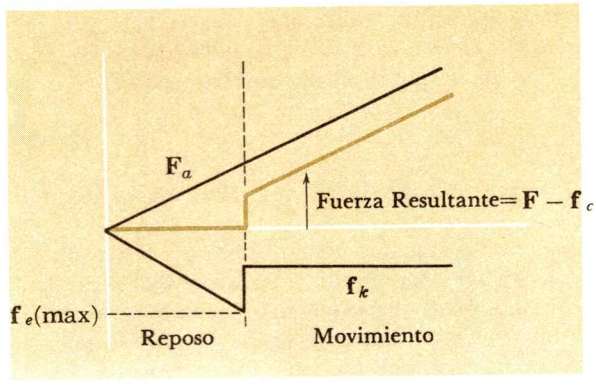


FIG. 8-8. La fuerza de fricción f y su relación con la fuerza aplicada F_a para estados de reposo y de movimiento.

fuerza, llamada la *fuerza de fricción estática,* $\mathbf{f}_e$, la produce la superficie sobre la que reposa el bloque. A medida que aumentamos la magnitud de la fuerza externa **F**, el bloque sigue en reposo. La magnitud de $\mathbf{f}_e$ debe aumentar también, de tal manera que $f_e = F$. Esta situación persiste hasta que F alcanza un valor crítico llamado f_e (máx). Para valores de F mayores que esa fuerza de fricción estática máxima, el bloque principia a moverse y se acelera hacia la derecha.

Una vez en movimiento, la fuerza de fricción retardadora es *menor* que la f_e (máx). La fuerza de fricción que ahora actúa se llama *fuerza de fricción cinética* f_c. Se considerará que f_c es constante, independiente de la rapidez. (Estrictamente, f_c decrece cuando la rapidez aumenta.) Así, una vez que esté en movimiento, el bloque se encuentra sujeto a una fuerza resultante $F - f_c$ hacia la derecha, como se indica en la Fig. 8-8. Si la fuerza aplicada F se retira, el bloque se encontrará sujeto nada más a una fuerza no balanceada (f_c) la que lo desacelerará hasta el reposo.

Se ha encontrado experimentalmente que, para un par de superficies dado, las magnitudes de f_e (máx) y f_c son proporcionales a la fuerza normal N que comprime las dos superficies, e independiente del área de contacto o de las velocidades relativas entre las dos superficies. Por lo tanto, introduciendo constantes de proporcionalidad, podemos escribir para las fuerzas de fricción estática y cinética:

$$\begin{aligned} f_e &\leq \mu_e N \qquad \text{con } f_e(\text{máx}) = \mu_e N \\ f_c &= \mu_c N \end{aligned} \tag{8-8}$$

Las constantes μ_e y μ_c se llaman coeficientes de fricción estática y cinética, respectivamente. Son números sin dimensiones, pero dependen de los tipos de superficies que están en contacto.

Típicamente, $\mu_e > \mu_c$; se necesita una fuerza mayor para poner a un cuerpo en movimiento, que para mantenerlo en

movimiento con rapidez constante. Los valores de μ son, por lo general, aunque no necesariamente, menores de 1.00. Para superficies más rugosas, μ es más grande. El signo de desigualdad en (8-8), indica que la fuerza de fricción estática puede tener cualquier valor desde cero hasta el valor máximo de $\mu_e N$; su valor depende de la fuerza aplicada.

En resumen: (1) La fuerza de fricción es paralela a las superficies en contacto; (2) cuando las superficies están en reposo relativo entre sí la fuerza de fricción estática siempre se opone a la fuerza aplicada; (3) la fuerza de fricción cinética es opuesta a la dirección y al sentido del movimiento; (4) ambas, la fuerza de fricción cinética y de fricción estática máxima son proporcionales a la fuerza normal.

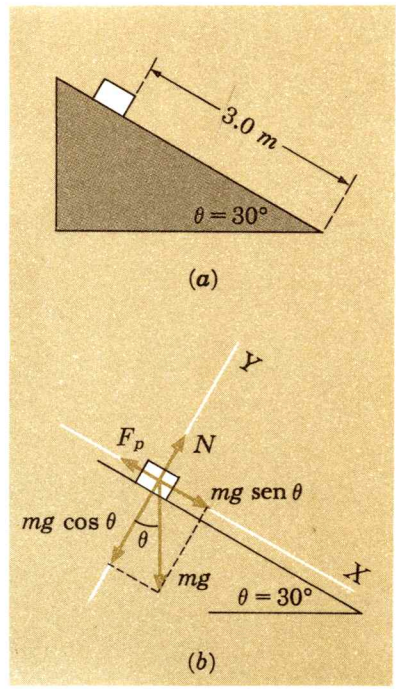


FIG. 8-9

Ejemplo 8-7

Un bloque se suelta desde el reposo en la parte más alta de un plano inclinado con un ángulo de 30° y de 3.0 m de largo, como se indica en la Fig. 8-9*a*. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano inclinado es $\mu_c = 0.30$. ¿Cuál es la rapidez del bloque cuando llega a la base del plano inclinado?

Las fuerzas externas que actúan sobre el bloque durante su movimiento hacia abajo en el plano se indican en la Fig. 8-9*b*. Los sentidos positivos X e Y se escogen según se indica en la figura. Entonces, por la segunda ley de Newton,

$$\Sigma F_y = ma_y = 0$$

$$N - mg\cos\theta = 0$$

$$N = mg\cos\theta \tag{8-9}$$

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$mg\,\text{sen}\,\theta - f_k = ma_x \tag{8-10}$$

Por definición [Ec. (8-8)],

$$f_c = \mu_c N$$

Por (8-9), esto se puede escribir en la forma

$$f_c = \mu_c mg\cos\theta$$

Por lo tanto, (8-10) se convierte en

$$mg\,\text{sen}\,\theta - \mu_c mg\cos\theta = ma_x$$

Nótese que las masas se simplifican, y que la aceleración es

$$a_x = g(\text{sen}\,\theta - \mu_c\cos\theta)$$

Como a_x es constante, podemos usar la relación cinemática

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Si hacemos que $v_{0x} = 0$ y se considera que $x_0 = 0$, las últimas dos ecuaciones dan

$$v_x^2 = 2g(\operatorname{sen}\theta - \mu_c \cos\theta)x$$

Sustituyendo las cantidades numéricas correspondientes a v_{0x}, θ y μ_c y considerando g = 9.8 m/s², obtenemos

$$v_x = 14 \text{ m/s}$$

8—4 SISTEMAS DE PARTICULAS INTERACTUANTES

La aceleración de una partícula aislada está determinada por la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella. Consideremos aquí un sistema de partículas que interactúan entre sí por medio de fuerzas *internas* y que también están sujetas a fuerzas *externas*. Para un sistema como éste que no está aislado, encontramos que la aceleración del centro de masa del sistema está controlado sólo por las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. En otras palabras, un sistema aislado no sólo puede reemplazarse por una sola partícula equivalente en el centro de masa del sistema, sino que esto también puede hacerse cuando un grupo de partículas está sujeto a fuerzas externas.

En la Fig. 8-10 se indica un sistema de partículas 1, 2, 3, ... ; sus límites están representados por una línea interrumpida, dibujada de tal manera que incluya a todas las partículas que decidimos que forman parte del sistema. Las fuerzas son de dos tipos: una *fuerza interna,* que proviene de la acción de una partícula sobre otra, *dentro* del sistema (los vectores de las fuerzas correpondientes se indican de manera que queden dentro de los límites del sistema), y una *fuerza externa,* que proviene de que una partícula que se encuentra dentro del sistema recibe la acción de otra partícula que se encuentra *fuera* del sistema (los vectores de las fuerzas externas traspasan los límites del sistema).

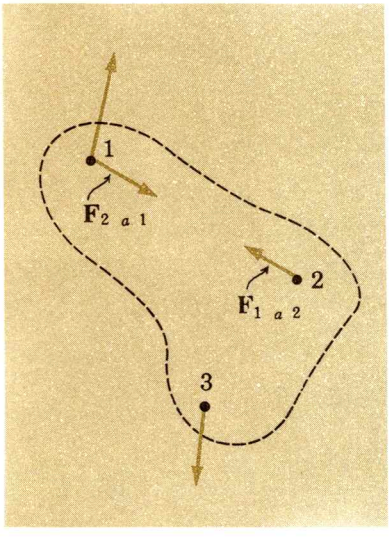


FIG. 8-10. Las partículas 1, 2 y 3 se encuentran dentro del sistema cuyos límites se indican por medio de una línea interrumpida. Las fuerzas externas que se ejercen sobre las partículas atraviesan los límites del sistema: las fuerzas internas como $\mathbf{F}_{2\ a\ 1}$ y $\mathbf{F}_{1\ a\ 2}$, quedan dentro de los límites del sistema.

Aplicando la segunda ley de Newton a la partícula 1 sola, tenemos

$$\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{a}_1$$

donde $\mathbf{F}_1$ es la fuerza resultante sobre m_1 que produce la aceleración $\mathbf{a}_1$. De la misma manera para todas las partículas

$$\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{F}_3 = m_3\mathbf{a}_3$$

Sumando estas ecuaciones tenemos

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3 + \cdots$$

o

$$\Sigma\mathbf{F}_{\text{todas las fuerzas}} = \Sigma m\mathbf{a} \qquad (8\text{-}11)$$

La suma vectorial del lado izquierdo de esta ecuación incluye *todas* las fuerzas tanto internas como externas.

Consideremos las fuerzas internas $\mathbf{F}_{2\text{ a }1}$ y $\mathbf{F}_{1\text{ a }2}$ actuando entre las partículas 1 y 2. Por la tercera ley de Newton,

$$\mathbf{F}_{2\text{ a }1} = -\mathbf{F}_{1\text{ a }2}$$

o

$$\mathbf{F}_{2\text{ a }1} + \mathbf{F}_{1\text{ a }2} = 0$$

La suma de este par de fuerzas internas es cero. En realidad, como todas las fuerzas internas corresponden a pares acción-reacción, la suma de las fuerzas internas debe ser cero.

$$\Sigma\mathbf{F}_{\text{int}} = 0 \tag{8-12}$$

Pero, como la suma de todas las fuerzas debe ser la suma de las fuerzas externas $\Sigma\mathbf{F}_{\text{ext}}$ junto con la suma de las fuerzas internas,

$$\Sigma\mathbf{F}_{\text{toda la fuerza}} = \Sigma\mathbf{F}_{\text{sólo ext}} + \Sigma\mathbf{F}_{\text{int}}$$

$$\Sigma\mathbf{F}_{\text{toda la fuerza}} = \Sigma\mathbf{F}_{\text{sólo ext}}$$

de (8-12). Por lo tanto, (8-11) se convierte en

$$\Sigma\mathbf{F}_{\text{sólo ext.}} = \Sigma m\mathbf{a} \tag{8-13}$$

Ahora, recordando que la velocidad $\mathbf{V}$ del centro de masa del sistema está dada por

$$M\mathbf{V} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \cdots = \Sigma m\mathbf{v} \tag{6-1}$$

donde $M = \Sigma m$ es la masa total del sistema.

Calculando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación anterior, se tiene

$$M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + m_3\frac{d\mathbf{v}_3}{dt} + \cdots = \Sigma m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

La aceleración del centro de masa del sistema es $\mathbf{A} = d\mathbf{V}/dt$ de la misma manera, $\mathbf{a}_1 = d\mathbf{v}_1/dt$, ... Por lo tanto, la última ecuación puede escribirse en la forma

$$M\mathbf{A} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3 + \cdots = \Sigma m\mathbf{a} \tag{8-14}$$

Sustituyendo este resultado en (8-13) tenemos finalmente

$$\Sigma\mathbf{F}_{\text{sólo ext}} = M\mathbf{A} \tag{8-15}$$

Este notable resultado —que la aceleración del centro de masa de cualquier sistema está determinada solamente por las fuerzas

externas al sistema— se deduce simplemente del hecho de que las fuerzas internas suman cero debido a que se presentan en pares de fuerzas iguales y opuestas. A (8-15) se debe que un sistema complicado, tal como un bloque de tamaño finito que contiene miríadas de núcleos y de electrones que interactúan entre sí, puede tratarse como si fuera ¡un simple punto masa! Sin embargo se debe enfatizar que aunque podemos trazar el movimiento del centro de masa de un sistema conociendo sólo las fuerzas externas sobre las partículas constituyentes, para trazar el movimiento de las partículas individuales se necesita un conocimiento detallado de las fuerzas internas.

Otra manera de escribir (8-15) es

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d(M\mathbf{V})}{dt} = \frac{d(\Sigma m\mathbf{v})}{dt} \tag{8-16}$$

lo que es como decir, la suma de las fuerzas externas es igual a la rapidez de cambio con respecto al tiempo del ímpetu total del sistema $\Sigma m\mathbf{v}$. Si el sistema es aislado y $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$, se tiene $d(\Sigma m\mathbf{v})/dt = 0$, o $\Sigma m\mathbf{v} =$ constante. Un sistema que no está sujeto a una fuerza externa neta tiene ímpetu total constante —la ley de la conservación del ímpetu.

Ejemplo 8-8

Una bomba lanzada en el aire explota en dos partes de igual masa. Describa el movimiento del centro de masa y de los dos fragmentos.

La bomba, que se convierte en dos fragmentos después de la explosión, es lo que forma nuestro sistema. La fuerza total externa que actúa sobre el sistema, el peso de la bomba, es constante. Cualquier partícula sujeta a una fuerza de magnitud, dirección y sentido constantes se mueve en una trayectoria parabólica (se incluye el caso de la línea recta). Por lo que, de la Ec. (8-15), el centro de masa traza una trayectoria parabólica, tanto antes como después de la explosión. Vea la Fig. 8-11. Debido a que los dos fragmentos son de igual masa, el centro de masa siempre se encuentra en el punto medio entre los dos fragmentos, cada uno de los cuales también traza trayectorias parabólicas.

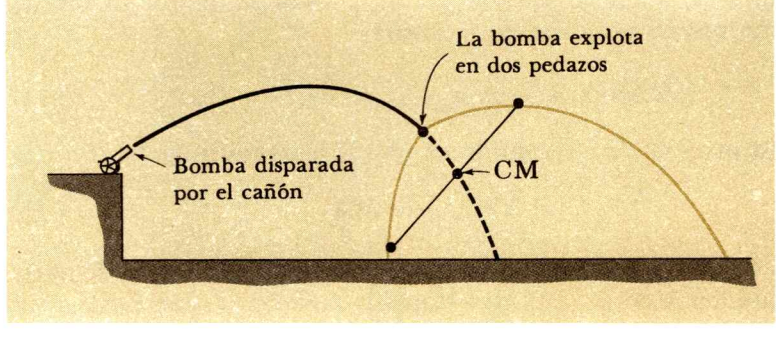


FIG. 8-11. Una bomba explota en dos partes de igual masa. El centro de masa traza una trayectoria parabólica.

Cuando el primer fragmento choca con el piso, el sistema se encuentra sujeto a otra fuerza externa, la fuerza de la Tierra sobre el fragmento. De ahí en adelante el centro de masa ya no sigue la misma trayectoria parabólica.

8—5 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Un objeto se acelera siempre que actúa sobre él una fuerza no balanceada. Si la fuerza resultante se encuentra a lo largo de la dirección de la velocidad, la rapidez cambia, pero no así la dirección de la velocidad. Si la fuerza resultante siempre se encuentra en ángulo recto con la velocidad, la dirección cambia, pero no la rapidez. El cuerpo también se acelera. Un cuerpo se mueve en un círculo con rapidez constante, cuando la fuerza resultante es perpendicular a la velocidad y es de magnitud constante.

En la Sec. 4-4 se trató de la cinemática del movimiento circular uniforme. Los resultados fueron estos: Una partícula moviéndose con la rapidez v en un círculo de radio r tiene una aceleración radial, o centrípeta, $\mathbf{a}_r$ cuya dirección y sentido es hacia el centro del arco y cuya magnitud es v^2/r; en forma equivalente, $a_r = \omega^2 r$, donde ω es la rapidez angular (en radianes por unidad de tiempo).

Por lo tanto, si un objeto se va a mover en movimiento circular uniforme, la fuerza resultante a lo largo de la dirección radial no puede ser cero. Además, por la segunda ley de Newton, debe ser

$$\Sigma F_r = ma_r$$

$$\Sigma F_r = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \qquad (8\text{-}17)$$

Por el mismo razonamiento, para el movimiento circular *uniforme* (rapidez constante), la fuerza resultante *tangencial* es cero: $\Sigma F_t = ma_t = 0$. (Vea la Fig. 8-12.)

Como siempre, es esencial que apliquemos la segunda ley de Newton desde el punto de vista de un observador en un *marco inercial*. Esto merece especial énfasis cuando se trata con objetos que se mueven en círculos. Por ejemplo, si uno considera el movimiento de un hombre en un automóvil que se mueve en un círculo, debe ver su movimiento como un observador fijo en un marco inercial con la Tierra (o uno que se mueva con velocidad constante relativa a él). No es posible aplicar apropiadamente la segunda ley de Newton desde el punto de vista del ocupante, lo que, psicológicamente quizás sería más indicado. Un observador como ese se encuentra en un marco acelerado, y por ello no inercial; la ley de la inercia no se verifica en un marco de referencia como ese.

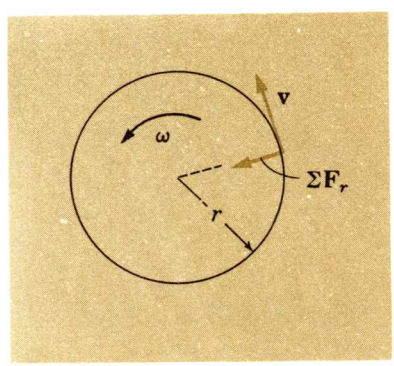


FIG. 8-12. Una partícula en movimiento circular uniforme bajo la influencia de una fuerza resultante radial ΣF_r.

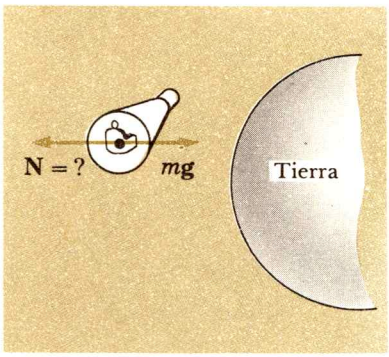


FIG. 8-13. Fuerzas sobre un astronauta que está en un satélite que orbita en torno a la Tierra con movimiento circular uniforme.

Ejemplo 8-9

Un astronauta viaja en una cápsula espacial sobre una órbita circular alrededor de la Tierra con rapidez constante. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre el astronauta?

Las fuerzas que actúan sobre el astronauta son su peso mg y posiblemente una fuerza **N** del asiento sobre él. (Vea la Fig. 8-13.) Esas son las únicas fuerzas posibles que actúan sobre un astronauta, si observamos el movimiento desde un marco de referencia inercial. Sabemos que la fuerza **N**, si existe, debe estar a lo largo de la dirección radial, ya que no puede ser una fuerza resultante a lo largo de la dirección tangencial, debido a que la rapidez es constante. Aplicando la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección radial (considerando que hacia adentro es positivo) obtenemos

$$\Sigma F_r = ma_r$$

$$mg - N = \frac{mv^2}{r}$$

donde v es la rapidez de la cápsula y r el radio de la órbita.

Del análisis cinemático del movimiento del satélite en el Ej. 4-2, deducimos que la aceleración radial es g. Aún más, su aceleración, está relacionada a la rapidez orbital y al radio por

$$g = \frac{v^2}{r}$$

Usando este resultado en la ecuación anterior, obtenemos

$$N = 0$$

Mientras está en órbita con rapidez constante, la nave espacial *no* aplica fuerza alguna sobre el astronauta y, por ello, sobre ningún objeto que se encuentre dentro de la cápsula. La única fuerza sobre el astronauta es su peso. Esta es la fuerza resultante que permite al astronauta ir en la órbita circular.

Desde luego, el astronauta, o cualquier otro objeto en la cápsula, *no* son ingrávidos; las cantidades g y mg no son iguales a cero. Debido a que N es cero, todos los objetos que están en la cápsula flotan en ella, si no se fijan. Por esta razón el astronauta siente que *aparentemente es ingrávido*. Paradójicamente, en la única ocasión en que un cuerpo aparentemente se siente ingrávido, ¡es cuando la única fuerza que actúa sobre él es su peso!

Ejemplo 8-10

¿Con qué rapidez máxima (en mi/h) puede moverse un automóvil de carreras sobre una curva no peraltada de 150 pies de radio, si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la carretera es de 0.75? Suponga que el automóvil no patina. (Vea la Fig. 8-14.)

Por la segunda ley de Newton

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$N - mg = 0$$

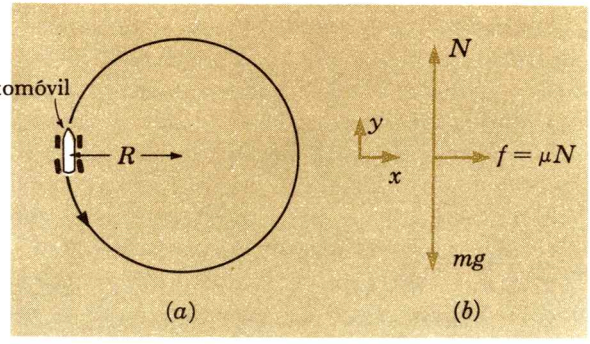


FIG. 8-14. (*a*) Diagrama esquemático de un automóvil de carreras moviéndose en un círculo horizontal de radio R. (*b*) Diagrama del cuerpo libre de las fuerzas que actúan sobre el automóvil.

$$N = mg$$

y

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$\mu_e N = \frac{mv_{\text{máx}}^2}{R}$$

donde hemos usado (8-13); $v_{\text{máx}}$ es la rapidez máxima. En este ejemplo la fuerza radial hacia el centro la proporciona la fuerza de fricción estática.

Eliminando a N en las dos ecuaciones anteriores y simplificando la masa m, nos da

$$v^2 = \mu_e g R$$

Si consideramos que $g = 32$ pie/s^2 y sustituimos los valores numéricos de μ_e y R encontramos que

$$v = \sqrt{\mu_e g R}$$

$$= \sqrt{0.75 \times 32 \text{ pies/s}^2 \times 150 \text{ pies}} = 60 \text{ pies/s} = 41 \text{ mi/h}$$

Note que la rapidez crítica no depende de la masa del automóvil. Aunque el patinaje del automóvil es independiente de su masa y de todas las dimensiones del automóvil, su *volcadura* cuando se mueve por una curva no peraltada, depende esencialmente de la distancia entre las ruedas y de la altura de su centro de masa sobre la superficie de la carretera.

Al referirse a la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo en movimiento circular uniforme, algunas veces se le llama *fuerza centrípeta*. Esta designación es inadecuada debido a que la fuerza centrípeta no es un tipo de fuerza característico. Un cuerpo puede moverse en un círculo bajo la influencia de su peso, la tensión de una cuerda, una fuerza de fricción, una fuerza normal, o una combinación de fuerzas. Si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo produce movimiento circular, esta resultante es *la* fuerza centrípeta.

Suponga que usted es un observador en una plataforma giratoria como un tiovivo. Para usted un objeto en reposo en ese sistema aparece como si se encontrara en equilibrio estático. Como una confirmación newtoniana usted puede explicar esto diciendo que la fuerza dirigida hacia dentro, hacia el centro, está equilibrada por una fuerza ficticia (o inercial) dirigida hacia afuera del centro. Esta fuerza inercial, que existe sólo en los marcos de referencia no inerciales acelerados, se llama la *fuerza centrífuga*. También existe una fuerza centrífuga para un astronauta que circula alrededor de la Tierra en una nave espacial. Desde *su* punto de vista, todos los objetos que están en la nave espacial se encuentran sujetos a dos fuerzas: el jalón hacia el centro de la Tierra y una fuerza centrífuga igual y con sentido contrario a la Tierra. La fuerza neta que actúa sobre cualquiera de los objetos es, desde *su* punto de vista, cero. Los objetos sueltos flotan *con respecto al astronauta* y puede considerar que todos los objetos de la nave espacial *no tienen peso*. O por otra parte, un observador inercial dice que los objetos en la nave espacial *parecen* no tener peso debido a que todos estos objetos tienen la *misma* aceleración.

RESUMEN

Las leyes de Newton se pueden escribir en la forma:

1. Cuando $\Sigma\mathbf{F} = 0, \mathbf{v} = \mathbf{p}/m = \text{constante}$.
2. $\Sigma\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = m\mathbf{a}$.
3. $\mathbf{F}_{2\,a\,1} = -\mathbf{F}_{1\,a\,2}$.

Para un sistema de partículas interactuantes

$$\Sigma\mathbf{F}_{(ext)} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\mathbf{A} \qquad (8\text{-}13)$$

donde $\Sigma\mathbf{F}_{(ext)}$ es el vector suma de las fuerzas externas únicamente, M es la masa total del sistema, $\mathbf{P}$ es su ímpetu total y $\mathbf{A}$ la aceleración del centro de masa.

Aplicada a una partícula en movimiento circular uniforme, la segunda ley de Newton se convierte en

$$\Sigma F_r = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \qquad (8\text{-}17)$$

donde ΣF_r es la fuerza radial resultante.

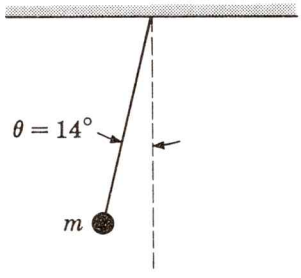
PROBLEMAS

8-1. Una cierta cuerda se romperá si la tensión excede a $T_{máx}$ Encuentre la máxima masa (*a*) que puede ser levantada verticalmente con la aceleración *a* y (*b*) que puede bajarse con la aceleración *a*.

8-2. Un objeto de 2.0 kg se suspende del extremo de una cuerda delgada. La cuerda es empujada hacia un lado por una fuerza horizontal hasta que el ángulo entre dicha cuerda y la vertical sea de 60°. ¿Cuáles son (*a*) la magnitud de la fuerza horizontal, (*b*) la tensión en la porción inferior de la cuerda y (*c*) en la porción superior de la cuerda?

8-3. La pesa de una plomada se suspende de uno de los extremos de una cuerda que está atada al techo de un avión en vuelo a nivel. El ángulo entre la vertical y la cuerda es de $\theta = 14°$, (vea la Fig. P8-3). Explique este efecto cuantitativamente.

FIG. P8-3



8-4. Una cuerda tiene la masa por unidad de longitud de 1.0 g/cm. Si un extremo de esa cuerda de 1.00 m de largo se ata al techo y el otro a un objeto de 1.0 kg que pende de él, ¿cuál es la tensión en la cuerda a una distancia hacia abajo del techo de (*a*) 25 cm, (*b*) 50 cm, y (*c*) 75 cm?

8-5. Una cadena sin fricción se encuentra sobre la parte alta de un triángulo rectángulo con los lados *a* y *b*, como se indica en la Fig. P8-5. ¿Cuál es la relación entre el largo de la cadena en el lado *a*, al largo en el lado *b*, cuando la cadena se encuentra en equilibrio? [Este problema fue resuelto primero por S. Stevinus (1548-1620) considerando un lazo completo de la cadena que reposa sobre los lados superiores del triángulo y cerrado en la parte inferior. Stevinus generalizó la regla de que cuando actúan tres fuerzas sobre una partícula en equilibrio, los vectores que representan a las fuerzas forman un triángulo cerrado.]

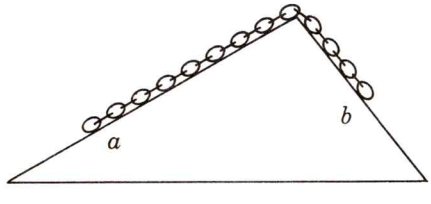


FIG. P8-5

8-6. Identifique todas las fuerzas que actúan sobre los objetos que se indican bajo las condiciones que se especifican, e identifique también las reacciones de dichas fuerzas: (*a*) una persona sentada en una silla, (*b*) un aeroplano en picada con potencia, (*c*) un niño moviéndose en un columpio, (*d*) la aguja de un fonógrafo cuando se toca un disco.

8-7. Un objeto de 1.0 kg está inicialmente en el origen, moviéndose hacia el este a 5.0 m/s. Se sujeta a fuerzas constantes de 10.0 N hacia el noreste y 10.0 N hacia el noroeste. Encuentre (*a*) el desplazamiento y (*b*) la velocidad del objeto después de 3.0 s.

8-8. Cuando las gotas pequeñas de aceite caen en el aire (no turbulento) pronto alcanzan una *velocidad terminal,* descendiendo con rapidez *constante* hacia abajo. Se encuentra que para las gotitas del mismo líquido la velocidad terminal es directamente proporcional al cubo del radio de la gotita. ¿Cómo varía la fuerza de resistencia del aire sobre las gotitas con la rapidez?

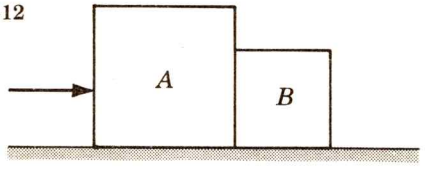
8-9. Un objeto de 5.0 kg se suspende de una cuerda atada al techo de un elevador que inicialmente se mueve hacia abajo a 3.0 m/s. El elevador llega al reposo con una aceleración constante en 6.0 s. ¿Cuál es la tensión de la cuerda en ese tiempo?

8-10. ¿Cuál es la fuerza que ejerce el hombre del Ej. 8-3 sobre el piso del elevador, cuando éste acelera hacia abajo a 2.0 pies^2?

8-11. Los siguientes datos corresponden a la masa, las coordenadas *x* e *y*, las componentes de la velocidad v_x y v_y y las componentes de las fuerzas sobre tres partículas F_x y F_y dadas en la forma (m; x, y; v_x, v_y; F_x, F_y), (1.0 kg; 0 m, 0 m; 2.0 m/s, −3.0 m/s; 4.0 N, 2.0 N), (2.0 kg; 4.0 m, 0 m; −4.0 m/s; −6.0 N, 2.0 N), y (2.0 kg; 0 m, 4.0 m; −5 m/s, 0 m/s; −4.0 N, 0 N). ¿Cuál es la aceleración del centro de masa de este sistema?

8-12. Los bloques *A* y *B*, con masas de 5.0 y 3.0 kg, respectivamente, se encuentran en contacto sobre una superficie horizontal lisa, como se indica en la Fig. P8-12. Se aplica una fuerza de 16 N al bloque *A*.

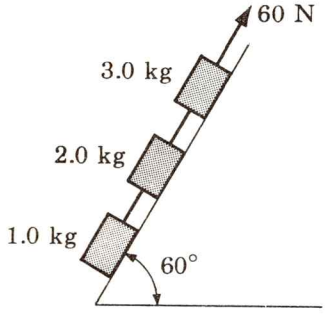
FIG. P8-12



¿Cuáles son (*a*) la aceleración de las masas, (*b*) la fuerza de *B* sobre *A*, y (*c*) la fuerza de *A* sobre *B*?

8-13. Los tres bloques indicados en la Fig. P8-13 tienen las masas de 1.0, 2.0, y 3.0 kg y se mueven hacia arriba a lo largo de un plano inclinado en 60°, sin fricción. Se aplica una fuerza de 60 N hacia arriba a lo largo del plano inclinado en el bloque más alto. Considere que g es de 10 m/s^2. ¿Cuál es la tensión en la cuerda sin masa que está entre (*a*) los bloques superior y medio y (*b*) los bloques bajo y medio? (*c*) ¿Cuál es la aceleración de los bloques?

FIG. P8-13



8-14. Un bloque se desliza hacia abajo con velocidad constante sobre un plano rugoso inclinado a un ángulo θ. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie del plano inclinado?

8-15. El esfuerzo de rotura de un cable de acero es de 1.0×10^4 N. Si uno tira horizontalmente con este cable, ¿cuál es la aceleración horizontal máxima que se puede dar a un objeto de 4,000 kg que reposa sobre una superficie horizontal rugosa, si el coeficiente de fricción cinética es de 0.15? Considere que g = 10.0 m/s^2.

8-16. Debido a la fricción, un bloque de 20.0 kg que se movía en línea recta a lo largo de un plano horizontal desacelera desde una rapidez de 10.0 m/s hasta 1.0 m/s en 4.0 s. Encuentre (*a*) la fuerza promedio en ese intervalo de tiempo, y (*b*) el coeficiente de fricción cinética.

8-17. Un canasto está en reposo sobre el piso de un camión. ¿Cuál es la aceleración horizontal máxima que puede darse al camión antes de que el canasto se deslice? El coeficiente de fricción estática es de 0.75.

8-18. Una fuerza constante de 10.0 N se aplica a un objeto de 2.00 kg en reposo sobre una superficie horizontal. Como resultado, el objeto se acelera y alcanza una rapidez de 12.0 m/s después de que se movió una distancia de 24.0 m. Encuentre (*a*) el coeficiente de fricción y (*b*) el intervalo de tiempo para el desplazamiento de 24.0 m. Considere que g = 10.0 m/s^2. i

8-19. Partiendo del reposo un bloque de madera se desliza hacia abajo en un plano inclinado en 60°, moviéndose 6.0 m en 1,5 s. ¿Cuál es el coeficiente de fricción de deslizamiento para la interfase bloque-plano?

8-20. Un objeto de masa m está obligado a moverse en un círculo horizontal en una superficie plana libre de fricción por medio de una cuerda cuyo esfuerzo de rotura es de 100 N. ¿Cuál es el valor límite de m si el objeto se mueve a 600 rev/min en un círculo de 2.0 m de radio?

8-21. Un pequeño bloque se encuentra a una distancia r del centro de una tornamesa. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la superficie de la tornamesa es μ_e. ¿Cuál es la velocidad angular máxima de la tornamesa para que el bloque no se deslice?

8-22. Un objeto de 10.0 kg se encuentra bajo la acción de una fuerza que tiene magnitud *constante* durante 6.0 s; el objeto mantiene una rapidez constante durante ese tiempo. ¿Qué trayectoria sencilla satisface estas condiciones?

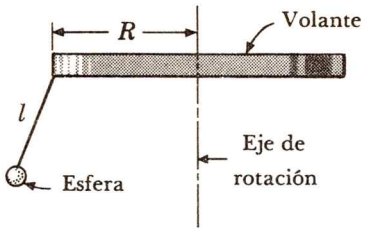
8-23. Un automóvil viaja con rapidez constante v a lo largo de una curva de radio r ¿Con qué ángulo con respecto a la horizontal debe estar peraltada la curva si no hay fuerzas de fricción (hacia arriba o hacia abajo del plano inclinado) entre la superficie de la carretera y el automóvil cuando toma la curva?

8-24. Una esfera se suspende de la orilla de un volante giratorio por medio de una cuerda inextensible. El volante gira alrededor de un eje vertical y la esfera se mueve alejándose del eje, de tal manera que la cuerda forma un ángulo θ con respecto a la vertical. Demuestre que la rapidez angular del volante se encuentra dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan \theta}{R + l \operatorname{sen} \theta}}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, R la distancia radial del extremo superior de la cuerda al

FIG. P8-24



eje de rotación, y l la longitud de la cuerda. Vea la Fig. P8-24.

8-25. Un automóvil de 1 000 kg se mueve con una *rapidez constante* de 15 m/s a lo largo de un camino ondulado; vea la Fig. P8-25. Los radios de curvatura en los puntos *a*, *b* y *c* son de 40, 30 e ∞ m, respectivamente. (*a*) Encuentre la fuerza normal de la carretera sobre el automóvil en esos tres puntos. (*b*) ¿Qué pasaría si el automóvil se moviera con la rapidez constante de 30 m/s?

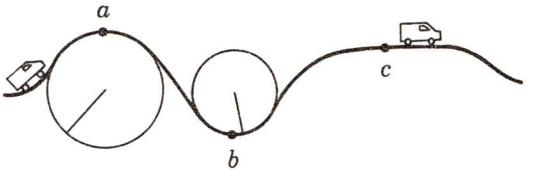


FIG. P8-25

8-26. Cuando una batería de 1.5 V se conecta entre dos placas metálicas paralelas separadas por 1.0 cm, los electrones se aceleran (a partir del reposo) hasta la rapidez de 7.3×10^5 m/s a medida que cruzan la abertura. ¿Cuál es la relación de la fuerza eléctrica de un electrón a la fuerza gravitacional que actúa sobre él? (En la física atómica, las fuerzas principales son las que tienen origen eléctrico y las fuerzas gravitacionales son enteramente despreciables.)

8-27. Un satélite de la Tierra con la masa m se mueve en una orbita circular de radio R_0 con una rapidez v_0. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza adicional que se necesita para mantener la misma órbita con la rapidez (*a*) $2v_0$ y (*b*) $\frac{1}{2}v_0$.

Capítulo

9

TRABAJO Y ENERGIA CINETICA

En este capítulo introduciremos los conceptos de trabajo y energía cinética, que son importantes porque llevan finalmente al principio de la conservación de la energía.

9—1 DEFINICION DE LA ENERGIA CINETICA

Considérese una fuerza constante F que actúa sobre una partícula de masa m a lo largo de su desplazamiento Δx. Vea la Fig. 9-1. La rapidez de la partícula va desde un valor inicial v_i a una rapidez final v_f en ese intervalo.

La segunda ley de Newton da

$$F = ma$$

donde la aceleración constante a se relaciona con el desplazamiento Δx y las rapideces inicial y final por medio de la ecuación cinemática

$$2a\,\Delta x = v_f^2 - v_i^2 \qquad (3\text{-}10)$$

La eliminación de la aceleración en las dos ecuaciones anteriores da como resultado una relación que se puede escribir en la forma

$$F\,\Delta x = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \qquad (9\text{-}1)$$

La fuerza constante multiplicada por el desplazamiento sobre el que actúa es igual al cambio en la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$. Volveremos para considerar el lado de la izquierda; pero primero concentraremos nuestra atención en el lado de la derecha y la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$, que se define como la *energía cinética* de la partícula:

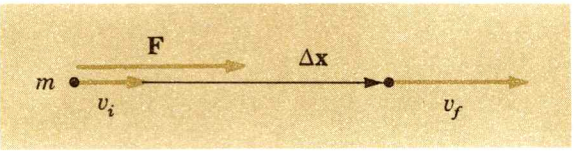


FIG. 9-1. Una fuerza constante **F** actúa sobre el desplazamiento Δx en la misma dirección, aumentando la rapidez de v_i a v_f.

$$\text{Energía cinética} = K = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{9-2}$$

La energía cinética es una cantidad escalar. Es, como veremos, tan importante como el vector ímpetu $m\mathbf{v}$, que también caracteriza a una partícula en movimiento. De su definición, vemos que la energía cinética tiene las dimensiones de ML^2/T^2, ya sea la masa multiplicada por el cuadrado de la velocidad, o como indica la Ec. (9-1), la fuerza multiplicada por la distancia. Así, la energía cinética de una partícula puede expresarse en unidades de kg-m^2/s^2, o su equivalente N-m. Por conveniencia se usa la unidad *joule*, abreviada J, para la energía cinética más que las unidades compuestas.* Así, por definición

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ J} = 1 \text{ kg-m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ N-m}$$

Se sigue de la Ec. (9-2) que una partícula de 2 kg que se mueve a 1 m/s, tiene la energía cinética de $K = 1$ J.

La energía cinética de una partícula puede expresarse también en términos de la magnitud de su ímpetu lineal $mv = p$:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \tag{9-3}$$

9—2 DEFINICION DEL TRABAJO

En la Fig. 9-1 teníamos una fuerza *constante* que actuaba *a lo largo de la dirección del movimiento* de una partícula y se obtuvo la Ec. (9-1). ¿Qué pasa si la fuerza no es constante o no está en la dirección del movimiento? Como veremos, entonces obtendremos una relación idéntica a la Ec. (9-1) del lado derecho, pero con una ligera modificación del lado izquierdo.

Primero consideremos la situación en la que la fuerza resultante **F** actúa sobre una partícula pero no a lo largo de la dirección del movimiento. Vea la Fig. 9-2. El ángulo entre la fuerza **F** y un pequeño desplazamiento $d\mathbf{r}$ de la partícula es θ. Podemos descom-

*En el sistema cgs, la energía cinética se expresa en ergs, donde 1 erg = 1 dina-cm = 1 g cm^2/s^2 = 10^{-7} J. La unidad de energía en el Sistema de Unidades Usual en los Estados Unidos, es el pie-libra; donde 1 pie-lb = 1.356 J. Vea el Apéndice II para otras unidades de energía y sus factores de conversión.

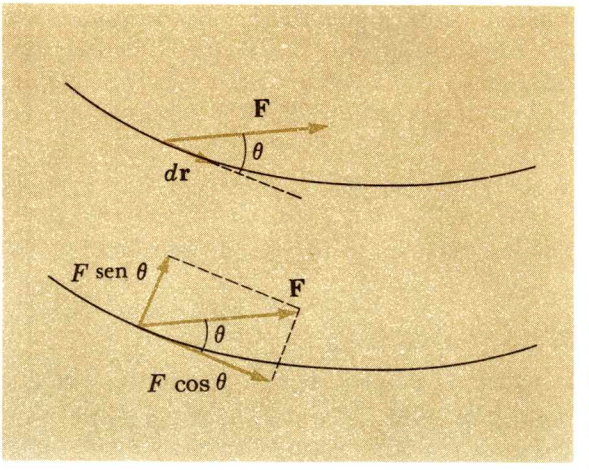


FIG. 9-2. (*a*) La fuerza resultante **F** actúa sobre una partícula que sufre un desplazamiento $d\mathbf{r}$. (*b*) La componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento es $F \cos \theta$, y en ángulo recto con el desplazamiento es $F \operatorname{sen} \theta$.

poner la fuerza **F** en una componente $F \cos \theta$ a lo largo de $d\mathbf{r}$, y una componente $F \operatorname{sen} \theta$ perpendicular a la velocidad de la partícula. La componente tangencial de la fuerza $F \cos \theta$ cambia la rapidez de la partícula pero no su dirección; mientras que la componente de la fuerza radial hacia dentro, $F \operatorname{sen} \theta$, cambia la dirección del movimiento pero no su rapidez. En términos de energía cinética, *sólo una componente de la fuerza a lo largo de la dirección del desplazamiento de una partícula puede cambiar su energía cinética.*

Así, al aplicarla a la situación indicada en la Fig. 9-2, la Ec. (9-1) se convierte en

$$F \cos \theta \, dr = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2 \tag{9-4}$$

Podemos usar en forma adecuada la relación anterior sin modificación ulterior, si el desplazamiento $d\mathbf{r}$ es lo bastante pequeño para que la magnitud de la fuerza resultante y la aceleración puedan tomarse como constantes.

La cantidad que aparece del lado izquierdo de la Ec. (9-4) es, por definición, el trabajo hecho por la fuerza **F** sobre el desplazamiento $d\mathbf{r}$:

$$\Delta W = \text{ Trabajo de } \mathbf{F} \text{ sobre } d\mathbf{r} = F \cos \theta \, dr \tag{9-5}$$

En la terminología del trabajo y la energía cinética, la Ec. (9-4) entonces dice que el *trabajo hecho por una fuerza resultante sobre una partícula es igual al cambio de su energía cinética.* Este es el teorema de *trabajo-energía cinética.* Nótese que si $\theta = 90°$, con la fuerza en ángulo recto a la velocidad de la partícula, no hay cambio en su energía cinética. Además, si $\theta > 90°$, de tal manera que la componente de la fuerza tenga sentido opuesto al desplazamiento de la partícula, la partícula baja su velocidad, su energía

cinética decrece y el trabajo hecho por la fuerza es negativo.

Recordando que el producto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ de dos vectores es simplemente $AB \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ (Sec. 2-6), podemos expresar la Ec. (9-5) en forma más compacta como sigue:

$$\text{Trabajo hecho por } \mathbf{F} \text{ sobre } d\mathbf{r} = F \cos\theta \, dr = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Por lo que la Ec. (9-4) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \qquad (9\text{-}6)$$

Es fácil demostrar que la energía cinética de una partícula es igual al trabajo hecho por la partícula al alcanzar el reposo. El teorema trabajo-energía se relaciona con el trabajo hecho *por* la fuerza resultante *sobre* una partícula; pero una fuerza resultante como la considerada existe sólo si la partícula en cuestión interactúa cuando menos con otra partícula. Podemos agrupar a a estas fuentes de fuerzas resultantes sobre las partículas con el nombre de *agente externo*. Así, un agente externo ejecuta trabajo sobre una partícula para cambiar su energía cinética. Por la tercera ley de Newton, si el agente produce una fuerza sobre la partícula, la partícula produce una fuerza igual pero opuesta a la del agente, y esta fuerza de la partícula puede hacer trabajo sobre el agente.

Consideremos una partícula con la energía cinética inicial K_i, que recibe la acción de una fuerza retardadora y queda en reposo. Del teorema de trabajo-energía.

$$W_{i \to f} = K_f - K_i = 0 - K_i$$
$$K_i = -W_{i \to f}$$

El trabajo hecho por el agente externo sobre la partícula es $W_{i \to f}$; el trabajo hecho por la partícula sobre el agente es $-W_{i \to f}$. Por lo que la ecuación anterior muestra que *la energía cinética de una partícula* es el *trabajo hecho por la partícula al alcanzar el reposo.*

9—3 TEOREMA GENERAL DE TRABAJO—ENERGIA

Como se vio antes, hemos encontrado que el trabajo hecho por una fuerza sobre un desplazamiento *infinitesimal* $d\mathbf{r}$ es igual al cambio de energía cinética sobre ese desplazamiento.

¿Qué se tiene para el caso donde la longitud de la trayectoria es *finita* y para otro caso en el que la fuerza resultante pueda *cambiar* tanto en magnitud como de dirección de un punto a otro? Considérese la Fig. 9-3, donde una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria dividida en cierto número de segmentos rectos $d\mathbf{r}_1$, $d\mathbf{r}_2$, $d\mathbf{r}_3$, ... La fuerza resultante en esos puntos es $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . , en este orden, se toman los segmentos tan pequeños que la

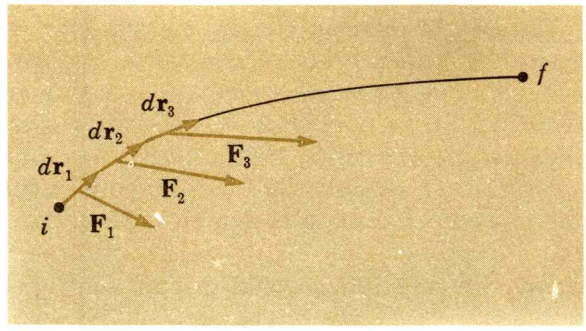


FIG. 9-3. Una partícula traza una trayectoria general de i a f. La fuerza resultante es F sobre el desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}_1$, $\mathbf{F}_2$ sobre $d\mathbf{r}_2$, etc.

fuerza puede tomarse como constante en cada uno de ellos.

El trabajo hecho sobre el primer segmento es

$$\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \tfrac{1}{2}mv_{f1}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{i1}^2$$

donde v_{i1} es la rapidez con que la partícula entra al segmento 1 y v_{f1} es la rapidez con que lo deja.

De igual modo, para otros segmentos

$$\mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = \tfrac{1}{2}mv_{f2}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{i2}^2$$
$$\mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{r}_3 = \tfrac{1}{2}mv_{f3}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{i3}^2$$

Ahora nos damos cuenta de que la rapidez v_{f1} con que la partícula deja el segmento 1 es justamente la rapidez v_{i2} con la que entra al segmento 2: $v_{f1} = v_{i2}$. Asimismo, $v_{f2} = v_{i3}$, etc. Si sumamos las últimas ecuaciones de trabajo, el resultado es

$$\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{r}_3 + \cdots = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

Nótese que, debido a la igualdad de las rapideces de salida y entrada, los únicos términos que sobreviven en el lado derecho son la energía cinética $\frac{1}{2}mv_i^2$ con que la partícula entra al primer segmento y la energía cinética $\frac{1}{2}mv_f^2$ con que la partícula sale del último segmento. Escribiendo la ecuación anterior en forma más compacta, tenemos

$$\sum_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

o, si la suma se indica por medio de una integración,

$$\int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \qquad (9\text{-}7)$$

o

$$W_{i\to f} = K_f - K_i \qquad (9\text{-}7a)$$

Esta es la relación trabajo-energía cinética en su forma más general: *El trabajo total hecho sobre una partícula por la fuerza resultante que actúa sobre ella entre cierto punto de partida i y un punto final f, es el cambio en la energía cinética de la partícula entre esos dos puntos.* Esta relación se aplica sin que importe la trayectoria seguida por la partícula, siempre que se use la componente local de la fuerza en la dirección de la trayectoria al evaluar las contribuciones al trabajo total $\int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ hecho por la fuerza resultante. Además, $\mathbf{F}$ puede variar de un punto a otro a lo largo de la trayectoria, tanto en dirección como en magnitud.

Completaremos nuestro tratamiento analítico del trabajo con dos teoremas muy útiles:

I El trabajo hecho por la fuerza *resultante F* se puede expresar en una forma alternativa muy útil, en términos del trabajo hecho por las fuerzas individuales que se ejercen sobre la partícula, cuya resultante es *F*. Supóngase que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots$ Entonces

$$\int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_i^f (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots) \cdot d\mathbf{r}$$

o

$$\int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_i^f \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_i^f \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \int_i^f \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{r} + \cdots \qquad (9\text{-}8)$$

$$W_{i \to f} \text{ (por la resultante de 1, 2, 3, . . .)} = W_{i \to f}(\text{por 1}) + W_{i \to f}(\text{por 2}) + W_{i \to f}(\text{por 3}) + \cdots \qquad (9\text{-}8a)$$

Pero $\int_i^f \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}$ es el trabajo realizado entre los puntos *i* y *f* por la fuerza individual $\mathbf{F}_1$, $\int_i^f \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$ el trabajo realizado entre los mismos puntos por la fuerza individual $\mathbf{F}_2$, etc. Por lo que la Ec. (9-8) indica que *el trabajo efectuado por la fuerza resultante sobre una partícula, es igual a la suma de los trabajos realizados por cada fuerza que contribuye a la fuerza resultante sobre la misma trayectoria.* Este resultado a menudo simplifica el cálculo del trabajo hecho por una fuerza resultante y el correspondiente aumento en la energía cinética de una partícula.

II El producto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ puede ser expresado en términos de las componentes rectangulares de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ como sigue:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (2\text{-}7)$$

donde las componentes llevan sus signos algebraicos.

Si aplicamos este resultado al vector fuerza $\mathbf{F}$ con las componentes rectangulares F_x, F_y y F_z y el vector desplazamiento incremental $d\mathbf{r}$, con las componentes rectangulares dx, dy, y dz, *tenemos*

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

y
$$\int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_i^f F_x\, dx + \int_i^f F_y\, dy + \int_i^f F_z\, dz \qquad (9\text{-}9)$$

En palabras, *el trabajo efectuado por la fuerza* **F** *es igual a la suma de los trabajos realizados por sus componentes rectangulares por separado.*

Ejemplo 9-1

Una partícula de masa m cae desde el reposo y recorre una distancia vertical y. (a) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza resultante que actúa sobre m? (b) ¿Cuál es la rapidez final de la partícula?

(a) La partícula está sujeta a una sola fuerza constante mg, su peso, con dirección vertical y hacia abajo. Su desplazamiento también está dirigido hacia abajo. Por lo tanto el trabajo total realizado es

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = mgy$$

(b) Como el trabajo efectuado por la fuerza resultante es igual al cambio en energía cinética, al principio cero, tenemos

$$W_{i \to f} = K_f - K_i$$
$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0$$

o
$$v = (2gy)^{1/2}$$

un resultado al que podríamos haber llegado en forma sencilla por medio de la cinemática de los cuerpos que caen.

Ejemplo 9-2

Un hombre eleva en sentido vertical hacia arriba un objeto de 2 kg una distancia de 1.5 m, sosteniéndolo con sus manos. El objeto se mueve con rapidez constante. ¿Cuál es el trabajo hecho por (a) la fuerza resultante sobre el objeto, (b) el hombre y (c) la fuerza de la gravedad? (Vea la Fig. 9-4.)

(a) Si el objeto se mueve con rapidez constante, la fuerza resultante que actúa sobre él debe ser cero. El peso hacia abajo mg se balancea exactamente por la fuerza de magnitud igual de la mano del hombre. Como la fuerza *resultante* es *cero,* hace *cero trabajo y,* desde luego, la energía cinética del objeto no cambia.

(b) Las manos del hombre producen una fuerza con la magnitud mg = (2.0 kg) (9.8 m/s²) = 19.6 N sobre el objeto. Esta fuerza está dirigida hacia arriba, el objeto recorre 1.5 m hacia arriba. Por lo que, con la fuerza y el desplazamiento a lo largo de la misma dirección y con el mismo sentido (vertical hacia arriba), el trabajo hecho por las manos del hombre es $F\,\Delta x$ = (19.6 N) (1.5 m) = 29.4 J.

(c) El peso del objeto tiene una dirección vertical hacia abajo y una magnitud de 19.6 N, teniendo en cuenta que el objeto se desplaza hacia arriba. Por lo tanto, el trabajo hecho por esta fuerza es *negativo* [θ = 180° en la Ec. (9-5)] y es $F \cos\theta\, \Delta x$ = (−19.6 N) (1.5 m) = − 29.4 J.

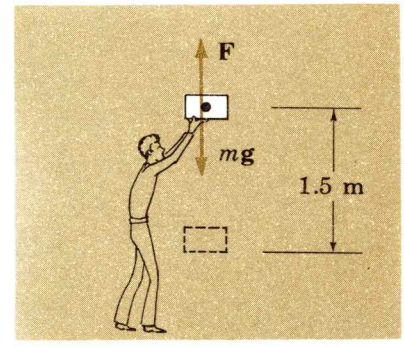


FIG. 9-4. Un hombre eleva un objeto en sentido vertical con rapidez constante.

Nótese que los resultados obtenidos en las tres partes son consistentes con el teorema general [Ec. (9-8)]: El trabajo de la fuerza resultante es igual a la suma de los trabajos hechos por las fuerzas individuales cuya suma es la fuerza resultante. Aquí tenemos:

Trabajo por la fuerza resultante = trabajo manual + trabajo por la gravedad

$$0 = 29.4 \text{ J} + (-29.4 \text{ J})$$

Ejemplo 9-3

Un bloque se desliza hacia abajo sobre una superficie perfectamente lisa con la rapidez inicial v_i. ¿Cuál es la rapidez en un punto que se encuentra a la distancia vertical y abajo del punto de partida?

La Fig. 9-5 indica que las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso $m\mathbf{g}$ y la fuerza normal $\mathbf{N}$ de la superficie sobre el bloque. (Que la superficie sea del todo lisa se refleja en el hecho de que la fuerza de la superficie es perpendicular a la superficie, sin componentes a lo largo de ella.) El trabajo hecho por la fuerza resultante sobre el bloque entre los dos puntos extremos es el cambio en la energía cinética del bloque.

$$\int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

Pero aquí $\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}$, y podemos calcular el trabajo hecho por la fuerza resultante sumando el trabajo hecho por $m\mathbf{g}$ solo al que hace $\mathbf{N}$ sola. Como el bloque se desliza a lo largo de la superficie, la fuerza normal $\mathbf{N}$ siempre forma un ángulo recto con el desplazamiento $d\mathbf{r}$, por lo que $\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Esto deja solo al trabajo hecho por $m\mathbf{g}$, que, para simplificar, calculamos por la suma de los trabajos hechos por sus componentes rectangulares.

$$m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = F_x\, dx + F_y\, dy$$

El peso $m\mathbf{g}$ es vertical, por lo que $F_x = 0$ y $F_y = -mg$ (hacia abajo). Sobre un incremento del desplazamiento hacia abajo dy,

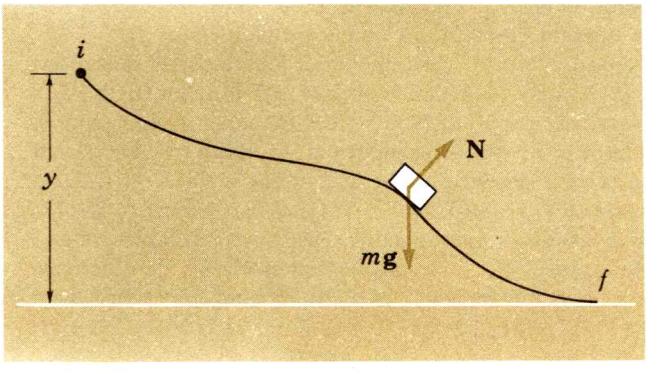


FIG. 9-5. Un bloque que se desliza sobre una superficie lisa de i a f se encuentra sujeto a dos fuerzas: la fuerza normal $\mathbf{N}$ y su peso $m\mathbf{g}$.

$$\int_i^f m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{-y} -mg\, dy = mgy$$

Por lo que, el trabajo total hecho por la fuerza resultante es justamente mgy, y el teorema trabajo-energía nos da

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

o una rapidez final, $$v_f^2 = v_i^2 + 2gy$$

Que es independiente no sólo de la masa m, sino también de *cualquier* detalle relacionado con la forma de la superficie que se encuentra entre el punto de partida y el punto final. De esto se sigue que *todos* los objetos que partan del reposo y se deslicen sobre superficies sin fricción entre dos puntos cuya separación vertical sea la misma, alcanzan la *misma* rapidez final. Las diferentes trayectorias pueden hacer que cambie el tiempo total requerido para recorrer la trayectoria particular, pero la rapidez final es la *misma*.

Ejemplo 9-4

Se arroja un objeto con una rapidez inicial v_0 en un ángulo θ con respecto a la horizontal. ¿Con qué rapidez llegará a un punto que se encuentra a una distancia vertical y abajo del punto de partida? (Vea la Fig. 9-6.)

La única fuerza que actúa sobre el objeto en vuelo es su peso $m\mathbf{g}$, y como hemos visto en el Ej. 9-3, el trabajo hecho por $m\mathbf{g}$ sobre el desplazamiento que tiene la componente vertical hacia abajo y es mgy. Por lo que, el teorema de trabajo-energía nos da

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

o $$v_f^2 = v_0^2 + 2gy$$

Nótese que el ángulo θ no forma parte del resultado final. Un objeto de cualquier masa lanzado en cualquier dirección, hacia arriba o hacia abajo de la horizontal, cambiará su rapidez en la misma proporción cuando se mueva una distancia vertical y.

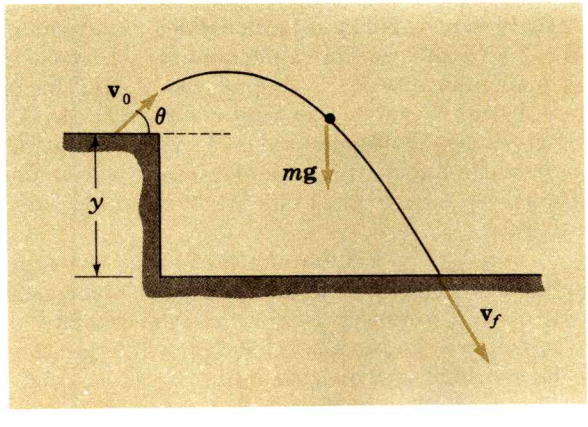


FIG. 9-6. Se arroja un objeto con la velocidad inicial v_0 desde una elevación y.

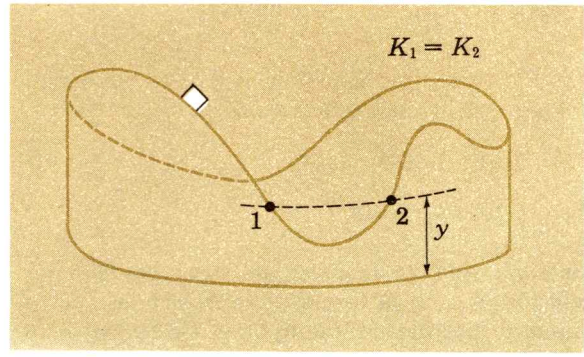


FIG. 9-7. Un objeto que se desliza sobre una pista de patinar perfectamente lisa, tiene la misma energía cinética en todos los puntos que estén en el mismo nivel horizontal.

Un caso especial es de marcado interés: aquél en el que $y = 0$. Entonces el resultado anterior da que $v_f = v_i$ y el trabajo hecho por la gravedad es cero. Aquí tenemos un trabajo negativo hecho por el peso mientras el objeto sube (mg hacia abajo, desplazamiento hacia arriba) y un trabajo positivo en la misma cantidad efectuado por el peso mientras el objeto cae (mg hacia abajo, desplazamiento también hacia abajo) su suma da cero.

En realidad, siempre que la única fuerza productora de trabajo sea el peso de un objeto — un objeto arrojado en el aire, o deslizándose sobre una superficie sin fricción, por ejemplo — *el trabajo total hecho por la fuerza de la gravedad en cualquier trayectoria cerrada que haga regresar al objeto a la misma posición vertical es cero.* Esto se sigue del hecho de que un desplazamiento hacia abajo da por resultado trabajo positivo hecho por la gravedad, y un desplazamiento hacia arriba corresponde a un trabajo negativo hecho por la gravedad, y un desplazamiento horizontal, con la fuerza en ángulo recto con el desplazamiento, implica un trabajo realizado de cero. Así, un objeto que se deslice sobre una pista de patinar ondulada muy lisa, como la de la Fig. 9-7, regresará a su punto de partida con la misma energía cinética con la que partió, al completar el ciclo, y la energía cinética de la partícula en todos los puntos que estén en el mismo nivel horizontal será la misma.

Ejemplo 9-5

Un bloque de 2.0 kg se lanza hacia arriba sobre un plano inclinado a 30° y rugoso, con la rapidez inicial de 2.0 m/s. Alcanza el reposo momentáneamente y después se desliza hacia abajo del plano inclinado, llegando a su punto de partida con la rapidez de 1.1 m/s. (*a*) ¿Cuál es el trabajo total hecho por la fuerza de fricción? (*b*) A qué distancia hacia arriba del plano inclinado se mueve el bloque, si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es de 0.30?

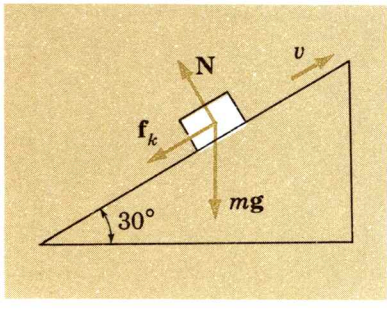


FIG. 9-8. Fuerzas sobre un bloque que se desliza hacia arriba en un plano inclinado rugoso.

(*a*) La Fig. 9-8 muestra las fuerzas que actúan sobre un bloque mientras se mueve hacia *arriba* en el plano inclinado; la fuerza de fricción $\mathbf{f}_c$ entonces, está dirigida hacia *abajo* del plano inclinado, opuesta en sentido a la velocidad del bloque. En el viaje de retorno, la velocidad está dirigida hacia abajo y la fuerza de fricción hacia arriba del plano inclinado.

Sabemos que el trabajo hecho sobre el bloque por la fuerza resultante que actúa sobre él es igual al cambio de la energía cinética del bloque:

$$\begin{aligned} W \text{ (por la resultante } \mathbf{F}) &= K_f - K_i \\ &= \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(2.0 \text{ kg})[(1.1 \text{ m/s})^2 - (2.0 \text{ m/s})^2] \\ &= -2.8 \text{ J} \end{aligned}$$

Pero también sabemos que, como la fuerza resultante es $\mathbf{f} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{f}_c$,

$$W \text{ (por la resultante } \mathbf{F}) = W(\text{por } m\mathbf{g}) + W(\text{por } \mathbf{N}) + W(\text{por } \mathbf{f}_c)$$

donde cada uno de los términos debe evaluarse desde un estado inicial con el bloque en la parte inferior a un estado final con el bloque de nuevo en la parte inferior. Como encontramos en el Ej. 9-4, el trabajo hecho por el peso $m\mathbf{g}$ *sobre el viaje redondo* es cero; $W(\text{por } m\mathbf{g}) = 0$. Como la fuerza normal $\mathbf{N}$ siempre es perpendicular al desplazamiento, $W(\text{por } \mathbf{N}) = 0$. Nos hemos quedado sólo con $W(\text{por } \mathbf{f}_c)$, de tal manera que

$$W(\text{por la resultante } \mathbf{F}) = W(\text{por } \mathbf{f}_c) = -2.8 \text{ J}$$

Aquí la fuerza de fricción, como siempre, hace un trabajo *negativo*.

(*b*) Como se indica en el Ej. 8-7, la magnitud de la fuerza de fricción es

$$f_c = \mu_c mg \cos\theta$$

Si la distancia total recorrida por el bloque hacia arriba del plano inclinado es s, la fuerza de fricción actúa sobre la distancia total $2s$ cuando el bloque completa el viaje redondo. La fuerza $\mathbf{f}_c$ es opuesta al desplazamiento para ambos desplazamientos hacia arriba y hacia abajo, de tal manera que ejecuta trabajo negativo siempre, y tenemos:

$$-(2s)(\mu_c mg \cos\theta) = -2.8 \text{ J}$$

$$s = \frac{2.8 \text{ J}}{2\mu_c mg \cos\theta} = \frac{2.8 \text{ J}}{2(0.30)(2.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(0.866)}$$

$$= 0.27 \text{ m}$$

9—4 TRABAJO REALIZADO POR UN RESORTE

Si un resorte helicoidal ordinario no se ha estirado o comprimido demasiado, regresará a su configuración no deformada, o de equilibrio, que adquiere cuando cesan las fuerzas deformadoras. Para deformaciones pequeñas la fuerza F_r producida por el resorte a lo largo de su longitud se encuentra dada por

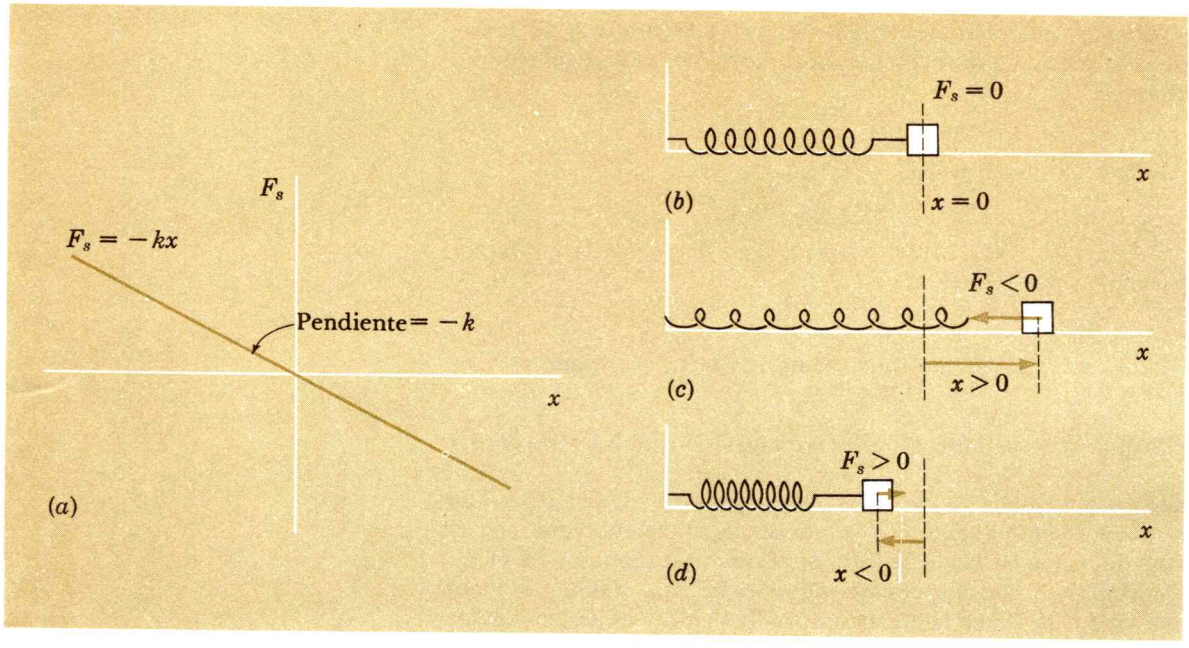


FIG. 9-9. Fuerzas características de un resorte. (*a*) La fuerza del resorte F_r como una función de su desplazamiento x. (*b*) El resorte en su forma relajada. (*c*) El resorte estirado por el desplazamiento x a la derecha y con la fuerza del mismo F_r hacia la izquierda. (*d*) El resorte comprimido por el desplazamiento x a la izquierda y la fuerza del mismo F_r hacia la derecha.

$$F_r = -kx \tag{9-10}$$

donde x es el desplazamiento del resorte desde su longitud cuando no está deformado y k una constante.* Vea la Fig. 9-9*a*.

El signo menos que aparece en la Ec. (9-10) se debe a que la fuerza del resorte siempre tiene la misma dirección y sentido opuesto al desplazamiento. Cuando $x = 0$ y el resorte se relaja, $F_r = 0$ (Fig. 9-9*b*). Cuando el resorte se estira (Fig. 9-9*c*) y x es positivo, la fuerza ejercida por el resorte es negativa. De la misma manera, cuando el resorte se comprime y x es negativo, como en la Fig. 9-9*d*, la fuerza F_r es positiva. En cada caso, el resorte ejerce sobre un objeto unido a él una fuerza que tiende a restaurar a dicho objeto a una configuración de equilibrio, por lo que se dice que el resorte ejerce una *fuerza de restitución*. La constante del resorte, o constante de la fuerza, k es una medida de la rigidez del resorte; a una k más grande corresponde un resorte más rígido.

En el Cap. 14 consideraremos en detalle el movimiento de un objeto unido a un resorte. Aquí nos referiremos al trabajo hecho por un resorte estirado o comprimido, un ejemplo sencillo del trabajo hecho por una fuerza que varía con el desplazamiento.

Supóngase que al principio un resorte se encuentra comprimido, como en la Fig. 9-9*d*; y que aplica una fuerza F_r hacia la derecha sobre un bloque comprimido contra el resorte. Queremos

*Esta relación se conoce como la ley de Hooke debido a que su descubridor fue Robert Hooke 1635-1703).

encontrar el trabajo hecho por el resorte cuando partiendo de su extremo derecho va de su posición $-x$ a cero. Nótese que ambos, la fuerza y el desplazamiento están dirigidos hacia la derecha, de manera que el ángulo θ entre la fuerza resultante $\mathbf{F}$ y el desplazamiento $d\mathbf{r}$ es cero. Aplicando la definición general del trabajo, tenemos que

$$W_{i\to f} = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-x}^{0} F_s\, dx = \int_{-x}^{0} (-kx)\, dx$$

$$W = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{9-11}$$

En general, la integral $\int F\, dx$ es el área bajo la curva de F graficada contra x. Para esta curva particular —una línea recta— el área es $\frac{1}{2}kx^2$. En general, el área bajo la curva fuerza-desplazamiento es igual al trabajo hecho por la fuerza. (Vea la Fig. 9-10.)

Un resorte comprimido hace trabajo *positivo* en la cantidad $\frac{1}{2}kx^2$ cuando se extiende una cantidad x hasta su longitud de relajamiento; imparte energía cinética a un bloque unido a su extremo. De igual modo, un resorte estirado hace trabajo *positivo* en la cantidad $\frac{1}{2}kx^2$, a medida que se contrae en una longitud x hasta su longitud de relajamiento; aquí de nuevo la fuerza del resorte y el desplazamiento tienen el mismo sentido, y el bloque unido al resorte gana energía cinética. Por otro lado, el resorte hace trabajo *negativo* mientras se estira y comprime; entonces, la fuerza del resorte y el desplazamiento aplicado tienen diferente sentido, el bloque unido al resorte, que se encontraba primero en movimiento, pierde energía cinética. En cada evento, la *magnitud* del trabajo hecho por un resorte al ir desde $\pm x$ a cero o de cero a $\pm x$ es $\frac{1}{2}kx^2$ [$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(-x)^2$]; el signo del trabajo hecho por el resorte se determina teniendo en cuenta que la fuerza y el desplazamiento son paralelos o antiparalelos, o en forma equivalente, por que el resorte aumente o disminuya la rapidez del objeto que se encuentra unido a él.

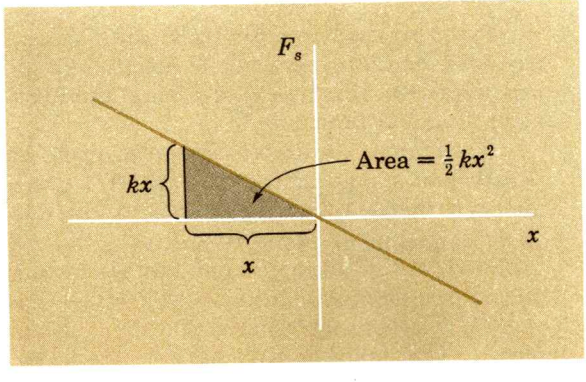


FIG. 9-10. El trabajo hecho por un resorte que se extiende desde $-x$ a 0 es el área bajo la gráfica fuerza-desplazamiento, $\frac{1}{2}kx^2$.

Ejemplo 9-6

Una fuerza de 25 N comprime un resorte en 4.0 cm. Cuando el resorte está comprimido 4.0 cm se le adhiere un cuerpo de 1.0 kg y se suelta desde el reposo. (*a*) ¿Cuál es la rapidez del objeto cuando el resorte está relajado? (*b*) ¿Dónde se encuentra el objeto cuando vuelve a quedar en reposo? (*c*) ¿Cuál es el trabajo neto hecho por el resorte cuando el objeto regresa a su posición de partida?

(*a*) A medida que el resorte se expande, hace trabajo positivo en la cantidad de $\frac{1}{2}kx^2$, donde x es de 4 cm. La energía cinética del objeto pasa de un valor inicial de cero a uno final de $\frac{1}{2}mv^2$. Por lo que, del teorema trabajo-energía,

$$W_{i\to f} = K_f - K_i$$

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0$$

o

$$v = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} x$$

La constante de fuerza del resorte es

$$k = -\frac{F_s}{x} = -\frac{25\text{ N}}{-4.0\times10^{-2}\text{ m}} = \frac{10^4}{16}\text{ N/m}$$

de tal manera que la rapidez en $x = 0$ es

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x = \sqrt{\frac{(10^4/16)\text{ N/m}}{1.0\text{ kg}}}\,(4.0\times10^{-2}\text{ m}) = 1.0\text{ m/s}$$

(*b*) Después de pasar por la posición de equilibrio, el objeto disminuye su velocidad debido a la fuerza del resorte que ahora actúa en sentido opuesto a su velocidad. El resorte ejecuta un trabajo negativo hasta que el objeto es obligado a quedar por un momento en reposo. Ahora el trabajo hecho por el resorte es $-\frac{1}{2}kx^2$, mientras que la energía cinética *inicial* del objeto es de $\frac{1}{2}mv^2$, y su energía cinética final es cero. Para este segmento del movimiento del objeto, tenemos

$$W_{i\to f} = K_f - K_i$$

$$-\tfrac{1}{2}kx^2 = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2$$

Pero, precisamente esta es la misma relación que hay para la parte (*a*), de tal manera que el objeto llega al reposo con el resorte extendido 4.0 cm, o sea la misma cantidad que cuando estaba comprimido al principio.

(*c*) Sabemos que después de que el objeto ha llegado al reposo en la extensión mayor del resorte, regresará a la posición de equilibrio por una fuerza que tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento; el resorte ejecuta un trabajo positivo, de nuevo en la cantidad $\frac{1}{2}kx^2$, al mismo tiempo que el objeto gana energía cinética que es, cuando $x = 0$, de nuevo $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$. En el segmento final del ciclo, el resorte de nuevo hace un trabajo negativo y lleva al objeto al reposo en su punto de partida, $x = -4.0$ cm.

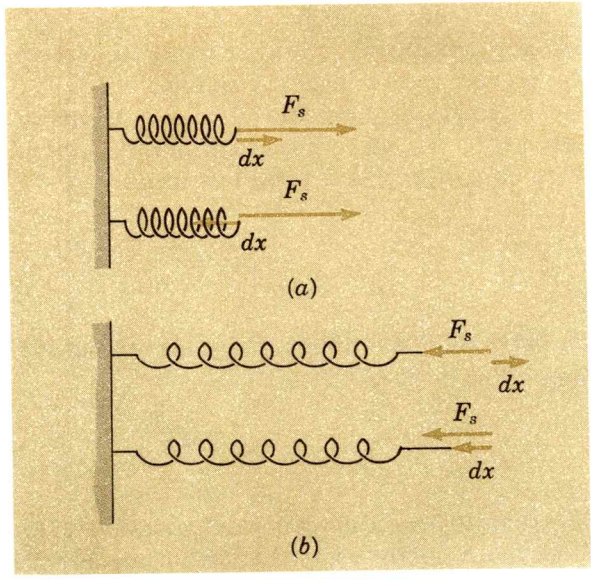


FIG. 9-11. (*a*) Un resorte comprimido hace trabajos de igual magnitud pero de signos *opuestos* en desplazamiento incrementales iguales pero de sentido opuesto. (*b*) Un resorte estirado hace trabajos de igual magnitud pero de signos *opuestos* para desplazamientos incrementales iguales pero de sentido opuesto. En ambos casos (*a*) y (*b*) la fuerza es igual en magnitud, dirección y sentido, mientras que los desplazamientos incrementales son iguales en magnitud pero de sentido opuesto.

Podemos encontrar el trabajo hecho por el resorte en un ciclo completo nada más al sumar, poniendo especial atención a los signos, los trabajos hechos en cada uno de los cuatro segmentos:

$$\begin{aligned} W_{\text{ciclo completo}} &= W_{-x \to 0} + W_{0 \to x} + W_{x \to 0} + W_{0 \to -x} \\ &= \tfrac{1}{2}kx^2 - \tfrac{1}{2}kx^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 - \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sobre un viaje redondo, el trabajo neto hecho por la fuerza del resorte es *cero*. Este resultado es, de hecho, independiente de la forma como el resorte se lleva desde una configuración inicial a una configuración final idéntica: debido a que la dirección, sentido y magnitud de la fuerza del resorte dependen sólo del desplazamiento $x(F_r = -kx)$, el trabajo neto hecho por el resorte cuando regresa en su trayectoria a su punto de partida es cero. Sobre un desplazamiento pequeño dx donde la fuerza es F_r, el trabajo hecho tiene la magnitud de $F_r\,dx$; en el viaje de regreso la fuerza en esa localización es idéntica en magnitud, dirección y sentido, pero el sentido del desplazamiento dx es invertido, por lo que el trabajo, cuya magnitud es $F_r\,dx$, tiene signo opuesto. Si el trabajo neto es cero para cualquier grupo de desplazamientos incrementales iguales y de sentidos opuestos, debe ser cero para el ciclo completo. (Vea la Fig. 9-11.)

9—5 POTENCIA

El trabajo hecho por una fuerza y la energía cinética adquirida por una partícula no implica el tiempo t en forma explícita. Pero, para consideraciones prácticas, a menudo es importante conocer

no sólo la cantidad de trabajo hecho por un agente, sino también la rapidez con que lo puede hacer dicho agente. Por lo tanto, es muy útil definir una cantidad llamada *potencia,* que representa la rapidez con que se hace el trabajo.

La potencia promedio $\overline{P}$ sobre el intervalo de tiempo Δt, se define como la energía transmitida $W_{i \to f}$ dividida entre el tiempo Δt en el que se lleva a cabo la transmisión:

$$\overline{P} = \frac{W_{i \to f}}{\Delta t}$$

La potencia instantánea P es la rapidez de hacer trabajo con respecto al tiempo:

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{9-12}$$

Recordando las definiciones del trabajo en términos de la fuerza y el desplazamiento, esta relación se puede escribir en otras formas diferentes:

$$W_{i \to f} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Sin embargo, $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\, dt$, donde $\mathbf{v}$ es la velocidad instantánea, y podemos escribir

$$W_{i \to f} = \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})\, dt = (\overline{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}})\, \Delta t$$

donde $(\overline{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}})$ es el producto escalar promedio en el tiempo de la fuerza instantánea $\mathbf{F}$ y la velocidad $\mathbf{v}$ en el intervalo de tiempo Δt. Usando la última ecuación en las definiciones de P y $\overline{P}$, tenemos:

$$\overline{P} = (\overline{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}})$$

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{9-13}$$

Las unidades apropiadas para la potencia son los joules por segundo. Esta combinación de unidades se llama el watt, abreviándolo con W. Por lo que

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ kg-m}^2/\text{s}^3$$

RESUMEN

El teorema trabajo-energía:

$$\int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \tag{9-7}$$

donde **F** es la fuerza resultante sobre una partícula de masa m que pasa de la rapidez inicial v_i a la rapidez final v_f, y $d\mathbf{r}$ es un desplazamiento incremental a lo largo de la trayectoria de la partícula.

El trabajo hecho por la fuerza **F** del estado inicial i a un estado final f es

$$W_{i\to f} = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (9\text{-}5)$$

El trabajo se calcula a partir de la componente $F \cos \theta$ a lo largo del desplazamiento.

La energía cinética de una partícula es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (9\text{-}2)$$

La fuerza ejercida por un resorte está dada por

$$F = -kx \qquad (9\text{-}10)$$

donde x es el desplazamiento del resorte desde su longitud cuando no está deformado, y k es la constante del resorte.

El trabajo hecho por un resorte (cuando se expande de $-x$ a 0, o se contrae de $+x$ a 0) es

$$W = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (9\text{-}11)$$

La potencia es la rapidez con que se hace trabajo con respecto al tiempo:

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \qquad (9\text{-}12),(9\text{-}13)$$

PROBLEMAS

9-1. Las partículas A y B tienen energías cinéticas iguales, y la masa de A es el doble que la de B. ¿Cuál es la relación entre sus ímpetus?

9-2. La energía cinética de la partícula A es cinco veces mayor que la de la partícula B, y el ímpetu de A es cuatro veces mayor que el de B. ¿Cuál es la relación entre sus masas?

9-3. Una mujer baja un peso de 300 N una distancia vertical de 90 cm con la rapidez constante de 20 cm/s. ¿Cuál es el trabajo hecho por (*a*) la mujer, (*b*) la tierra, y (*c*) la fuerza resultante?

9-4. Un hombre (*a*) levanta una maleta de 20 kg desde el piso hasta un punto que se encuentra a 75 cm sobre el piso en 2.0 s, (*b*) lo mantiene en esa posición durante 4.0 h, y por último (*c*) vuelve a colocar la maleta sobre el piso en 2.0 s. ¿Cuál es el trabajo hecho por el hombre sobre la maleta en cada una de las tres partes anteriores? ¿Cuál es el trabajo neto hecho por el hombre sobre la maleta en toda la secuencia?

9-5. Un hombre (*a*) estira un resorte que al principio estaba relajado (con una fuerza constante de 200 N/m) de tal manera que sus extremos se apartan en

una distancia de 20.0 cm, (*b*) enseguida lo mantiene en esa posición durante 10.0 minutos, y (*c*) al final lo hace regresar a su posición inicial en 5.0 s. ¿Cuál es el trabajo hecho por el hombre sobre el resorte en cada una de las partes anteriores? (*d*) ¿Cuál es el trabajo neto hecho por el hombre sobre el resorte durante toda la secuencia?

9-6. Durante un intervalo de 5.0 s se aplica una fuerza no balanceada sobre un objeto de 2.0 kg que estaba al principio en reposo, dándole una energía cinética de 100 J. ¿Cuáles son (*a*) la fuerza y (*b*) el ímpetu finales? (*c*) ¿Qué distancia se mueve el objeto?

9-7. Una pelota de billar de masa m que se movía al comienzo con la rapidez v choca de frente con otra segunda pelota idéntica y se hace que quede en reposo. ¿Cuál es el trabajo hecho por la pelota incidente sobre la pelota golpeada?

9-8. Una partícula de 0.20 g que primero se movía hacia la izquierda a 50 cm/s, recibe la acción de una fuerza constante hacia la derecha de 4.0 N. ¿Cuál es la energía cinética cuando se encuentra a 50 cm a la derecha de su punto de partida?

9-9. Una niña jala con una cuerda a una caja de 12 kg atada a ella, moviéndola con rapidez constante sobre una superficie rugosa. La cuerda forma un ángulo de 30° con la horizontal, y la niña aplica una fuerza de 180 N. La caja se mueve 2.0 m a lo largo de la horizontal, ¿Cuál es el trabajo hecho por (*a*) la fuerza resultante que actúa sobre la caja, (*b*) la fuerza de la niña sobre la caja, (*c*) la fuerza normal de la superficie sobre la caja, (*d*) la fuerza de la gravedad sobre la caja, y (*e*) la fuerza de fricción sobre la caja?

9-10. Un hombre aplica una fuerza a lo largo de un plano inclinado con el ángulo θ relativo a la horizontal, de tal manera que un objeto de masa m sobre la superficie sin fricción se mueve hacia arriba del plano inclinado con rapidez constante. El objeto se mueve una distancia s a lo largo del plano inclinado. ¿Cuáles son los trabajos hechos sobre el objeto por (*a*) el hombre, (*b*) la fuerza normal a la superficie, y (*c*) la fuerza de la gravedad sobre el objeto?

9-11. Se aplica una fuerza constante F de frenado a un objeto que se movía con una velocidad inicial v_0, deteniéndose después de recorrer una distancia D en el intervalo de tiempo $\Delta\tau$. ¿Cuáles son los correspondientes (*a*) distancia y (*b*) intervalo de tiempo que necesita la misma fuerza para detener el mismo objeto si se movía al principio con una rapidez mayor por un factor de tres?

9-12. (*a*) Una partícula de masa m se mueve en un círculo de radio r con la rapidez constante de v_i. ¿Qué trabajo se hace sobre la partícula por la fuerza que actúa sobre ella cuando recorre la mitad del círculo? (*b*) Ahora la rapidez de la partícula, que primero era v_i, aumenta por un factor de tres mientras recorre la mitad del círculo. ¿Cuál es el trabajo total hecho sobre la partícula por la fuerza resultante que actúa sobre ella?

9-13. Una partícula de masa m cuelga de una cuerda de longitud L. Entonces se empuja la partícula para un lado manteniéndose el resorte tenso hasta que el ángulo del resorte con la vertical sea de θ. ¿Qué trabajo se hace (*a*) por una persona que mueve la partícula desde su posición inicial a su localización final, (*b*) por la fuerza de la gravedad, y (*c*) por la tensión de la cuerda?

9-14. La Fig. P9-14 indica la fuerza que se ejerce sobre una partícula de masa 0.50 kg que se mueve a lo largo del eje X positivo. La velocidad de la partícula en $x = 0$ es de 2.0 m/s en la dirección y el sentido de X positivo. ¿Cuál es la energía cinética de la partícula cuando (*a*) $t = 1.0$ s, (*b*) $t = 2.0$ s, y (*c*) $t = 3.0$ s?

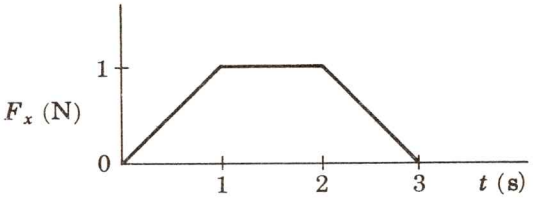


FIG. P9-14

9-15. Se arroja en sentido vertical hacia arriba una esfera de 0.40 kg con la rapidez de 8.0 m/s. ¿Cuál es la energía cinética de la esfera cuando se encuentra (*a*) a 2.0 m sobre el piso moviéndose hacia arriba, (*b*) a 2.0 m sobre el piso moviéndose hacia abajo, y (*c*) al regresar a su punto de partida?

9-16. Un bloque de 2.0 kg se mueve hacia abajo de un plano inclinado en 30° con rapidez constante recorriendo la distancia total de 50 cm a lo largo del plano inclinado. ¿Cuál es el trabajo hecho sobre el bloque por (*a*) la fuerza normal, (*b*) la fuerza de fricción, (*c*) la fuerza de la gravedad sobre el bloque y (*d*) la fuerza resultante sobre el bloque?

9-17. La magnitud de la fuerza de atracción entre dos cargas eléctricas diferentes de magnitudes q_1 y q_2 separadas por la distancia r se encuentra dada por kq_1q_2/r^2. ¿Cuánto trabajo debe hacerse para aumentar la separación de las dos cargas de r_1 a r_2?

9-18. Un objeto de 5.0 kg se arroja en sentido vertical hacia arriba con la rapidez de 2.0 m/s. Desde que inicia su movimiento hasta que regresa a su punto de partida, ¿cuál es (*a*) el trabajo neto hecho por la fuerza de la gravedad y (*b*) el impulso neto debido a la fuerza de la gravedad?

9-19. Sobre una partícula que estaba al comienzo en reposo actúa una fuerza. Su impulso es de 4.0 kg m/s, y el trabajo hecho por la fuerza sobre el mismo intervalo es 2.0 J. ¿Cuál es la masa de la partícula?

9-20. Un golfista lanza una pelota de 45 g a 45° sobre la horizontal de tal manera que recorre 100 m (medidos a lo largo del piso). Encuentre (*a*) el cambio de ímpetu de la pelota y (*b*) el trabajo hecho por el bastón de golf. (*c*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza promedio que se ejerce sobre la pelota durante el impacto, si el contacto dura 1.0×10^{-3} s? Suponga que $g = 10.0$ m/s^2.

9-21. Un bloque de madera de 2.0 kg se movía primero sobre una superficie rugosa a 3.0 m/s; después de moverse 5.0 m quedó en reposo. ¿Qué potencia se requerirá para mantenerlo en movimiento sobre la misma superficie a la rapidez constante de 3.0 m/s?

9-22. Un lanzador de beisbol arrojó una pelota de 160 g sobre un bloque absorbedor de 1 440 g que al principio estaba en reposo sobre una superficie horizontal rugosa. El choque es perfectamente inelástico —la pelota y el bloque se mueven juntos— y el impacto hace que se mueva el bloque (y la pelota) una distancia de 146 cm. (Vea la Fig. P9-22.) Encuentre la rapidez de la pelota lanzada si el coeficiente de fricción cinética es de 0.40.

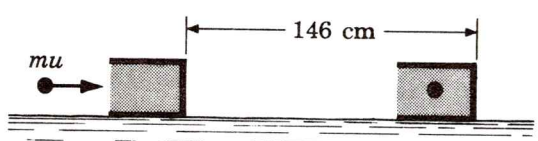


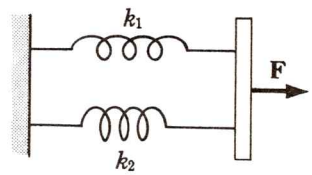
FIG. P9-22

9-23. Un resorte con la constante de fuerza de 30 N/m se estira desde su longitud de relajamiento 6.0 cm; en seguida se deja que regrese a su longitud de relajamiento; después se comprime 6.0 cm, y por último se deja que se alargue 3.0 cm. ¿Cuál es el trabajo neto hecho por el resorte?

9-24. Un resorte con la constante de fuerza k se comprime acortándose en la longitud x y se colocan en sus extremos dos objetos, cada uno con la masa m. Después se sueltan los dos objetos desde el reposo. (*a*) ¿Cuál es el trabajo hecho por el resorte mientras se expande hasta su longitud de relajamiento? (*b*) ¿Cuál es la energía cinética de cada objeto después de ello?

9-25. Dos resortes que tienen las constantes de fuerzas k_1 y k_2 tienen la misma longitud cuando están relajados. Los extremos de la izquierda de ambos resortes están fijos y se jalan juntos al aplicarles una fuerza a sus extremos de la derecha, como se indica en la Fig. P9-25. (*a*) ¿Cuál es el trabajo hecho cuando los dos resortes se estiran una distancia x? (*b*) ¿Cuál es la fuerza como una función de x?

FIG. P9-25



9-26. Un automóvil de carreras se mueve con rapidez constante sobre una carretera horizontal a 45 m/s. El motor produce la energía con la rapidez de 450 kW (≈600 hp). (*a*) ¿Cuál es la fuerza resistiva total equivalente que se ejerce sobre el corredor? (*b*) ¿Cuál es la fuerza horizontal, a lo largo de la dirección del movimiento, de la superficie de la carretera sobre el automóvil?

9-27. Se lanza en sentido vertical hacia arriba un objeto de 3.0 kg con la rapidez de 29.4 m/s. ¿Cuál es la rapidez con que la fuerza de gravedad hace trabajo sobre el objeto (en watts) (*a*) 1.0 s, (*b*) 2.0 s, y (*c*) 3.0 s después de que se lanzó?

9-28. Demuestre que es imposible ejecutar trabajo a potencia constante sobre un cuerpo que en un comienzo se encuentre en reposo.

9-29. Se une a una cuerda de 1.0 m de largo una pequeña esfera con la masa de 300 g. El otro extremo de la cuerda se fija al techo, y la esfera se desplaza hasta que la cuerda forme un ángulo de 60° con respecto a la vertical y se suelta desde el reposo. (*a*)

Encuentre el trabajo hecho por la fuerza de la gravedad y por la tensión de la cuerda durante el tiempo en el que el ángulo va de 60° a 0°. (*b*) ¿Cuál es la energía cinética y la velocidad del objeto en su posición más baja? (*c*) ¿Cuál es la tensión de la cuerda en su posición más baja?

9-30. La Tierra con la masa de 6.0×10^{24} kg se mueve en una órbita casi circular con rapidez constante alrededor del Sol en un año $\approx 3.16 \times 10^{7}$ s. Durante un periodo de $\frac{1}{2}$ año (*a*) ¿Cuál es el trabajo neto hecho por el Sol sobre la Tierra? (*b*) ¿Cuál es el impulso neto? (La distancia Sol-Tierra es 1.5×10^{11} m.)

Capítulo

10

ENERGIA POTENCIAL Y CONSERVACION DE LA ENERGIA

Hasta aquí hemos considerado nada más un tipo de energía —la energía cinética, la que tiene un objeto en virtud de su movimiento. En este capítulo introduciremos el concepto de energía potencial, con lo que podremos hablar de la conservación de la energía. Consideremos con algún detalle la energía potencial asociada con dos sistemas importantes en los que actúan fuerzas de restitución: la Tierra y un objeto cercano a ella, y dos masas unidas por un resorte. Tratamos del principio general de la conservación de la energía y reexaminaremos las colisiones en términos de la conservación de la energía.

10—1 ENERGIA POTENCIAL DE UN RESORTE

El ímpetu es una cantidad física importante; porque, para cualquier sistema aislado, el ímpetu se conserva. Después hemos visto que la energía cinética es una propiedad significativa de un objeto en movimiento. ¿Se conserva la energía cinética?

Para responder a esta pregunta vamos a considerar con algo de detalle una situación sencilla: el choque de frente entre los objetos que interactúan entre sí por medio de un resorte unido a uno de ellos. Por sencillez supondremos que los dos objetos, que no tienen por fuerza la misma masa, chocan en un marco de referencia en el que el ímpetu total del sistema es cero (el marco de referencia del centro de masa).

Como indica la Fig. 10-1, (*a*) los objetos primero se acercan con velocidad constante, (*b*) entre ellos actúa una fuerza repulsiva, a medida que el resorte se comprime y después se expande hasta su longitud de relajamiento, y (*c*) después los dos objetos se separan, de nuevo con velocidad constante. Mientras el resorte está comprimido y actúa una fuerza sobre cada objeto, ambos, el ímpetu mv y la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ de cada objeto cambian.

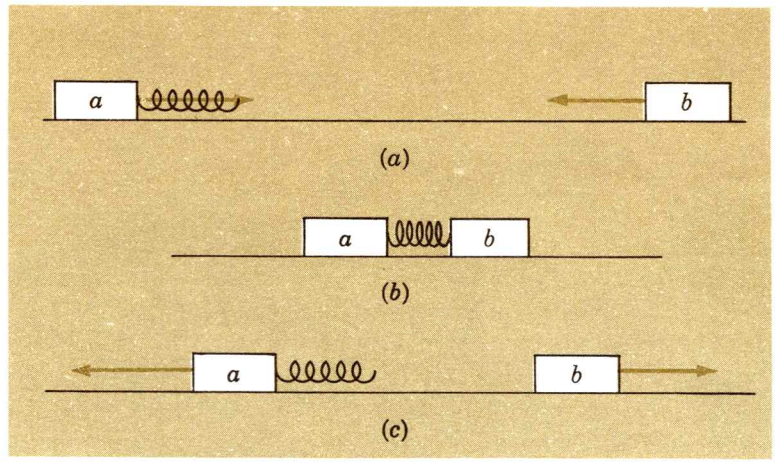


FIG. 10-1. Choque entre dos objetos a y b; ellos (a) se acercan con velocidades constantes, (b) interactúan a través de un resorte, y (c) se alejan entre uno de otro.

Los ímpetus p_a y p_b de los dos objetos, junto con el ímpetu total del sistema $p = p_a + p_b$, se grafican como una función del tiempo en la Fig. 10-2a. El ímpetu total p es constante (cero) antes, después y *durante* la interacción, de acuerdo con la ley de la conservación del ímpetu.

¿Qué hay con respecto a la energía cinética? La energía cinética de cada objeto, K_a y K_b, y su suma, $K = K_a + K_b$, la energía cinética total del sistema, se grafica como una función del tiempo en la Fig. 10-2b. (A pesar de que ambas a y b tienen el mismo ímpetu y magnitud, sus energías cinéticas no son iguales porque sus masas difieren $K = p^2/2m$.) Vemos que la energía cinética total es la misma antes y después de la interacción, pero decrece durante ella y, de hecho, cae a cero en el instante en que ambos objetos quedan por un momento en reposo. A pesar de que no cambia antes y después del choque, la energía cinética *no* se conserva durante el choque.

Primero veamos por qué la energía cinética después del choque debe ser igual a la energía cinética total antes del choque. La fuerza del resorte hace un trabajo negativo sobre los objetos cuando disminuyen su velocidad hasta el reposo, y en seguida trabajo positivo cuando se aumenta su velocidad. Sabemos a partir de la discusión hecha en la Sec. 9-4 que el trabajo *neto* hecho *por* el resorte que se deforma pero después regresa a su configuración inicial, es *cero*. Por lo que, del teorema trabajo-energía, no puede haber un cambio del total de la energía cinética sobre todo el ciclo. Resumiendo, las propiedades de un resorte, junto con el teorema trabajo-energía, requieren que los objetos salgan de la interacción con la misma energía cinética que ellos tenían al comienzo.

Aunque las energías cinéticas totales inicial y final del sistema aislado sean iguales, no podemos decir que la energía cinética se conserva durante el choque porque es claro que disminuye durante

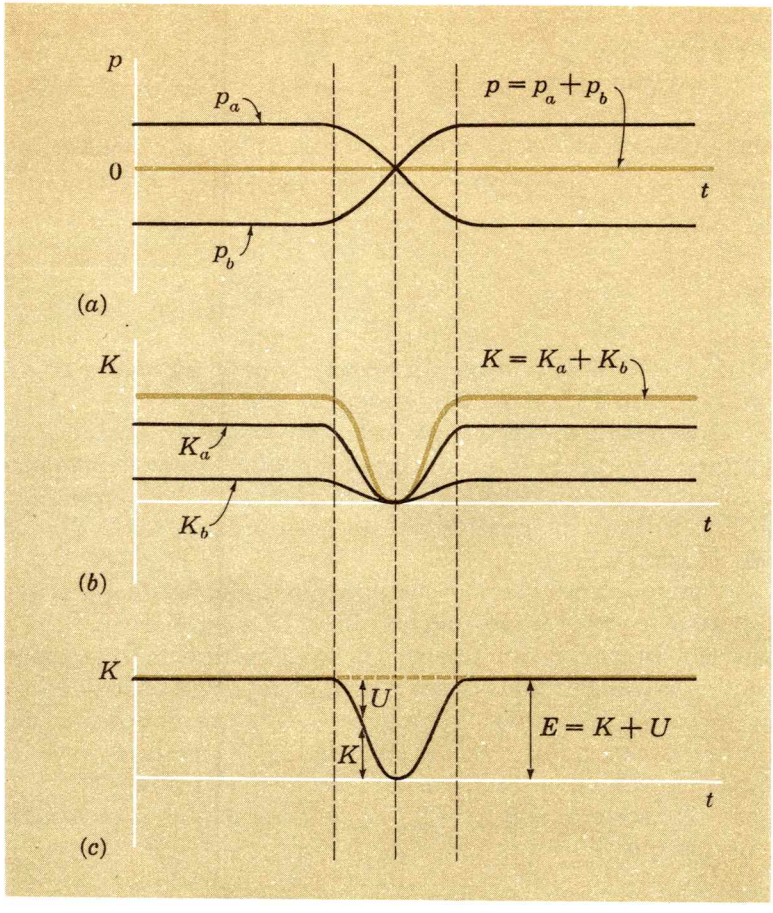


FIG. 10-2. Para la situación indicada en la Fig. 10-1, (*a*) los ímpetus de los objetos separados y el ímpetu total $p = p_a + p_b$ del sistema graficados como una función del tiempo, y (*b*) las energías cinéticas de los objetos separados y la energía cinética total $K = K_a + K_b$ del sistema graficados en función del tiempo. (*c*) La energía potencial del sistema U que así se define como $E = K + U$ es una constante.

éste. Pero sabemos a partir de los argumentos anteriores que se recupera *toda* la energía cinética que transitoriamente se "pierde" mientras los objetos interactúan. La energía cinética que se adeuda debe pagarse. Si este crédito de energía cinética con toda seguridad debe recuperarse, la cantidad de energía cinética total que cae de su valor inicial (o final), puede tomarse como una energía cinética potencial, o *energía potencial* para acortar. Así, podemos definir la energía potencial para el sistema de dos objetos y un resorte, como que es la cantidad U que cuando se suma a $K = K_a + K_b$ hace que el total sea constante. Si designamos a la *energía total* del sistema con E, podemos escribir para un sistema aislado (Fig. 10-2*c*):

$$E = K + U = \text{ constante} \qquad (10\text{-}1a)$$

Si K_1 y U_1 son las energías cinética y potencial del sistema en un tiempo y K_2 y U_2 sus respectivos valores en cierto tiempo posterior, la constancia de E implica que

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \qquad (10\text{-}1b)$$

Poniéndolo en otra forma, podemos definir la energía potencial del sistema diciendo que, para cualquier cambio ΔK en la energía cinética del sistema hay un cambio correspondiente ΔU en la energía potencial, de tal manera que

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

o

$$\Delta U = -\Delta K \qquad (10\text{-}1c)$$

Así, cuando K disminuye (aumenta), U debe aumentar (disminuir) en la misma cantidad, para asegurar que $\Delta E = 0$.

En resumen, las propiedades de la fuerza ejercida por un resorte son tales, que puede *desarrollar energía potencial de manera que la energía total del sistema se conserve.* Las Ecs. (10-1*a* a *c*) son expresiones alternativas de la *ley de la conservación de la energía.*

Habiendo establecido que podemos asociar energía potencial a un resorte deformado, encontremos la expresión que nos dé la energía potencial del resorte U_r en términos de la constante de rigidez k y el desplazamiento x de uno de los extremos con respecto a su posición cuando está relajado. Al ser comprimido desde su forma de equilibrio en la cantidad x, el resorte hace trabajo negativo. Como se indicó en la Sec. 9-4, el trabajo $W_{0 \to -x}$ hecho *por* el resorte es $-\frac{1}{2}kx^2 = W_{0 \to -x}$. Se sigue del teorema trabajo-energía que

$$W_{i \to f} = \Delta K$$

y por la Ec. (10-1*c*)

$$\Delta U = -\Delta K = -(-\tfrac{1}{2}kx^2) = \tfrac{1}{2}kx^2$$

Tomamos que la energía potencial del resorte es cero cuando está relajado ($x = 0$ y también $F_r = 0$). Por lo que

$$U_r = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (10\text{-}2)$$

La energía potencial de un resorte estirado o comprimido varía con el cuadrado de x.

Ejemplo 10-1

Un objeto de 1.0 kg, se mueve a lo largo de una superficie horizontal lisa a 1.0 m/s, y choca con un resorte en el que $k = 25$ N/m, cuyo extremo de la derecha está firmemente unido a un segundo objeto de gran masa. (Vea la Fig. 10-3.) ¿Cuál es la compresión máxima del resorte?

El resorte presenta su máxima compresión cuando el objeto que primero estaba en movimiento queda por un momento en reposo.

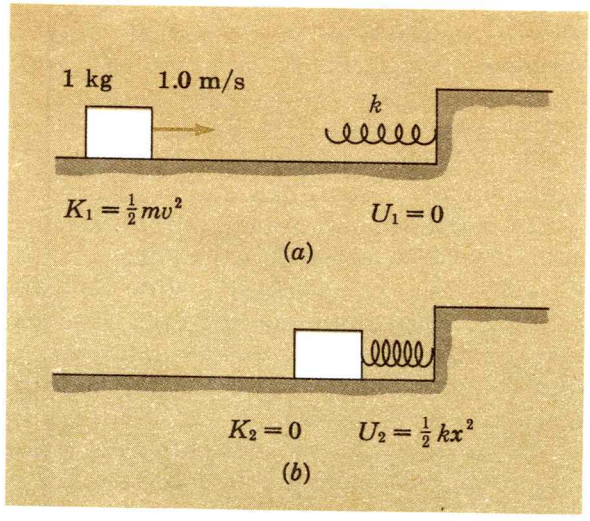


FIG. 10-3

Haciendo que 1 represente al estado de los eventos antes del choque y 2 al estado cuando la compresión del resorte es máxima y el objeto está en reposo, tenemos, usando la Ec. (10-1*b*),

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$
$$\tfrac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

(Podemos ignorar la energía cinética del objeto de gran masa, debido a que en esencia permanece en reposo durante todo el fenómeno.)

$$x = \left(\frac{m}{k}\right)^{1/2} v = \left(\frac{1.0 \text{ kg}}{25 \text{ N/m}}\right)^{1/2} (1.0 \text{ m/s}) \quad = 0.20 \text{ m}$$

Desde luego, cuando el objeto está en reposo, la fuerza del resorte sigue actuando hacia la izquierda, y el objeto de 1.0 kg se acelera hacia la izquierda. En el lenguaje de la energía, después de alcanzar su máxima compresión, el resorte pierde energía potencial, con lo que el objeto ligero que se encuentra en su extremo gana una cantidad igual de energía cinética. Así, el objeto de 1.0 kg se separa del resorte moviéndose hacia la izquierda a 1.0 m/s, que es la misma velocidad, y corresponde a la misma energía cinética, que tenía cuando se inició el choque.

10—2 ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL

En la sección anterior vimos que es posible asociar a la energía potencial con un sistema de dos objetos que interactúen a través de un resorte. Ahora nuestro sistema está formado por la Tierra y una esfera lanzada en sentido vertical hacia arriba en el aire, y nuestro

objetivo es ver si se puede asociar a este sistema una energía potencial gravitacional, y si es así, qué forma debe tener. (Suponemos que la esfera cubre una distancia pequeña comparada con el radio de la Tierra, de tal manera que la fuerza mg que actúa sobre ella, que por la tercera ley de Newton es también la magnitud de la fuerza que se ejerce sobre la Tierra, es constante.)

De nuevo tenemos, en efecto, un choque, pero ahora es uno en el que los dos objetos interactúan de manera continua entre sí, y la velocidad de cada uno de ellos varía de modo continuo. Nuestras consideraciones serán, sin embargo, exactamente paralelas a las que se hicieron para el resorte. Mientras que el resorte produce una fuerza repulsiva entre los objetos que interactúan, ahora tenemos una interacción por medio de una fuerza atractiva.

Suponemos que el movimiento de la Tierra (que en realidad es muy pequeño) y el de la esfera lanzada que se aleja de ella se ven desde un marco de referencia en el que el ímpetu total del sistema sea cero (el marco de referencia del centro de masa). Mientras la esfera se mueve hacia arriba, la Tierra retrocede hacia abajo. Ambas, la esfera y la Tierra quedan en reposo por un momento al mismo tiempo en nuestro marco de referencia, y como siguen atrayéndose entre sí, la esfera cae hacia abajo y la Tierra se mueve hacia arriba hasta que se encuentran de nuevo. Vea la Fig. 10-4. La coordenada y nos da el desplazamiento vertical de la esfera *con respecto a la superficie de la Tierra.*

La Fig. 10-5 muestra el ímpetu a lo largo del eje Y de cada objeto como una función del tiempo, junto con el ímpetu total del sistema. (Las líneas de la gráfica ímpetu-tiempo son rectas debido a que la fuerza gravitacional de ambas, la esfera y la Tierra, se considera como constante.) Aquí también se conserva el ímpetu, el ímpetu total del sistema es cero durante *todo* el tiempo, como lo indica la Fig. 10-5*a*. Y de nuevo la energía cinética no es constante. La energía cinética de la esfera primero decrece mientras sube y queda en reposo en su punto más alto, y luego aumenta mientras cae. La energía cinética de la Tierra, mucho

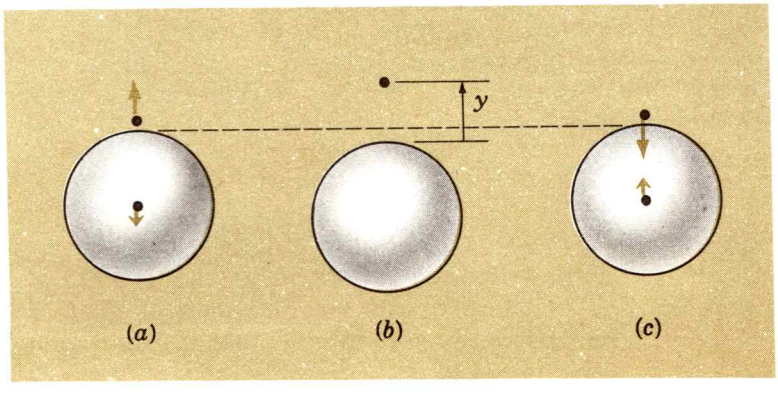


FIG. 10-4. Una esfera que interactúa con la tierra: (*a*) La esfera se lanza en sentido vertical hacia arriba y la tierra retrocede hacia abajo, (*b*) la esfera y la Tierra quedan momentáneamente en reposo cuando la distancia que las separa es un máximo y, y (*c*) la esfera regresa a encontrarse sobre la superficie de la Tierra.

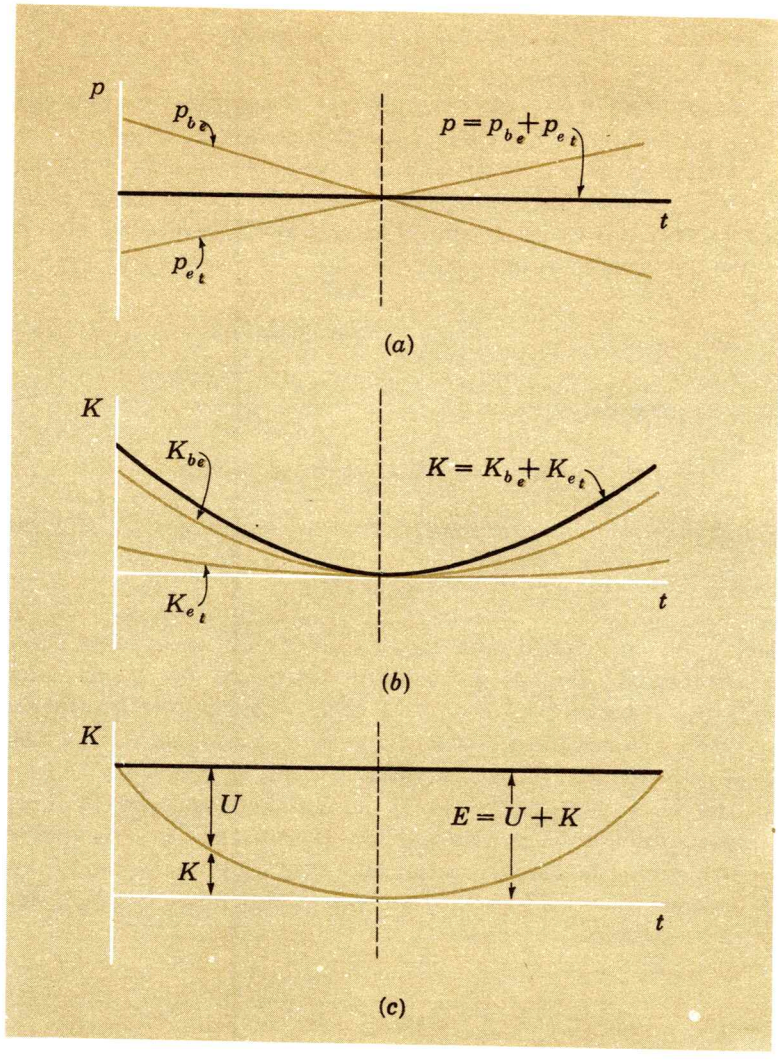


FIG. 10-5. Para la situación indicada en la Fig. 10-2, (*a*) los ímpetus de los objetos separados y el ímpetu total $p = p_e + p_t$ del sistema graficados como una función del tiempo, y (*b*) las energías cinéticas de los objetos separados y la energía cinética total $K = K_e + K_t$ del sistema graficados como una función del tiempo. (*c*) La energía potencial del sistema U se define de tal manera que $E = K + U$ sea constante.

más pequeña que la de la esfera debido a la relación de masas tan grande, también disminuye a cero y luego aumenta. Vemos en la Fig. 10-5*b*, que la energía cinética total de la esfera y la Tierra regresa a su valor inicial cuando la esfera choca con el piso, y el sistema tiene la misma configuración que al principio ($y = 0$). De nuevo esto sucede porque la fuerza mg que actúa sobre la esfera y la fuerza de la misma magnitud que actúa sobre la Tierra *no hacen trabajo neto sobre el viaje redondo completo*. Por lo tanto, no hay cambio neto en la energía cinética.

Aquí de nuevo podemos asignar una energía potencial al sistema, porque es seguro que la pérdida de energía cinética debe resarcirse. Como antes, la energía potencial gravitacional U_g se debe definir de tal manera que se garantice que

$$E = K + U_g = \text{constante}$$

donde $K = K_t + K_e$, es exactamente la suma de las energías cinéticas de la esfera y de la Tierra. Vea la Fig. 10-5*c*.

Mientras la esfera sube una distancia y hacia arriba de la Tierra, la fuerza hacia abajo mg que actúa sobre ella es opuesta al desplazamiento hacia arriba, y el trabajo hecho sobre ella por la fuerza gravitacional es $-mgy$.*

$$W_{i \to f} = -mgy = \Delta K$$

Pero se necesita que

$$\Delta U_g = -\Delta K = -(-mgy) = mgy$$

Si hacemos que el cero para U_g corresponda a $y = 0$, se tiene

$$U_g = mgy \qquad (10\text{-}3)$$

Debe ser enfatizado que la Ec. (10-3) da la energía potencial gravitacional sólo para cambios pequeños en la distancia de separación entre la Tierra y el objeto con el que interactúa. La relación general para la energía potencial aplicable para todas las distancias de separación, se desarrolla en la Sec. 13-5.

Es fácil demostrar que la energía cinética de la Tierra es despreciablemente pequeña si se le compara con la del objeto ligero, como la esfera. Tomando que la energía cinética de la Tierra sea $K_t = \frac{1}{2}MV^2$ y la del objeto pequeño $K_e = \frac{1}{2}mv^2$, tenemos para su relación:

$$\frac{K_e}{K_b} = \frac{\frac{1}{2}MV^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{m}{M}\left(\frac{MV}{mv}\right)^2$$

por la conservación del ímpetu, las magnitudes de los ímpetus del objeto ligero y la Tierra deben ser iguales siempre: $MV = mv$. Por lo que

$$\frac{K_e}{K_b} = \frac{m}{M}$$

Para $m = 1$ kg, y con $M \approx 10^{25}$ kg, $K_t/K_e \approx 10^{-25}$, lo que, en realidad, puede despreciarse.

---

*En sentido estricto, mientras la esfera sube h_1 en el marco de referencia del centro de masa, el trabajo realizado sobre ella es $-mgh_1$. Y al retroceder la Tierra una distancia h_2, de nuevo en el marco del centro de masa, la fuerza igual que actúa sobre ella realiza un trabajo de $-mgh_2$. Entonces el trabajo realizado es

$$-mgh_1 - mgh_2 = -mgy$$

donde $y = h_1 + h_2$.

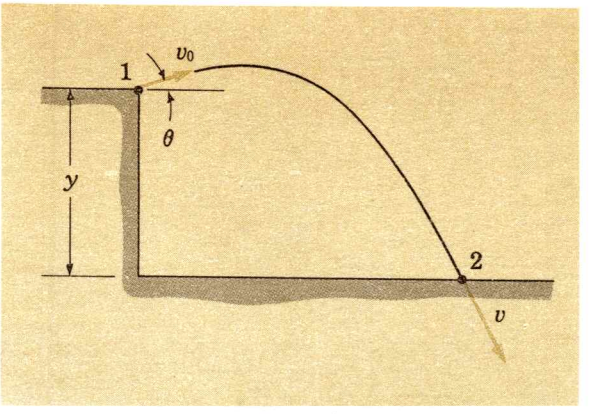


FIG. 10-6. Un objeto lanzado con la rapidez v_0 en el punto 1 tiene la rapidez v en el punto 2, a la distancia vertical y abajo del punto 1.

Ejemplo 10-2

Un objeto de masa m se arroja con la rapidez inicial v_0 en un ángulo θ con respecto al plano horizontal, y desde una elevación y sobre la superficie de la Tierra. ¿Con qué rapidez v chocará el objeto con ésta?

Este es igual al Ej. 9-4 que se estudió antes aplicando el teorema trabajo-energía. Ahora aplicaremos un principio equivalente, el de la conservación de la energía. Tomando a 1 y 2 para designar los estados inicial y final, como se indica en la Fig. 10-6. Por la conservación de la energía,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 + mgy = \tfrac{1}{2}mv^2 + 0$$

o

$$v = (v_0^2 + 2gy)^{1/2}$$

Nótese que de nuevo la rapidez final es independiente de la masa del objeto y del ángulo de lanzamiento θ. La gran utilidad del principio de la conservación de la energía, estriba en que no tenemos que interesarnos en detalle con lo que sucede en todos los estados intermedios, sino que por el contrario, sólo se tienen en cuenta los puntos terminales. Sin embargo, la conservación de la energía no nos da toda la información disponible con relación al sistema. Por ejemplo, en este caso no podemos determinar el tiempo de vuelo ni la dirección de la velocidad final a partir sólo de la conservación de la energía.

Ejemplo 10-3

Supóngase que el objeto del ejemplo anterior en lugar de haber sido lanzado con la rapidez v_0 para que vuele en el aire y choque con el piso a una distancia vertical y hacia abajo, ahora se desliza con la velocidad inicial v_0 sobre una superficie lisa, como en la Fig. 10-7. Queremos encontrar su rapidez v en puntos que se encuentren a la distancia vertical y bajo el punto de partida.

La única diferencia significativa con respecto al ejemplo anterior es, además del peso del objeto, que ahora tenemos una

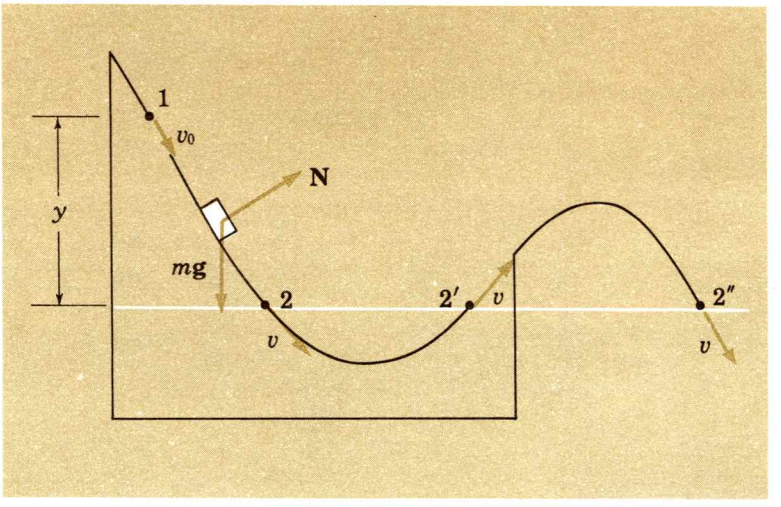


FIG. 10-7. Un objeto que se desliza sobre una superficie lisa tiene la rapidez v_0 en el punto 1. Su rapidez en los puntos 2, 2' y 2", todos a la distancia vertical y abajo del punto 1, es v.

fuerza normal N que obliga al objeto a seguir sobre la superficie. Pero la fuerza normal siempre se encuentra en ángulo recto con el desplazamiento del objeto a lo largo de su superficie. No ejecuta trabajo y por ello no se puede asociar a ella ninguna energía potencial. Por lo que se aplica aquí exactamente el mismo análisis, y encontramos otra vez que $v = (v_0^2 + 2gy)^{1/2}$ en los puntos 2, 2', y 2" en la Fig. 10-7.

Ejemplo 10-4

Un objeto pequeño se une al extremo de una cuerda tirante de masa despreciable como se indica en la Fig. 10-8. Su rapidez inicial es v_0, y se mueve hacia abajo a lo largo de un círculo vertical hasta que su desplazamiento vertical hacia abajo sea de y. ¿Cuál es la rapidez del objeto en el punto inferior?

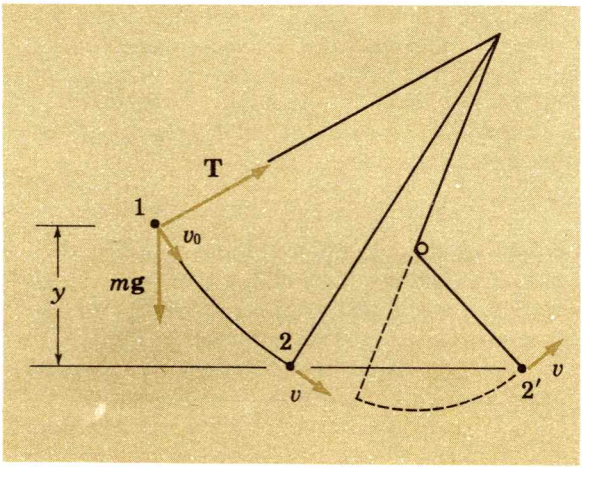


FIG. 10-8. Una partícula unida a una cuerda tirante tiene la rapidez v_0 en el punto 1. Su rapidez en los puntos 2 y 2', ambos a la distancia vertical y bajo el punto 1, es v.

De nuevo tenemos el mismo problema que en los dos ejemplos anteriores. La tensión de la cuerda T siempre forma un ángulo recto con el desplazamiento de la partícula a lo largo del arco circular, de tal manera que no ejecuta trabajo y no se le puede asociar ninguna energía potencial a esta fuerza que restringe el movimiento de la partícula. Y de nuevo la fuerza de la gravedad (peso) es la responsable de la energía potencial gravitacional. La rapidez es, de nuevo $v = (v_0^2 + 2gy)^{1/2}$.

Nótese en la figura que, después de moverse hacia abajo, la cuerda se detiene con un poste, de tal manera que se acorta el segmento de cuerda sobre el que ahora gira el cuerpo. La fuerza de este poste no trabaja en el sistema — no actúa sobre el desplazamiento — y entonces no tiene influencia sobre la energía total del sistema. En consecuencia, la partícula que se encuentra en el extremo de la cuerda, de nuevo tiene la misma rapidez y energía cinética para todos los puntos a lo largo de la línea horizontal.

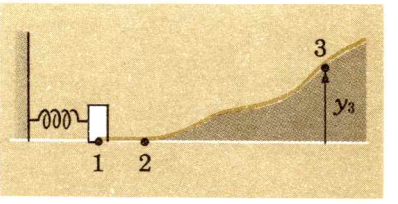


FIG. 10-9. El bloque se comprime contra un resorte en el punto 1. Se desliza, pasa por el punto 2 en el nivel horizontal, y por último queda en reposo en el punto 3, donde el desplazamiento vertical es y_3.

Ejemplo 10-5

Un bloque de 1.0 kg se comprime contra un resorte ligero sin unirse a él; éste último tiene una constante de rigidez de 1.0×10^3 N/m. Cuando el resorte se ha comprimido 7.0 cm se suelta el bloque. El bloque se desliza a lo largo de una superficie sin fricción y hacia arriba de una superficie inclinada, como se ve en la Fig. 10-9. ¿Cuál es la altura máxima y que alcanza el bloque?

Después de que el resorte se ha comprimido y liberado, el contenido total de energía del sistema permanece constante. Primero, la energía potencial del resorte $\frac{1}{2}kx_1^2$ se transforma en la energía cinética $\frac{1}{2}mv_2^2$ del bloque que se desliza; después la energía cinética del bloque se convierte en energía potencial gravitacional mgy_3 cuando el bloque queda en reposo en el punto más alto:

$$\tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 = mgy_3$$

$$y_3 = \frac{kx_1^2}{2mg} = \frac{(1.0 \times 10^3 \text{ N/m})(7.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{2(1.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)} = 0.25 \text{ m}$$

Este ejemplo ilustra la utilidad del concepto de energía potencial y del principio de conservación que se deduce de él. Nada más igualamos la energía total del sistema en los puntos extremos sin tener en cuenta los detalles del movimiento, como la forma de la superficie inclinada o la velocidad en los puntos intermedios. Podríamos, desde luego, haber llegado al mismo resultado final aplicando la segunda ley de Newton en forma directa. Sin embargo, esto podría ser matemáticamente difícil y muy tedioso, porque para ello se necesitaría seguir el procedimiento siguiente. Partiendo de la fuerza inicial que actúa sobre el bloque (y esta fuerza *varía* con la posición), calculamos la aceleración inicial instantánea; de esta aceleración calculamos la velocidad instantánea en un tiempo posterior dt; de esta velocidad instantánea calculamos entonces el desplazamiento correspondiente; conociendo el nuevo desplazamiento, encontramos la nueva fuerza instantánea.

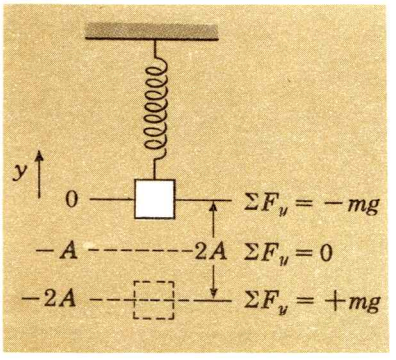


FIG. 10-10. Un bloque oscilante a la fuerza del resorte y a la fuerza gravitacional. El resorte no está estirado en $y = 0$; tiene su extensión máxima en $y = -2A$.

El ciclo se repite una y otra vez hasta que al final lleguemos a la posición a la cual la velocidad es cero. Desde luego, el procedimiento requiere un conocimiento detallado de la forma de la superficie inclinada.

Ejemplo 10-6

Se fija al techo un resorte que tiene la constante de rigidez k. Al extremo inferior del resorte se le une un bloque que tiene la masa m, mientras el resorte no esté estirado, entonces se suelta el bloque desde ese punto. Vea la Fig. 10-10. ¿Cuál es la distancia, digamos $2A$, abajo del punto desde donde se suelta, en el que el bloque queda por un momento en reposo?

Mientras el bloque desciende, la energía potencial gravitacional decrece, y la energía potencial del resorte aumenta. Hacemos que el desplazamiento vertical y (positivo hacia arriba) del bloque se mida con respecto a su posición inicial, entonces, también representa la elongación del resorte. La energía total al principio es cero, y debe mantenerse como cero de ahí en adelante en cada instante. En símbolos,

$$E = K + U_g + U_s$$

$$0 = K + mgy + \tfrac{1}{2}ky^2$$

En el punto más bajo, $y = -2A$ y $K = 0$. Por lo que

$$0 = 0 + mg(-2A) + \tfrac{1}{2}k(-2A)^2$$

o

$$A = \frac{mg}{k} \quad \text{and} \quad 2A = \frac{2\,mg}{k}$$

Dejamos que el lector demuestre que para $y = -A$ la fuerza resultante sobre el bloque es cero, y que para $y = -2A$ la fuerza resultante sobre el bloque tiene la magnitud mg y en sentido *hacia arriba,* como se ve en la Fig. 10-10. Una vez que se suelta desde el reposo en $y = 0$, el bloque oscila entre $y = 0$ y $y = -2A$, con la posición de equilibrio en $y = -A$.

10—3 DEFINICION GENERAL DE LA ENERGIA POTENCIAL

Acabamos de llegar a las relaciones para la energía potencial asociada con partículas que interactúan por la gravedad y por medio de un resorte. En ambos casos la energía potencial fue definida para que la energía total del sistema permanezca constante. Ahora queremos encontrar una relación general para la energía potencial en términos de la fuerza que actúa entre el par de partículas.

Consideremos un sistema formado por dos partículas, a y b, que interactúan entre sí por medio de una fuerza cuya magnitud y

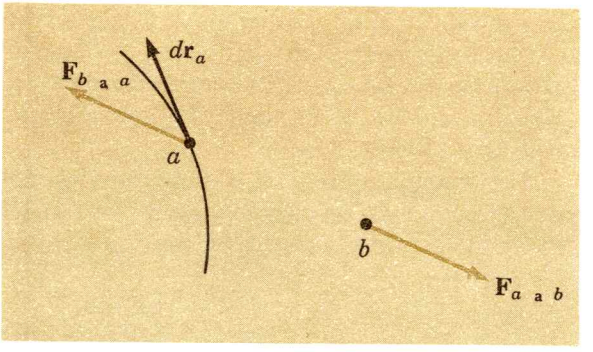


FIG. 10-11

dirección depende sólo de la posición relativa de los dos objetos y de sus propiedades intrínsecas. Para simplificar la discusión consideraremos que, mientras la partícula a tiene masa finita y adquiere un desplazamiento cuando actúa sobre ella la partícula b, la masa de la partícula b es infinita, de tal manera que su velocidad (y su energía cinética K_b) sigue siendo cero cuando interactúa con a. Vea la Fig. 10-11.

La fuerza de interacción que actúa sobre el objeto a —designada por $\mathbf{F}_{b\ a\ a}$— hace que a reciba un desplazamiento $d\mathbf{r}_a$ y con ello ejecuta un trabajo a lo largo del mismo, cambiando su energía cinética en ΔK_a, donde

$$\Delta K_a = \mathbf{F}_{b\ a\ a} \cdot d\mathbf{r}_a$$

Entonces, el cambio de la energía cinética del sistema formado por las dos partículas es

$$\begin{aligned} \Delta K &= \Delta K_a + \Delta K_b \\ &= \Delta K_a \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\Delta K_b = 0$ debido a que se supone que la masa de b es infinita.

Si la energía total del sistema va a permanecer constante se tiene

$$\Delta U = -\Delta K = -\Delta K_a = -\mathbf{F}_{b\ a\ a} \cdot d\mathbf{r}_a$$

donde ΔU es el cambio de la energía potencial del sistema. Al ir de cierto estado inicial i a un estado final f, el cambio de energía potencial es

$$U_f - U_i = -\int_i^f \mathbf{F}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{r} \qquad (10\text{-}4)$$

donde hemos reemplazado $d\mathbf{r}_a$ por $d\mathbf{r}$ y hemos hecho que $\mathbf{F}_{\text{int}}$ represente a $\mathbf{F}_{b\ a\ a}$, una fuerza que es *interna* al sistema.

En palabras, el cambio en la energía potencial en un sistema, es el *negativo* del trabajo hecho por las fuerzas de interacción entre las dos partículas desde la configuración inicial a la final, y dicho trabajo se calcula tomando el desplazamiento de una partícula con respecto a la otra.

Una energía potencial se puede definir sólo si el trabajo hecho por la fuerza interna es cero cuando las partículas se regresan a sus posiciones relativas originales. Simbolizamos esto escribiendo

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (10\text{-}5)$$

donde se agrega el círculo al signo de integración para enfatizar que el trabajo se calcula sobre *cualquier camino cerrado*. Una fuerza que satisface estas condiciones es, como la fuerza del resorte o la fuerza de la gravedad, una para la cual se puede definir una energía potencial y se le puede aplicar la ley de la conservación de la energía. Se designan con el nombre de *fuerzas conservativas*.

10—4 PROPIEDADES DE LA ENERGIA POTENCIAL

1. *La energía potencial es una propiedad de un sistema de cuerpos interactuantes como un todo.* No podemos hablar de la energía potencial de un solo objeto. Cuando, por ejemplo, una esfera ligera cae hacia la Tierra, quizá sea natural al hablar el decir que la "esfera" piede energía potencial, siendo que la esfera más que la Tierra, es la que gana la mayor parte de la energía cinética; sin embargo, es el *sistema* Tierra-esfera el que gana energía cinética cuando los dos objetos se acercan uno a otro, y es el *sistema* el que pierde energía potencial.

2. Como siempre nos interesamos sólo en la diferencia de energía potencial, *la elección del cero de la energía potencial es arbitraria.* Si la fuerza asociada con la energía potencial es constante, como en el caso de la fuerza gravitacional sobre un objeto cercano a la Tierra, podemos elegir cualquier nivel horizontal conveniente (por lo general el más bajo, o nivel del *piso*) como el cero para la energía potencial gravitacional. Si, por otro lado, la fuerza varía con el desplazamiento, como en el caso del resorte, se acostumbra elegir el cero para la energía potencial en el desplazamiento para el cual la fuerza es cero (así, ambos $U_r = \frac{1}{2}kx^2$ y $F_r = -kx$ son cero para $x = 0$). También hay, de hecho, una elección que no es arbitraria del cero de la energía cinética: Un cuerpo siempre tiene energía cinética cero con respecto al marco de referencia en el cual está en reposo.

   Ambas, las energías cinética y potencial son cantidades escalares, pero, a diferencia de la energía cinética, que debe ser siempre positiva, la energía potencial puede ser positiva o negativa.

3. Mientras que la energía cinética es energía de movimiento, *la energía potencial es energía de posición* o, con más propiedad, *energía de la separación relativa de las partículas interactuantes.* Un resorte tiene energía potencial cuando se deforma por haber sido estirado o comprimido, y conserva su energía potencial mientras permanezca

deformado. Si afianzamos con una prensa un resorte comprimido, la energía potencial del resorte se encierra en él. Sin importar el tiempo que pase, el resorte en potencia es capaz de ejecutar trabajo, y si después se suelta de la prensa, la energía almacenada se libera.

Cuando un resorte se deforma, los átomos que contiene deben cambiar las distancias que los separan. De hecho, cualquier energía potencial se relaciona con la separación relativa de las partículas.

4. *Sólo se puede definir una energía potencial para una fuerza conservativa.* La condición de que la integral de línea de la fuerza de interacción alrededor de un camino cerrado sea cero para una fuerza conservativa,

Fuerza conservativa: $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

implica que por cada elemento de trabajo positivo hecho por la fuerza de interacción, debe haber un trabajo negativo correspondiente en alguna parte del viaje de retorno. Por ejemplo, la fuerza gravitacional es conservativa, porque cuando un objeto se desplaza en sentido vertical hacia arriba, la fuerza de la gravedad hace un trabajo negativo; pero cuando el mismo objeto se desplaza hacia abajo la misma distancia, la fuerza hace un trabajo positivo del mismo valor. En un desplazamiento horizontal, para el cual la fuerza de la gravedad está en ángulo recto con el desplazamiento, no interviene trabajo hecho por la fuerza de la gravedad.

Las fuerzas conservativas, de las cuales son ejemplos la fuerza gravitacional y la fuerza de un resorte, dependen sólo de las distancias de separación entre las partículas interactuantes, pero no de sus velocidades ni del tiempo.

Para una *fuerza no conservativa* el trabajo hecho al recorrer un camino cerrado no es cero, y a dicha fuerza no se le puede asociar una energía potencial:

Fuerza no conservativa: $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ (10-6)

Supóngase que un hombre empuja un objeto sobre un camino cerrado y sobre una superficie horizontal rugosa. La fuerza de fricción siempre es opuesta en sentido al desplazamiento, y por ello la fuerza de fricción siempre ejecuta un trabajo *negativo*. (Vea la Fig. 10-12.) Para una de estas *fuerzas disipativas de energía,* como la fricción,

$$\oint \mathbf{F}_d \cdot d\mathbf{r} < 0$$

Ahora consideremos el trabajo manual en la situación anterior. La fuerza manual se ejerce a lo largo del desplazamiento, para balancear la fuerza de fricción, y por ello esa fuerza siempre hace trabajo *positivo*. Alrededor de un camino cerrado, una fuerza como esta *fuerza generativa de energía* produce trabajo neto, y

$$\oint \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{r} > 0$$

Considerando ahora a las dos fuerzas, la de fricción y la manual vemos que el objeto regresa a su punto de partida sin cambio neto en energía cinética porque el trabajo negativo hecho por la fuerza de

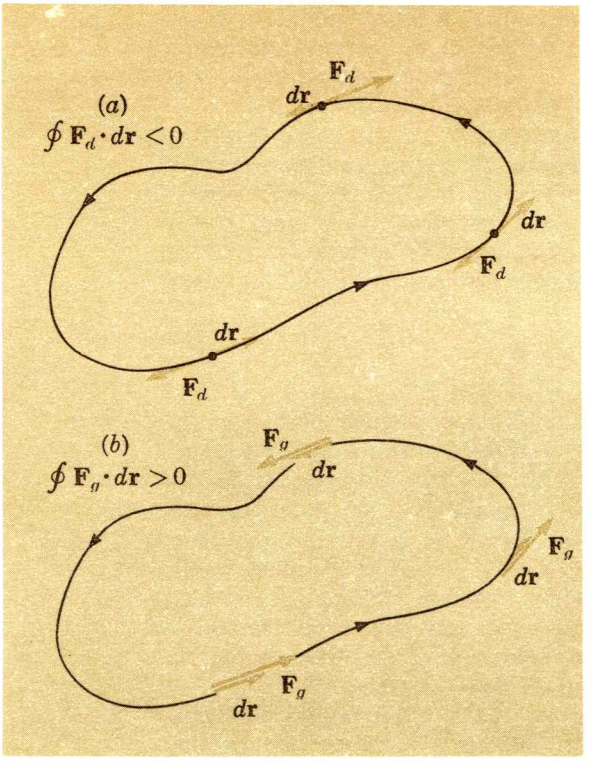


FIG. 10-12. Fuerzas no conservativas: (*a*) Una fuerza disipativa de energía F_d es opuesta al desplazamiento y $\int F_d \cdot dr < 0$ alrededor de una curva cerrada; (*b*) una fuerza generativa de energía, F_g se encuentra a lo largo del desplazamiento, y $\int F_g \cdot dr > 0$ alrededor de una curva cerrada.

fricción (disipativa de energía), se balancea exactamente con el trabajo positivo hecho por la fuerza manual (generativa de energía).

5. *La energética de un movimiento se puede representar de una manera muy útil por una gráfica de la energía potencial como una función del desplazamiento.* Considérese la gráfica de la energía potencial gravitacional U_g versus el desplazamiento y, correspondiente a un objeto que cae libremente bajo la influencia de la gravedad (o se desliza sobre una superficie lisa, u oscila bajo la acción de un resorte tirante). Debido a que $U_g = mgy$ y a que la energía potencial es proporcional a la altura y, la gráfica de U_g versus y no es sino una línea recta de pendiente positiva mg, como se indica en la Fig. 10-13. Si dibujamos una línea horizontal para representar la energía total del sistema $E = K + U_g$, el segmento vertical entre el eje y la curva representa la energía potencial, y el segmento vertical entre la curva y la línea de E constante, representa la energía cinética.

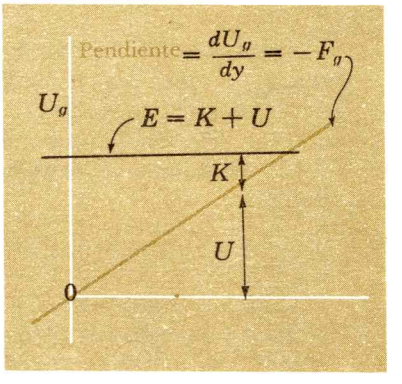


FIG. 10-13. Gráfica de la energía potencial gravitacional U_g versus el desplazamiento vertical y para una fuerza gravitacional constante F_g. La fuerza es la pendiente negativa de la curva de energía potencial-desplazamiento: $F_g = -dU_g/dy$.

La pendiente de una curva de energía potencial vs. desplazamiento tiene una importancia interesante. Para el potencial gravitacional, la pendiente dU_g/dy es

$$\frac{d}{dy} U_g = \frac{d}{dy} mgy = mg$$

Pero $$F_g = -mg$$

Por lo que, $$F_g = -\frac{dU_g}{dy}$$

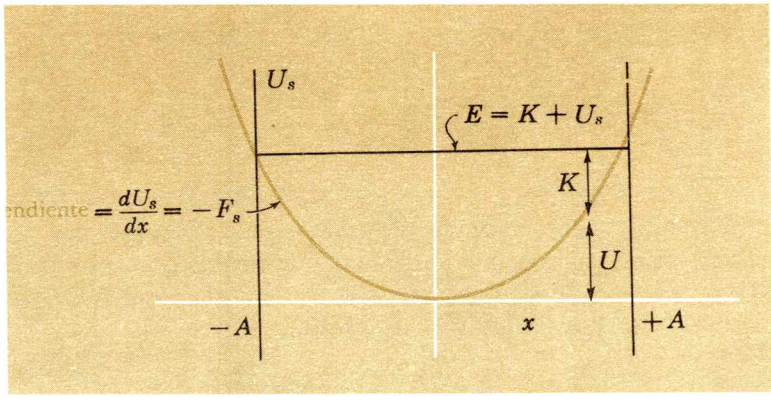


FIG. 10-14. Gráfica de la energía potencial de un resorte U_s versus su desplazamiento x. La curva es una parábola. El movimiento del objeto está restringido a los desplazamientos entre $x = \pm A$, para los cuales la energía cinética $K = E - U_s$ es positiva.

La fuerza es la derivada negativa de la energía potencial con respecto al desplazamiento. Por lo tanto, la fuerza es una medida de la inclinación, o *grado* de la pendiente. Por esta razón, se dice que una fuerza conservativa es el *gradiente* negativo de la energía potencial.

Con respecto a la fuerza del resorte se puede escribir una relación similar:

$$\frac{d}{dx} U_s = \frac{d}{dx} \tfrac{1}{2}kx^2 = kx$$

Pero $$F_s = -kx$$

Por lo que, $$F_s = -\frac{dU_s}{dx}$$

De nuevo el negativo de la pendiente de la energía potencial vs. desplazamiento da la fuerza. La curva de energía potencial para un resorte es una parábola, como se indica en la Fig. 10-14. El movimiento está *restringido,* la partícula oscilante está confinada por el "pozo de potencial" a la región comprendida entre $x = -A$ y $x = +A$. Fuera de esta región la energía cinética sería negativa — e imposible. Cuando el cuerpo se desplaza desde su posición de equilibrio en $x = 0$, actúa una fuerza de restitución que tiende a hacer regresar a la posición inferior en el valle de energía potencial. Esto contrasta con el movimiento *no ligado* del cuerpo que cae en la Fig. 10-13, donde la energía cinética es positiva para *todos* los puntos que se encuentren abajo de aquél para el cual el cuerpo tiene energía cinética cero.

Las fuerzas gravitacional y del resorte son dos ejemplos especiales de una relación general en que se dan las componentes de una fuerza conservativa en términos de la energía potencial correspondiente. Si se tiene una energía potencial $U(x, y, z)$ que depende de las coordenadas x, y y z, las componentes de la fuerza F_x, F_y y F_z están dadas por*

*Esto se deduce de la definición de la energía potencial en la Ec. (10-4):

$$\Delta U = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

En el cálculo de la derivada parcial $\partial U/\partial x$, tomamos a y y a z como constantes.

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{10-7}$$

10—5 LA LEY DE LA CONSERVACION DE LA ENERGIA

Sistemas con Fuerzas Conservativas. Cuando un sistema aislado está formado por partículas que interactúan por medio de fuerzas estrictamente conservativas, la energía total E del sistema es constante. Por definición, de hecho,

$$E = K + U = \text{constante}$$

donde K es la suma de las energías cinéticas de las partículas a, b, c, ... del sistema.

$$K = K_a + K_b + K_c + \cdots$$

y U es la suma de las energías potenciales entre cada par de partículas interactuantes,**

$$U = U_{ab} + U_{bc} + U_{ac} + \cdots \tag{10-8}$$

Las partículas del sistema pueden perder energía cinética; si esto sucede, la energía potencial debe aumentar para mantener la energía total constante. La energía *inicial* E_i de un sistema conservativo es exactamente igual a la energía *final* E_f en cualquier tiempo posterior:
Sistema conservativo:

$$E_i = E_f \tag{10-9}$$

Si el sistema ya no se encuentra aislado de sus vecindades y un agente externo hace el trabajo $W_{i \to f}$ sobre el sistema, se tiene

$$W_{i \to f} = E_f - E_i$$

donde el contenido de la energía del sistema ha aumentado en $W_{i \to f}$. En forma recíproca, si el sistema hace trabajo sobre un agente externo, el contenido de energía del sistema decrece.

Supóngase, por ejemplo, que un hombre eleva un bloque que pesa mg en sentido vertical desde y_1 hasta y_2. El hombre se

---

**La aditividad de los términos de energía potencial para pares de partículas se sigue del principio de superposición para las fuerzas (Sec. 7-3): Si $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{ab} + \mathbf{F}_{bc} + \mathbf{F}_{ac} + \cdots$, se tiene

$$-\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int \mathbf{F}_{ab} \cdot d\mathbf{r} - \int \mathbf{F}_{bc} \cdot d\mathbf{r} - \int \mathbf{F}_{ac} \cdot d\mathbf{r} - \cdots$$

y

$$U = U_{ab} + U_{bc} + U_{ac} + \cdots$$

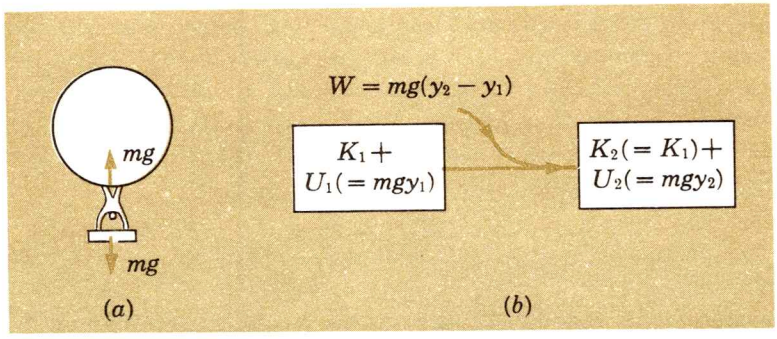


FIG. 10-15. (a) Un agente externo aumenta la distancia de separación entre un bloque y la Tierra por la aplicación de una fuerza con la magnitud mg sobre ambos. (*b*) El cambio de energía potencial del sistema Tierra-bloque es igual al trabajo $W = mg(y_2 - y_1)$ realizado por el agente externo al separar los objetos con velocidad constante.

interpone entre la Tierra y el bloque, empujando a ambos para aumentar su separación, como se indica en la Fig. 10-15. El, como un agente externo, hace trabajo sobre el sistema, con lo cual aumenta su contenido total de energía.

Imagínese que el hombre eleva el bloque con velocidad constante. Como la fuerza resultante en él debe ser cero, el hombre debe aplicar una fuerza de magnitud mg sobre el bloque (y lo mismo sobre la Tierra). Ni la energía cinética del bloque ni la de la Tierra cambian. Por lo que, la energía potencial del sistema Tierra-bloque entonces ha aumentado en $mg(y_2 - y_1)$. Pero $mg(y_2 - y_1)$ es el trabajo hecho por el hombre. Aquí, y en general, el trabajo hecho por un agente externo al cambiar la distancia de separación entre los objetos interactuantes *a velocidad constante,* es igual al cambio de la energía potencial del sistema. Esta idea se indica en forma esquemática en la Fig. 10-15. Como otro ejemplo, un hombre jalando los dos extremos de un resorte para estirarlo en x, hace el trabajo $\frac{1}{2}kx^2$; la energía potencial del resorte aumenta en $\frac{1}{2}kx^2$.

Sistemas con fuerzas no conservativas. Es imposible construir un sistema de objetos en gran escala en el que estén ausentes *todas* las fuerzas de fricción y otras fuerzas no conservativas. La máquina del movimiento continuo es imposible. Consideremos un sistema aislado que tenga fuerzas internas no conservativas. Cuando las partículas de un sistema como éste pierden energía cinética, la energía potencial del sistema *no* aumenta en la misma cantidad. En consecuencia, la energía total inicial de un sistema aislado con fuerzas no conservativas siempre *excede* a la energía final. La energía total *decrece* con el tiempo en un sistema no conservativo:

Sistema no conservativo: $$E_i > E_f \qquad (10\text{-}10)$$

La energía *no* se conserva, si por "energía" se quiere decir la energía cinética de objetos en *gran escala,* la que podemos ver y la

energía potencial que podemos identificar con un cambio *perceptible* en su separación relativa. Así, si la energía *debe* conservarse en un sistema con fuerzas no conservativas, se debe considerar, una nueva forma, o quizás varias nuevas formas de energía no mencionadas, de tal manera que la desigualdad anterior se pueda reemplazar por una ecuación como

$$E_i = E_f + E_{\text{no-}m} \tag{10-11}$$

donde $E_{\text{no-}m}$ representa la suma de todas las formas que puedan llamarse energía *no mecánica* —esto es, formas de energía diferentes a las energías cinética y potencial de los cuerpos en gran escala.

Uno de los descubrimientos más grandes de la física clásica fue que la Ec. (10-11) corresponde con el experimento. Como veremos en capítulos posteriores, los físicos encontraron que las formas no mecánicas de la energía se presentan de tal manera que se pueden medir en forma satisfactoria, y sus magnitudes son tales que hacen que el *contenido total de energía* de un sistema aislado sea constante. Cuando la fuerza no conservativa es la fricción, $E_{\text{no-}m}$ es calor (o su mayor parte), o sea energía térmica. Pero se han encontrado otras formas de la energía: la energía asociada con la radiación electromagnética (como por ejemplo la luz y las ondas de radio), la energía química (que en forma adecuada se llama *energía atómica*), la energía nuclear (que a veces e impropiamente se llama energía *atómica*) y todavía otras más.

Los experimentos en todas las ramas de la física son consistentes con la *ley general de la conservación de la energía, que indica que el contenido total de energía de un sistema aislado es constante.* Un sistema "aislado" ahora significa un grupo de objetos sobre el cual no se hace trabajo (ni de él hacia afuera), ni fluye energía térmica ni energía radiante. La energía puede convertirse de una forma a otra, pero no se crea ni se destruye. Así, la conservación de la energía destaca, junto con las leyes de conservación de la masa y el ímpetu lineal, como uno de los principios fundamentales de la física. (En la teoría de la relatividad especial, las leyes separadas de la conservación de la masa y de la energía se combinan en una sola ley de conservación, la de la masa-energía, que así forma un conjunto con una gran simplicidad y generalidad.) La confianza que tienen los físicos en la universalidad de la conservación de la energía siempre ha sido confirmada por medio de experimentos.

El reconocimiento de que las diferentes formas de la energía pueden describirse diciendo que la energía puede presentarse como energía térmica, o como *radiación*, de la misma manera que como energía cinética y energía potencial, en realicad es un descubrimiento notable. Pero quizá es más notable la comprobación, que vino sobre todo en los últimos 50 años, de que las llamadas formas

de la energía no mecánicas no son, después de todo, sino energía cinética y energía potencial a una escala submicroscópica. Ahora se sabe que la energía térmica es, de hecho, energía cinética y potencial asociadas con el movimiento desordenado de los átomos y las moléculas; la energía de la radiación electromagnética es la energía cinética de partículas, como los fotones, que se mueven con la rapidez de la luz; la energía química se puede atribuir a la energía cinética de las partículas subatómicas y a la energía potencial eléctrica de sus interacciones; la energía nuclear es la energía cinética de los constituyentes nucleares y la energía potencial asociada con sus interacciones debidas a la fuerza nuclear. A escala macroscópica se pueden describir muchas formas de la energía; mientras que a nivel submicroscópico —en el nivel de las partículas más pequeñas conocidas por los físicos— sólo necesitamos a la energía cinética y a la energía potencial. En el nivel submicroscópico, *toda* energía es, o energía cinética o energía potencial, porque todas las fuerzas fundamentales que se presentan entre las partículas son *fuerzas conservativas.*

Ejemplo 10-7

Una pelota de billar choca con una segunda pelota de billar de la misma masa que inicialmente se encontraba en reposo. ¿Cuál es el ángulo entre las direcciones de las pelotas después del choque, suponiendo que la energía cinética total K es la misma antes y después del choque? Los choques como éste, en los que la energía *cinética* total antes del choque es igual a la energía *cinética* total después del mismo, se dice que son *perfectamente elásticos.** (Aunque los objetos que interactúan se deformen durante el choque elástico, regresan a sus formas originales después de él.)

A partir de la ley de la conservación del ímpetu, tenemos

$$m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}_1' + m\mathbf{v}_2'$$

donde m es la masa de cualquiera de las pelotas, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_1'$ son las velocidades de antes y después del choque, en este orden, de la pelota que en un principio se encontraba en movimiento, y $\mathbf{v}_2'$ es la velocidad de la pelota que al principio se encontraba en reposo, después del choque. Podemos escribir esta ecuación en la forma

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2'$$

Los vectores velocidad forman un triángulo, como se ve en la Fig.

---

*Es útil clasificar a los choques según que la energía *cinética* total de los objetos en choque sea igual, exceda o sea menor que la energía *cinética* total de los objetos después del choque.
la terminología es la siguiente:
Choque elástico: K total antes = K total después
Choque inelástico: K total antes > K total después
Choque explosivo: K total antes < K total después

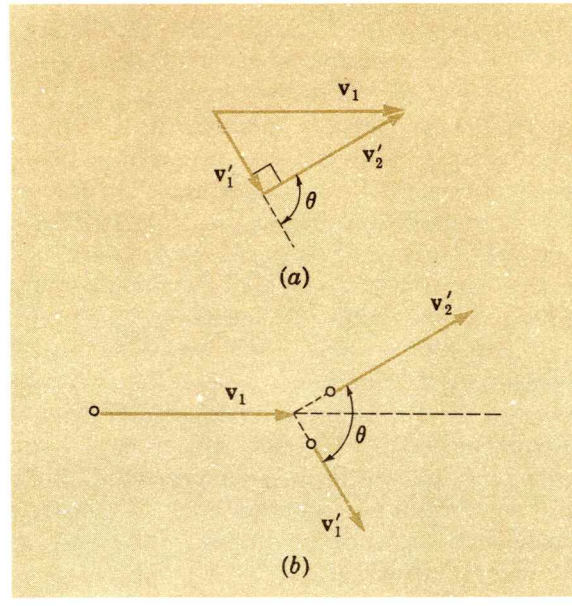


FIG. 10-16. (*a*) Vectores velocidad para el choque, que no es de frente, entre dos partículas de igual masa. La conservación del ímpetu demanda que $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2')$. (b) Vectores velocidad correspondientes a la parte (a); el ángulo entre las dos velocidades después del choque es θ.

10-16*a*; θ es el ángulo entre las velocidades después del choque, como se indica en la Fig. 10-16*b*.

El hecho de que éste es un choque perfectamente elástico demanda que

$$\tfrac{1}{2}mv_1^{\,2} = \tfrac{1}{2}mv_1'^{\,2} + \tfrac{1}{2}mv_2'^{\,2}$$

o

$$v_1^{\,2} = v_1'^{\,2} + v_2'^{\,2}$$

La última ecuación implica, de acuerdo con el teorema de Pitágoras, que los vectores velocidad forman un triángulo *rectángulo*. Por lo que, el ángulo θ entre $\mathbf{v}_1'$ y $\mathbf{v}_2'$ es de 90° para cualquier choque que no sea de frente. La Fig. 10-17 es una fotografía de cámara de niebla de un choque como éste.

Cuando una esfera ligera choca con una esfera de mayor masa en un choque de frente, como en el caso de una pelota de tenis de mesa que choca con una pelota de billar, la pelota ligera se regresa con rapidez igual a la que tenía al aproximarse a la pelota de mayor masa, que tenía al aproximarse a la pelota de mayor masa, ésta permanece en reposo. Por otro lado, cuando una pelota de mayor masa choca con una pelota ligera que al principio se encontraba en reposo y en un choque de frente, la pelota de mayor masa continúa moviéndose hacia adelante sin que cambie en esencia su rapidez, y la pelota ligera se pone en movimiento. Aunque la rapidez de la pelota ligera exceda a la de la pelota de mayor masa, su energía cinética es mucho menor. Un objeto puede perder *toda* su energía cinética en un choque, sólo si se trata de un choque de frente sobre un objeto estacionario de *igual* masa. Si choca de frente, ya sea sobre un objeto de más o menos masa, sólo una fracción de su energía cinética se transmite al objeto chocado.

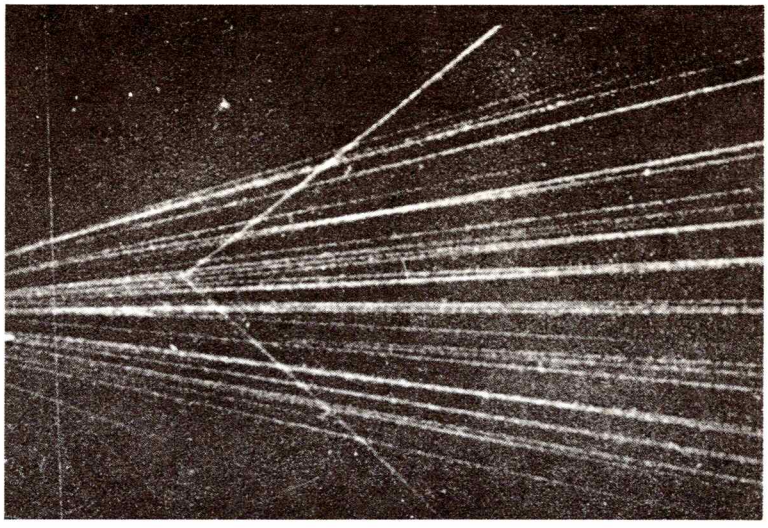


FIG. 10-17. Fotografía de cámara de niebla* que muestra el choque elástico de una partícula α (núcleo de helio) con una partícula α que al principio estaba en reposo. El ángulo entre las trayectorias de las partículas después del choque de 90°. (De *An Atlas of Typical Expansion Chamber Photographs,* 1954, Pergamon Press, Inc., Elmsford, N. Y.)

Este resultado es importante cuando nos ocupamos del problema de reducir la energía cinética de neutrones de alta velocidad producidos en un reactor nuclear. Se baja la velocidad de los neutrones (o se *moderan*) cuando chocan y transfieren su energía cinética, con núcleos que se encuentran dentro del material del reactor nuclear. Entonces, este material (o *moderador*) debe estar formado por partículas cuya masa no sea muy diferente a la del neutrón, ya que así los neutrones bajarán con rápidez su velocidad, en un número en cierto modo pequeño de choques, sólo si chocan elásticamente con núcleos de masa comparable. Por esta razón se pueden usar los núcleos que hay en el agua pesada o deuterones, cuya masa es sólo el doble de la masa del neutrón. (No se puede usar el agua ordinaria, con núcleos de hidrógeno, porque entre los neutrones y los protones se produce una reacción nuclear.)

Ejemplo 10-8

Una bala de masa m que primero se movía con la rapidez v, choca con un bloque de masa M, que al principio se encontraba en reposo sobre una superficie lisa horizontal y queda empotrada dentro de él. (*a*) ¿Cuál es la rapidez del bloque (y la bala) después del choque? (*b*) Si el bloque se suspende por medio de una varilla delgada vertical rígida y sin masa que pueda girar alrededor de su extremo superior, y recibe el impacto de la bala como en el caso que se acaba de ver, ¿hasta qué distancia vertical se moverá el bloque antes de quedar en reposo?

*Las partículas cargadas que pasan a través de un vapor sobresaturado que se encuentra en la cámara de niebla, producen trazas de gotas condensadas a lo largo de sus trayectorias, que son análogas a las huellas (*trazas* de condensación) que dejan los aviones de reacción y los cohetes que se mueven a grandes alturas.

(a) La bala y el bloque no se encuentran sujetos a fuerzas horizontales externas; por lo que, la conservación del ímpetu demanda que

$$m\mathbf{v} = (m + M)\mathbf{V}$$

donde $\mathbf{V}$ es la velocidad del bloque después del choque. Por lo que,

$$\mathbf{V} = \frac{m}{m + M}\,\mathbf{v} \tag{10-12}$$

Se puede medir la rapidez de la bala v de manera indirecta conociendo las masas m y M y midiendo la rapidez V que es menor.

Se dice que el choque es por *completo inelástico,* debido a que los dos objetos se encuentran en reposo, uno con respecto al otro, después del choque. Actúa una fuerza no conservativa de fricción al detenerse la bala, se disipa energía, y la energía cinética después del choque es menor que la energía cinética que entra al choque.

(b) La bala choca con un bloque suspendido por una varilla de longitud L como se indica en la Fig. 10-18. Si la bala queda en reposo con respecto al bloque, su rapidez se reduce de v a V en una distancia muy corta, y el intervalo de tiempo durante el cual el bloque adquiere la rapidez V, también es muy corto. El bloque se encuentra bajo la acción de una fuerza impulsora durante un intervalo de tiempo que es mucho menor que el tiempo que necesita el bloque y la varilla para columpiarse hacia arriba y quedar en reposo a la altura y sobre el punto más bajo. Así, el movimiento completo consta de dos partes: (a) un intervalo de tiempo corto durante el cual la bala queda en reposo en el bloque y durante el cual el bloque adquiere la rapidez V sin elevarse en forma apreciable, y (b) el intervalo de tiempo mucho mayor durante el cual el bloque se mueve hasta un punto más alto. Durante el intervalo 1, el ímpetu se conserva (ninguna fuerza *externa* actúa sobre el sistema de la bala y el bloque), pero la energía cinética no se conserva (actúa una fuerza *interna* no conservativa); durante el intervalo 2, la energía mecánica se conserva (el bloque está sujeto sólo a fuerzas conservativas), pero el ímpetu no se conserva (el sistema bala-bloque ahora está sujeto a una fuerza externa no balanceada).

Durante el intervalo 2,

$$\tfrac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gy$$

$$V = \sqrt{2gy}$$

Durante el intervalo 1, a partir de la Ec. (10-12),

$$v = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gy}$$

La rapidez de una bala se puede medir con un aparato de este tipo, conocido como un *péndulo balístico,* nada más midiendo la altura y y las masas m y M.

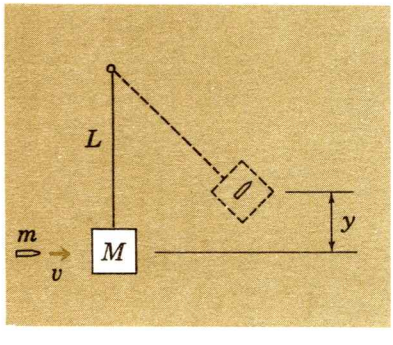


FIG. 10-18. Un péndulo balístico. Una bala de masa m y velocidad v choca y queda empotrada dentro de un bloque de masa M unido al extremo de una varilla ligera de longitud L. El bloque se eleva la distancia vertical y para quedar en reposo.

Ejemplo 10-9

Un proyectil de 5.0 g que se mueve en sentido horizontal a 1.0×10^3 m/s golpea a un bloque de madera de 1.0 kg en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. El proyecto traspasa el bloque y sale de él con una velocidad de 40 m/s en la misma dirección. (*a*) ¿Cuál es la velocidad final del bloque? (*b*) ¿Cuál es la relación R entre la energía cinética final total y la energía cinética inicial total?

(*a*) A partir de la ley de la conservación del ímpetu tenemos

$$m_p\mathbf{u}_p + m_b\mathbf{u}_b = m_p\mathbf{v}_p + m_b\mathbf{v}_b$$

donde m_p, $\mathbf{u}_p$ y $\mathbf{v}_p$ son la masa, la velocidad antes del choque, y la velocidad después del choque del proyectil. En forma semejante, m_b, $\mathbf{u}_b$ y $\mathbf{v}_b$, son los parámetros análogos del bloque. Despejando en esta ecuación a $\mathbf{v}_b$ encontramos

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{u}_b + (m_p/m_b)(\mathbf{u}_p - \mathbf{v}_p)$$

$$v_b = 0 + \frac{5 \times 10^{-3}\ \text{kg}}{1.0\ \text{kg}}\,(1.0 \times 10^3\ \text{m/s} - 40\ \text{m/s})$$

$$= 4.8\ \text{m/s}$$

(*b*)
$$R = \frac{\frac{1}{2}m_p v_p^2 + \frac{1}{2}m_b v_b^2}{\frac{1}{2}m_p u_p^2 + \frac{1}{2}m_b u_b^2} = \frac{m_p v_p^2 + m_b v_b^2}{m_p u_p^2 + m_b u_b^2}$$

$$= \frac{(5.0 \times 10^{-3}\ \text{kg})(40\ \text{m/s})^2 + (1.0\ \text{kg})(4.8\ \text{m/s})^2}{(5.0 \times 10^{-3}\ \text{kg})(1.0 \times 10^3\ \text{m/s})^2 + 0}$$

$$= 0.0062 = 0.62\%$$

por lo tanto, más del 99% de la energía cinética inicial se disipó en un choque claramente inelástico ($R < 1$).

RESUMEN

La energía total E de un sistema de partículas está formada por la suma de las energías cinéticas K de las partículas y la energía potencial U debida a su interacción:

$$E = K + U \qquad (10\text{-}1)$$

La energía potencial gravitacional U_g para una partícula de masa m que sufre un desplazamiento vertical cerca de la superficie de la Tierra es

$$U_g = mgy \qquad (10\text{-}3)$$

La energía potencial de un resorte U_r con constante de rigidez k, estirado o comprimido en una distancia x, es

$$U_r = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (10\text{-}2)$$

Sólo se puede definir una energía potencial para una fuerza conservativa →el trabajo neto a lo largo de una trayectoria cerrada es cero para una fuerza como éstas. Entonces se define que la diferencia en la energía potencial entre dos estados i y f es

$$U_f - U_i = -\int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (10\text{-}4)$$

La ley de la conservación de la energía: La energía total de cualquier sistema aislado es constante. Si las partículas que comprende el sistema interactúan por medio de fuerzas conservativas, la suma de las energías cinética y potencial es constante en el tiempo; Si actúan fuerzas no conservativas, la suma de las energías cinética y potencial *macroscópicas* decrece con el tiempo.

PROBLEMAS

10-1. Un bloque de 5.0 kg cae desde una altura de 3.0 m sobre un resorte vertical. Determine la distancia que se comprimirá el resorte, si su constante es de 1.0×10^3 N/m. Suponga que $g = 10$ m/s^2.

10-2. Un objeto de 1.0 kg se arroja a través del aire desde el nivel del piso con la rapidez de 16.0 m/s en un ángulo de 37° arriba de la horizontal. Usando la conservación de la energía, determine (*a*) la altura máxima, (*b*) la energía cinética mínima del objeto, y (*c*) su rapidez cuando se encuentra a 2.0 m sobre el piso.

10-3. Se comprime un objeto contra un extremo de un resorte cuyo otro extremo está fijo en una pared sólida y después se suelta desde el reposo. ¿Cuál es la relación entre la rapidez cuando el resorte se ha extendido hasta la mitad de su longitud de relajación?

10-4. Se lleva al reposo un objeto comprimiendo un resorte que tiene uno de sus extremos fijo. Suponga que se va a duplicar la compresión del resorte. ¿En qué factor debe aumentar el ímpetu del objeto?

10-5. En 1970 los Estados Unidos consumieron 6.45×10^{16} B.t.u. de energía. (*a*) ¿Qué masa de agua se podría calentar desde 32°F hasta 212°F con esta cantidad de energía? (*b*) Determine la longitud de un lado de un cubo que pudiera contener esa masa de agua. Consulte el Apéndice II para los factores de conversión aproximados. (Se estima que el volumen del Lago Michigan es de alrededor de 5×10^{12} m^3.)

10-6. Para 1980 se espera que el consumo total de energía de los Estados Unidos llegue a 1.05×10^{20} J/año. (*a*) ¿Cuál es la rapidez de consumo de potencia correspondiente en megawatts? (*b*) Exprese esta rapidez prevista de consumo de energía en megawatt-hora /año. (Un megawatt-hora es la energía total producida por una fuente de un megawatt que opera durante una hora.)

10-7. Para jalar la cuerda de un arco desde su posición original sin desplazamiento, se necesita una fuerza de 200 N cuando su centro se desplaza hacia atrás 60 cm. La fuerza es de hecho proporcional al desplazamiento del punto central de la cuerda. Si el arco dispara una flecha de 40 g en sentido vertical hacia arriba, ¿cuál es la altura máxima que alcanza la flecha?

10-8. Una partícula se suspende de uno de los extremos de una cuerda tensa cuyo otro extremo se encuentra fijo (un péndulo simple). La longitud de la cuerda es de 12.5 m, y la partícula pasa por su punto más bajo con una rapidez de 7.0 m/s. ¿Cuál es el ángulo entre la cuerda y la vertical cuando la partícula se encuentra momentáneamente en reposo?

10-9. Dos partículas cuyas masas se encuentran en la proporción de 2 a 1 se comprimen contra los dos extremos de un resorte y se sueltan desde el reposo. ¿Cuál es la relación entre las energías cinéticas de la partícula más ligera a la partícula de masa mayor después de que el resorte se extendió hasta su longitud de relajamiento?

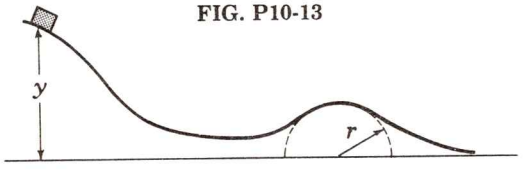
10-10. Demuestre que en el Ej. 10-6, (*a*) para $y = -A$, $\Sigma F_y = 0$ y para $y = -2A$, $\Sigma F_y = +mg$. (*b*) Elija un nuevo origen para el desplazamiento vertical de tal manera que $y' = y + A$ y demuestre que $\Sigma F_y = -ky'$.

10-11. Un objeto de masa m se adhiere a uno de los extremos de un resorte que tiene la constante de rigidez de k y al principio se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. Un segundo objeto también de masa m choca de frente con el extremo libre del resorte con la rapidez v. Determine (*a*) el ímpetu total del sistema, (*b*) la energía total del sistema, (*c*) la velocidad del centro de masa, (*d*) el ímpetu total del sistema con respecto al centro de masa, (*e*) la energía total del sistema con respecto al centro de masa, (*f*) la compresión máxima del resorte.

10-12. Un bloque de 2.0 kg reposa sobre una superficie rugosa ($\mu = 0.40$) y se pone en contacto con uno de los extremos de un resorte ($k = 800$ N/m) que se ha comprimido en 25 cm. El otro extremo del resorte se encuentra fijo. Si el bloque se suelta (*a*) ¿qué distancia se moverá sobre la superficie y (*b*) cuál será su rapidez cuando ha recorrido la mitad de dicha distancia?

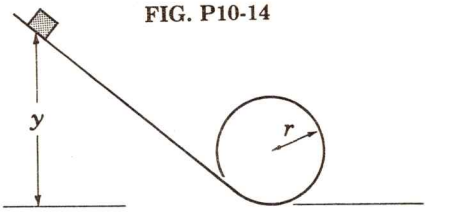
10-13. Un bloque se suelta desde el reposo para que se deslice sobre la superficie sin fracción mostrada en la Fig. P10-13. (*a*) ¿Cuál es la altura mínima y si el bloque debe llegar hasta la parte superior de la loma que tiene el radio de curvatura r? (*b*) ¿Cuál es la altura máxima si el bloque no debe dejar la superficie en la parte más alta de la loma?

FIG. P10-13



10-14. Un bloque se desliza hacia abajo sobre una superficie sin fricción y da una vuelta completa en un círculo de radio r. ¿A qué altura mínima y relativa a la parte inferior de la vuelta debe partir el bloque desde el reposo con el fin de que dé la vuelta completa manteniéndose en contacto con la superficie? Vea la Fig. P10-14.

FIG. P10-14

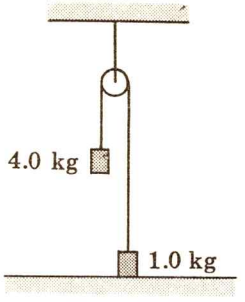


10-15. En 1970 la energía total consumida en los Estados Unidos fue de 6.8×10^{19} J $\equiv E_T$. De acuerdo con Einstein, la masa y la energía son diferentes formas de la misma cosa — y la masa equivalente a la energía E está dada por $M_{eq} = E/c^2$, donde c es la rapidez de la luz en el vacío ($c = 3.0 \times 10^8$ m/s. (*a*) ¿Cuál es el equivalente en masa de E_T? (*b*) En un reactor de *fisión* de uranio, apenas el 0.090 de la masa del combustible "quemado" se convierte en energía. A este ritmo, ¿qué masa de uranio se necesitará para producir E_T? (*c*) En un reactor de *fusión* que use isótopos pesados del hidrógeno (deuterio y tritio) el 0.38% de la masa del combustible quemado se convierte en energía. En base a esto, ¿qué masa de reactivos se necesitará para producir la energía E_T?

10-16. El Sol radía energía con la rapidez de 3.8×10^{26} J/s. (La energía se produce por la transformación de la masa en energía, como se considera en la introducción al Prob. 10-15). (*a*) ¿Con qué rapidez se convierte en energía la masa del Sol? (*b*) Si la rapidez de conversión se mantuviera constante durante los siguientes mil millones de años, ¿qué fracción de la masa del Sol se habrá transformado para entonces? (La masa del Sol es de 2.0×10^{30} kg.)

10-17. Un bloque de 4.0 kg y otro bloque de 1.0 kg se encuentran unidos a los extremos opuestos de una cuerda sin masa de 2.0 m de longitud. La cuerda está montada sobre una polea sin fricción ni masa que se encuentra a una altura de 1.5 m medida desde el piso, estando al principio el bloque de 1.0 kg sobre el nivel del piso. Vea la Fig. P10-17. Entonces los bloques se sueltan desde el reposo. ¿Cuál es la rapidez de ambos bloques cuando el de 4.0 kg choca con el piso?

FIG. P10-17



10-18. Al principio un automóvil de 1 000 kg se movía a 90 km/h sobre una sección horizontal de una carretera. Al ver una pequeña elevación de la carretera, el chófer cortó el encendido y pasó sobre la cresta, que se eleva a 15 m sobre el nivel de la sección horizontal de la carretera. El radio de curvatura de la cresta de la carretera es de 60 m. (*a*) ¿Cuál es la rapidez del automóvil cuando se encuentra sobre la cresta? (*b*) ¿Con qué fuerza presiona el automóvil hacia abajo sobre la superficie de la carretera en ese instante? Suponga que $g = 10$ m/s^2 y desprecie las pérdidas por fricción.

10-19. Un bloque de 10 kg se empuja hacia arriba en un plano inclinado en 30° con la rapidez inicial de 12 m/s. El bloque se mueve 8.0 m a lo largo del plano, se detiene, y después se desliza hacia atrás hacia la base. Suponiendo que $g = 10$ m/s^2. (*a*) Calcule el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie del plano, y (*b*) determine la rapidez del bloque cuando regresa a la base del plano inclinado.

10-20. La energía potencial eléctrica entre dos cargas semejantes q_1 y q_2 separadas por la distancia r se encuentra dada por $U = kq_1q_2/r$, donde k es una constante. ¿Cuál es la fuerza eléctrica entre las cargas?

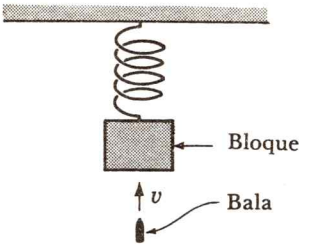
10-21. Un objeto de 2.0 kg se suelta desde el reposo para que se deslice hacia abajo sobre una superficie rugosa. En un punto que se encuentra en sentido vertical abajo de su punto de partida a 3.0 m, la rapidez del objeto es de 5.0 m/s. ¿Qué cantidad de energía se disipa por la fricción con la superficie?

10-22. Un objeto de 5.0 kg que cae desde la altura de 3.0 m rebota hasta la altura de 1.5 m. ¿Qué cantidad de energía se disipa en el choque con el piso?

10-23. Un objeto de 4.0 kg cae a través de un líquido viscoso con la rapidez constante de 0.75 m/s. ¿Con qué rapidez (en watts) se disipa la energía?

10-24. Una bala de 25 g que se movía en sentido vertical hacia arriba choca con un bloque de 1 475 g de madera suspendido de una viga de masa considerable por medio de un resorte. Como consecuencia del impacto el bloque se eleva 30.0 cm comprimiendo el resorte. Vea la Fig. P10-24. Determine (*a*) la rapidez original de la bala, (*b*) la fracción de la energía cinética de la bala que se transmite al bloque, y (*c*) la fracción de la energía cinética del bloque absorbida por el resorte. La constante del resorte es de 600 N/m; suponga que $g = 9.80$ m/s^2.

FIG. P10-24



10-25. Una partícula de masa m que se movía primero con la rapidez v choca de frente y se adhiere a una segunda partícula de igual masa que al principio se encontraba en reposo. ¿Cuál es la energía cinética total del sistema (*a*) antes del choque (*b*) después del choque? (*c*) ¿Qué fracción de la energía cinética total se disipa en el choque? (*d*) ¿Con qué rapidez inicial deberán moverse las dos partículas al acercarse para que se disipe la misma cantidad de energía en el choque?

10-26. Un objeto que primero estaba en reposo recibe el empuje de un segundo objeto, y los dos quedan unidos después del choque. (*a*) Si el objeto compuesto se mueve con un tercio de la rapidez del objeto incidente, ¿qué relación hay entre la masa del objeto empujado y la masa del objeto incidente? (*b*) ¿Qué fracción de la energía cinética del objeto incidente se disipa en el choque?

10-27. La energía potencial gravitacional entre dos masas puntuales m_1 y m_2 separadas por una distancia r está dada por $U = Gm_1m_2/r$, donde G es una constante. ¿Cuál es la fuerza gravitacional entre las masas?

10-28. Un objeto de masa m unido a uno de los extremos de una cuerda inextensible se hace girar en una órbita circular sobre un plano vertical. Demuestre que la tensión de la cuerda se puede representar por

$$T = mv_0^2/R + (3\cos\theta + 2)mg$$

donde v_0 es la rapidez del objeto en la parte más alta de la trayectoria, R es el radio del círculo, θ es el ángulo entre la vertical hacia abajo y la cuerda, y g es la aceleración de la gravedad. Suponga que la masa de la cuerda es despreciable y que no hay pérdidas por fricción.

10-29. Una partícula con masa m_1 choca elásticamente y de frente con una partícula de masa m_2 que se encontraba al principio en reposo. Demuestre que la fracción de energía cinética de m_1 que se traspasa a m_2 en el choque es de $4m_1m_2/(m_1 + m_2)^2$ y que esa fracción tiene un máximo para $m_1 = m_2$.

10-30. En un choque perfectamente elástico* un objeto de 1.0 kg que se movía hacia el este a 3.0 m/s choca de frente con un objeto de 2.0 kg que se movía hacia el oeste a 1.5 m/s. (*a*) ¿cuáles son las velocidades de los dos objetos después del choque? (*b*) ¿Cuáles son las velocidades de los dos objetos, antes y después del choque, con respecto al centro de masa del sistema?

10-31. Una esfera de 2.0 kg que se movía a 3.0 m/s choca de frente con una esfera de 1.0 kg que se movía en la misma dirección y con el mismo sentido a 2.0 m/s. Después del choque la esfera de 2.0 kg se mueve en sentido opuesto a 2.0 m/s. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la esfera de 1.0 kg? (*b*) ¿Cómo es el choque, elástico, inelástico o explosivo?*

10-32. Si se acomoda un grupo de pelotas de billar idénticas en línea recta y de tal manera que se encuentren en contacto, y otra pelota de billar choca con la primera de la línea de frente, se encuentra que la última de las pelotas de la línea se pone en movimiento con una rapidez idéntica a la que tenía la pelota que se encontraba en un principio en movimiento. De manera semejante , si dos pelotas de billar se mueven juntas con la misma rapidez y chocan de frente con la línea de pelotas que estaban en reposo, las dos últimas pelotas de la línea se ponen en movimiento con la misma rapidez que las dos pelotas que golpean la línea. Demuestre que este comportamiento es consistente con las leyes de conservación de la energía y el ímpetu para los choques elásticos de frente.*

10-33. Siempre el núcleo radiactivo del radio (^{226}Ra) decae (explota) dando lugar al núcleo de radón (^{222}Rn) y una partícula α (^{4}He), liberando una energía total de 4.87 MeV (1 MeV = 1.6×10^{-13} J). ¿Cuál es la energía cinética de (*a*) la partícula α y (*b*) el núcleo de radón? (Los exponentes de los símbolos químicos dan las masas relativas de las partículas.)

*Es útil clasificar a los choques según la energía *cinética* total de los objetos en choque sea igual, exceda o sea menor que la energía cinética total de los objetos después del choque. La terminología es la siguiente:

Choque elástico: K total antes = K total después
Choque inelástico: K total antes > K total después
Choque explosivo: K total antes < K total después

Capítulo 11

MOMENTO ANGULAR

El ímpetu lineal $m\mathbf{v}$ de una partícula, o de un grupo de partículas, es importante debido a que el vector ímpetu total es constante, tanto para una partícula aislada como para un sistema aislado de partículas. En menos palabras, el ímpetu se conserva. Además, si el ímpetu lineal cambia, podemos relacionar su rapidez de cambio con respecto al tiempo con la fuerza resultante.

El momento angular es similar. Es constante para un sistema aislado —hay una ley de conservación del momento angular. Y cuando el momento angular cambia, podemos relacionar su rapidez de cambio con respecto al tiempo con la torca resultante. Pero veremos que a pesar de que una partícula *se* encuentre bajo la acción de una fuerza neta, su momento angular puede permanecer constante. Por lo tanto, el momento angular es una cantidad física fundamental que, debido a su constancia bajo condiciones apropiadas, simplifica la descripción y análisis de muchas situaciones físicas.

Como el término momento angular lo sugiere, los objetos que giran tienen momento angular. Primero consideraremos cualitativamente algunos aspectos del momento angular de un objeto rotatorio, después veremos que a una partícula separada puede atribuirse un momento angular, y por último derivaremos las relaciones formales que gobiernan los cambios en el momento angular.

11—1 LA VELOCIDAD ANGULAR COMO VECTOR*

Considérese la placa rígida de la Fig. 11-1, que sufre una rotación alrededor de un eje normal al plano sobre el que se

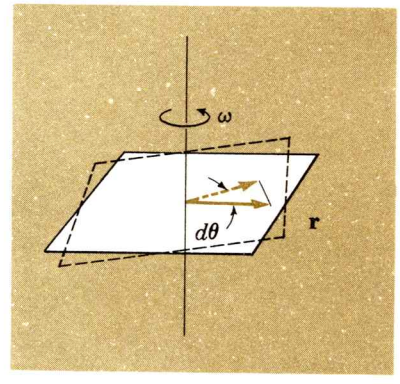


FIG. 11-1. El radio vector r unido a una placa que sufre una rotación alrededor de su normal, con la velocidad angular ω adquiere el desplazamiento $d\theta$ en el tiempo dt.

*Esta sección se refiere sólo a las propiedades vectoriales de la velocidad angular. En la Sec. 12-1 se tratan otros aspectos de la cinemática de la rotación.

FIG. 11-2. La convención de la regla de la mano derecha, que da la dirección y el sentido del vector velocidad angular.

encuentra. El radio vector **r** que va del eje a un punto de la placa, sufre un desplazamiento angular $d\theta$ en el intervalo de tiempo dt mientras que la placa gira. Por definición, la velocidad angular de **r**, o de la placa completa, es

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{4-14}$$

Por convención, se considera positiva la rotación en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj, y en el sentido de dicho movimiento como negativa. Así, la magnitud de ω da el ángulo girado en la unidad de tiempo; mientras que su signo da el sentido de la rotación. Hay un eje asociado con cada rotación, y a cada línea recta que representa un eje de rotación se le asocian dos sentidos —uno a lo largo de la línea en un sentido y el otro opuesto al primero. Con dos signos (+ para el sentido contrario al de las manecillas del reloj, — para el sentido de las manecillas del reloj) asociados con el sentido de la rotación y con los dos sentidos asociados con el eje de rotación. podemos usar los dos sentidos del eje para especificar el sentido de la rotación. Todo lo que necesitamos es una convención.

La regla es ésta: Si los dedos flexionados de la mano *derecha* corresponden al sentido de la rotación, el pulgar apunta a lo largo del vector que representa a la velocidad angular. Vea la Fig. 11-2. La magnitud de ω da la rapidez angular; su dirección y sentido especifican el eje de rotación y el sentido de la misma. Por ejemplo, si sobre el plano del papel se tiene una rotación en contra de las manecillas del reloj, ésta corresponde a una ω normal y hacia el frente del papel.

11—2 ALGUNAS CARACTERISTICAS CUALITATIVAS DEL MOMENTO ANGULAR

Como el aparato matemático usado para el tratamiento del momento angular, es en algunos aspectos formidable, es útil considerar, antes de las pruebas formales, algunos aspectos cualita-

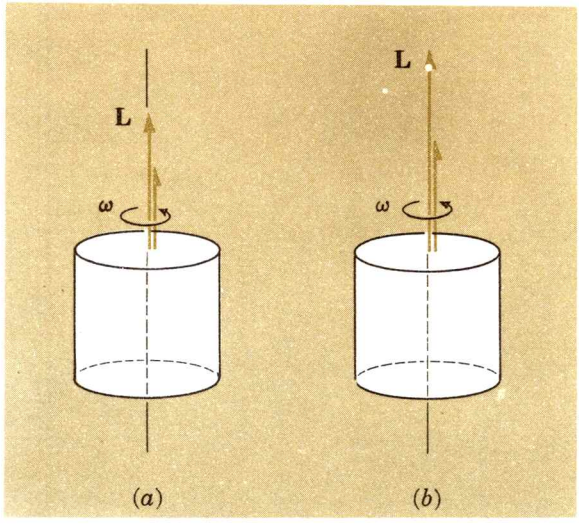


FIG. 11-3. (*a*) Para un cilindro que gira alrededor de su eje de simetría, el momento angular **L** se encuentra en la misma dirección y sentido que el vector velocidad angular ω. (*b*) Cuando la velocidad angular aumenta, el momento angular aumenta proporcionalmente.

tivos del momento angular, no sólo de los objetos giratorios, sino también de una partícula separada.

Todas las aseveraciones siguientes, se comprobarán en las secciones que siguen. El momento angular de un objeto giratorio simétrico, como un cilindro circular recto, es un vector con la dirección y el sentido de la velocidad angular del objeto. Para un objeto y un eje de rotación dados, la magnitud del momento angular es proporcional en forma directa a su velocidad angular. El momento angular se conserva, el momento angular total de un sistema aislado es constante en magnitud, dirección y sentido. El conocimiento de que el momento angular es un vector, nos permite tratar ciertos problemas que de otra manera serían difíciles de considerar de manera directa. Por ejemplo, vea el Prob. 11-25 para el análisis del movimiento de una peonza.

Considérese el cilindro indicado en la Fig. 11-3 que gira alrededor de su eje de simetría. A medida que su rapidez de rotación aumenta, el vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ crece, y lo mismo sucede con el vector L que representa su momento angular. En otras palabras, la magnitud del momento angular crece o decrece cuando su velocidad angular crece o decrece. Supóngase ahora que una bala de masa m y velocidad **v** se dispara hacia el cilindro que puede girar libremente, errando la puntería sobre el eje de rotación por $r_\perp$, y queda *empotrada* en él. Vea la Fig. 11-4. En la Fig. 11-4*a* el cilindro adquiere velocidad angular, y el momento angular tiene sentido hacia arriba; en la Fig. 11-4*b*, donde la bala le pega al cilindro del otro lado, el cilindro adquiere velocidad angular y momento angular hacia abajo; y en la Fig. 11-4*c*, donde la bala choca a lo largo de una línea recta que pasa por el eje de rotación, el cilindro no se pone en rotación y por ello adquiere un momento angular de cero.

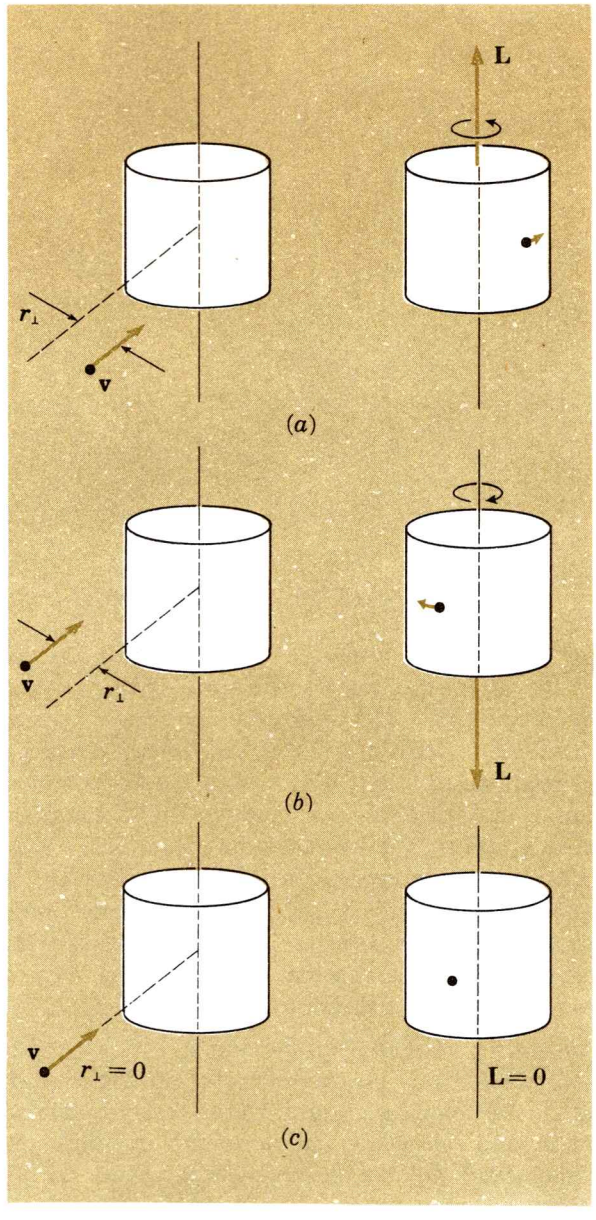


FIG. 11-4. Una bala disparada sobre un cilindro que puede girar libremente. (*a*) La bala no acierta al eje de simetría errando por $r_\perp$, y el cilindro adquiere el momento angular **L** hacia arriba; (*b*) la bala no acierta al eje de simetría errando por $r_\perp$ pero del otro lado, y el cilindro adquiere el momento angular **L** hacia abajo; (*c*) con $\mathbf{r}_\perp = 0$, $\mathbf{L} = 0$.

Podemos atribuir un momento angular a una partícula porque puede cambiar la rapidez de rotación de un cilindro y a ello debe su momento angular. Si la bala y el cilindro forman un sistema aislado, cuyo momento angular es constante, se tiene que se debe concluir que en la parte (*a*) de la Fig. 11-4 la partícula tenía momento angular hacia arriba; en (*b*) el momento angular inicial de la partícula está dirigido hacia abajo; y en (*c*) el momento angular de la partícula era de cero. Nótese que al asociar una dirección y un sentido al momento angular de una partícula

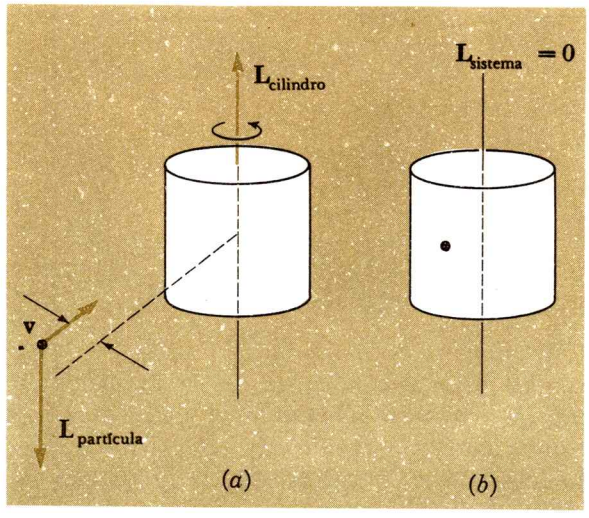


FIG. 11-5. (*a*) Una partícula con momento angular hacia abajo golpea un cilindro que al principio estaba en rotación con momento angular hacia arriba; (*b*) el momento angular total del sistema es cero.

separada, no estamos indicando la dirección y el sentido en que la partícula se mueve (la velocidad **v** de la partícula lo hace); más bien la dirección y el sentido del momento angular de una partícula indica la dirección y el sentido de la velocidad angular ω y el momento angular **L** que adquiere el cilindro que estaba al principio en reposo. Como un ejemplo adicional considérese la Fig. 11-5. Aquí un cilindro primero gira con un momento angular hacia arriba. Cuando la bala choca y se empotra en el cilindro, éste queda en reposo. Así, como el momento angular final es de cero, debemos inferir que la partícula separada tenía un momento angular hacia abajo, el cual al sumarse al momento angular hacia arriba del cilindro que al comienzo giraba, produce un momento angular total de cero.

Como se indica en la ilustración anterior, podemos asignar un momento angular a una partícula separada. Además, tanto la magnitud como la dirección del momento angular de una partícula dependen no sólo de su masa m y de su velocidad **v**, sino también de la distancia perpendicular $r_\perp$ Cuando $r_\perp = 0$, **L** también es cero.

11—3 LA TORCA COMO LA RAPIDEZ DE CAMBIO DEL MOMENTO ANGULAR

Los cambios en el ímpetu lineal $m\mathbf{v}$ de una patícula separada están gobernados por la relación

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

donde **F** es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula. En general **F** y **v** no se encuentran en la misma dirección.

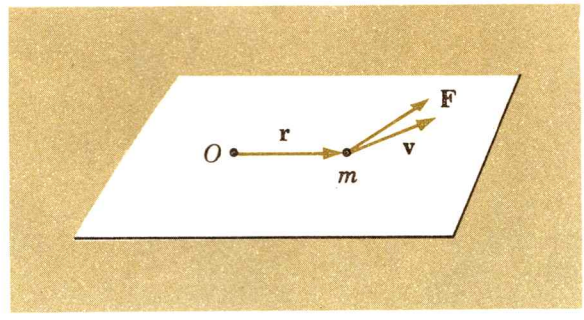


FIG. 11-6. Una partícula de masa m y velocidad $\mathbf{v}$ se encuentra sujeta a la fuerza resultante $\mathbf{F}$ cuando su desplazamiento relativo al punto O es $\mathbf{r}$.

El radio vector $\mathbf{r}$ localiza a la partícula con respecto a un origen arbitrario O, como se indica en la Fig. 11-6, aquí por conveniencia se elige de tal manera que quede en el plano de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{F}$. Los vectores $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{F}$, en general, variarán con el tiempo.

Tomando el producto cruz (Sec. 2-6) de $\mathbf{r}$ con ambos lados de la ecuación anterior:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \tag{11-1}$$

Ahora consideremos la derivada siguiente:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v}\right) + \left(\mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}\right) \tag{11-2}$$

(La regla para obtener la derivada de un producto cruz, es en todo análoga a la que se usa para obtener la derivada de un producto algebraico, como podemos verificar en detalle tomando la derivada de las componentes del producto cruz.)

Como el vector $\mathbf{r}$ localiza a la partícula en cada instante, su derivada con respecto al tiempo es la velocidad de la partícula, $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$. Por lo que,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$$

el producto cruz entre dos vectores *paralelos,* como $\mathbf{v}$ y $m\mathbf{v}$, es igual a cero.

El primer término del lado de la derecha de la Ec. (11-2) es por ello cero, y la Ec. (11-1) se convierte en

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \tag{11-3}$$

Esta es la relación fundamental sobre la que se basa todo lo que se trata en éste y el siguiente capítulos.

La *torca* τ de la fuerza $\mathbf{F}$ relativa al origen O, (con respecto al que se mide $\mathbf{r}$) es, por definición,

$$\text{Torca} = \tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{11-4}$$

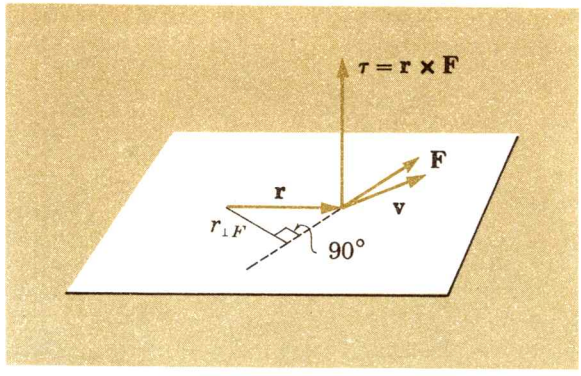


FIG. 11-7. La torca sobre la partícula es $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. En magnitud $\tau = Fr_{\perp F}$, donde $r_{\perp F}$ es perpendicular a **F** (no a **v**).

El momento angular **L** de la partícula con ímpetu lineal $m\mathbf{v}$ con respecto al origen O es, por definición,

$$\text{Momento angular} = \mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \tag{11-5}$$

Por lo tanto, la Ec. (11-3) se puede escribir en la forma

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{11-6}$$

En palabras, *la torca es la rapidez de cambio del momento angular con respecto al tiempo.* La torca es el producto cruz de **r** y la fuerza resultante que actúa sobre la partícula; el momento angular de la partícula es el producto cruz del *mismo* **r** y el ímpetu lineal de la partícula.

La dirección, el sentido y la magnitud de la torca $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ se ilustran en la Fig. 11-7. La torca τ es perpendicular al plano de **r** y **F**. Su sentido se encuentra dado por la regla de la mano derecha para los productos cruz (haciendo girar a **r** sobre **F** en el ángulo mínimo con los dedos de la mano derecha, el pulgar de dicha mano derecha apunta en el sentido de $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$). La magnitud de $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es el producto de F y $r_{\perp F}$, la componente de **r** perpendicular a **F**; esto es,

$$\tau = r_{\perp F} F \tag{11-7}$$

La dirección, el sentido y la magnitud del momento angular de una partícula $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ están ilustrados en la Fig. 11-8. La dirección de $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ es perpendicular al plano de **r** y $m\mathbf{v}$; su sentido está dado por la regla de la mano derecha. (Cuando **r**, $m\mathbf{v}$, y **F** quedan en un solo plano, como será el caso de casi todos nuestros ejemplos en este capítulo, τ y **L** son o paralelos o antiparalelos, siendo ambos perpendiculares al plano.) La magnitud de $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ es

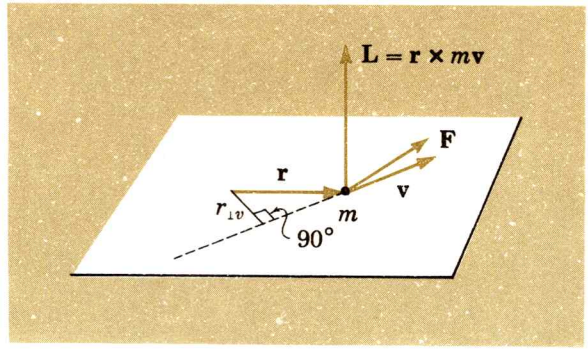


FIG. 11-8. El momento angular de la partícula $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. En magnitud $L = mvr_{\perp v}$, donde $r_{\perp v}$ es perpendicular a **v** (no a **F**).

igual a mv multiplicado por la componente $r_{\perp v}$ de **r** perpendicular a la velocidad **v** (o el ímpetu $m\mathbf{v}$). Así,

$$L = r_{\perp v} mv \tag{11-8}$$

Nótese en particular que $r_{\perp F}$, la componente de **r** perpendicular a la fuerza **F**, y $r_{\perp v}$, la componente de **r** perpendicular al ímpetu $m\mathbf{v}$, por lo general *no* son iguales.

Cuando $\boldsymbol{\tau}$ y **L** se encuentran a lo largo de la *misma* línea, la Ec. (11-3) se reduce a la ecuación algebraica

$$r_{\perp F} F = \frac{d}{dt} r_{\perp v} mv \tag{11-9}$$

Las dimensiones del momento angular son ML^2T^{-1}; las de la torca ML^2T^{-2}. Las unidades apropiadas para el momento angular son kg-m²/s, o su equivalente, J-s. La torca se expresa en las unidades m-N. (La torca es el producto cruz del desplazamiento y la fuerza; el trabajo es el producto punto del desplazamiento y la fuerza. Aunque sus dimensiones son iguales, son conceptos físicos diferentes, por lo que se acostumbra expresar las unidades de la torca como m-N y las de trabajo como N-m, o J.)

Ejemplo 11-1

Una partícula de 1.0 kg localizada a 3.0 m a lo largo del eje X positivo, denotada de otra manera por (3.0 m, 0, 0), tiene una velocidad de 2.0 m/s a lo largo de la dirección Y positiva, y está sujeta a una fuerza resultante de 4.0 N en un ángulo de 53° con respecto al eje X positivo y queda en el plano XY. ¿Cuál es el momento angular de la partícula y la torca de la fuerza que actúa sobre ella (*a*) con respecto al origen de coordenadas (0, 0, 0) y (*b*) con respecto al punto (0, -4.0 m, 0)? Vea la Fig. 11-9*a*.

(*a*) El origen del radio vector **r** es el origen de las coordenadas, de tal manera que **r** se extiende a lo largo de la dirección positiva de X. Como r se encuentra en ángulo recto con respecto a v, $r_{\perp v}$ = 3.0 m, y la magnitud del momento angular de la partícula es

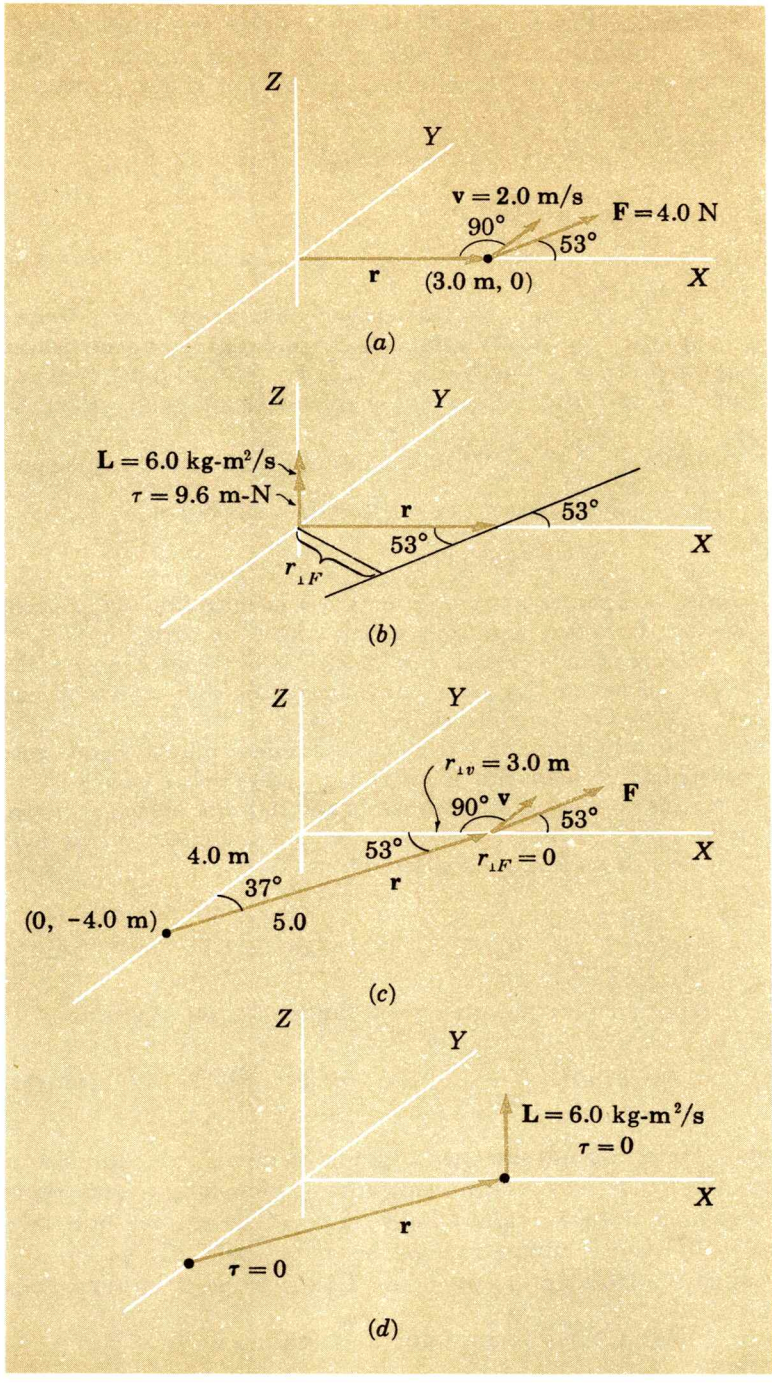


FIG. 11-9. Cálculo de la torca y el momento angular de una partícula para dos orígenes diferentes.

$$L = r_{\perp r} mv = (3.0\text{ m})(1.0\text{ kg})(2.0\text{ m/s})$$

$$= 6.0\text{ kg-m}^2/\text{s}$$

La dirección y el sentido de **L** son, por la regla de la mano derecha para los productos cruz, los del eje positivo Z.

Como indica la Fig. 11-9*b*, la componente de **r** perpendicular a **F** es $r_{\perp F}$ = (3.0 m) sen 53°. (En general la magnitud de la torca es rF sen θ, donde θ es el ángulo entre **r** y **F**.) Por lo que, la magnitud de la torca es

$$\tau = r_{\perp F}F = (3.0\text{ m})(0.80)(4.0\text{ N})$$
$$= 9.6\text{ m-N}$$

La dirección y el sentido de τ se encuentran también a lo largo del eje Z positivo.

(*b*) En el cálculo del momento angular y la torca con respecto al punto (0, −4.0 m, 0), cambia la magnitud y la dirección del radio vector **r** que va a la partícula. Vea la Fig. 11-9*c*. La magnitud de **r** ahora es de 5.0 m, y forma un ángulo de 53° con respecto al eje X positivo.

Con $r_{\perp v}$ = r sen 37°, la magnitud del momento angular es

$$L = r_{\perp v}mv = (5.0\text{ m})(0.60)(1.0\text{ kg})(2.0\text{ m/s})$$
$$= 6.0\text{ kg-m}^2\text{/s}$$

Tanto la dirección, como el sentido y la magnitud del momento angular **L** no cambian con respecto a los de la parte (*a*).

Como el radio vector **r** es paralelo a la fuerza **F**, su producto cruz **r** × **F** es cero. La torca sobre la partícula con respecto al punto (0, −4.0 m, 0) es cero. Vea la Fig. 11-9*d*.

Como se ilustra en este ejemplo, no tiene ningún significado el especificar el momento angular o la torca sobre una partícula, mientras no se especifique el punto con respecto al cual se miden **r** × m**v** y **r** × **F**. Tanto la magnitud, como la dirección y el sentido de **L** y de τ dependen de esta elección.

11—4 UNA PARTICULA CON MOMENTO ANGULAR CONSTANTE

Hemos encontrado que, para una partícula separada

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d(\mathbf{r} \times m\mathbf{v})}{dt} \quad \text{o} \quad \tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (11\text{-}3),(11\text{-}6)$$

Esta relación no nos dice nada que no se encuentre contenido en la segunda ley de Newton. Sin embargo, podemos usar esta expresión alternativa para averiguar las circunstancias en las que la torca $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ sobre una partícula es *cero;* así, $d\mathbf{L}/dt = 0$ y el momento angular de la partícula $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ debe ser constante:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{constante} \qquad \text{cuando } \tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$$

La torca de una fuerza sobre una partícula separada puede ser cero bajo tres circunstancias; (1) **r** = 0, (2) **F** = 0, o (3) sin que **r** ni **F** sean cero, **r** × **F** = 0, debido a que **r** sea paralelo a **F** o antiparalelo a **F**.

El caso de que **r** = 0 corresponde a que la partícula por un

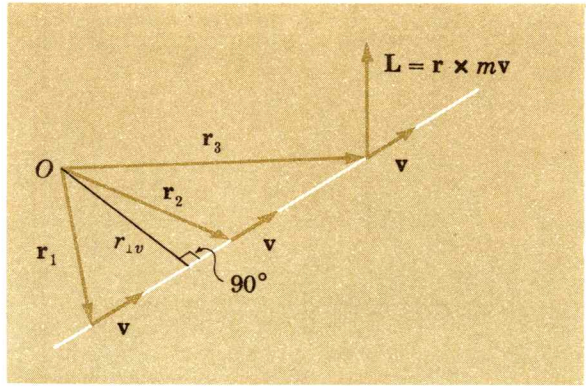


FIG. 11-10. Una partícula con velocidad constante tiene momento angular constante con respecto al punto *0*. El radio vector cambia de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ a $\mathbf{r}_3$, pero $r_{\perp v}$ es constante.

momento se encuentre en el origen de **r**, una situación trivial que no merece mayor comentario.

Cuando $\mathbf{F} = 0$, tenemos en efecto una partícula aislada, sabemos que entonces el ímpetu de la partícula $m\mathbf{v}$ es constante, y ahora sabemos que además, su momento angular $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ también es constante. Vea la Fig. 11-10, donde la partícula se mueve en línea recta y con rapidez constante. El radio vector cambia de dirección y magnitud de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ a $\mathbf{r}_3$, etc.; pero la componente en ángulo recto con **v** permanece constantemente igual a $r_{\perp v}$. El vector momento angular **L**, en ángulo recto con **r** y con **v**, no cambia ni en magnitud, ni en dirección, ni en sentido. Nótese en especial que la partícula *no* avanza a lo largo de la dirección de **L**; en realidad nada —ninguna cosa— se mueve en la dirección del vector momento angular.

La tercera situación en la que la torca $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es cero —en la que **r** y **F** tienen la misma dirección pero sentido igual y opuesto (y el ángulo entre ellos es de 0° o de 180°) —ilustrará, en parte, la utilidad de los conceptos del momento angular y de la torca.

Cuando $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$, $d\mathbf{L}/dt = 0$, y

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{constante} \qquad (11\text{-}10)$$

El momento angular de una partícula es constante si la torca que actúa sobre ella se mantiene con el valor de cero. Así, aquí tenemos el caso de una partícula que *no* está aislada, una sobre la cual puede actuar una fuerza de magnitud, dirección y sentido variables; sin embargo, si dicha fuerza siempre apunta contra el origen de **r** o hacia él, la partícula tiene una propiedad física —el momento angular— que no cambia de dirección, sentido ni magnitud. La partícula está aislada de cualquier torca.

Supóngase que escogemos el centro de fuerzas como el origen del radio vector **r**. Entonces, la fuerza siempre apunta hacia dicho origen o en contra de éste. Vea la Fig. 11-11, donde la partícula está unida a uno de los extremos de una banda elástica estirada, con la posición de su otro extremo fijo en el origen *O*. Entonces la

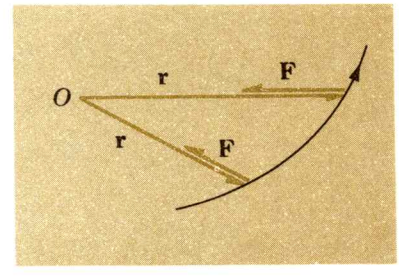


FIG. 11-11 Una partícula está sujeta a una fuerza **F** que siempre está dirigida hacia el origen en *0* y es opuesta al radio vector **r**.

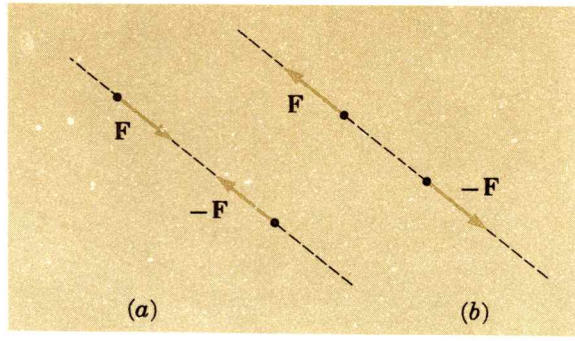


FIG. 11-12. Un par de partículas que interactúan entre sí con (*a*) una fuerza central atractiva y (*b*) una fuerza central repulsiva.

fuerza atractiva producida por la banda estirada apunta siempre hacia el centro de fuerzas en *O;* **r** y **F** siempre tienen la misma dirección pero sentidos opuestos; y el producto cruz **r** × **F** siempre es cero.

Como el momento angular de la partícula es constante, la dirección de $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ permanece perpendicular al plano de **r** y **v**. En realidad, la constancia de **L** obliga a la partícula a moverse en un *solo* plano. Y aunque **r** y **v** pueden cambiar tanto de magnitud como de dirección y sentido, la magnitud del momento angular es constante:

$$r_{\perp v} mv = \text{constante} \qquad (11\text{-}11)$$

donde la cantidad $r_{\perp v}$ se mide desde el mismo origen en *O* y siempre es perpendicular a la velocidad **v**.

Una fuerza entre dos partículas cuya dirección se encuentra a lo largo de la línea que las une recibe el nombre de *fuerza central.* Ejemplos son las fuerzas eléctricas repulsivas entre dos partículas que tengan cargas eléctricas semejantes, la fuerza atractiva entre dos partículas cargadas con cargas eléctricas diferentes, o la fuerza gravitacional entre dos partículas. Vea la Fig. 11-12. Cuando una fuerza central actúa entre un par de partículas, y escogemos el origen que se usa para calcular las torcas y los momentos angulares en la localización de una de las partículas, la que está fija, el momento angular de la otra partícula es constante. En resumen, *una partícula sujeta a una fuerza central tiene un momento angular constante* cuando dicho momento angular se mide con respecto al centro de fuerzas.

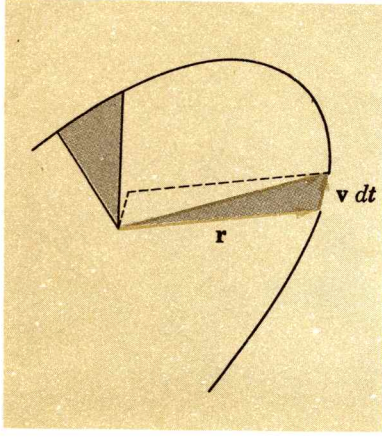


FIG. 11-13. El área *dA* (sombreada) barrida por el radio vector **r** en el tiempo *dt* es igual a $dA = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|\,dt$.

No sólo es constante el momento angular para una partícula sujeta a una fuerza central, sino que también lo es la rapidez con la que barre áreas el radio vector de la partícula que orbita. Considérese la Fig. 11-13, donde en el corto intervalo de tiempo *dt* la partícula se mueve con la velocidad **v** a lo largo de un desplazamiento **v** *dt*. El área *dA* barrida por el radio vector en el intervalo *dt* se indica sombreada en la Fig. 11-13; corresponde a la mitad del área de un paralelogramo con los lados **r** y **v** *dt*. Pero el

área del paralelogramo completo es $|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dt|$, de tal manera que

$$dA = \tfrac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dt|$$

Pero por definición,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

Por lo tanto, en magnitud

$$dA = \frac{1}{2}\frac{L}{m}\, dt$$

y la rapidez dA/dt con la que el radio vector barre el área es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Si la fuerza que actúa sobre una partícula es *central* y por ello el momento angular $\mathbf{L}$ es constante,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{constante} \qquad (11\text{-}12)$$

En forma recíproca, si encontramos a partir de la observación que el movimiento de una partícula es tal que el radio vector barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales, sabremos que el momento angular es constante y que la fuerza sobre ella es *central*. Las observaciones astronómicas muestran que esto es cierto para todos y cada uno de los planetas del sistema solar en su movimiento alrededor del Sol; por lo que, la fuerza gravitacional entre el Sol y cada planeta debe encontrarse a lo largo de la línea que los conecta. En el Cap. 13 se verá más sobre esto.

Ejemplo 11-2

Un objeto pequeño unido a una cuerda de 2.0 m se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. El otro extremo de la cuerda se fija a una estaca. Al principio la cuerda no estaba tirante y el objeto se movía hacia el este a 4.0 m/s, como se indica en la Fig. 11-14. Después se encuentra que el cuerpo se mueve hacia el norte con la cuerda tensa. ¿Cuál es la rapidez en ese instante?

Cuando la cuerda no está tensa, no actúa ninguna fuerza resultante; cuando la cuerda está tirante ejerce una fuerza central. Por lo tanto, el momento angular del objeto relativo a la estaca es constante, y se aplica la Ec. 11-11;

$$mr_{a\perp}v_a = mr_{b\perp}v_b$$

$$v_b = \frac{r_{a\perp}}{r_{b\perp}}v_a = \frac{0.60\text{ m}}{2.0\text{ m}}(4.0\text{ m/s}) = 1.2\text{ m/s}$$

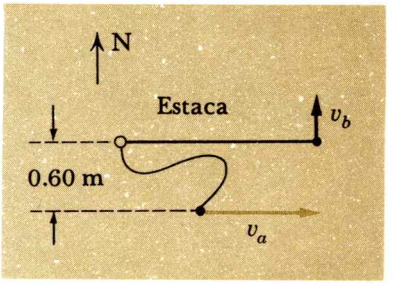


FIG. 11-14. Un cuerpo unido a un extremo de una cuerda floja se mueve hacia el este a partir del punto *a*. El otro extremo de la cuerda se fija a una estaca inmóvil. En el punto *b* la cuerda se pone tirante y el cuerpo se mueve hacia el norte.

11—5 MOMENTO ANGULAR DE UN CUERPO RIGIDO

Nos interesaremos nada más en dos tipos de objetos rígidos giratorios: (1) una lámina de cualquier forma que gira alrededor de un eje perpendicular a ella, o (2) un objeto extenso simétrico que gira alrededor de un eje de simetría, o alrededor de un eje paralelo a un eje de simetría. Bajo estas circunstancias el vector momento angular del objeto se encuentra en la misma dirección que el vector de su velocidad angular. En general, sin embargo, $\mathbf{L}$ no es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$. (véase el Prob. 11-6.)

El momento angular total de un grupo de partículas no es sino el vector suma de los momentos angulares de las partículas separadas. Cuando la posición de cada partícula es fija con respecto a las otras partículas, como en el caso de un cuerpo rígido, todas las partículas tienen la misma velocidad angular alrededor del eje de rotación, y el momento angular del cuerpo rígido toma una forma particularmente simple.

Considérese la partícula i de un cuerpo simétrico giratorio en la Fig. 11-15. Su masa es m_i, su velocidad $\mathbf{v}_i$, y el radio vector $\mathbf{r}_i$ especifica su localización con respecto al eje de rotación. Como la partícula se mueve sobre un círculo de radio $\mathbf{r}_i$, su velocidad $\mathbf{v}_i$ es perpendicular a r_i, y el momento angular de la partícula $\mathbf{L} = \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i$ se encuentra a lo largo de la dirección del vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, paralela al eje de rotación. En magnitud el momento angular de la partícula es

$$L_i = r_i m_i v_i$$

Pero la rapidez de la partícula v_i alrededor del círculo de radio r_i está dada por $v_i = r_i\omega$ [Ec. (4-15)], y la relación anterior se puede escribir en la forma

$$\mathbf{L}_i = m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega}$$

una ecuación *vectorial* en la que se reconoce que $\mathbf{L}_i$ es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$.

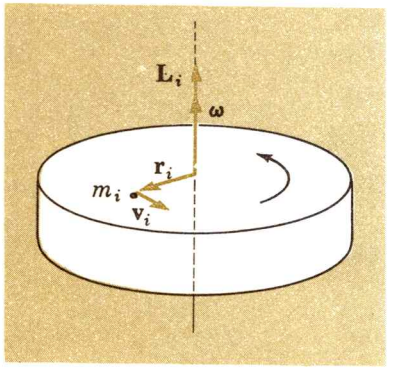


FIG. 11-15. El momento angular $\mathbf{L} = r_i m_i v_i$ de la partícula i de un cuerpo rígido que gira con velocidad angular ω.

Para encontrar el momento angular total de un cuerpo rígido, sumamos el de todas las partículas i que hay en él, recordando que todas las partículas tienen la misma velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

$$\mathbf{L} = \Sigma m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} \qquad (11\text{-}13)$$

La cantidad $\Sigma m_i r_i^2$ por la que se debe multiplicar la velocidad angular para obtener el momento angular se llama *momento de inercia* I del objeto con respecto al eje de rotación:

$$I = \Sigma m_i r_i^2 \qquad (11\text{-}14)$$

La Ec. (11-13) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \qquad (11\text{-}15)$$

Debe enfatizarse que la relación anterior se aplica sólo para un cuerpo rígido que *gira* en forma simétrica alrededor de un eje *fijo*. En su forma es análoga a la relación para el ímpetu lineal de una partícula: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Pero mientras la masa es una propiedad intrínseca de la partícula, y tiene un valor constante independiente del estado de movimiento de la partícula, el momento de inercia $I = \Sigma m_i r_i^2$ depende no sólo de la masa del objeto, sino también de la distribución de la masa relativa al eje de rotación.*

Cuando toda la masa de un cuerpo rígido está a la misma distancia R del eje de rotación, como para la partícula, el anillo y una lámina cilíndrica de la Fig. 11-16*a* a *c*, el momento de inercia es particularmente simple. Con $r_i = R$ para todas las partículas, $I = \Sigma m_i R^2 = MR^2$. Para distribuciones de masa más complicadas, se necesita un cálculo detallado. En el Apéndice VI se indican procedimientos adecuados para calcular los momentos de inercia de objetos de varias formas. En este capítulo fijaremos nuestra atención en las propiedades del momento angular y restringiremos nuestras consideraciones a objetos con formas y momentos de inercia simples: los que se indican en la Fig. 11-16, incluyendo un cilindro circular recto de densidad uniforme, masa M, y radio R, que giran alrededor del eje de simetría, para el cual $I = \frac{1}{2}MR^2$ (comprobado en detalle en el Apéndice VIII:)**

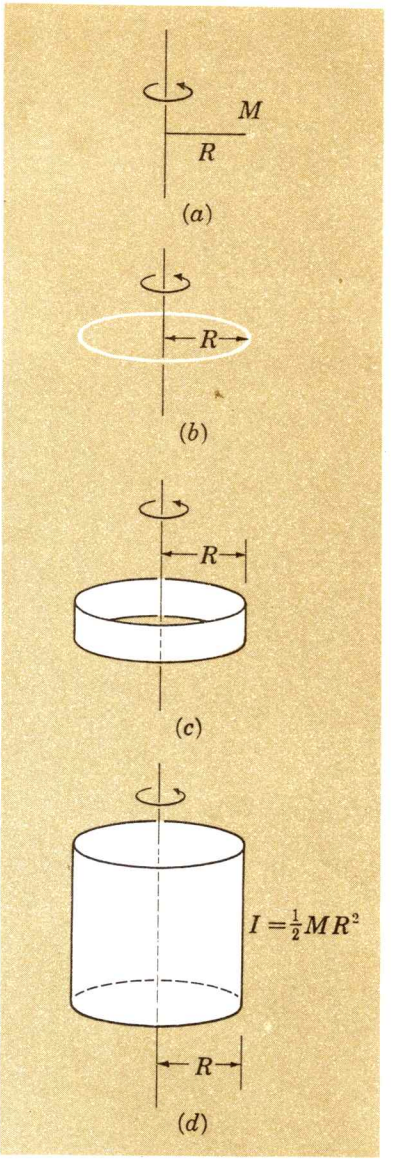


FIG. 11-16. (*a*) Una partícula puntual, (*b*) un anillo circular, y (*c*) una lámina cilíndrica; cada uno de ellos con la masa M y el radio R, tienen el momento de inercia $I = MR^2$ con respecto al eje indicado. (*d*) El momento de inercia de un cilindro giratorio alrededor de su eje de simetría es $I = \frac{1}{2}MR^2$.

11—6 LA ENERGIA CINETICA DE UN CUERPO RIGIDO GIRATORIO

La energía cinética total para cualquier grupo de partículas es

$$K = \Sigma K_i = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$$

Si todas las partículas en el sistema pertenecen a un cuerpo rígido que se encuentra girando con la velocidad angular ω alrededor de un eje fijo, para cada partícula $v_i = r_i\omega$. Entonces la energía cinética total se puede indicar en la forma

$$K = \Sigma K_i = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i (r_i\omega)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(\Sigma m_i r_i^2)\omega^2$$
$$K = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \qquad (11\text{-}16)$$

donde hemos utilizado el hecho de que todas las partículas de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo tienen la *misma* velocidad angular ω. La Ec. (11-16) da la energía cinética de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de rotación *fijo*.

*A veces, el momento angular $r \times mv$ se indica como el *momento del ímpetu*, y la torca $r \times F$ como el *momento de la fuerza*. Es natural entonces la cantidad xi que representa un papel análogo al de la masa, o inercia, la conozcamos como el *momento de inercia*.

**En los ejemplos resueltos y problemas del fin del capítulo intervienen sólo configuraciones de masa como las indicadas en la Fig. 11-16.

Cuando el eje de rotación se mueve, como en el caso de un cilindro que rueda, la Ec. (11-16) ya no da la energía cinética total de las partículas en movimiento. Se debe agregar un término adicional a la relación de la energía cinética, que representa a la energía cinética del centro de masa del sistema.*

La relación para la energía cinética de un objeto giratorio $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ es análoga a la de la energía cinética de una partícula separada $K = \frac{1}{2}mv^2$, donde el momento de inercia I reemplaza a la masa inercial m, y la velocidad angular ω reemplaza a la velocidad lineal.**

Ejemplo 11-3

Una lámina cilíndrica con el radio de 20 cm y la masa de 1.0 kg, gira alrededor de su eje de simetría con la rapidez de 33 rev/min. ¿Cuáles son (*a*) el momento angular y (*b*) la energía cinética del objeto?

(*a*) El momento angular con respecto al eje de rotación es

$$L = I\omega = MR^2\omega$$
$$= (1.0\text{ kg})(0.20\text{ m})^2(33\text{ rev/min})(2\pi\text{ rad/rev})(1\text{ min/60 s})$$
$$= 0.138\text{ kg-m}^2/\text{s}$$

(*b*) Con la energía cinética de un cuerpo giratorio dada por $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ y $L = I\omega$, podemos expresar la energía cinética en la forma

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I}$$

así, para una lámina cilíndrica de masa M y radio R

$$K = \frac{L^2}{2MR^2} = \frac{(0.138\text{ kg-m}^2/\text{s})^2}{2(1.0\text{ kg})(0.20\text{ m})^2}$$
$$= 0.238\text{ J}$$

11—7 LEY DE LA CONSERVACION DEL MOMENTO ANGULAR

Nos interesamos aquí en un grupo de partículas, que no sean por fuerza parte de un cuerpo rígido, que interactúan entre sí y además están sujetas a fuerzas externas. La partícula 1 tiene la masa m_1, la velocidad $\mathbf{v}_1$, y sobre ella actúa la fuerza resultante $\mathbf{F}_1$.

*Para una comprobación vea R. T. Weidner y R. L Sells, *Elementary Classical Physics*, 2a Ed., Sec. 12-7, Allyn and Bacon, 1973.

**La Tabla 12-1 da una lista comprensiva de cantidades mecánicas análogas en el movimiento de translación y el de rotación.

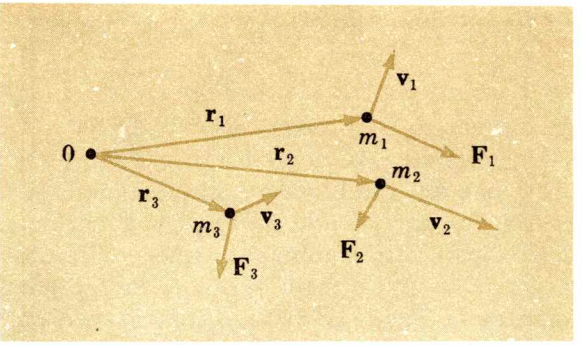


FIG. 11-17. Un grupo de partículas sujetas a fuerzas. La partícula 1 de masa m_1, y la velocidad $\mathbf{v}_1$ tiene un despazamiento $\mathbf{r}_1$ con respecto al origen *0*, y está sujeta a la fuerza resultante $\mathbf{F}_1$. De la misma manera para las partículas 2, 3, ...

El radio vector a la partícula 1 desde un origen escogido de manera arbitraria es $\mathbf{r}_1$. Entonces la torca resultante que actúa sobre la partícula 1 es $\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$, y su momento angular es $\mathbf{L}_1 = \mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{v}_1$. En forma semejante para las partículas 2, 3, etc., que, desde luego, tienen el *mismo* origen para todos los radios vectores, momentos angulares y torcas. Vea la Fig. 11-17.

Aplicando la Ec. (11-6) a cada una de las partículas del sistema, tenemos

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{d\mathbf{L}_1}{dt}$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \frac{d\mathbf{L}_2}{dt}$$

.....

Sumando todas estas ecuaciones se obtiene

$$\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3 + \cdots = \frac{d\mathbf{L}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_3}{dt} + \cdots$$

La resultante de *todas* las torcas es

$$\Sigma\boldsymbol{\tau}_{\text{todas las torcas}} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3 + \cdots$$

y el vector momento angular total del sistema es

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \cdots$$

Por lo tanto, la ecuación anterior para la suma de las torcas se puede escribir en la forma

$$\Sigma\boldsymbol{\tau}_{\text{todas las torcas}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (11\text{-}17)$$

Ahora consideremos dos partículas representativas 1 y 2 que se encuentren en el sistema. Ellas interactúan entre sí por medio de

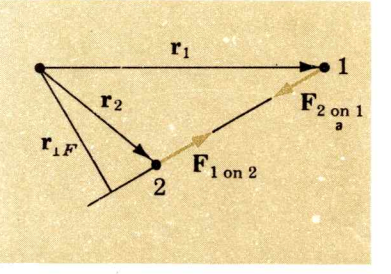


FIG. 11-18. Las partículas 1 y 2 interactúan por medio de una fuerza central. Las torcas de ambas fuerzas tienen el mismo brazo de palanca $r_{\perp F}$, y la torca resultante es cero.

las fuerzas internas $\mathbf{F}_{2\text{ a }1}$ y $\mathbf{F}_{1\text{ a }2}$, cuando

$$\mathbf{F}_{2\text{ a }1} = -\mathbf{F}_{1\text{ a }2}$$

por la tercera ley de Newton. Vea la Fig. 11-18.

Queremos considerar las torcas sobre las partículas 1 y 2 que provienen de la interacción mutua cuando la fuerza de interacción es una fuerza *central,* así $\mathbf{F}_{2\text{ a }1}$ y $\mathbf{F}_{1\text{ a }2}$, no sólo tienen la misma dirección y sentido contrario, sino que también se encuentran a lo largo de la línea recta que une a las partículas 1 y 2. Como muestra la Fig. 11-18, la distancia perpendicular $r_{\perp F}$ desde el origen a la línea común de las dos fuerzas internas es la *misma* para ambas fuerzas. Por lo tanto, la magnitud de la torca $\boldsymbol{\tau}_{2\text{ a }1} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{2\text{ a }1}$ es igual a la magnitud de $\boldsymbol{\tau}_{1\text{ a }2} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{1\text{ a }2}$, debido a que las magnitudes de las fuerzas son iguales. Pero, con la misma dirección, los sentidos de las dos torcas internas son opuestos; aplicando la regla de la mano derecha para los productos cruz, vemos que $\boldsymbol{\tau}_{2\text{ a }1}$ está dirigida hacia atrás del papel, mientras que $\boldsymbol{\tau}_{1\text{ a }2}$ hacia el frente del mismo. Las torcas internas entre las partículas 1 y 2 son iguales y opuestas y su suma es cero:

$$\boldsymbol{\tau}_{2\text{ a }1} + \boldsymbol{\tau}_{1\text{ a }2} = 0$$

Pero si esto se aplica a las partículas 1 y 2 que interactúan a través de una fuerza central, se aplica también a *todos* los pares de partículas que interactúan entre sí por medio de fuerzas centrales. Así, la suma de las torcas *internas* es cero.

$$\Sigma\boldsymbol{\tau}_{\text{torcas internas}} = 0 \qquad (11\text{-}18)$$

Ahora bien, el vector suma de todas las torcas de las partículas del sistema es simplemente igual a la suma de las torcas externas (aquellas que se deben a las fuerzas externas) y las torcas internas (debidas a fuerzas internas *centrales*):

$$\Sigma\boldsymbol{\tau}_{\text{todas las torcas}} = \Sigma\boldsymbol{\tau}_{\text{torcas externas}} + \Sigma\boldsymbol{\tau}_{\text{torcas internas}} \qquad (11\text{-}19)$$

Aplicando las Ecs. (11-18) y (11-19) a la Ec. (11-17) tenemos por último

$$\Sigma\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (11\text{-}20)$$

El vector suma de sólo las torcas *externas* es igual a la rapidez de cambio con respecto al tiempo del momento angular del sistema. Esta es *la* relación fundamental entre el momento angular y la torca. [Es similar a la Ec. (8-16), $\Sigma\mathbf{F}_{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt$, donde $\Sigma\mathbf{F}_{\text{ext}}$ es la resultante de las fuerzas externas sobre cualquier sistema y $\mathbf{P}$ es el ímpetu lineal total del sistema.] El Cap. 12 se dedica, sobre todo a ilustrar su aplicación a cuerpos rígidos en rotación.

Si cierto sistema de partículas está por completo aislado, sin fuerzas externas que actúen sobre él, es claro que la torca resultante externa sobre el sistema es cero, y el momento angular del sistema **L** no cambia de magnitud, dirección ni sentido. Pero, aunque un sistema no esté aislado, y *actúen* sobre él fuerzas externas, el momento angular total del sistema **L** será constante, estipulando que la *torca* resultante de las fuerzas externas sea de cero. A partir de la Ec. (11-20), si

$$\Sigma \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = 0 \quad \text{entonces} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

o

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \cdots = \text{constante} \qquad (11\text{-}21)$$

Esta es la *ley de la conservación del momento angular:* Cualquier sistema de partículas que interactúan entre sí por medio de fuerzas centrales y no está sujeto a una *torca* externa tiene momento angular constante.

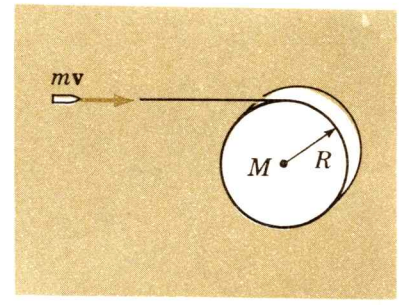


FIG. 11-19. Una bala de masa m y velocidad v se dispara hacia la orilla de un cilindro de masa M y radio R.

Ejemplo 11-4

Una bala de masa m que se mueve con una rapidez de v se dispara hacia la orilla de un cilindro circular derecho de radio R y masa M, como se ve en la Fig. 11-19. El cilindro tiene un eje de rotación fijo horizontal y en un principio se encontraba en reposo. ¿Cuál es la rapidez angular del cilindro después de que la bala quedó empotrada en él?

Nuestro sistema es la bala y el cilindro. Escogemos un punto en el eje del cilindro para calcular torcas y el momento angular. Aunque es claro que actúa una fuerza sobre el cilindro en su eje, tenemos que la torca de esta fuerza es de cero. En consecuencia, el sistema de la bala y el cilindro no está sujeto a torca externa (despreciando la torca debida al peso de la bala), y su momento angular total es constante.

La magnitud del momento angular de la bala antes de golpear el cilindro es Rmv, siendo R la distancia perpendicular entre el punto del eje y la dirección de **v**. Después la bala se captura, el momento de inercia es el del cilindro solo ($\frac{1}{2}MR^2$) más el de la bala (mR^2): $I = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$.

Igualando el momento angular total antes del choque con el posterior a él, tenemos

$$Rmv = (\tfrac{1}{2}M + m)R^2\omega$$

donde ω es la velocidad angular del cilindro, o

$$\omega = \frac{mv}{(\frac{1}{2}M + m)R}$$

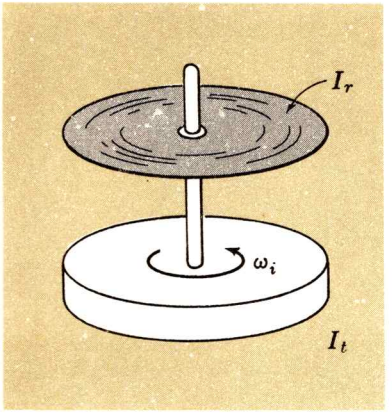


FIG. 11-20. Un disco fonográfico con el momento de inercia I_r cae sobre una tornamesa que tiene el momento de inercia I_t que giraba inicialmente con la velocidad angular ω_i

Ejemplo 11-5

Un disco fonográfico que tiene un momento de inercia I_d con respecto a un eje pasa por su centro, se deja caer sobre una tornamesa que tiene un momento de inercia I_t. La tornamesa al principio giraba con la rapidez angular ω_i como se ve en la Fig. 11-20. (*a*) ¿Cuál es la rapidez angular de la tornamesa y el disco después de que el disco queda en reposo sobre la tornamesa? (*b*) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial se disipa?

Optamos porque nuestro sistema esté formado por el disco y la tornamesa. Suponiendo que la tornamesa gira alrededor de un eje sin fricción, no hay torca resultante sobre el sistema, y su momento angular permanece constante. Designamos la rapidez angular final por ω_f. Entonces la conservación del momento angular requiere que

$$I_t\omega_i = (I_d + I_t)\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I_t}{I_d + I_t}\omega_i$$

Nótese que actúan torcas *internas* dentro del sistema. El disco produce una torca friccional sobre la tornamesa, retardándolo, y la tornamesa produce una torca friccional sobre el disco, acelerándolo. La suma de estas dos torcas es cero en todos los instantes.

(*b*) La energía cinética inicial es

$$K_i = \tfrac{1}{2}I_t\omega_i^2$$

y la energía cinética final es

$$K_f = \tfrac{1}{2}(I_d + I_t)\omega_f^2$$

Su relación es, teniendo en cuenta el valor de ω_f visto antes

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\tfrac{1}{2}(I_d + I_t)\omega_f^2}{\tfrac{1}{2}I_t\omega_i^2} = \frac{I_t}{I_d + I_t}$$

Como K_f/K_i siempre es menor que 1, parte de la energía cinética inicial se disipa en lo que podríamos llamar un "choque rotacional inelástico". Esto es en todo análogo a un choque inelástico ordinario, en el que dos objetos se mantienen juntos después del choque; el ímpetu lineal del sistema es constante, pero la energía cinética disminuye. Aquí también la energía cinética decrece debido a una fuerza no conservativa, la fuerza de fricción que actúa entre los dos objetos giratorios, pero ahora es el momento angular del sistema el que permanece constante.

Resumen

El momento angular **L** de una partícula con ímpetu lineal $m\mathbf{v}$ respecto al origen del radio vector **r** es

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \qquad (11\text{-}5)$$

La torca $\boldsymbol{\tau}$ de una fuerza **F** relativa al origen del radio vector **r** es

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{11-4}$$

Para una partícula separada, la torca de la fuerza resultante que actúa sobre ella, es igual a la rapidez de cambio con respecto al tiempo del momento angular de la partícula:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{11-6}$$

Cuando una partícula está sujeta a una fuerza central, su momento angular con respecto al centro de fuerzas es constante. En forma equivalente, el radio vector que parte del centro de fuerzas y llega a la partícula que orbita, barre áreas iguales en tiempos iguales:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \tag{11-12}$$

Cuando un cuerpo rígido gira simétricamente alrededor de un eje fijo con la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ su momento angular de rotación es

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \tag{11-15}$$

y su energía cinética es

$$K = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \tag{11-16}$$

donde el momento de inercia I con respecto al eje de rotación es

$$I = \Sigma m_i r_i^2 \tag{11-14}$$

Para cualquier sistema de partículas que interactúan entre sí por medio de fuerzas centrales,

$$\Sigma \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{11-20}$$

donde **L** es el momento angular total y $\Sigma\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ es la torca resultante externa sobre el sistema.

De acuerdo con la ley de la conservación del momento angular, el momento angular total es constante cuando la torca resultante sobre el sistema es cero.

PROBLEMAS

11-1. Un lanzador de béisbol arroja una pelota de 160 g hacia la placa con una rapidez de 30 m/s. En el instante de soltar la pelota, ésta se encuentra a 60 cm de su hombro. ¿Cuál es la magnitud y *dirección* del momento angular dado a la pelota (con respecto al hombro)? Suponga que la trayectoria de la pelota se encuentra confinada al plano vertical.

11-2 ¿Cuál es la magnitud, dirección y sentido del momento angular de una partícula de 1.0 kg con respecto al origen de coordenadas, si sus coordenadas X e Y y las componentes de su velocidad en el plano XY $(x, y; v_x, v_y)$ son: (*a*) (3.0 m, 2.0 m; 6.0 m/s, 2.0 m/s); (*b*) (− 2.0 m, 1.0 m; 1.0 m/s, 3.0 m/s); y (*c*) (2.0 m, −3.0 m; 3.0 m/s, 4.0 m/s).

11-3. Una partícula de 2.0 kg tiene un momento angular de 12.0 J — s en la dirección y el sentido positivo de Z con respecto al origen de coordenadas, cuando se mueve en la dirección y con el sentido negativo de Y con la rapidez de 4.0 m/s. ¿Dónde se encuentra la partícula en ese instante?

11-4. Una partícula de 2.0 kg primero estaba en la localización x = 10.0 m y y = 0 m. Dicha partícula está sujeta a una fuerza constante de 6.0 N en la dirección y el sentido negativos de Y. Con respecto al punto (4.0 m, 0 m), (*a*) ¿Cuál es el momento angular de la partícula y (*b*) la torca que actúa sobre la partícula, ambas en función del tiempo? (*c*) Demuestre que para este ejemplo particular la torca es igual a la rapidez de cambio con respecto al tiempo del momento angular.

11-5. Un sistema está formado por dos partículas de 1.0 kg masa. Una partícula se mueve hacia el norte con la rapidez constante de 4.0 m/s; la segunda partícula se mueve hacia el sur con la misma rapidez constante en el mismo plano horizontal, la distancia de separación entre las líneas de las dos velocidades es de 3.0 m. ¿Cuál es la dirección, sentido y magnitud del momento angular del sistema con respecto a *cualquier* punto?

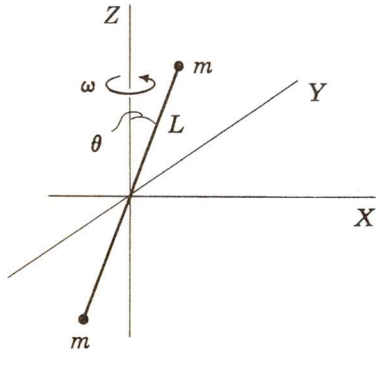


FIG. P11-6. Ejemplo de un sistema cuya velocidad angular ω *no* es paralela a su momento angular **L**.

11-6. La Fig. P11-6 muestra dos partículas de masa m unidas a los extremos de una varilla rígida sin masa de largo L y orientada en un ángulo constante θ con respecto al eje Z. La varilla gira con la velocidad angular ω a lo largo de la dirección y el sentido positivo de Z. (El eje de rotación *no* se encuentra a lo largo del eje de simetría de la varilla.) ¿Cuál es la dirección, sentido y magnitud del momento angular del sistema en el instante en que la varilla pasa por el plano XZ, como se muestra en la figura? (Nótese que el vector momento angular *no* se encuentra a lo largo de la dirección del vector velocidad angular.)

11-7. Demuestre que, con respecto a los ejes X, Y y Z, las componentes del momento angular de una partícula de masa m que pasa por el punto x, y, y z con las componentes de velocidad v_x, v_y, y v_z son:

$$L_x = m(yv_z - zv_y)$$

$$L_y = m(zv_x - xv_z)$$

$$L_z = m(xv_y - yv_x)$$

11-8. Una partícula está sujeta a una fuerza central atractiva que proviene de un centro de fuerzas fijo Demuestre que, a menos de que la partícula se dirija en algún instante directamente al centro de fuerzas, nunca llegará a él.

11-9. Una partícula de masa m se arroja en el aire con una velocidad inicial v_0 en un ángulo θ con respecto a la horizontal. ¿Cuál es el momento angular de la partícula y la torca debida al peso de la partícula, ambos con respecto al punto en que se lanzó la partícula, cuando (*a*) la partícula se encuentra en su punto más alto y (*b*) cuando la partícula se encuentra a la misma elevación vertical que al principio?

11-10. De acuerdo con la teoría cuántica, todos los momentos angulares ocurren para múltiplos enteros de 1.1×10^{-34} J — s (constante de Planck dividida entre 2π) ¿Qué número de cuantos de momento angular como éstos tiene un electrón (masa, 9.1×10^{-31} kg) que se mueve en un círculo de 5.3×10^{-11}m de radio a una frecuencia de 6.6×10^{15} Hz? (Estas son las circunstancias para un átomo de hidrógeno en su estado más bajo de energía, de acuerdo con la teoría atómica de Bohr.)

11-11. Un péndulo simple está formado por una esfera de 1.0 kg suspendida de uno de los extremos de una cuerda de 1.0 m de largo. En su desplazamiento máximo, la cuerda forma un ángulo de 60° con la

vertical. Encuentre el valor máximo del momento angular de la esfera al centro de su arco. Considere que $g = 10$ m/s^2.

11-12. Un satélite terrestre de 1.0×10^3 kg se encuentra en órbita a una altura de 100 km y completa una vuelta en 86.4 min. Encuentre (*a*) la rapidez orbital y (*b*) el momento angular orbital del satélite en relación al centro de la Tierra. El radio de la Tierra es de 6.37×10^6 m.

11-13. Una cuerda larga y flexible se enrolla alrededor de un cilindro pesado que puede girar libremente sobre un eje horizontal que coincide con su eje de simetría. Al principio el cilindro, que tiene 30.0 cm de diámetro, se encontraba estacionario. Se aplica a la cuerda una fuerza estable de 20.0 N — siendo esta fuerza tangencial al cilindro y perpendicular al eje. Como resultado se desenrolla una longitud de 12.0 m de cuerda en 10.0 s. Encuentre (*a*) el momento de enercia del cilindro y (*b*) su masa (considerando que su densidad es uniforme). (*c*) ¿Cuál es la rapidez final del cilindro?

11-14. Una masa m se desliza en un círculo de radio r sobre una superficie lisa horizontal. La masa está atada a una cuerda que pasa por un agujero en el centro del círculo; el otro extremo de la cuerda está atado a la masa M, como se indica en la Fig. P11-14. (*a*) ¿Cuál es la rapidez de la masa m? (*b*) ¿Cuál es

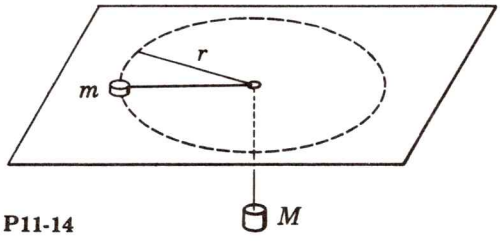


FIG. P11-14

el momento angular de m? (*c*) Si la masa M se jala hacia abajo poco a poco una distancia y, ¿cuál es entonces la rapidez de m? (*d*) ¿Qué trabajo se hizo al jalar la masa M hacia abajo en la parte (*c*)?

11-15. Una molécula diatómica se puede considerar como si tuviera una estructura como la de una palanqueta de gimnasia en la que las partículas de masas m_1 y m_2 se encuentran unidas a una varilla sin masa de largo r. (*a*) Demuestre que el momento angular de una molécula que gire alrededor de un eje que pasa por el centro de masa y perpendicular al eje interatómico está dado por $L = \mu r^2 \omega$, donde μ, la llamada masa reducida, es $m_1 m_2 \div (m_1 + m_2)$ y ω es la rapidez angular. (*b*) Demuestre que la energía cinética de rotación está dada por $K = \frac{1}{2}\mu r^2 \omega^2 = L^2/2\mu r^2$.

11-16. Considérese el momento angular de dos partículas, cada una de ellas de masa m, sobre puntos diametralmente opuestos en un anillo de radio R, como se indica en la Fig. P11-16. Las dos partículas

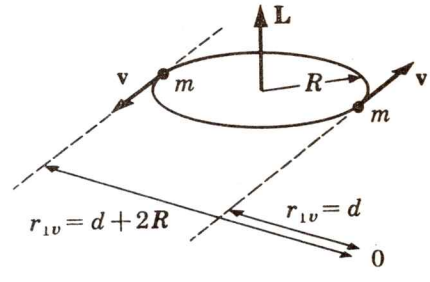


FIG. P11-16

se mueven en la misma dirección pero con sentidos opuestos, cada una con la rapidez v, en un círculo de radio R. Con respecto a un origen arbitrario O, la partícula más cercana tiene $r_{\perp v} = d$, y una magnitud del momento angular de dmv; su momento angular está dirigido hacia abajo (*a*) Demuestre que la magnitud del momento angular de la partícula más alejada es $(d + 2R)mv$, y (*b*) demuestre que el momento angular neto del par de partículas es

$$L = R(2m)v \quad \text{(hacia arriba)}$$

Note que la distancia d no aparece. La magnitud, dirección y sentido del momento angular de este par de partículas localizadas simétricamente, depende sólo de su masa m, la distancia r del eje de rotación, y de la rapidez v. Como cualquier objeto simétrico que gira alrededor de su eje de simetría, se puede considerar como un grupo de pares de partículas en la forma en que se encuentra la Fig. P11-16, el momento angular de un objeto giratorio como tal — su *momento angular de giro* — es una propiedad intrínseca del objeto; el momento angular de giro es *independiente* del punto con respecto al cual se mide el momento angular.

Se puede encontrar que para cualquier sistema de partículas, el momento angular total se puede expresar como la suma de dos partes: el momento

angular de todas las partículas medido con respecto a un origen en el centro de masa, **L** con respecto al CM' y el que se puede designar como el momento angular del centro de masa, $\mathbf{L}_{\text{del CM}}$.

$$\mathbf{L}_{\text{total}} = \mathbf{L}_{\text{con respecto al}}\ \text{CM} + \mathbf{L}_{\text{del}}\ \text{CM}$$

El último término vale $\mathbf{L}_{\text{del CM}} = \mathbf{R} \times M\mathbf{V}$, donde **R** es el radio vector desde el origen escogido hasta el centro de masa del sistema, M es la masa del sistema completo, y **V** es la velocidad del centro de masa.

Para un objeto simétrico que gire alrededor de un eje interno, y que tiene un movimiento de translación,

$$\mathbf{L}_{\text{con respecto al}}\ \text{CM} = \mathbf{L}_{\text{giro}}$$

y el momento angular que resta, proveniente del movimiento sobre la órbita del objeto completo, se llama su *momento angular orbital,* $\mathbf{L}_{\text{orbital}}$.

$$\mathbf{L}_{\text{del}}\ \text{CM} = \mathbf{L}_{\text{orbital del}}\ \text{CM} = \mathbf{R} \times M\mathbf{V}$$

11-17 Calcule (*a*) el momento angular de giro y (*b*) el momento angular orbital de la Tierra. El giro de la Tierra se asocia con su rotación diaria alrededor del diámetro polar norte-sur, y su movimiento orbital no es sino su rotación anual alrededor del Sol. (Consulte las Tablas 13-1 y 13-2 para los datos astronómicos.)

11-18. Un patinador en hielo, de 60 kg, se agarra a una cuerda atada a un poste fijo relativamente delgado. Al principio la cuerda tenía 8.0 m de longitud y el patinador recorría un círculo de 8.0 m de radio con la rapidez de 1 m/s. A medida que el patinador continúa moviéndose, la cuerda se enrolla en el poste hasta que su longitud hasta el patinador es de 2.0 m. (*a*) Entonces, ¿cuál es la rapidez del patinador? (*b*) Si la cuerda se encuentra unida al poste por medio de una argolla, por lo que no se enreda en él, y la longitud de la cuerda entre el poste y el patinador se redujo poco a poco porque el patinador la va jalando, ¿cuál será la rapidez del patinador cuando la longitud de la cuerda es de 2.0 m?

11-19. Cuando su temperatura aumenta, un cuerpo que gira libremente aumenta sus dimensiones lineales 3 partes en 10^5. ¿En qué fracción se reduce su rapidez angular?

11-20. Dos partículas con carga eléctrica interactúan por medio de una fuerza repulsiva *central* la magnitud de cuya energía potencial está dada por K/r, donde K es una constante y r la distancia entre las dos partículas. En la Fig. P11-20 vemos una partícula cargada de masa pequeña m, que se movía primero con la rapidez v_i cuando se encontraba lejos de una segunda partícula cargada de masa en esencia infinita (el centro de fuerzas). Si no hubiera una fuerza repulsiva que la desviara, la partícula ligera pasaría a una distancia d_i de gran masa. ¿Cuál es la distancia de separación mínima entre las dos partículas $d_{\text{mín}}$?

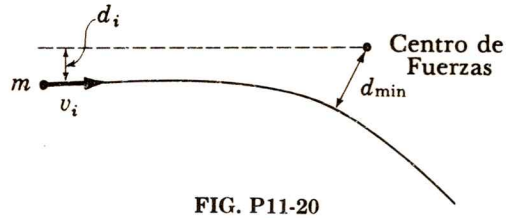


FIG. P11-20

11-21 Uno de dos discos coaxiales giraba al principio, con una rapidez angular de 120 rev/min. Su momento de inercia es de 10.0 kg-m². El segundo disco, que tiene el momento de inercia de 50.0 kg-m² y que se encontraba primero en reposo, se comprime con el disco giratorio por medio de una especie de embrague. (*a*) ¿Cuál es la rapidez angular final común a los dos discos? (*b*) ¿Cuánta energía se disipa por el embrague? (*c*) ¿Depende la cantidad total de energía disipada de que los discos se junten lenta o rápidamente?

11-22. La ley de la conservación del momento angular se demuestra algunas veces con una plataforma horizontal que gira con libertad sobre la que corre un tren eléctrico de juguete por rieles casi circulares. Supóngase que un tren con la masa de 8.0 kg corre alrededor de los rieles de 0.75 m de radio sobre la plataforma cuyo momento de inercia con respecto al eje vertical en su centro es de 3.0 kg-m². El tren y la plataforma al principio estaban en reposo. En seguida, el tren se pone en movimiento, siendo 0.20 m/s su rapidez relativa a los rieles. (*a*) ¿Cuál es la rapidez angular de la plataforma con respecto al piso? (*b*) ¿Cuál es el momento angular del tren con respecto al piso? (*c*) ¿Cuál es el momento angular del tren con relación a la tierra? (*d*) ¿Cuál es la rapidez angular de la plataforma con relación al piso después de que el motor del tren deja de funcionar y el tren queda en reposo con respecto a los rieles? (*e*) ¿Se conserva el momento angular si las ruedas del tren se deslizan en los rieles?

11-23. Una partícula de masa m se une a uno de los extremos de un resorte que al estar relajado tiene la longitud l_0 y cuya constante de fuerza es k. El otro extremo del resorte se encuentra fijo. La partícula se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. Vea la Fig. P11-23. Primero el resorte se encuentra

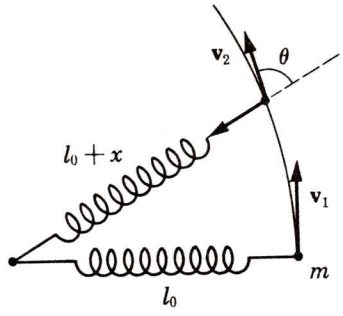


FIG. P11-23

relajado, y la velocidad de la partícula $\mathbf{v}_1$ es perpendicular al eje largo del resorte. En un cierto tiempo posterior, la partícula llega a la posición 2: donde la longitud del resorte es $l_0 + x$, y la velocidad de la partícula $\mathbf{v}_2$, siendo θ el ángulo que forma la dirección de $\mathbf{v}_2$ y el eje largo del resorte. Aplicando las leyes de conservación de la energía y el momento angular, demuestre que

$$v_2 = (v_1^2 - kx^2/m)^{1/2}$$

y que $$\operatorname{sen}\theta = \frac{v_1}{(1 + x/l_0)(v_1^2 - kx^2/m)^{1/2}}$$

11-24. Una bala de 50 g que se movía en sentido horizontal a 300 m/s penetra un cilindro vertical de madera de 10.0 kg y emerge de él con la rapidez de 60 m/s. Como consecuencia de esto, el cilindro — al principio en reposo — adquiere una rotación alrededor de su eje de simetría (vertical), vea la Fig. P11-24. El radio del cilindro es de 15.0 cm, y la trayectoria de la bala pasa a un lado del eje a 12.0 cm de él. Encuentre la rapidez angular del cilindro después de que la bala emerge de él.

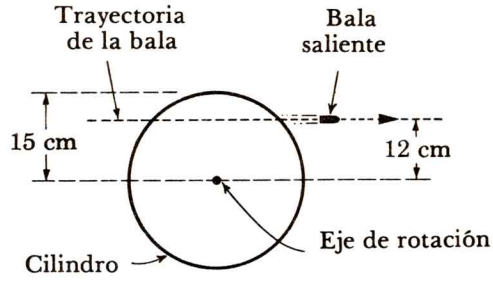


FIG. P11-24

11-25. Un giroscopio se hace girar alrededor de su eje de simetría que inicialmente se encuentra en un plano horizontal. El giroscopio se encuentra sostenido en uno de los extremos de su eje por medio de un poste vertical. Vea la Fig. P11-25, donde el momento angular de giro instantáneo se identifica por $\mathbf{L}_0$. (*a*)

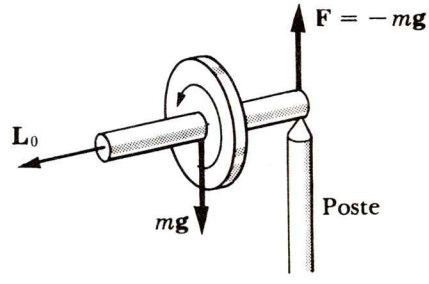


FIG. P11-25

Identifique la dirección de τ, la torca gravitacional instantánea ejercida sobre el giroscopio; calcule τ con respecto al punto de soporte del giroscopio. (Note que τ *siempre* es perpendicular a $\mathbf{L}_0$.) (*b*) Dibuje un diagrama vectorial (en el plano horizontal) que demuestre el *cambio* en el momento angular, $\Delta\mathbf{L}$, que se presenta en un intervalo de tiempo corto, Δt. (*c*) Demuestre que $\Delta\mathbf{L} = \tau\,\Delta t$ y que las direcciones relativas de $\mathbf{L}_0$ y $\Delta\mathbf{L}$ son tales que indican que el giroscopio giratorio como un todo gira en un plano horizontal alrededor de su punto de apoyo. Este movimiento se conoce como *precesión*. (*d*) Use las relaciones geométricas contenidas en su diagrama para demostrar que la frecuencia angular de la precesión está dada por $\omega_p = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\phi/\Delta t = \tau/L_0$.

11-26. Una mujer camina hacia el este llevando una maleta en la que un objeto masivo gira con libertad sobre pivotes unidos a dicha maleta. La velocidad angular del objeto giratorio se encuentra en la dirección oeste. ¿Qué pasará a la maleta si la mujer da vuelta hacia (*a*) el norte y (*b*) hacia el sur? (No intente resolver este problema sin entender primero el Prob. 11-25.)

Capítulo

12

DINAMICA DE LA ROTACION

En este capítulo desarrollaremos la dinámica de la rotación de los cuerpos rígidos. Esto consiste nada más en aplicar las relaciones básicas que se refieren al momento angular y a la torca a objetos que no presentan deformaciones. Además, para llegar a la forma de la segunda ley de Newton para la rotación, derivaremos la forma del teorema del trabajo-energía que sea aplicable a la rotación, definiremos el centro de gravedad y consideraremos las condiciones generales para el equilibrio del cuerpo rígido

12—1 CINEMATICA DE LA ROTACION

Como todas las rotaciones que se van a considerar en este capítulo serán alrededor de ejes perpendiculares al plano del papel, es suficiente considerar la velocidad angular como una cantidad algebraica, sin tener en cuenta sus propiedades vectoriales (Sec. 11-1). Por definición la velocidad angular ω de *todas* las partículas de un cuerpo perfectamente rígido que gira es

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (4\text{-}14),(12\text{-}1)$$

la rapidez de cambio con respecto al tiempo del desplazamiento angular. La ω positiva significa una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, mientras que la ω negativa tiene el mismo sentido en que se mueven éstas. Las unidades apropiadas para ω son rad/s.

Si la rapidez de la rotación de un objeto giratorio cambia, adquiere una aceleración angular. La aceleración angular instantánea α se define como la rapidez de cambio con respecto al tiempo de la velocidad angular:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{12-2}$$

Una aceleración angular positiva implica que la velocidad de rotación crece en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (o, en forma equivalente, decrece en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj). Para $\alpha = 0$, el cuerpo gira a ω constante. Las unidades en que se da la aceleración angular son rad/s^2. La velocidad angular y la aceleración angular tienen las dimensiones T^{-1} y T^{-2}, en este orden.

Las Ecs. (12-1) y (12-2) que relacionan la velocidad angular ω y la aceleración angular α con el desplazamiento angular θ y el tiempo t, son análogas a las relaciones entre el desplazamiento lineal x, la velocidad lineal v y la aceleración lineal a. Por lo que podemos llegar a las ecuaciones cinemáticas que describan el movimiento de rotación con aceleración *constante* a partir de las ecuaciones de la cinemática lineal para aceleración lineal *constante*. Simplemente reemplazamos

$$x \quad \text{por} \quad \theta$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{por} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{por} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Así, para *aceleración angular constante,* las ecuaciones cinemáticas para la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo, que se deducen de modo directo de las ecuaciones cinemáticas para aceleración lineal constante análogas, se indican enseguida.

	Aceleración lineal constante a	*aceleración angular constante α*	
(3-6)	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(12-3)
(3-7)	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(12-4)
(3-9)	$x - x_0 = \frac{(v_0 + v)t}{2}$	$\theta - \theta_0 = \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}$	(12-5)
(3-10)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	(12-6)

Desde luego que podemos derivar las Ecs. (12-3) a (12-6) a partir de definiciones, Ecs. (12-1) y (12-2), por intergación en la misma forma que se hizo en la Sec. 3-5. El desplazamiento angular inicial ($t = 0$) es θ_0, y la velocidad angular inicial es ω_0.

Aunque todas las partículas de un cuerpo rígido girarán el mismo ángulo θ y tienen, en cualquier instante, las mismas ω y α, sus rapideces *lineales* y aceleraciones a lo largo de los arcos circulares en los que se mueven difieren de acuerdo con sus distancias relativas al eje de rotación.

La rapidez *tangencial* v_t de una partícula a la distancia r del eje de rotación de un objeto que gira con la velocidad angular ω es

$$v_t = r\omega \qquad \text{(4-15),(12-7)}$$

Cuando ω cambia con el tiempo, lo mismo sucede con la rapidez v_t. Determinamos la aceleración *tangencial* a_t tomando la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (12-7):

$$\frac{dv_t}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

o

$$a_t = r\alpha \qquad \text{(12-8)}$$

Al usar las Ecs. (12-7) y (12-8) para cálculos, es importante tener en cuenta que w debe darse en radianes por unidad de tiempo y α en radianes por unidad de tiempo al cuadrado.

Cualquier partícula en movimiento en un círculo siempre tiene una aceleración radial hacia el centro a_r, donde

$$a_r = \omega^2 r = \frac{v_t^2}{r} \qquad \text{(4-16)}$$

así, la aceleración total de una partícula que se mueve en un círculo que corresponde a una componente tangencial a_t y una componente perpendicular radial a_r, tiene la magnitud $(a_t^2 + a_r^2)^{1/2}$.

Ejemplo 12-1

Una rueda que giraba primero a 60 rev/min se llevó al reposo en 10 s. (*a*) ¿Cuál es la aceleración angular de la rueda, suponiendo que es constante? (*b*) ¿Cuántas vueltas da la rueda hasta que queda en reposo?

(*a*) Tenemos por la Ec. (12-3)

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Aquí $\omega_0 = (60 \text{ rev/min})\,(2\pi \text{ rad/rev})\,(1 \text{ min}/60 \text{ s}) = 2\pi \text{ s}^{-1}$, y $\omega = 0$ cuando $t = 10$ s.

$$\alpha = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{2\pi \text{ s}^{-1}}{10 \text{ s}} = -\tfrac{1}{5}\pi \text{ s}^{-2}$$

El signo menos indica que la rapidez de giro del objeto que está en rotación es decreciente.

(*b*) Para determinar el desplazamiento angular total θ, usamos la Ec. (12-5), tomando a θ_0 con el valor de cero.

$$\theta - \theta_0 = \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}(2\pi \text{ s}^{-1})(10 \text{ s})\,\frac{1 \text{ vuelta}}{2\pi \text{ rad}} = 5.0 \text{ vueltas}$$

12—2 LA SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA LA ROTACIÓN

Como se indica en el Cap. 11, el momento angular L y la energía cinética K de un objeto sólido que gire simétricamente con la velocidad angular ω son

$$L = I\omega \qquad \text{(11-15),(12-9)}$$

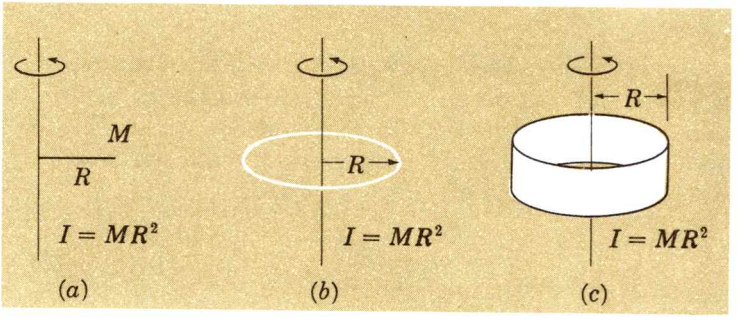


FIG. 12-1. Momentos de inercia para varias formas sencillas, todas de densidad constante: (*a*) una partícula punto, (*b*), un anillo circular, (*c*), una lámina cilíndrica.

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{(11-16),(12-10)}$$

donde el momento de inercia I es, por definición,

$$I = \Sigma m_i r_i^2 \qquad \text{(11-14),(12-11)}$$

Sumamos las contribuciones de cada partícula de masa m_i y a la distancia r_i del eje de rotación para encontrar el momento de inercia de un cuerpo rígido. Así el momento de inercia depende no sólo de la masa del objeto, sino también de la distribución de la masa en relación a la línea escogida como eje de rotación. Es claro entonces, que aun para un objeto separado, el momento de inercia depende de la elección del eje de rotación.

Para las tres formas sencillas indicadas en la Fig. 12-1*a* a *c*, donde *toda* la masa se encuentra a la *misma* distancia R del eje,

$$I = MR^2$$

El momento de inercia I_{CM} de cualquier objeto con respecto a un eje que pase por su centro de masa se relaciona en una forma sencilla con el momento de inercia I con respecto a otro eje paralelo:

$$I = I_{CM} + Md^2 \qquad (12\text{-}12)$$

donde M es la masa total y d es la distancia entre los dos ejes paralelos. Vea la Fig. 12-2. Esto es lo que se llama teorema de los ejes paralelos para el momento de inercia.* Como lo indica la Ec. (12-12), el momento de inercia con respecto a un eje que pase por el centro de masa es mínimo; para cualquier otro eje paralelo, claramente $I > I_{CM}$. Vea el Apéndice VIII para procedimientos detallados que pueden ser usados en el cálculo del momento de inercia.

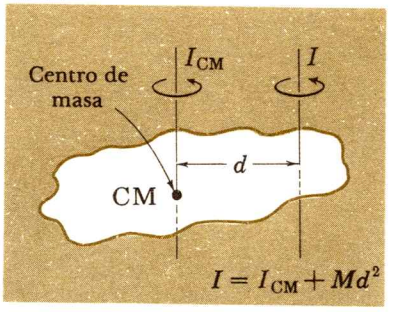


FIG. 12-2. Ilustración del teorema de los ejes paralelos. El momento de inercia con respecto a un eje que pase por el centro de masa es I_{CM}; el momento de inercia I con respecto a un eje paralelo separado una distancia d es $I_{CM} + Md^2$, donde M es la masa del objeto.

Cualquier cambio en la posición de un cuerpo rígido es una combinación de su translación a través del espacio y su rotación alrededor de un eje. El *movimiento de traslación* del centro de masa del objeto se controla por las *fuerzas externas* que actúan sobre el:

$$\Sigma \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{A} \qquad (8\text{-}15),(12\text{-}13)$$

donde M es la masa total y $\mathbf{A}$ la aceleración del centro de masa.

Como se indicó en la Sec. 11-7, la torca externa resultante sobre un sistema de partículas determina la rapidez de cambio con respecto al tiempo del momento angular total del sistema L:

$$\Sigma \boldsymbol{\tau}_{ext} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (11\text{-}20),(12\text{-}14)$$

Recordando que las fuerzas internas y las torcas internas (para fuerzas centrales) suman cero.

Ahora bien, si el sistema está formado por un cuerpo rígido, su momento angular** es

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \qquad (11\text{-}15)$$

y si el objeto es en verdad rígido, y todas las partículas que se encuentran dentro de él permanecen en localizaciones fijas relativas a todas las demás partículas, el momento de inercia I es una *constante*. Por lo que,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha}$$

y la Ec. (12-14) puede escribirse en la forma

$$\Sigma \boldsymbol{\tau}_{ext} = I\boldsymbol{\alpha} \qquad (12\text{-}15)$$

---

*Para una prueba detallada véase R. T. Weidner y R. L. Sells, *Elementary Classical Physics*, 2a. Ed., Sec. 12-7, Allyn and Bacon, 1973.

**Como se hizo patente antes en el Cap. 11, estamos restringiendo nuestro tratamiento a objetos rígidos cuyo momento angular es *paralelo* a su velocidad angular. Esto implica que el objeto es una lámina de cualquier forma, que gire alrededor de un eje perpendicular a ella, o un objeto extenso simétrico que gire alrededor de su eje de simetría.

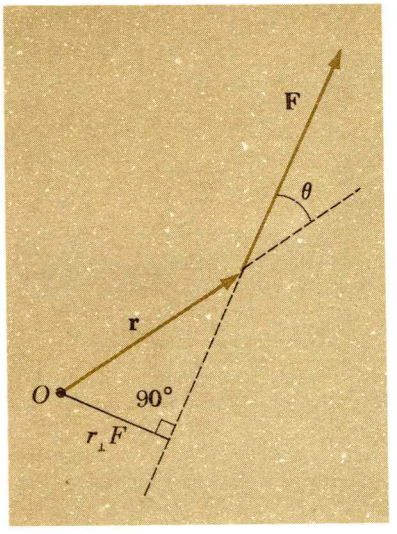


FIG. 12-3. La magnitud de la torca de la fuerza **F** relativa al origen O es $\tau = r_{\perp F}F = rF \operatorname{sen}\theta$.

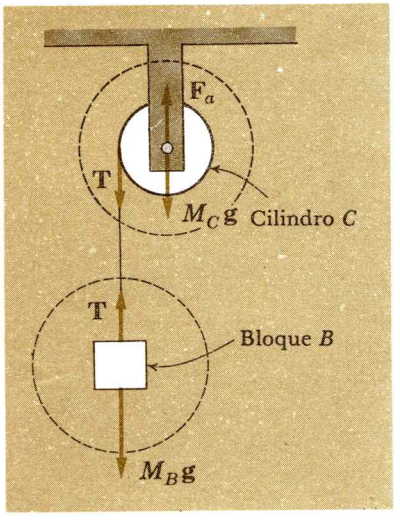


FIG. 12-4. Fuerzas que actúan sobre un cilindro y un bloque. El cilindro puede girar libremente alrededor de su eje de simetría. El bloque desciende, desenrollándose la cuerda —que está enrollada alrededor del cilindro— y gira el cilindro. Las líneas punteadas indican los límites de los cuerpos considerados por separado.

Aunque la Ec. (12-15) es una ecuación vectorial, usaremos su forma algebraica para torcas, ejes de rotación, y aceleraciones angulares, todas perpendiculares al plano del papel. Debe enfatizarse que, al aplicar la Ec. (12-15), las torcas, los momentos de inercia y las aceleraciones angulares, todos se miden en relación al eje de rotación.

Recordando que la torca τ de la fuerza **F**; $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, tiene una magnitud dada por

$$\tau = r_{\perp F}F \tag{11-7}$$

donde F es la magnitud de la fuerza y $r_{\perp F}$ es la distancia desde el origen de **r**, o del eje de la torca a la línea de acción de **F**. A veces se usa el término *brazo de momento*, o *brazo de palanca* para denotar a $r_{\perp F}$. Como indica la Fig. 12-3, la magnitud de la torca puede indicarse también como $\tau = rF \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre **r** y **F**. Tomamos las torcas en contra del movimiento de las manecillas del reloj como positivas, y las del mismo sentido que ellas, como negativas.

En realidad podemos usar *la segunda ley de Newton del movimiento para la rotación*, $\Sigma\tau_{\text{ext}} = I\alpha$, cuando el eje de rotación está fijo a un marco inercial. Esta relación también es válida cuando el eje de rotación se mueve con velocidad constante. ¿Qué hay con respecto a la situación en la que un cuerpo rígido *acelera* su movimiento de traslación? Curiosamente, aquí *podemos* de nuevo aplicar con propiedad la misma relación si las torcas, momento de inercia, y aceleración angular se miden en relación al *centro de masa* del cuerpo acelerado. Para mayor seguridad, la segunda ley de Newton, incluyendo ahora la Ec. (12-15), se aplica sólo en un marco inercial. Pero la suma de las fuerzas inerciales es equivalente a una sola fuerza inercial que actúa sobre el centro de masa del sistema, y esta fuerza tiene una torca nula relativa al centro de masa.

Ejemplo 12-2

El bloque B de masa M_B está atado a una cuerda inextensible sin masa que está enrollada en un cilindro circular recto C. El cilindro puede girar libremente alrededor de un eje que pasa por su eje de simetría. El eje tiene una posición fija, suspendido de un soporte superior. Vea la Fig. 12-4. (*a*) ¿Cuál es la aceleración lineal del bloque? (*b*) ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

(*a*) El bloque se mueve hacia abajo en respuesta a las fuerzas que actúan sobre él, y el cilindro gira cuando la cuerda se desenrolla. Primero aislamos cada uno de los dos cuerpos, como se indica con las líneas punteadas en la Fig. 12-4, y en seguida se indican *todas* las fuerzas que actúan sobre cada objeto.

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento de traslación del bloque se obtiene

$$\Sigma\mathbf{F}_{\text{ext}} = M_B\mathbf{a}$$

Bloque B $$M_Bg - T = M_Ba \tag{12-16}$$

Hemos escogido el sentido hacia abajo como el positivo para la aceleración del bloque. Esta elección hace que el sentido positivo para la aceleración angular del cilindro sea el del movimiento de las manecillas del reloj (vea la Fig. 12-4)

Enseguida aplicamos la segunda ley de Newton en su forma adecuada para la rotación al movimiento del cilindro C. Las fuerzas sobre C son la tensión $\mathbf{T}$ (que es tangente al cilindro), la fuerza $\mathbf{F}_a$ ejercida por el eje sobre C, y el peso $M_C\mathbf{g}$ de C. La tensión $\mathbf{T}$ es la única fuerza sobre C que produce una torca con respecto al eje de simetría:

$$\Sigma\tau_{\text{ext}} = I\alpha$$

Cilindro C: $$RT = I\alpha$$

donde R es el brazo de momento para T.

El momento de inercia del cilindro con respecto a su centro es

$$I = \tfrac{1}{2}M_C R^2$$

Debido a que la cuerda no se desliza sobre el cilindro, la aceleración tangencial de un punto de su superficie exterior tiene la misma magnitud que la aceleración a de la cuerda y el bloque. Por lo tanto

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

Sustituyendo las relaciones para I y α en la ecuación de la torca se obtiene

$$RT = \tfrac{1}{2}M_C R^2 \frac{a}{R}$$

$$T = \tfrac{1}{2}M_C a \qquad (12\text{-}17)$$

Nótese que el radio del cilindro se simplifica.

Las Ecs. (12-16) y (12-17) se pueden resolver ahora simultáneamente para obtener a y T. Después de algunas sencillas operaciones encontramos que

$$a = \frac{M_B}{M_B + \frac{1}{2}M_C}\, g = \frac{g}{1 + M_C/2M_B}$$

(b) Entonces, la tensión T es

$$T = \frac{\frac{1}{2}M_B M_C}{M_B + \frac{1}{2}M_C}\, g = \frac{M_B g}{1 + 2M_B/M_C}$$

Nótese que $a < g$ y que $T < M_B g$, donde $M_B g$ es el peso del bloque.

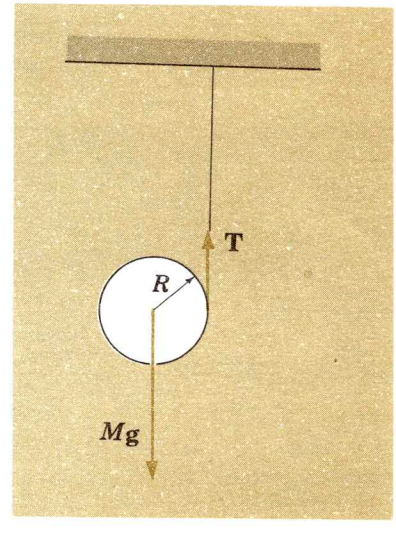


FIG. 12-5. Fuerzas sobre un disco en el que se ha enrollado una cuerda, con un extremo fijo en el techo.

Ejemplo 12-3

Se enrolla una cuerda alrededor de la circunferencia de un disco circular uniforme de radio R y masa M. El otro extremo de la cuerda se fija en el techo, y el disco desciende cuando la cuerda se

desenrolla. Vea la Fig. 12-5. ¿Cuál es (*a*) la aceleración del centro del disco y (*b*) la tensión de la cuerda?

Las fuerzas sobre el disco son su peso Mg y la tensión $\mathbf{T}$ de la cuerda hacia arriba. Eligiendo el sentido hacia abajo como el positivo, tenemos, por la segunda ley de Newton aplicada al movimiento de traslación:

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{A}$$

$$Mg - T = Ma$$

donde $a = A$ es la aceleración del centro de masa del disco, localizado a lo largo del eje de simetría.

Podemos aplicar la segunda ley de Newton para el movimiento de rotación al disco *acelerado* si el eje de rotación pasa por el centro de masa del objeto, como sucede en la Fig. 12-5.

$$\Sigma \tau_{\text{ext}} = I\alpha$$

donde el momento de inercia del disco cilíndrico relativo a su eje de simetría es $I = \frac{1}{2}MR^2$, y α es la aceleración angular del cilindro giratorio. Ahora la aceleración de la cuerda con respecto al centro del cilindro en el punto donde deja al cilindro es $a = R\alpha$, que en magnitud es igual a la cantidad a que da la aceleración del centro del disco relativa al techo. La única torca con respecto al centro proviene de la tensión, y tiene la magnitud RT. Sustituyendo estas cantidades en la ecuación anterior, tenemos

$$RT = \tfrac{1}{2}MR^2 \frac{a}{R}$$

o

$$T = \tfrac{1}{2}Ma$$

Pero por lo anterior teníamos

$$Mg - T = Ma$$

de tal manera que $a = \frac{2}{3}g$ y $T = \frac{1}{3}Mg$

Nótese que el radio R del disco se simplifica.

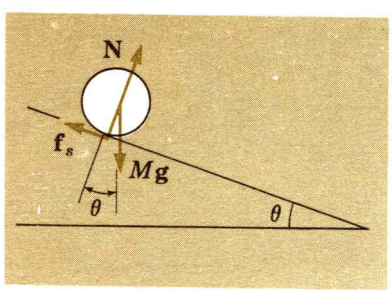


FIG. 12-6. Las fuerzas que actúan sobre un cilindro que rueda hacia *arriba* en un plano inclinado. Nótese que la fuerza de fricción estática $\mathbf{f}_e$ (hacia *arriba* en el plano) se encuentra en la misma dirección y tiene el mismo sentido que la velocidad del centro de masa del cilindro.

Ejemplo 12-4

Un cilindro de masa M y radio R se proyecta hacia arriba en un plano inclinado en el ángulo θ. El cilindro rueda sin deslizarse. La rapidez inicial de su centro de masa es v_0. ¿Cuál es la aceleración del centro de masa del cilindro?

En la Fig. 12-6 se indican las fuerzas que actúan sobre el cilindro: su peso Mg, la fuerza normal $\mathbf{N}$, y la fuerza de fricción $\mathbf{f}_e$. Las colas de los vectores que representan las fuerzas se colocan en los puntos donde dichas fuerzas se aplican al cilindro; esto es conveniente para el cálculo de las torcas. Nótese que la fuerza de fricción *estática* está dirigida hacia *arriba* en el plano inclinado, en la *misma* dirección y con el *mismo* sentido que el movimiento del cilindro.

El cilindro tiene una aceleración de traslación hacia abajo del plano inclinado y sobre su centro de masa. Eligiendo el sentido

hacia arriba del plano inclinado como el positivo para la traslación, corresponde al sentido contra el movimiento de las manecillas del reloj el sentido positivo para la rotación, y la aplicación de la segunda ley de Newton al movimiento de traslación da

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{CM}}$$

A lo largo del plano inclinado: $f_e - Mg \operatorname{sen}\theta = Ma_{\text{CM}}$

Perpendicular al plano inclinado: $N - Mg \cos\theta = 0$

Debido a que el cilindro rueda y no se desliza, siempre está en reposo momentáneamente en su punto de contacto con el plano, y actúa así sobre el cilindro una fuerza de fricción estática, en donde

$$f_e \leq \mu_e N$$

Al considerar el movimiento de rotación, las torcas, momento de inercia, y la aceleración angular, éstos deben determinarse en relación a un eje de rotación que pasa por el centro de masa. Las fuerzas **N** y **Mg** al pasar por el eje no dan lugar a torcas; la torca resultante sobre el cilindro se debe nada más a la fuerza de fricción $\mathbf{f}_e$ que tiene el brazo de momento R. Por lo que la segunda ley de Newton para la rotación da

$$\Sigma \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = I_{\text{CM}}\boldsymbol{\alpha}_{\text{CM}}$$

$$-Rf_s = I_{\text{CM}}\alpha_{\text{CM}}$$

Pero $$I_{\text{CM}} = \tfrac{1}{2}MR^2$$

y $$\alpha_{\text{CM}} = \frac{a_{\text{CM}}}{R}$$

La última relación requiere una justificación. Primero notamos que la aceleración a_{CM} del centro del cilindro relativa a su punto de contacto con el plano tiene la misma magnitud que la aceleración del punto de contacto con respecto al centro del cilindro. Por lo que, si vemos el movimiento desde el marco de referencia que se mueve con el centro del cilindro, y si el cilindro rueda sin deslizarse, el punto de contacto tiene una aceleración tangencial *igual* a la de la orilla del cilindro, $a_{\text{CM}} = R\alpha_{\text{CM}}$.

Usando las relaciones para I_{CM} y α_{CM} en la ecuación anterior, obtenemos

$$-Rf_e = \tfrac{1}{2}MR^2 \frac{a_{\text{CM}}}{R}$$

$$-f_e = \tfrac{1}{2}Ma_{\text{CM}}$$

La sustitución de este resultado en la primera ecuación da

$$-\tfrac{1}{2}Ma_{\text{CM}} - Mg \operatorname{sen}\theta = Ma_{\text{CM}}$$

$$a_{\text{CM}} = -\tfrac{2}{3}g \operatorname{sen}\theta$$

La aceleración *no* depende de la masa del cilindro ni de su radio. El centro de masa de *todos* los cilindros sólidos uniformes

tiene la misma aceleración, cualesquiera que sean sus masas, o radios, que se muevan hacia arriba (o hacia abajo) en un plano inclinado. Sin embargo, si los cilindros sólidos uniformes se reemplazan por láminas cilíndricas, se encontrará que la magnitud de la aceleración lineal correspondiente es de $a_{CM} = \frac{1}{2}g$ sen θ y el resultado para esferas sólidas será $a_{CM} = \frac{5}{7}g$ sen θ. La aceleración depende de las características de la distribución de la masa, o sea la forma, pero no de la masa ni de las dimensiones.

12—3 EL TRABAJO Y LA ENERGIA CINETICA EN EL MOVIMIENTO DE ROTACION

Primero determinamos una expresión que dé el trabajo hecho por la torca τ de una fuerza externa **F** cuando un cuerpo rígido gira un ángulo $d\theta$ alrededor de un eje fijo. Vea la Fig. 12-7. La fuerza se aplica a una distancia r del eje de rotación. Descomponemos la fuerza en dos componentes $\mathbf{F}_{||}$ y $\mathbf{F}_{\perp}$ que son en este orden, paralela y perpendicular al radio vector **r**. En el punto de aplicación de la fuerza, el objeto se desplaza sobre un arco circular de longitud ds, donde $ds = r\,d\theta$. Como $\mathbf{F}_{\perp}$ siempre es perpendicular al desplazamiento $d\mathbf{s}$, la componente $\mathbf{F}_{\perp}$ de la fuerza es la única que ejecuta trabajo:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_{\perp}\,ds = F_{\perp}\,r\,d\theta$$

Pero $F_{\perp}r$ es la torca externa τ de la fuerza; por lo tanto

$$dW = \tau_{ext}\,d\theta \tag{12-18}$$

Si sobre el cuerpo actúan en forma simultánea varias torcas externas, τ_{ext} representa su suma. El trabajo hecho por la torca externa resultante al producir un desplazamiento angular $d\theta$ es $\tau_{ext}\,d\theta$, o $\boldsymbol{\tau}_{ext} \cdot d\boldsymbol{\theta}$. El trabajo es positivo cuando el sentido de la rotación de la torca y del desplazamiento angular son iguales. Entonces se transmite energía *al* objeto y su energía cinética de rotación *aumenta*. Por otro lado, el trabajo es negativo cuando la torca actúa frenando el movimiento.

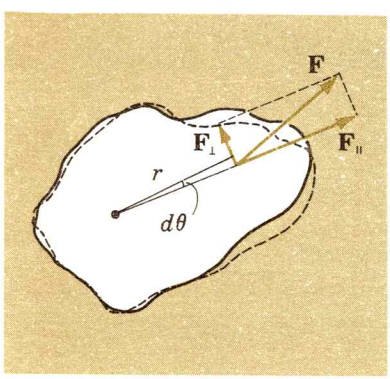


FIG.-12-7. Un cuerpo rígido que adquiere un desplazamiento angular $d\theta$ bajo la influencia de la fuerza **F** aplicada en **r**. Las componentes perpendicular y paralela de **F** son $F_{\perp}$ y $F_{||}$, respectivamente.

Determinamos la potencia, la rapidez con que se ejecuta el trabajo, tomando la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (12-18):

$$\frac{dW}{dt} = \tau_{ext}\frac{d\theta}{dt}$$

$$P = \tau_{ext}\omega = \boldsymbol{\tau}_{ext} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{12-19}$$

A partir del teorema trabajo-energía, el trabajo hecho sobre cualquier objeto por fuerzas externas es igual al cambio de la energía cinética del objeto:

$$W_{i \to f} = K_f - K_i$$

Como la energía cinética K de un cuerpo que tenga un momento de inercia I y una rapidez angular ω alrededor de un eje fijo es

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \tag{11-16}$$

el teorema trabajo-energía da

$$W_{i\to f} = \int_i^f \tau_{\text{ext}}\, d\theta = (\tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2) \tag{12-20}$$

El movimiento más general de un cuerpo rígido es aquél en el cual tiene simultáneamente un movimiento de traslación y un movimiento de rotación. La energía cinética total K siempre puede expresarse como la suma de dos contribuciones:*

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 + \tfrac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 \tag{12-21}$$

El primer término representa el movimiento de traslación del centro de masa, $\frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2$, donde M es la masa total y v_{CM} es la rapidez del centro de masa. El segundo término representa el movimiento de rotación alrededor del centro de masa, $\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2$, donde I_{CM} es el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masa y ω_{CM} es la rapidez angular del objeto alrededor de ese eje.

Usando la Ec. (12-11) el término de la rotación se convierte en

$$\tfrac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_{\text{CM}}^2 = \tfrac{1}{2}(\Sigma m_i r_i^2)\,\omega_{\text{CM}}^2 = \Sigma(\tfrac{1}{2}m_i v_i^2)$$

donde $v_i = r_i\omega_{\text{CM}}$ es la rapidez tangencial de m_i con relación al centro de masa. Esto nos lleva a una forma alternativa de la Ec. (12-21):

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 + \Sigma(\tfrac{1}{2}m_i v_i^2) \tag{12-22}$$

Probablemente usted ha percibido el paralelismo entre las cantidades dinámicas en la rotación y las cantidades correspondientes en la dinámica de la traslación. La Tabla 12-1 es una lista de las cantidades correspondientes.

Las ventajas que se tienen al usar las consideraciones con respecto a la energía para resolver problemas en la dinámica de la rotación, son las mismas que se tienen para las partículas separadas: Tenemos que tratar con cantidades *escalares,* en lugar de con cantidades vectoriales; sólo se necesita considerar los puntos *extremos,* no los estados intermedios detallados de cada movimiento, porque la energía total de un sistema aislado con fuerzas

---

*Una comprobación detallada de las Ecs. (12-21) y (12-22) está dada en R. T. Weidner y R. L. Sells, *Elementary Classical Physics,* 2a. Ed., Sec. 12-7, Allyn and Bacon, 1973.

Tabla 12–1

Traslación		*Rotación*	
Impetu lineal	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	Momento angular	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
Fuerza	$\mathbf{F}$	Torca	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
Masa	m	Momento de inercia	$I = \Sigma m_i r_i^2$
Ley de Newton	$\Sigma \mathbf{F}_{ext} = d\mathbf{P}/dt$ o $\Sigma \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{A}$	Ley de Newton	$\Sigma \boldsymbol{\tau}_{ext} = d\mathbf{L}/dt$ o $\Sigma \boldsymbol{\tau}_{ext} = I\boldsymbol{\alpha}$
Trabajo	$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$	Trabajo	$\int \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta}$
Energía cinética	$\frac{1}{2}mv^2$	Energía cinética	$\frac{1}{2}I\omega^2$
Potencia	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$	Potencia	$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}$

conservativas es constante. No debe pensarse que la energía cinética $\frac{1}{2}I\omega^2$ de un cuerpo giratorio sea diferente a la expresada como $\frac{1}{2}mv^2$; más bien, $\frac{1}{2}I\omega^2$ es simplemente una forma económica de expresar $\Sigma\frac{1}{2}mv_i^2$ para la rotación. En realidad, no se tiene una nueva física en este capítulo; nada más es una aplicación de las relaciones básicas sobre el momento angular y la torca desarrolladas en el último capítulo, y que no son sino las consecuencias de las leyes de Newton y el reconocimiento de las fuerzas centrales.

Ejemplo 12-5

El bloque B de masa M_B está atado a una cuerda que, a su vez, está enrollada sobre un cilindro recto circular de radio R. El cilindro puede girar libremente sobre un eje que pasa por su eje de simetría. El bloque se suelta desde el reposo a una distancia y sobre el piso. A medida que el bloque desciende, la cuerda se desenrolla y el cilindro gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj. (*a*) ¿Con qué rapidez choca el bloque con el piso? (*b*) ¿Cuál es la velocidad angular de rotación del cilindro en ese instante?

(*a*) La situación aquí es la del Ej. 12-2 y Fig. 12-4. Es fácil determinar la rapidez aplicando el principio de la conservación de la energía. Cuando el bloque ha descendido la distancia y, su energía potencial cambió en $M_B g y$. En el proceso el bloque adquiere una energía cinética de traslación de $\frac{1}{2}M_B v_B^2$ y el cilindro una energía cinética de rotación de $\frac{1}{2}I_0\omega^2$, donde I_0 es el momento de inercia del cilindro con respecto a su eje de simetría. La conservación de la energía requiere que

$$M_B g y = \tfrac{1}{2}M_B v_B^2 + \tfrac{1}{2}I_0\omega^2$$

donde

$$I_0 = \tfrac{1}{2}M_B R^2$$

Cualquier punto de la orilla del cilindro se mueve con la misma rapidez que la cuerda y el bloque. Por lo tanto la rapidez angular del cilindro es

$$\omega = \frac{v_B}{R}$$

Entonces, la primera ecuación se convierte en

$$M_B g y = \tfrac{1}{2} M_B v_B^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} M_C R^2)\left(\frac{v_B}{R}\right)^2$$

$$v_B = \sqrt{\frac{M_B}{\frac{1}{2}M_B + \frac{1}{4}M_C}\, g y}$$

Nótese que v_B es independiente del radio del cilindro R. El resultado obtenido aquí es consistente con el que está contenido en el Ej. 12-2.

(*b*) A partir de lo anterior,

$$\omega = v_B/R = \sqrt{\frac{M_B}{\frac{1}{2}M_B + \frac{1}{4}M_C}\,\frac{g y}{R^2}}$$

12—4 CENTRO DE GRAVEDAD

El *centro de gravedad* de un cuerpo rígido se define como el punto sobre el cual la resultante de las torcas gravitatorias de todas las partículas que forman el cuerpo rígido es cero. Es fácil demostrar que el centro de gravedad tiene la misma localización que el centro de masa, estipulando (como es el caso típico) que el cuerpo se encuentra en un campo gravitacional *uniforme* —esto es, que la aceleración debida a la gravedad **g** es la misma en todo el cuerpo.

Considérese la sencilla situación de una varilla uniforme suspendida de su centro de masa. Calculamos las torcas que actúan sobre dos segmentos de la varilla, cada uno de masa m, localizadas a distancias iguales del centro de masa. Vea la Fig. 12-8. El peso de cada segmento es $m\mathbf{g}$, y con respecto a un eje de rotación que pasa por el centro de masa, los brazos de momento de las dos torcas son iguales. Una torca tiene el sentido del movimiento de las manecillas del reloj y la otra el sentido contrario: Su suma es cero. Las torcas gravitacionales se presentan en pares iguales pero opuestos para otros segmentos localizados simétricamente con respecto al centro de masa. Así, la resultante de las torcas gravitacionales, relativas a un eje de rotación que pase por el centro de masa, es cero. El centro de gravedad coincide con el centro de masa. Para cualquier objeto que sea pequeño comparado con el radio de la tierra, **g** tiene la misma magnitud, dirección y sentido en todos los puntos que se encuentran dentro del objeto; entonces el centro de gravedad y el centro de masa son coincidentes, estando ambos fijos con respecto al cuerpo.

La existencia del centro de gravedad, fijo en relación al cuerpo, nos lleva a una consecuencia importante. Podemos

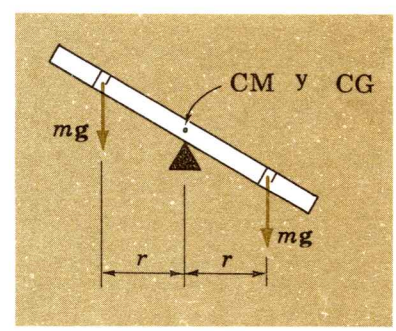


FIG. 12-8. Las fuerzas que actúan sobre dos elementos de masa localizados simétricamente sobre una varilla delgada que gira alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro de masa. La torca gravitacional resultante para cada par de masas es cero.

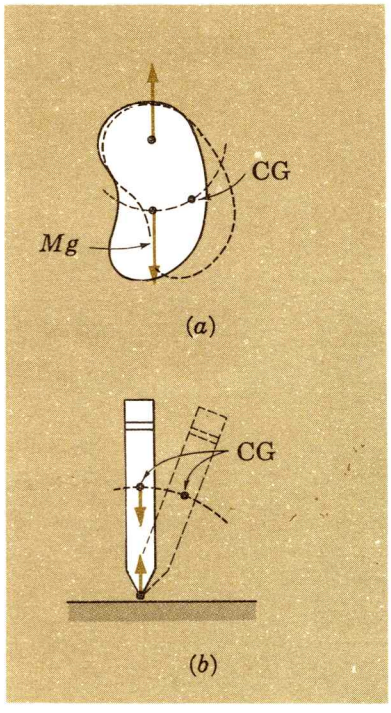


FIG. 12-9. (*a*) Un ejemplo de equilibrio estable: el punto de apoyo del objeto está *arriba* del centro de gravedad (CG). (*b*) Un ejemplo de equilibrio inestable: El punto de apoyo del objeto está *abajo* del centro de gravedad.

imaginar que toda la masa de un cuerpo rígido extenso está concentrada en el centro de gravedad, y que una *sola* fuerza igual al peso del cuerpo actúa hacia abajo en dicho punto. Un cuerpo rígido que se encuentra sólo bajo la influencia de la gravedad, puede ponerse en equilibrio por medio de una sola fuerza hacia arriba igual al peso, y aplicada de tal manera que pase por el centro de gravedad. Entonces ambas, la fuerza resultante y la torca resultante valen cero, y el objeto se encuentra tanto en equilibrio de traslación como de rotación.

Si un cuerpo rígido se suspende por medio de una cuerda, el centro de gravedad debe quedar a lo largo de una línea vertical que pase por su punto de soporte. Además, si el centro de gravedad se encuentra *abajo* del punto de apoyo (Fig. 12-9*a*), el centro de gravedad se elevará para cualquier desplazamiento de rotación alrededor de su punto de apoyo. Un objeto desplazado en esta forma estará sujeto a una torca de restitución que tiende a bajar el centro de gravedad. Una situación como esta corresponde al *equilibrio estable*. Por otro lado, si se sostiene un cuerpo rígido por medio de una fuerza externa hacia arriba igual a su peso, que pase por el centro de gravedad, que ahora queda *arriba* del punto de apoyo (Fig. 12-9*b*), el equilibrio es inestable. Cualquier desplazamiento de rotación alrededor del punto de apoyo hará *bajar* el centro de gravedad, y la torca resultante sobre el cuerpo tiende a aumentar el desplazamiento de rotación. Este es un *equilibrio inestable*.

Ejemplo 12-6

Un lápiz de 6 plg, que al principio se encontraba parado sobre su punta, cae (Fig. 12-9*b*). ¿Con qué rapidez chocará el borrador con la superficie horizontal, suponiendo que la punta del lápiz no se mueve?

Este problema se resuelve mejor por medio del método de la conservación de la energía. El lápiz es una varilla uniforme de masa M y longitud L. El centro de gravedad del lápiz está en su centro (originalmente a una distancia vertical de $L/2$ sobre la superficie). El peso del lápiz $M\mathbf{g}$ puede tomarse como una sola fuerza aplicada al centro de gravedad. Al caer, la energía potencial gravitacional decrece en $Mg(L/2)$, el centro de gravedad del lápiz ha descendido $L/2$. Por lo tanto, al caer sobre la superficie, el aumento de la energía cinética de rotación del lápiz sobre el punto fijo, es igual a la pérdida de energía potencial:

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = \frac{MgL}{2}$$

donde I es el momento de inercia del lápiz y ω es la rapidez angular, ambos con respecto a un eje de rotación que pase por el punto fijo. Si v representa la rapidez lineal del borrador cuando choca,

$$v = \omega L$$

El momento de inercia de una varilla uniforme con respecto a un eje en uno de sus extremos (Apéndice VIII) es

$$I = \tfrac{1}{3}ML^2$$

Sustituyendo las relaciones para I y ω en la ecuación de la energía antes indicada, se obtiene

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3}ML^2)\left(\frac{v}{L}\right)^2 = \frac{MgL}{2}$$

$$v = \sqrt{3gL} = \sqrt{3(32 \text{ ft/s}^2)(0.50 \text{ ft})} = 6.9 \text{ pie/s}$$

Si el borrador se suelta y cae libremente desde el reposo y por la misma distancia vertical, su rapidez al chocar con la superficie será sólo de ¡$\sqrt{2gL}$ = 5.7 pies/s!

12—5 EQUILIBRIO DE UN CUERPO RIGIDO

Cuando el vector suma de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo es cero, la aceleración lineal de su centro de masa es cero. Entonces el centro de masa mantiene una velocidad lineal constante. Cuando el vector suma de las torcas externas con respecto al centro de masa del cuerpo es cero, la aceleración angular es cero, y mantiene una velocidad angular constante con respecto al centro de masa. Cuando se satisfacen ambas condiciones, se dice que el objeto está en equilibrio. Si además las velocidades lineal y angular al principio valen cero, el cuerpo permanece en reposo, y se dice que se encuentra en equilibrio estático. Así, el equilibrio no es más de un caso especial de la dinámica, y la estática es un caso especial de equilibrio.

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0 \quad \text{o} \quad \Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \quad \text{y} \quad \Sigma F_z = 0$$

$$\text{y} \quad \Sigma \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = 0 \quad \text{o} \quad \Sigma \tau_x = 0, \Sigma \tau_y = 0, \quad \text{y} \quad \Sigma \tau_z = 0$$

donde F_x, F_y, y F_z y τ_x, τ_y, y τ_z representan, respectivamente, las componentes de la fuerza y de la torca a lo largo de los ejes X, Y y Z.

Trataremos sólo aquellas situaciones en las cuales las fuerzas quedan sobre el plano XY; entonces las torcas quedan siempre a lo largo del eje Z. Entonces, el equilibrio se presenta sólo si

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma \tau_z &= 0 \end{aligned} \qquad (12\text{-}23)$$

Los problemas en los que interviene el equilibrio de cuerpos rígidos, o casi rígidos, son de gran importancia en muchas ramas de la ingeniería. Por ejemplo, cuando un ingeniero diseña un

puente, calcula las fuerzas que actúan sobre cada miembro y escoge los materiales y las dimensiones de los componentes estructurales, para que dichas partes puedan soportar las fuerzas.

Es claro que si un cuerpo rígido está en reposo, y por ello en equilibrio estático, la torca resultante con respecto a un eje que pase por el centro de masa debe ser cero. Entonces, no es difícil comprobar el siguiente teorema: Si un cuerpo rígido está en equilibrio estático, la torca externa resultante es cero, *con respecto a cualquier eje*. (Vea el Prob. 12-29 para una prueba.)

Ejemplo 12-7

Una viga uniforme, que pesa 100 lb y forma un ángulo de 30° con la horizontal, está articulado en su extremo inferior; a su extremo superior se le une un alambre horizontal, como se indica en la Fig. 12-10. ¿Cuál es la tensión en el alambre y la dirección, sentido y magnitud de la fuerza que se ejerce sobre la articulación de la viga?

Primero hacemos hincapié en que, en los problemas como éste, podemos calcular sólo tres incógnitas. Todas las fuerzas quedan sobre un solo plano, y las condiciones de equilibrio llevan a *tres* ecuaciones escalares [Ecs. (12-23)].

Las tres fuerzas externas que actúan sobre la viga, se indican en la Fig. 12-10*a*. Son: el peso de la viga que actúa en su centro de gravedad a una distancia $L/2$ de cualquiera de los extremos; la fuerza en la articulación de la viga, que se reemplaza, por conveniencia, por sus componentes vertical y horizontal $\mathbf{F}_v$ y $\mathbf{F}_h$; y la tensión del alambre, $\mathbf{T}$. El equilibrio de translación requiere que

$$\Sigma F_x = 0$$
$$F_h - T = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$F_v - 100 \text{ lb} = 0$$

Una elección conveniente del eje de rotación es la de uno que pase por la articulación. Esta elección no se hace primariamente debido a que la articulación sea el punto natural de rotación, sino más bien debido a que las fuerzas $\mathbf{F}_v$ y $\mathbf{F}_h$ tienen líneas de acción que pasan por dicho punto, lo que hace que sus torcas valgan cero con respecto a ese eje. Para este eje, la fuerza de 100 lb produce una torca en el sentido de las manecillas del reloj (negativa) con el brazo de momento de $(L/2) \times \cos 30°$; la fuerza $\mathbf{T}$ tiene una torca con sentido en contra del movimiento de las manecillas del reloj (positiva) con el brazo de momento L sen 30°. Entonces el equilibrio de rotación requiere que

$$\Sigma \tau_z = 0$$
$$-\frac{L}{2}\cos 30°(100 \text{ lb}) + L \operatorname{sen} 30°(T) = 0$$

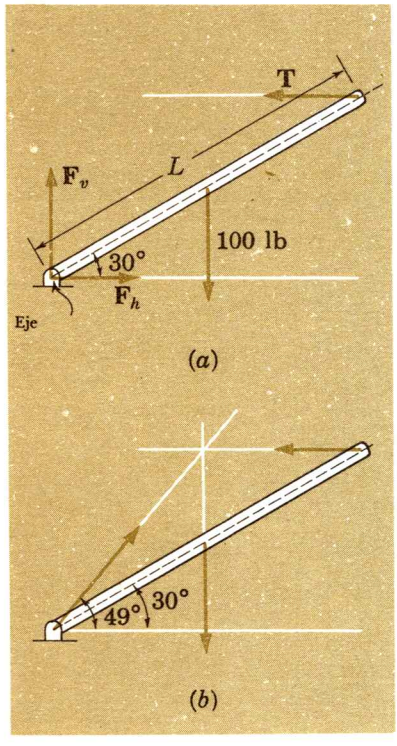


FIG. 12-10. (*a*)Fuerzas externas que actúan sobre una viga uniforme. La fuerza en la artículación en su extremo izquierdo se reemplaza por sus componentes vertical y horizontal F_v y F_h. (*b*) Las tres fuerzas sobre la viga interactúan con un punto común. Nótese que la fuerza en el extremo izquierdo de la viga *no* se encuentra a lo largo de la dirección de la viga.

Resolviendo en forma simultánea las ecuaciones anteriores para obtener F_h, F_v, y T, se tiene

$$F_h = 86.6 \text{ lb} \qquad F_v = 100 \text{ lb} \qquad T = 86.6 \text{ lb}$$

Nótese que el largo L de la viga *no* interviene.

Podemos calcular con facilidad la magnitud F y la dirección θ, con respecto a la horizontal, de la fuerza que actúa en la articulación de la viga:

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = \sqrt{86.6^2 + 100^2} \text{ lb} = 132 \text{ lb}$$

$$\tan\theta = \frac{F_v}{F_h} = \frac{100}{86.6} = 1.15$$

$$\theta = 49°$$

La fuerza de la articulación sobre la viga *no* se encuentra a lo largo de ésta. Esto también es obvio por la Fig. 12-10*b*, donde se ve que las tres fuerzas que actúan sobre la viga son concurrentes, sus líneas de aceleración se cortan en un solo punto. En realidad, este resultado se obtiene siempre que un objeto está sujeto a *tres* fuerzas en equilibrio. Vemos claramente, que podíamos haber escogido un eje de rotación que pasara por el punto de intersección de las líneas de acción de las dos fuerzas; entonces, las torcas de esas fuerzas valen cero con respecto a ese eje. Pero si la torca resultante ha de ser cero, la torca de la tercera fuerza debe ser también cero en relación al eje escogido, por lo que su línea de acción debe pasar también por el punto de intersección.

RESUMEN

El movimiento de un cuerpo rígido está gobernado por las fuerzas externas y las torcas externas que actúan sobre él:

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{A} \qquad (12\text{-}13)$$

$$\Sigma \tau_{\text{ext}} = I\alpha \qquad (12\text{-}15)$$

donde M es la masa total del objeto, $\mathbf{A}$ la aceleración de su centro de masa, I su momento de inercia relativo al eje escogido para calcular las torcas, y $\alpha = d\omega/dt$ su aceleración angular.

El trabajo dW hecho por una torca τ al hacer girar un objeto por un desplazamiento angular $d\theta$ es

$$dW = \tau\, d\theta \qquad (12\text{-}18)$$

La energía cinética total de cualquier sistema de partículas se puede escribir en la forma

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 + \Sigma\tfrac{1}{2}m_i v_i^2 \qquad (12\text{-}22)$$

donde m_i es la masa de la partícula i, v_i es su rapidez relativa al centro de masa del sistema, M la masa del sistema completo, y v_{CM} la rapidez del centro de masa del sistema. En efecto la energía cinética total consiste en la energía cinética de las partículas con respecto al centro de masa, más la energía cinética del centro de masa con relación al observador.

Para un cuerpo rígido, esta relación se reduce a

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad (12\text{-}21)$$

donde I y ω se calculan con respecto al centro de masa.

El centro de gravedad es aquel punto con respecto al cual la torca gravitacional resultante es cero, en un campo gravitacional uniforme coincide con el centro de masa.

Un cuerpo rígido está en equilibrio de traslación y de rotación cuando la fuerza resultante sobre él es cero y la torca resultante con respecto a cualquier eje es cero.

PROBLEMAS

12-1. En 12.0 s el motor de un automóvil acelera desde la rapidez de estacionamiento de 600 rev/min a la rapidez final de 6 000 rev/min. (*a*) ¿Cuál es su aceleración angular, suponiendo que es constante? (*b*) ¿Cuántas revoluciones da el motor en este intervalo de tiempo?

12-2. Un volante, que al principio giraba a 3 000 rev/min, baja su rapidez de rotación a 2400 rev/min en 5.0 min. (*a*) Determine su aceleración angular en rad/seg^2. (*b*) ¿Cuántas revoluciones tendrá que dar para que quede en reposo?

12-3. El segundero de un reloj tiene un radio de 7.00 cm. ¿Cuáles son las magnitudes de (*a*) la velocidad lineal, (*b*) la aceleración lineal, (*c*) la velocidad angular y (*d*) la aceleración angular del extremo de dicho segundero?

12-4 Un ventilador primero giraba en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj a 180 rev/min, 10 s después se encontró girando a 180 rev/min en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Suponiendo que es constante, ¿cuál es la magnitud de la aceleración angular del ventilador?

12-5. Una ultracentrífuga del tipo usado en bioquímica hace girar una muestra a 60 000 rev/min en un círculo de 6.5 cm de radio. El rotor se encuentra sostenido magnéticamente y gira en un vacío (1.0×10^{-7} atmósferas). La fricción es tan pequeña que —cuando "deja de impulsarse"— ¡su rapidez de rotación se reduce sólo en 1 rev/s después de 10 h! (*a*) A la rapidez de operación, ¿cuál es la magnitud de la aceleración radial a la que está expuesta la muestra? (*b*) ¿Cuál es la aceleración angular del rotor una vez que se apaga el motor que lo impulsa? (*c*) ¿Qué tiempo tardará el rotor en quedar en reposo, si la rapidez de desaceleración se mantiene constante?

12-6. El Profr. J. W. Beams hizo medidas del esfuerzo a la tensión del acero empleando esferas de acero giratorias suspendidas en el vacío y sostenidas por un campo magnético; la torca impulsora fue suministrada por un campo electromagnético rotatório. En uno de estos experimentos una esfera pequeña de 0.30 mm de diámetro llegó a la rapidez de rotación de 48×10^6 rev/min. Determine (*a*) la rapidez lineal y (*b*) la aceleración radial (en unidades de g) de un punto sobre la superficie de la esfera que está a 0.15 mm del eje de rotación.

12-7. Demuestre que la magnitud de la aceleración lineal de un punto que se mueve en un círculo de radio r con la velocidad angular ω y la aceleración angular α está dada por $a = r(\omega^4 + \alpha^2)^{1/2}$.

12-8. Un camión con ruedas de 120 cm de diámetro acelera desde el reposo con la rapidez de 2.0 m/s^2 sin deslizamiento (*a*) ¿Cuál es la aceleración angular

de una rueda en relación a su eje? (*b*) Después de 3.0 s, ¿cuál es la rapidez con respecto al piso de un punto de una de las ruedas en contacto con él? (*c*) ¿Cuál es la rapidez con respecto al piso del punto más alto de una rueda?

12-9. El *día solar medio* es el tiempo que se necesita para que la Tierra lleve a cabo una rotación completa con respecto al Sol (esto es, el intervalo de tiempo que transcurre entre dos pasos sucesivos del Sol sobre la misma longitud). El *día sideral medio* es el tiempo que necesita la Tierra para realizar una rotación completa relativa a las estrellas fijas. El día solar es de 24 h. Demuestre que la duración del día sideral es de 23 h, 56 min, 4 s.

12-10. (*a*) Demuestre que el momento de inercia alrededor de su centro de simetría de un cilindro circular recto hueco con los radios interno y externo R_1 y R_2 respectivamente, y masa M es $(M/2)(R_1^2 + R_2^2)$. (*b*) Demuestre que el momento de inercia alrededor de un diámetro de una esfera hueca delgada de radio R y la masa M es $\frac{2}{3}MR^2$. (*Sugerencia:* Use las relaciones que dan los momentos de inercia de un cilindro macizo y una esfera maciza. El momento de inercia de un cilindro macizo se desarrolla en el Apéndice VIII, y para una esfera se cita en el Prob. 12-11.)

12-11. Verifique que el momento de inercia de una esfera maciza de masa M y radio R alrededor de uno de sus diámetros es $\frac{2}{5}MR^2$. (*Sugerencia:* Imagine que la esfera se subdivide en discos circulares, y sume los momentos de inercia de dichos discos.)

12-12. ¿Cuál es la relación entre el momento angular de giro de la Tierra a su momento angular orbital medido con respecto al sol? (Radio de la Tierra, 6.4×10^6 m; distancia Tierra-sol, 1.5×10^{11} m.)

12-13. Determine (*a*) la energía cinética de rotación de la Tierra y (*b*) la energía cinética de la Tierra en su revolución alrededor del Sol. La masa de la Tierra es 6.0×10^{24} kg; otras cantidades importantes están dadas en el Prob. 12-12.

12-14. Una regla de un metro gira alrededor de uno de sus extremos. Se suelta desde el reposo cuando la regla está colocada en sentido vertical sobre su soporte. (*a*) ¿A qué ángulo relativo a la vertical la aceleración angular de la regla es máxima? (*b*) ¿Cuál es la aceleración angular para esta orientación?

12-15. Dos fuerzas no colineales que tengan magnitudes iguales pero sentidos opuestos forman un *par*. Demuestre que (*a*) la fuerza resultante de un par vale cero, y que (*b*) la magnitud de la torca resultante de un par para *cualquier* eje de rotación perpendicular al plano de las dos fuerzas es Fd, donde F es la magnitud de cada fuerza y d es la distancia que separa las líneas de acción de las dos fuerzas.

12-16. Demuestre que cualquier número de fuerzas que actúen sobre un cuerpo rígido son equivalentes a: una sola fuerza igual a su resultante, que actúa en el centro de masa del cuerpo, y que un par produce una rotación alrededor del centro de masa igual a la torca resultante de las fuerzas con respecto al mismo centro de masa. (Vea el Prob. 12-15 para la definición del *par*.)

12-17. Un pequeño objeto atado a una cuerda de 1.0 m de largo se mece en un plano vertical como péndulo simple. El objeto se suelta desde el reposo cuando la cuerda está horizontal. ¿Cuál es la rapidez angular de la cuerda (*a*) cuando está en posición vertical y (*b*) cuando la cuerda forma un ángulo de 30° con la vertical?

12-18. Una regla de un metro con una masa de 100 g tiene uno de sus extremos sobre un piso rugoso y forma un ángulo de 45° con la horizontal. (*a*) ¿Cuál es la torca gravitacional que actúa sobre la regla con respecto a un eje horizontal perpendicular a ella y que pasa por el punto en que puede girar? (*b*) ¿Cuál es la aceleración angular de la regla sobre ese eje en el instante en que se suelta desde esa posición?

12-19. Un hombre jala con una fuerza constante F una cuerda enrollada alrededor de un cilindro que tiene su eje de rotación fijo. Se desenrolló una longitud L de cuerda, con lo que el cilindro, que al principio estaba en reposo, adquiere la velocidad angular ω. ¿Cuál es el momento de inercia del cilindro (en términos de F, L y ω) con respecto al eje del rotación?

12-20. Considere la situación descrita en el Ej. 12-4 que está mostrada en la Fig. 12-6. Encuentre la distancia d que el cilindro sube en el plano antes de quedar (momentáneamente) en reposo.

12-21. Considere la situación descrita en el Ej. 12-4 que está mostrada en la Fig. 12-6. Si el cilindro rueda sin deslizarse, demuestre que $\mu_s \geq \frac{1}{3}\mu_k$, donde μ_s y μ_k son, en este orden los coeficientes de fricción estática y cinética.

12-22. Un cilindro macizo de masa M y radio R rueda sin deslizarse sobre una superficie rugosa horizontal y está acelerado hacia la derecha por una fuerza constante hacia la derecha de magnitud F aplicada al eje del cilindro. Demuestre que la fuerza de fricción estática sobre el cilindro está dirigida hacia la izquierda y tiene la magnitud $F/3$, y que el centro de masa del sistema tiene una aceleración con la magnitud de $\frac{2}{3}F/M$.

12-23. Demuestre que (*a*) la aceleración lineal del centro de masa de *todas* las láminas cilíndricas que ruedan sin deslizarse hacia abajo en un plano inclinado en un ángulo θ es $\frac{1}{2}g$ sen θ y que (*b*) la aceleración de *todas* las esferas macizas de densidad uniforme que ruedan es $\frac{5}{7}g$ sen θ. (Recurra al Apéndice VIII si es necesario.)

12-24. Al principio un lápiz de 16 cm se encuentra parado en sentido vertical, con su punta sobre una superficie perfectamente lisa. Cuando se suelta, el lápiz se inclina y su punta se desliza sobre la superficie. ¿Cuál es la distancia de separación entre el punto en que reposaba el lápiz y el punto de la superficie donde cae el borrador?

12-25. Un cilindro macizo, una esfera maciza y un aro circular, todos del mismo radio y masa, ruedan sin deslizarse y con la misma energía cinética. ¿Cuál objeto tiene (*b*) la mayor, (*b*) la intermedia, y (*c*) la menor rapidez de su centro de masa? (Si es necesario recurra al Apéndice VIII.)

12-26. ¿Cuál es la razón entre la energía cinética de rotación con respecto al centro de masa y la energía cinética del movimiento de traslación del centro de masa, para un cilindro uniforme que rueda sin deslizarse?

12-27. Un cilindro macizo de 60 kg y 50 cm de radio se monta con su eje horizontal fijo. (*a*) ¿Cuál es el momento de inercia del cilindro? (*b*) Una cuerda enrollada alrededor del cilindro se desenrolla cuando se le aplica una fuerza constante de 6.0 N; ¿Cuál es la torca de la cuerda sobre el cilindro? (*c*) ¿Cuál es la aceleración angular del cilindro? (*d*) ¿Cuál es la rapidez angular después de 5.0 s? (*e*) ¿Qué trabajo se hace cuando se desenrolla 1.0 m de cuerda del cilindro? (*f*) ¿cuál es la energía cinética final del cilindro después de desenrollar 1.0 m de cuerda?

12-28. Una caja cúbica de 5.0 kg cuyos lados tienen una longitud de 20 cm, tiene su centro de gravedad en su centro geométrico. Primero reposaba sobre un piso horizontal, y después se inclinó sobre uno de sus lados hasta que su base formó un ángulo de 30° con la superficie. Después se soltó la caja desde el reposo, y giró alrededor del lado fijo que está en contacto con el piso. (*a*) ¿Cuál es la aceleración angular inicial de la caja? (*b*) ¿Cuál es la rapidez con que el lado más alejado choca con el piso?

12-29. Si un cuerpo está en equilibrio, la suma de las torcas que actúan sobre él es cero, no sólo con respecto al centro de masa del objeto, sino también con respecto a *cualquier punto* escogido para calcular las torcas. La Fig. P12-29*a* muestra un cuerpo rígido en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas coplanares ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$), los puntos de aplicación de las tres fuerzas con respecto a un eje de rotación que pasa por el centro de masa se determinan por medio de los radios vectores $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$. Como el cuerpo está en equilibrio estático, la suma de las fuerzas externas es cero $(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0)$, y la suma de las torcas externas con respecto al centro de masa CM también es cero $[(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3) = 0]$. Ahora considérese un nuevo eje que pase por el punto P, donde $\mathbf{d}$ es el radio vector de P al centro de masa. Esto se indica en la Fig. P12-29*b*, donde $\mathbf{R}_1$ es el radio vector desde P al punto de aplicación de $\mathbf{F}_1$: $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{d}$. Para $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$ se tienen relaciones similares. Sustituya las relaciones para $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$ en términos de $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$ en las ecuaciones de las torcas con respecto al centro de masa para demostrar que la suma de las torcas con respecto a P también es cero.

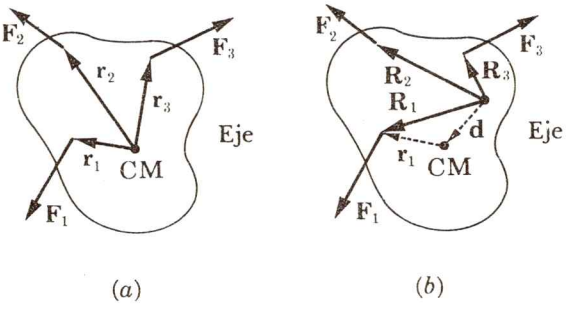


FIG. P12-29

12-30. Los siguientes son las componentes y los puntos de aplicación $(F_x, F_y; x, y)$ de dos fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido: (0 N, 10.0 N; 0 m, 2.0 m) y (3.0 N, −6.0 N; 8.0 m). ¿Cuáles son las componentes y la coordenada X del punto de aplicación de una tercera fuerza, aplicada en $y = 0$, que hace que el cuerpo rígido quede en equilibrio tanto

para el movimiento de translación como para el de rotación?

12-31. El antebrazo humano tiene dos huesos principales (el *radio* y el *cúbito*) que están articulados con un solo hueso largo del brazo (el *húmero*) en la articulación del codo. El músculo *bíceps* se une al húmero y al radio; cuando el bíceps se contrae, el ángulo entre el brazo y el antebrazo (en el codo) *decrece*. (Para complementar, la *extensión* del antebrazo se efectúa por medio de la contracción del *tríceps*, que está en el brazo atrás del hueso —con el bíceps al frente—.) En este problema investigamos las fuerzas que intervienen al sostener una carga en la mano —con el antebrazo horizontal y el brazo vertical—. Vea la Fig. P12-31, donde las dimensiones dadas son aproximadamente las de un adulto. Suponga que el antebrazo está horizontal y que su masa es de 2.50 kg, y toma una carga de 10.0 kg. El ángulo del codo es de 90° y la línea central del bíceps está a 10° de la vertical. Suponiendo que $g = 9.80$ m/s². Determine (*a*) T_B, la tensión del bíceps, (*b*) F_H, la fuerza de compresión del húmero sobre el antebrazo en el codo, y (*c*) el ángulo entre F_H y la vertical (El antebrazo es una palanca de clase III — caraterizada por el hecho de que la fuerza de *esfuerzo* se aplica en un punto *entre* el fulcro (o pivote) y la carga. En las palancas de clase III la fuerza de esfuerzo *siempre* excede a la carga— pero la carga se mueve más y más aprisa que el punto en que se aplica la fuerza de esfuerzo—. La mayor parte de los huesos largos del cuerpo que se mueven, son palancas de clase III.)

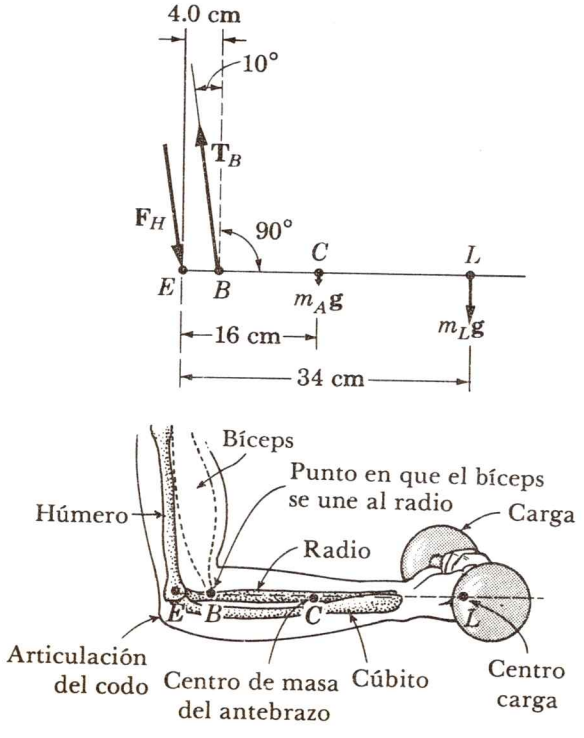


FIG. P12-31

12-32. Una puerta de 8.00 pies de altura y 4.00 pies de ancho pesa 90 lb. Dos bisagras, H_1 y H_2, soportan su peso; cada una soporta la mitad del total. Vea la Fig. P12-32. Encuentre las componentes horizontal y vertical de las fuerzas que actúan sobre la puerta ejercidas por las bisagras. Suponga que el centro de gravedad de la puerta se encuentra en su centro geométriço.

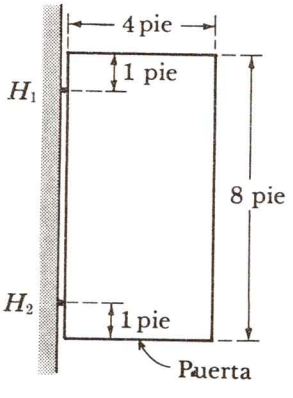


FIG. P12-32

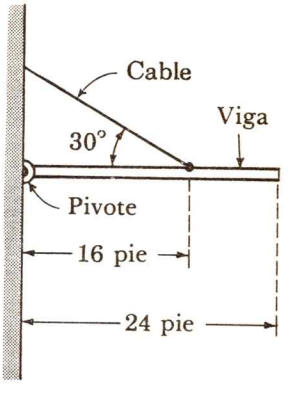


FIG. P12-33

12-33. Una viga horizontal uniforme está unida a una pared vertical por medio de un pivote en uno de sus extremos; la viga es de 24 pies de largo y pesa 1200 lb. La viga se sostiene por medio de un cable unido a un punto de ella que está a 16 pies de la pared, y el otro extremo del cable se fija a la pared de tal manera que forme un ángulo de 30° con la horizontal. El cable se rompe si su tensión excede a 2100 lb. Vea la Fig. P12-33. (*a*) ¿Cuál es la dirección, el sentido y la magnitud de la fuerza que se ejerce sobre la viga en el pivote? (*b*) ¿Qué distancia a lo largo de la viga puede andar un hombre de 160 lb antes de que el cable se rompa?

12-34. Una varilla uniforme se coloca de tal manera que su extremo inferior repose sobre un piso rugoso y su extremo superior contra una pared perfectamente

lisa. El ángulo entre el piso y la varilla es θ. Demuestre que el coeficiente de fricción estática mínimo entre la varilla y el piso es $1/(2 \tan \theta)$.

12-35. Un rodillo para pasto de densidad uniforme, radio R y peso w se tiene que elevar sobre un bordo de altura h, donde $h < R$. El mango del rodillo se une al eje del cilindro que se encuentra a lo largo de su eje de simetría. (*a*) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza mínima necesaria para empujar el rodillo sobre el bordo? (*b*) ¿Qué trabajo se hace al elevar el rodillo?

Capítulo

13

GRAVITACION

Fue el genio de Isaac Newton el que reconoció que la caída de los objetos hacia la Tierra, el giro de la Luna alrededor de la Tierra, y el de los planetas en torno al Sol, son todos manifestaciones de una atracción que actúa entre todas las partículas —la fuerza de la gravedad —. En realidad, la interacción gravitacional entre cualquier par de partículas, junto con la fuerza eléctrica entre las partículas con carga eléctrica, y la fuerza magnética entre las partículas con carga eléctrica en movimiento, son las únicas fuerzas fundamentales que operan para distancias de separación mayores al nivel atómico.

En este capítulo veremos cómo se llegó a la ley de la gravitación universal y a su demostración directa en el experimento de Cavendish. Trataremos de la aceleración debida a la gravedad como una medida del campo gravitacional y de las líneas gravitacionales que representan a este campo. Las leyes de Kepler del movimiento planetario se relacionan con la fuerza gravitacional. Se deriva la relación general para la energía potencial gravitacional, y se trata de la energética del movimiento de los satélites.

13—1 LA LEY DE LA GRAVITACION UNIVERSAL

La propiedad intrínseca de una partícula que es la causa de su interacción gravitacional con una segunda partícula es su *masa gravitacional*. En otras palabras, dos partículas se atraen entre sí gravitatoriamente debido a que cada una de ellas tiene el atributo físico de la masa gravitacional. Debe entenderse que, aparte del hecho de que hablemos de la *masa* gravitacional, esta propiedad no se debe tomar como equivalente a la *masa inercial* m_i, que es la propiedad que interviene en el ímpetu, $p = m_i v$, y en la segunda ley de Newton, $F = m_i a$. Se usa el término *carga* gravitacional en

lugar de masa gravitacional para enfatizar que es bastante diferente a la masa inercial. Entonces, de la misma manera que dos partículas ejercen una fuerza eléctrica entre sí debido a que cada una tiene carga eléctrica, podemos decir en una forma paralela, que existe una fuerza gravitacional entre dos partículas debido a que cada una de ellas tiene carga gravitacional.

La masa gravitacional se define y se mide por medio de un procedimiento sencillo. Supóngase que las partículas 1 y 2 con las respectivas masas gravitacionales m_{g1} y m_{g2} se colocan, sucesivamente, a la misma distancia con respecto a un tercer objeto, como la Tierra. Se miden las fuerzas gravitacionales sobre cada una de ellas, F_{g1} y F_{g2}, esto es, se encuentra que los pesos de los dos objetos son F_{g1} y F_{g2}. Entonces, *por definición,* la relación entre las masas gravitacionales (o cargas gravitacionales) es igual a la relación entre las fuerzas correspondientes:

$$\frac{F_{g1}}{F_{g2}} = \frac{m_{g1}}{m_{g2}} \tag{13-1}$$

Supóngase ahora que las partículas 1 y 2 se sueltan desde el mismo lugar y se miden sus aceleraciones a_1 y a_2 (como en el experimento legendario de la Torre de Pisa, o el experimento actual llevado a cabo en la Luna durante la misión Apolo 15 en 1971). Se encuentra que ambas partículas tienen la misma aceleración. Para partículas en la superficie de la Tierra

$$a_1 = a_2 = g$$

Cuando aplicamos la segunda ley de Newton al movimiento de cada partícula, y recordando que es la masa *inercial* la que debe multiplicarse por la aceleración para obtener la fuerza resultante, tenemos

$$F_{g1} = m_{i1}a_1 = m_{i1}g$$

y

$$F_{g2} = m_{i2}a_2 = m_{i2}g$$

Tomando la razón entre las dos ecuaciones anteriores y usando la Ec. (13-1), encontramos que

$$\frac{m_{g1}}{m_{g2}} = \frac{m_{i1}}{m_{i2}}$$

Por los experimentos, se tiene que la razón entre las masas gravitacionales de dos partículas es igual a la razón entre sus masas inerciales. Este resultado, aunque muy sencillo debe tomarse como una extraordinaria coincidencia de la naturaleza, que no pudo predecirse basándose sólo en razonamientos teóricos. Después de todo, dos partículas con cargas eléctricas idénticas no necesitan tener masa inercial idéntica, y en general, no la tienen; por

ejemplo, el protón y el positrón tienen precisamente cargas eléctricas iguales, pero sus masas inerciales difieren en un factor de 1 836. Baste decir que una gran variedad de experimentos han establecido que la masa gravitacional es proporcional a la masa inercial, de acuerdo con experimentos recientes, dentro de una parte en 10^{11}

Como la masa gravitacional de cualquier partícula es directamente proporcional a su masa inercial, podemos usar el objeto patrón de 1 kg, no sólo como base para medir la masa inercial, sino también como base de la masa gravitacional. Entonces, un objeto de 1 kg tiene una masa inercial de 1 kg y también una masa gravitacional de 1 kg. Por esta razón podemos eliminar los adjetivos, inercial y gravitacional, y de aquí en adelante nos referiremos simplemente a la masa de la partícula:

$$m_i = m_g \tag{13-2}$$

¿En qué forma depende la fuerza gravitacional entre un par de partículas de sus respectivas masas? Si las partículas 1 y 2 interactúan entre sí por gravitación, por la definición de la masa gravitacional sabemos que la fuerza sobre la partícula 1 debe ser proporcional a su masa m_1, y en forma similar para la partícula 2.

$$F_{2\ a\ 1} \propto m_1$$

y

$$F_{1\ a\ 2} \propto m_2$$

Pero también sabemos que por la tercera ley de Newton las magnitudes de estas fuerzas son iguales: $F_{1\ a\ 2} = F_{2\ a\ 1}$. Se sigue de esto, entonces, que la magnitud de la fuerza gravitacional sobre ambas, 1 y 2, debe ser proporcional a las dos m_1 y m_2.

$$F \propto m_1 m_2 \tag{13-3}$$

¿Cuál es la dirección de la fuerza gravitacional entre dos partículas en reposo en un espacio que no contiene otras partículas? *Debe* quedar a lo largo de la línea que une las dos partículas, es la *única línea* difinida por dicho par de partículas. Si la fuerza no quedara sobre dicha línea, esto significaría que podríamos distinguir alguna dirección en el espacio vacío (diferente a la línea que une a las partículas) de otra, en contradicción con el carácter isotrópico que se acepta para el espacio vacío. Como veremos, los experimentos confirman que la fuerza gravitacional es una *fuerza central.* Vea la Fig. 13-1.

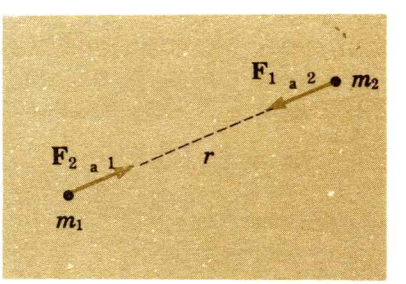


FIG. 13-1. Dos masas puntuales se atraen entre sí por una fuerza central.

Hasta aquí hemos establecido que la fuerza gravitacional entre un par de partículas es central y proporcional en forma directa al producto de las masas respectivas. ¿Cómo varía la fuerza con la distancia r que hay entre las partículas? El análisis de Newton demostró que $F \propto 1/r^2$, la fuerza varía inversamente con el

cuadrado de la distancia de separación. Combinando este resultado con el de la Ec. (13-3), podemos escribir

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

o

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \tag{13-4}$$

donde G es una constante universal. Por experimentos se sabe que la constante de la gravitación universal G es

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ N-m}^2/\text{kg}^2$$

Las unidades asignadas a G son aquellas que hagan que la fuerza quede en newtons cuando la masa esté en kilogramos y la distancia en metros.

Se sigue directamente de la Ec. (13-4) que dos partículas de 1 kg separadas por 1 m se atraen entre sí con una fuerza gravitacional de sólo 6.7×10^{-11} N. La fuerza gravitacional sólo se puede percibir si cuando menos uno de los dos objetos que interactúan tiene una masa muy grande, por ejemplo, la Tierra.

En la física, la fuerza gravitacional es la más débil de las fuerzas fundamentales; sin embargo, es la única fuerza fundamental que se experimenta con facilidad. ¡La fuerza de atracción eléctrica entre un protón y un electrón es 10^{39} veces más grande que la fuerza de atracción gravitacional que se presenta entre ellos! La razón por la que la fuerza eléctrica, que es mucho más grande, no se percibe en la experiencia ordinaria, se debe sólo a que todos los objetos grandes por lo general son eléctricamente neutros; contienen cantidades iguales de cargas positivas y negativas. La fuerza nuclear, que es aún más fuerte y que es la que actúa entre las partículas del núcleo atómico, nunca se evidencia en la experiencia ordinaria, debido a que sólo es efectiva a distancias muy cortas (10^{-15} m).

Un argumento usado por Newton para probar que la fuerza gravitacional era inversa al cuadrado, fue el que sigue. Sobre la superficie de la Tierra la fuerza gravitacional que se ejerce sobre una partícula de masa m es su peso mg, donde $g = 9.8$ m/s^2. Ahora bien, si la fuerza gravitacional varía como $1/r^2$, lo mismo debe pasarle a la aceleración. Entonces, por ejemplo, a seis veces la distancia del centro a la superficie de la Tierra, la aceleración de una partícula deberá ser $(\frac{1}{6})^2(9.8 \text{ m/s}^2)$, y a 60 veces el radio de la Tierra la aceleración gravitacional deberá ser $(\frac{1}{60})^2(9.8 \text{ m/s}^2) = 2.7 \times 10^{-3}$ m/s^2. Para comprobar si la fuerza gravitacional y la aceleración se diluyen por el factor $(\frac{1}{60})^2$ a esa distancia de la Tierra, se necesita que se pueda medir la aceleración de un objeto de prueba que se encuentre en esa localización. Pero la Luna se encuentra a 60 veces el radio de la Tierra del centro de ésta, y su

aceleración se puede calcular. Como la Luna orbita en un círculo de radio r (3.8×10^8 m) y el período T (27 días), su aceleración hacia la Tierra es

$$a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \left(\frac{2\pi}{27 \text{ días}}\right)^2 (3.8 \times 10^8 \text{ m})$$

$$= 2.7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

o sea, exactamente la magnitud requerida para una fuerza inversa al cuadrado.

El análisis de Newton, como se acaba de dar, se basa en una suposición importante: La Tierra, que en realidad no se puede considerar como una partícula cuando actúa sobre un pequeño objeto que se encuentre en su superficie, en sus efectos gravitacionales es equivalente a una partícula colocada en su centro. En realidad, Newton inventó el cálculo integral para llevar a cabo su prueba, dado en detalle en el Prob. 13-28, con las aseveraciones siguientes: Si una *capa esférica* de masa M y radio R interactúa con una partícula de masa m que se encuentra *fuera* de ella, la fuerza gravitacional entre ellas está dada por GmM/r^2, donde r es la distancia del *centro* de la capa a la masa m. Por otro lado, si la masa punto se localiza en cualquier punto *dentro* de la capa, ¡la fuerza gravitacional sobre ella es exactamente de *cero*! Vea la Fig. 13-2. En lo que respecta a la influencia gravitacional, la capa es equivalente a una masa puntual M en su centro cuando la partícula m se encuentra fuera, y es gravitacionalmente inexistente cuando la partícula se encuentra dentro. De la misma manera,

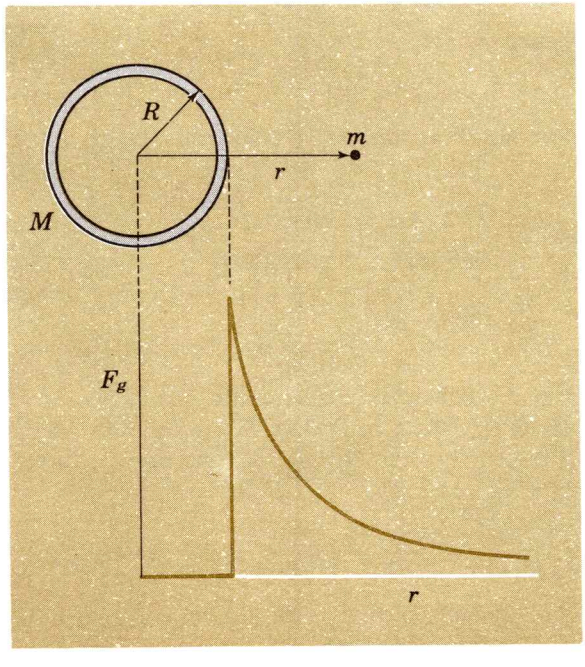


FIG. 13-2. Interacción gravitacional entre una capa esférica y una masa punto. La fuerza gravitacional es inversa al cuadrado de la distancia para la partícula fuera de la capa y cero para la partícula dentro de ella.

como una esfera maciza está formada nada más por la unión de muchas capas de diferentes radios, como una cebolla, al interactuar con cuerpos externos, una esfera maciza es equivalente, en sus efectos gravitacionales a una partícula de igual masa en su centro. Así, dos esferas que no se sobrepongan interactúan como dos partículas, considerando que la densidad de cada una de ellas sólo depende de la distancia a su centro.

Ejemplo 13-1

Calcule la razón entre la masa del Sol y la masa de la Tierra, dándose sólo los radios de las órbitas de la Luna y la Tierra (3.84×10^8 m y 1.49×10^{11} m) y sus respectivos periodos (27.3 días y 365 días).

Hagamos que M_s, M_t, y M_l representen en el orden mencionado a las masas del Sol, la Tierra y la Luna. Además, hagamos que r_{ts} represente el radio y T_{ts} el periodo de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, y r_{lt} y T_{lt} el radio y el periodo de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra. Entonces podemos escribir para las fuerzas F_{ts} sobre la Tierra debidas al Sol y F_{lt} sobre la Luna debidas a la Tierra.

$$F = ma = m\omega^2 r$$

$$F_{ts} = \frac{GM_tM_s}{r_{ts}^2} = M_l \frac{4\pi^2 r_{ts}}{T_{ts}^2}$$

$$F_{lt} = \frac{GM_lM_t}{r_{lt}^2} = M_m \frac{4\pi^2 r_{lt}}{T_{lt}^2}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, se obtiene

$$\frac{M_s}{M_l}\left(\frac{r_{lt}}{r_{ts}}\right)^2 = \frac{M_t}{M_l}\frac{r_{ts}}{r_{lt}}\left(\frac{T_{lt}}{T_{ts}}\right)^2$$

La simplificación de la masa de la luna M_l y la reacomodación de los términos nos da

$$\frac{M_s}{M_t} = \left(\frac{T_{lt}}{T_{ts}}\right)^2\left(\frac{r_{ts}}{r_{lt}}\right)^3 = \left(\frac{27.3 \text{ días}}{365 \text{ días}}\right)^2\left(\frac{1.49 \times 10^{11} \text{ m}}{3.84 \times 10^8 \text{ m}}\right)^3$$

$$\frac{M_s}{M_t} = 3.3 \times 10^5$$

La masa del Sol es 330 000 veces más grande que la de la Tierra. Este cálculo de la razón de las masas Sol-Tierra, que no necesita el conocimiento del valor numérico de la constante G, fue hecho primero por Newton.

13—2 EXPERIMENTO DE CAVENDISH

Sin el conocimiento de la magnitud de la constante de la gravitación universal G, Newton encontró una fuerza universal de

la gravedad inversa al cuadrado, teniendo en cuenta el movimiento de los planetas alrededor del Sol y la "caída" de la Luna y la de una manzana hacia la Tierra. Que dos objetos de tamaño ordinario se atraen entre sí gravitacionalmente fue comprobado primero por un experimento histórico de delicadeza extraordinaria hecho por Henry Cavendish en 1798, llevado a cabo más de cien años después de que Newton formulara la ley de la gravitación. El experimento de Cavendish es importante, no sólo porque por medio de él se demostró de manera directa que entre los objetos ordinarios actúa una fuerza gravitacional, sino también porque permitió calcular el valor numérico de G.

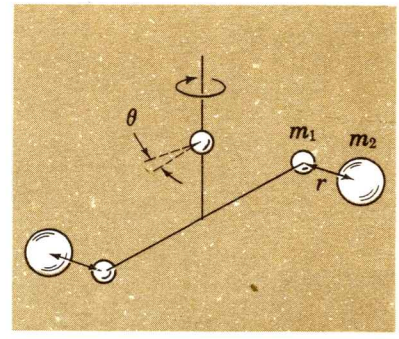


FIG. 13-3. Representación esquemática del experimento de Cavendish.

Cavendish fijó dos esferas pequeñas, cada una con la masa m_1, a los dos extremos de una varilla ligera y rígida, la que suspendió desde su centro de una fibra elástica delgada (de cuarzo), para formar una balanza de torsión, como se ve en la Fig. 13-3. Después se colocaron dos esferas grandes de plomo, cada una con la masa m_2, cerca de las masas m_1, siendo r la distancia entre m_1 y la m_2 más cercana. Al hacer este arreglo, cada esfera de plomo atrae a la masa m_1 más cercana provocándose una torca sobre la varilla en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj (viendo desde arriba). (La atracción gravitacional entre una de las esferas de plomo y la masa m_1 más distante es despreciable: la distancia es mucho mayor, y la torca tiene un brazo de palanca menor.) La torca en el sentido de las manecillas del reloj hace girar la varilla. Mientras la varilla gira, el alambre se tuerce. Esta deformación produce una torca de restitución en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, la que, para ángulos de torsión pequeños, es proporcional a dicho ángulo θ. Se logra el equilibrio cuando la torca gravitacional es igual (en magnitud) a la torca de restitución. Midiendo la torca de restitución (que es proporcional a θ), encontramos la fuerza atractiva entre las masas m_1 y m_2. Esta fuerza, junto con las masas m_1 y m_2, y de su separación r, nos permite calcular G por medio de la Ec. (13-4).

El pequeño ángulo θ, que gira la varilla debido a la torca gravitacional, se puede medir con más facilidad fijando un espejo sobre la fibra, mandando hacia él un rayo luminoso desde una fuente lejana y midiendo la desviación del rayo de luz reflejado cuando la varilla gira. La constante de proporcionalidad entre la torca de restitución y el desplazamiento angular θ, se determina midiendo el periodo de oscilación de la fibra con la varilla y las dos esferas que están suspendidas de ella. (Esta combinación tiene un momento de inercia conocido.)

Ejemplo 13-2

Calcule la masa de la Tierra.

Podemos escribir de dos maneras equivalentes la fuerza F_g que se ejerce sobre un objeto de masa m en la superficie de la Tierra.

$$F_g = mg$$

o
$$F_g = \frac{Gmm_t}{r_t^2}$$

donde, en la segunda relación, el peso se atribuye al jalón gravitacional de la Tierra de masa m_t y radio r_t

La igualdad de las dos expresiones para el peso da

$$mg = \frac{Gmm_t}{r_t^2}$$

o
$$m_t = \frac{gr^2}{G} = \frac{(9.8 \text{ m/s}^2)(6.4 \times 10^6 \text{ m})^2}{6.7 \times 10^{-11} \text{ N-m}^2/\text{kg}^2}$$
$$= 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Cavendish dijo que se mediría la masa de la Tierra por medio de su famoso experimento, ya que un conocimiento de la constante G permite que sea calculada dicha masa.

A partir del conocimiento de la masa de la Tierra y su radio se puede calcular su densidad promedio ρ:

$$\rho = \frac{m_t}{\text{volumen}} = \frac{m_t}{\frac{4}{3}\pi r_t^2}$$
$$= \frac{6.0 \times 10^{24} \text{ kg}}{\frac{4}{3}\pi(6.4 \times 10^6 \text{ m})^3} = 5.5 \text{ g/cm}^3$$

La densidad promedio de la Tierra, 5.5 veces la del agua, excede la del material de su superficie. De lo que debemos concluir que su interior está formado sobre todo por material de alta densidad, lo más probable es que se trate de metales.

13—3 EL CAMPO GRAVITACIONAL

Debido a que como vimos el peso de un objeto es $m\mathbf{g}$, la aceleración de la gravedad **g** nos da la fuerza gravitacional por unidad de masa, o sea el *campo gravitacional,* (también llamada *intensidad del campo gravitacional*), para cualquier objeto atraído por la Tierra:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m}$$

La magnitud de $\mathbf{F}_g$ se puede indicar en la forma

$$F_g = \frac{Gmm_t}{r^2}$$

donde m_t es la masa de la Tierra y r es la distancia entre la masa m y el centro de aquélla. Por lo que,

$$g = \frac{Gm_t}{r^2} \tag{13-5}$$

La aceleración de la gravedad desciende en forma inversa con el cuadrado de la distancia desde el centro de la Tierra. A una altura de 32 km, g es 1.0% menor que su magnitud en la superficie de ella.

Como veremos en el Cap. 14, la magnitud de **g** se puede medir con una precisión muy alta (1 parte en 10^6) usando varios tipos de péndulos. Estas medidas indican que g difiere en los diferentes puntos de la superficie de la Tierra. Hay varias causas: (1) La diferencia de altitud; (2) la forma elipsoidal más bièn que esférica de la Tierra (debido a la comba ecuatorial, los objetos que se encuentran en una latitud baja están más lejos del centro de la Tierra que los objetos que están cerca de los polos); (3) depósitos locales en la Tierra, que influencian el valor de g (y que en ocasiones indican la presencia de aceite o minerales); y (4) la rotación de la Tierra, que hace que la g efectiva difiera de la verdadera g. A 45° de latitud y al nivel del mar, g tiene un valor muy parecido al del llamado patrón de la aceleración, 9.80665 m/s^2.

La magntiud de **g** esta gobernada por la Ec. (13-5); siempre está dirigida hacia el centro de la Tierra. El campo gravitacional, **g** puede representarse por vectores, como se indica en la Fig. 13-4*a*. Además, hay otra forma sencilla de representar el efecto gravitacional de la Tierra sobre un cuerpo cercano a ella; vea la Fig. 13-4*b*. Aquí las líneas se dibujan en sentido radial hacia el centro, indicando que la fuerza gravitacional es atractiva. Si rodeamos la masa hacia la que apuntan las líneas por una esfera imaginaria, el número de *líneas de campo gravitacionales* que pasan a través de dicha superficie esférica imaginaria es la *misma* para *cualquier* radio. Sin embargo, debido a que el área de la superficie esférica varía directamente con el cuadrado del radio ($A = 4\pi r^2$), el número de líneas de campo que pasan por *unidad* de área de la esfera imaginaria desciende en forma inversa con el cuadrado del radio. Así, las líneas radiales, espaciadas de manera uniforme en tres dimensiones, pueden usarse para indicar la magnitud tanto como la dirección y el sentido de **g**. La magnitud de **g** es proporcional (o, por medio de una elección apropiada de las unidades, igual) al número de líneas de campo gravitacionales que pasan por una unidad de área orientada perpendicularmente a esas líneas.

Un campo gravitacional *uniforme* es aquel en el que las líneas del campo están espaciadas de modo uniforme y son paralelas, siendo **g** constante tanto en magnitud como en dirección y sentido. Por ejemplo, sobre un volumen pequeño cercano a la superficie de la Tierra, el campo gravitacional es casi uniforme.

Podemos describir la interacción gravitacional entre dos masas

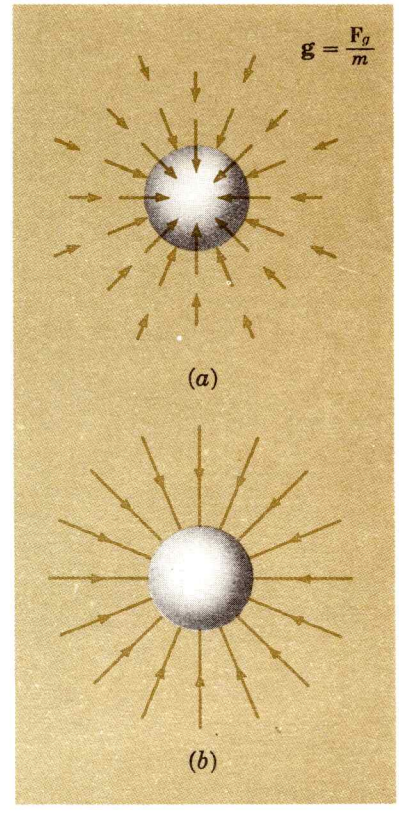


FIG. 13-4. (*a*) La intensidad gravitacional g representada por vectores. (*b*) La intensidad gravitacional representada por líneas de campo gravitacionales.

a través del concepto de campo como sigue: La primera masa establece un *campo gravitacional* en el espacio. La segunda masa, que se encuentra en este campo gravitacional, se encuentra bajo la acción de una fuerza gravitacional. Así, la interacción entre las partículas 1 y 2 se puede ver como efectuada en dos pasos: (1) La partícula 1 establece un campo gravitacional en todos los puntos del espacio, incluyendo la localización de la partícula 2; y (2) la partícula 2 está sujeta a una fuerza en virtud de su presencia en el campo. Recíprocamente, la partícula 2 establece un campo que actúa sobre la partícula 1.

El concepto del campo gravitacional es útil como un medio de visualizar, por medio de las líneas gravitacionales del campo, la interacción entre partículas. Pero tiene mucho mayor significado fundamental cuando nos preguntamos sobre la propagación de los efectos gravitacionales. Por ejemplo, supóngase que la estrella 1 en alguna forma se desplaza bruscamente alejándose de la estrella 2, que se encontraba a la distancia de 1 año luz de ella. ¿Podrá sentir la estrella 2 de *inmediato* la disminución de la fuerza gravitacional que actúa sobre ella? La respuesta, los físicos creen, no es así; le tomará todo un año, el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia que hay entre una estrella y la otra, a la fuerza gravitacional reducida para actuar sobre la estrella distante. En otras palabras, se cree que los campos gravitacionales se propagan por el espacio a la rapidez de la luz (en analogía con la propagación de las ondas electromagnéticas, que también se mueven con la rapidez de la luz, y que representan la interacción entre las partículas con carga eléctrica). Debido a que los efectos gravitacionales son muy tenues comparados con los efectos eléctricos, se necesitaría un evento astronómico catastrófico para generar una onda gravitacional perceptible y un aparato extremadamente sensible para detectarla. No obstante, experimentos recientes han revelado alguna evidencia, todavía no concluyente, sobre la existencia de ondas gravitacionales.

13—4 LAS LEYES DE KEPLER DEL MOVIMIENTO PLANETARIO

Dentro de nuestro sistema solar hay cierto número de ejemplos de objetos en cierto modo ligeros que se mueven alrededor de objetos masivos (vea la Tabla 13-1). La Luna se mueve en una órbita casi circular, y muchos satélites artificiales se mueven en trayectorias elípticas alrededor de la Tierra. Doce lunas circulan alrededor del planeta Júpiter. Los planetas trazan órbitas elípticas alrededor del Sol. Fue el análisis del movimiento planetario lo que llevó a Newton a la ley de la gravitación. El probó que las observaciones astronómicas eran consistentes con la fuerza de atracción universal, que varía en forma inversa con el cuadrado de

Tabla 13–1

Cuerpo	*Masa (masas terrestres)*†	*Diámetro promedio (kilómetros)*
Sol	333,400	1,391,000
Mercurio	0.0549	5,140
Venus	0.8073	12,620
Tierra	1.0000	12,760
Marte	0.1065	6,860
Júpiter	314.5	143,600
Saturno	94.07	120,600
Urano	14.40	53,400
Neptuno	16.72	49,700
Plutón	—	—
Luna	0.01228	3,476

† Masa de la Tierra: 5.975×10^{24} kg.

la distancia entre los cuerpos que interactúan y cuya dirección se encontraba a lo largo de las líneas que los une.

Las observaciones de un cuerpo ligero celeste que se mueve en la vecindad de un cuerpo celeste de masa mucho mayor indican que:

1. La trayectoria del cuerpo ligero es una sección cónica —una elipse, una parábola, o una hipérbola— dependiendo de la rapidez de iniciación. El cuerpo de mayor masa se encuentra en un foco.
2. El área barrida en la unidad de tiempo por el radio vector que va del cuerpo de mayor masa al cuerpo ligero es constante.
3. Para órbitas elípticas, el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del semieje mayor.

Estas relaciones empíricas, que sumarizan los movimientos de los planetas en el sistema solar, fueron determinadas primero por Johannes Kepler (1571-1630); se conocen como *las tres leyes de Kepler del movimiento planetario*. Desde luego, la formulación original de Kepler de estas leyes estaba restringida al movimiento de los planetas del sistema solar que se conocían entonces. La gran contribución de Newton está en que comprobó que las leyes de Kepler eran consecuencias lógicas de la fuerza universal inversa al cuadrado.

Primera Ley de Kepler. La Fig. 13-5 indica una órbita elíptica con la fuerza centrada a uno de los focos. El semieje mayor es a, y el semieje menor es b. A las distancias más cercana y más alejada del Sol cada planeta se encuentra en las posiciones de *perihelio* y *afelio*, respectivamente; los términos correspondientes para un satélite alrededor de la Tierra son *perigeo* y *apogeo* (*helios*, Sol; *geo*, Tierra). En general, la fuerza gravitacional tiene una

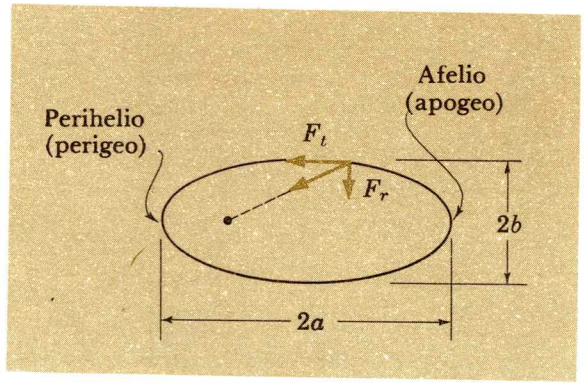


FIG. 13-5. Trayectoria elíptica trazada por un planeta alrededor del sol. Las componentes tangencial y radial de la fuerza gravitacional son F_t y F_r, respectivamente.

componente tangencial F_t a lo largo de la trayectoria, que cambia la magnitud de la velocidad del planeta, pero no su dirección; y una componente radial F_r, que cambia la dirección de la velocidad del planeta pero no su magnitud. En forma cualitativa es claro de la Fig. 13-5 que, cuando el planeta se *aleja* del centro de fuerzas, la fuerza gravitacional *frena* al planeta y, además, mientras el planeta se acerca al centro de fuerzas, la fuerza gravitacional tiene una componente tangencial a *lo largo* de la velocidad y la rapidez del planeta *aumenta*.

Para el caso especial de una órbita circular, muy aproximada a la de los planetas del sistema solar (excepto Plutón) y a la de las lunas, los dos focos de la elipse se juntan en el centro del círculo. Entonces la fuerza se encuentra siempre en ángulo recto con la velocidad ($F_t = 0$), la rapidez del planeta es constante, y $a = b = r$ (donde r es el radio del círculo).

La fuerza gravitacional de un planeta sobre el Sol es precisamente igual, por la tercera ley de Newton, a la fuerza del Sol sobre el planeta. En consecuencia, la fuerza sobre el Sol cambia con el tiempo precisamente en la misma forma que la fuerza sobre el planeta. Si el planeta se mueve en una elipse, lo mismo lo hace el Sol. Vea la Fig. 13—6. En realidad, ambos objetos se mueven en elipses alrededor de un centro de masa común, que permanece en

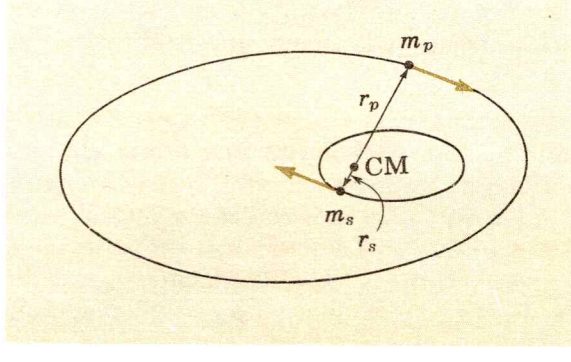


FIG. 13-6. Ambos, el planeta y el Sol trazan trayectorias elípticas alrededor de su centro de masa. El ímpetu lineal total del sistema es cero.

reposo. Su relación de masas: m_p/m_s está en razón inversa de sus respectivas distancias r_p y r_s del centro de masa: $m_p/m_s = r_s/r_p$. El ímpetu lineal total del sistema es, desde luego, cero: ei planeta y el Sol tienen ímpetus de magnitud igual en la misma dirección pero con sentidos opuestos.

Si el Sol tiene una masa muy grande comparado con un planeta, como en el caso del sistema solar, el centro de masa se encuentra cerca del centro del Sol. Entonces, el Sol se encuentra casi en reposo, y la energía cinética total del sistema Sol-planeta es igual a la energía cinética del planeta sólo. Además, el momento angular orbital total del sistema en esencia es el del planeta solo.

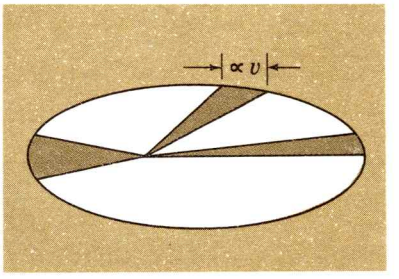


FIG. 13-7. Ilustración de la segunda ley de Kepler. Las tres áreas sombreadas, que representan el área barrida por el radio vector que va del centro de fuerzas a la partícula que orbita en tiempos iguales, son iguales.

Segunda Ley de Kepler. Primero recordamos un concepto demostrado en la Sec. 11.4. Cuando una partícula se encuentra bajo la acción de una fuerza *central* —una que quede a lo largo de la línea que la une al centro de fuerzas fijo— el momento angular orbital de la partícula relativo al centro de fuerzas es constante. Además dA/dt, la rapidez a la que el área se barre por el radio vector del centro de fuerzas a la partícula que se mueve y tiene la masa m, es proporcional al momento angular de la partícula, L; esto es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \qquad (11\text{-}12)$$

Las observaciones astronómicas indican que dA/dt es una constante para los planetas y los cometas alrededor del Sol, y para las lunas alrededor de un planeta. Esto implica que la fuerza gravitacional es una fuerza *central,* actuando a lo largo del radio vector **r**. La Fig. 13-7 muestra el área barrida por el radio vector que va del Sol al cuerpo ligero para diferentes localizaciones relativas al Sol. Note que la rapidez del cuerpo es mayor cuando está más cerca del centro de fuerzas y recíprocamente.

Si v_p y v_a son las rapideces en las posiciones del perihelio y el afelio, en este orden, y r_p y r_a son las correspondientes distancias al Sol, el principio de la conservación del momento angular requiere que

$$mr_p v_p = mr_a v_a$$

La dirección del momento angular es perpendicular al plano de la órbita, y su sentido se deriva de la regla de la mano derecha.

Tercera Ley de Kepler. Se puede demostrar que el periodo T de un planeta que se mueva bajo la influencia de una fuerza inversa al cuadrado en una órbita elíptica está dado por

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \qquad (13\text{-}6)$$

Tabla 13–2

Satélites	*Longitud del semieje mayor a* (m)	*Periodo de revolución* (s)
Planetas del Sol		
Mercurio	5.79×10^{10}	7.60×10^{6}
Venus	1.08×10^{11}	1.94×10^{7}
Tierra	1.49×10^{11}	3.16×10^{7}
Marte	2.28×10^{11}	5.94×10^{7}
Júpiter	7.78×10^{11}	3.74×10^{8}
Saturno	1.43×10^{12}	9.30×10^{8}
Cometa Halley	2.69×10^{12}	2.39×10^{9}
Urano	2.87×10^{12}	2.66×10^{9}
Neptuno	4.50×10^{12}	5.20×10^{9}
Plutón	5.91×10^{12}	7.82×10^{9}
Algunas lunas de la tierra		
Spútnik I	6.94×10^{6}	5.77×10^{3}
Explorer I	7.81×10^{6}	6.87×10^{3}
Telstar I	9.66×10^{6}	9.48×10^{3}
La Luna	3.84×10^{8}	2.36×10^{6}
Lunas de Júpiter		
I (Io)	4.20×10^{8}	1.53×10^{5}
II (Europa)	6.70×10^{8}	3.06×10^{5}
III (Ganimedes)	1.07×10^{9}	6.18×10^{5}
IV (Calisto)	1.88×10^{9}	1.44×10^{6}
V	1.81×10^{8}	4.30×10^{4}
VI	1.14×10^{10}	2.16×10^{7}
VII	1.17×10^{10}	2.24×10^{7}
VIII	2.35×10^{10}	6.38×10^{7}
IX	2.40×10^{10}	6.43×10^{7}
X	1.17×10^{10}	2.33×10^{7}
XI	2.25×10^{10}	6.35×10^{7}

donde a es el semieje mayor y M la masa del centro de fuerzas. Para un centro de fuerzas dado, el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del semieje mayor. Esta es la tercera ley de Kepler del movimiento planetario.

Los periodos y semiejes mayores de los planetas del Sol (incluido el cometa Halley), algunos satélites de la Tierra y las lunas de Júpiter, están dados en la tabla 13-2. Estos datos están representados gráficamente en la Fig. 13-8.

A partir de la figura vemos que, para un centro de fuerzas dado, las observaciones astronómicas se resumieron en la relación entre el periodo y el semieje mayor siguiente:

$$T^2 = Ka^3$$

donde, por la Ec. (13-6), la constante K está en proporción inversa

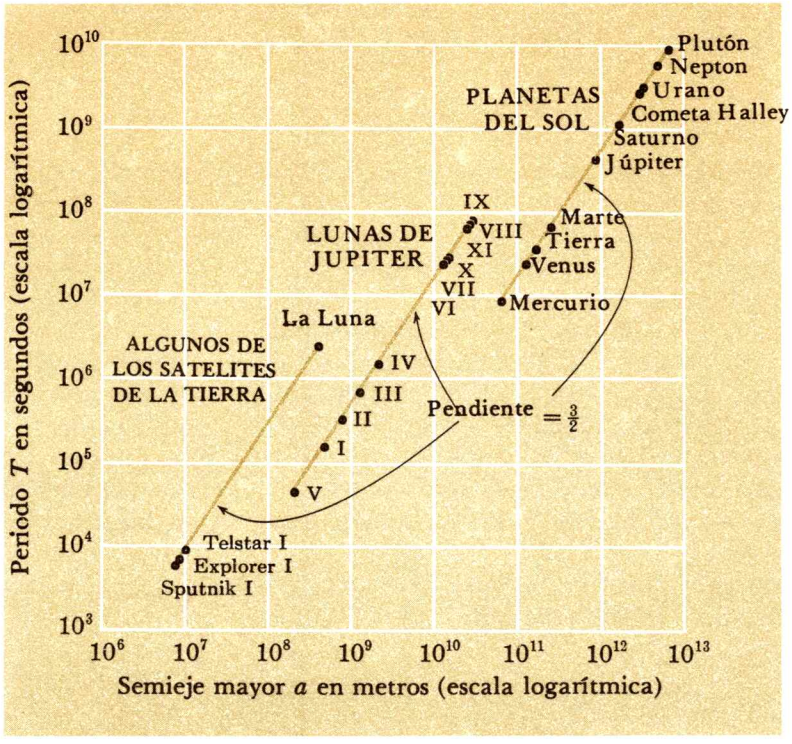


FIG. 13-8. Ilustración de la tercera ley de Kepler para tres sistemas planetarios: el Sol y sus planetas, la Tierra y sus satélites, el planeta Júpiter y sus lunas. El logaritmo del periodo se grafica contra el logaritmo del semieje mayor. Las tres líneas tienen la misma pendiente, $^3/_2$. Por lo tanto, cada sistema obedece la relación $\log T = {}^3/_2 \log a + {}^1/_2 \log K$, que es equivalente a $T^2 = Ka^3$, siendo K una constante diferente para cada sistema.

a la masa M del centro de fuerzas. Esto es $K = 4\pi^2/GM$. Con facilidad se puede encontrar que, para la situación especial en la que la órbita elíptica se convierte en un círculo (y a pasa a ser r), la Ec. (13-6) es una consecuencia necesaria del carácter inverso al cuadrado de la fuerza de gravitación. Una partícula que se mueve con movimiento circular uniforme tiene la aceleración radial $\mathbf{a}_r$ de magnitud

$$a_r = \omega^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \tag{4-16}$$

donde ω es la rapidez angular y T es el periodo del movimiento. Si la fuerza radial proviene de la atracción gravitacional del centro de fuerzas, se tiene

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\frac{GmM}{r^2} = \frac{m\ 4\pi^2 r}{T^2}$$

o

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

Esta es precisamente la Ec. (13-6) con a reemplazado por r. Mientras que que la *segunda* ley de Kepler sólo requiere que la

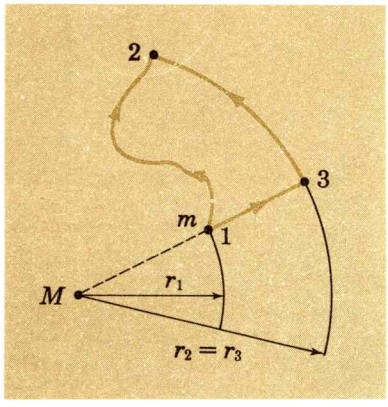


FIG. 13-9. Se calcula la diferencia de energía potencial gravitacional para la masa m a las distancias r_1 y r_2 de la masa M.

fuerza gravitacional sea una fuerza *central,* la *tercera* ley de Kepler, además, requiere que $F_g \propto r^{-2}$.

13—5 ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL

La fuerza gravitacional entre dos partículas depende sólo de su distancia de separación, no de sus velocidades. Esto es, por lo tanto, una fuerza conservativa, y podemos asociarla con una energía potencial gravitacional (vea la Sec. 10-3). Hasta ahora, hemos considerado el caso especial en el que la fuerza gravitacional (y por ello también la aceleración debida a la gravedad) era constante. Entonces, la diferencia de energía potencial gravitacional para una partícula de masa m desplazada entre dos puntos separados por una distancia vertical Δy fue $\Delta U_g = mg\,\Delta y$. Queremos ahora encontrar la expresión más general para la energía potencial gravitacional, tomando en cuenta el hecho de que la fuerza gravitacional entre dos partículas varía con su distancia de separación.

Por definición, la diferencia de energía potencial $U_f - U_i$ entre dos puntos i y f está dada por

$$U_f - U_i = -\int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -W_{i \to f} \qquad \text{(10-4),(13-7)}$$

Así, la diferencia de energía potencial gravitacional es igual al negativo del trabajo hecho por la fuerza gravitacional cuando una partícula se mueve desde un punto *i*nicial a un punto *f*inal a lo largo de *cualquier trayectoria.*

Considérense dos masas puntuales m y M, donde M permanece fija. Debido a que la fuerza gravitacional $\mathbf{F}_g$ entre ellas es conservativa, el trabajo hecho sobre la masa m al moverse del punto 1 al punto 2 (Vea la Fig. 13-9) es independiente de la trayectoria de 1 a 2.

Tanto si tomamos la masa m a lo largo de una trayectoria complicada de 1 a 2, o a lo largo de la trayectoria 1 a 3 (a lo largo de la cual $\mathbf{F}_g$ es paralela al desplazamiento) y luego de 3 a 2 (a lo largo de la cual $\mathbf{F}_g$ está en ángulo recto con el desplazamiento), *el trabajo total hecho es el mismo.* Así, podemos encontrar la diferencia de energía potencial gravitacional $U_2 - U_1$ calculando el trabajo $W_{1 \to 3}$ hecho a lo largo de la trayectoria de 1 a 3, y el trabajo $W_{3 \to 2}$ hecho a lo largo de la trayectoria de 3 a 2. Por la Ec. (13-7),

$$U_2 - U_1 = -W_{1 \to 2} = -(W_{1 \to 3} + W_{3 \to 2}) \qquad \text{(13-8)}$$

A lo largo del arco circular de 3 a 2, la fuerza gravitacional $\mathbf{F}_g$ siempre es perpendicular al desplazamiento $d\mathbf{r}$; así, el trabajo hecho $W_{3 \to 2}$ al mover la masa m a lo largo de esa trayectoria es cero: $W_{3 \to 2} = 0$.

A lo largo de la trayectoria radial de 1 a 3, la fuerza gravitacional $\mathbf{F}_g$ tiene la dirección del desplazamiento $d\mathbf{r}$ y sentido opuesto, el ángulo θ entre ellos es de 180°. Por lo tanto

$$W_{1\to 3} = \int_{r_1}^{r_3} \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_{3=r_2}} F_g \cos\theta \, dr$$
$$= \int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2}(-1)(dr) = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

La sustitución de este resultado en la Ec. (13-8) da

$$U_2 - U_1 = -W_{1\to 2} = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (13\text{-}9)$$

Se acostumbra considerar que la energía potencial gravitacional sea cero en el punto donde la fuerza sea cero a saber, en $r = \infty$. Haciendo que $U_1 = U_\infty = 0$ para $r_1 = \infty$, y eliminando el subíndice 2, tenemos

$$U_r = -\frac{GMm}{r} \qquad (13\text{-}10)$$

El signo negativo que aparece en la Ec. (13-10), se debe a que el cero para la energía potencial corresponde a $r = \infty$ y porque la fuerza gravitacional es atractiva. A medida que se acercan dos masas su energía potencial *decrece* (se hace más negativa). Podemos ver que la energía potencial gravitacional debe ser negativa considerando dos partículas apartadas una distancia infinita y en reposo. La energía cinética de las partículas es nula, y su energía potencial también es nula. Así, la energía total del sistema es cero, y debe, por la conservación de la energía, permanecer igual a cero. A medida que las partículas se atraen entre sí, y se mueven acercándose, su energía cinética aumenta; por lo que, la energía potencial del sistema debe decrecer, haciéndose negativa para asegurar que la energía total se mantenga nula.

La Fig. 13-10 indica la energía potencial gravitacional entre dos masas puntuales M y m como una función de su distancia de separación r.

La Ec. (13-10) expresa la energía potencial de dos partículas *puntuales*. Da también la energía potencial de dos objetos esféricos. De la misma manera que la *fuerza* gravitacional entre dos capas esféricas puede ser calculada considerando la masa entera de cada capa como si estuviera concentrada en un punto colocado en su centro, también la *energía potencial* gravitacional entre dos capas esféricas que no se sobreponen se calcula considerando las masas de las capas como si se encontraran concentradas en sus respectivos centros.

La energía potencial gravitacional de un par de partículas m_1 y m_2 separadas por r_{12} es $-Gm_1m_2/r_{12}$. ¿Cuál es la energía potencial

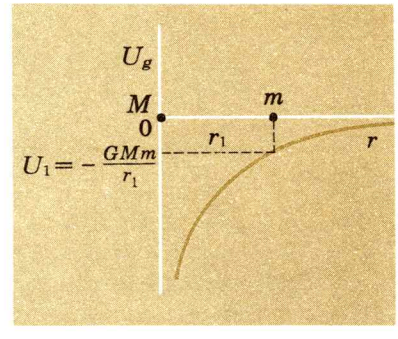


FIG. 13-10. La energía potencial gravitacional U_g como una función de la distancia de separación r entre partículas punto de masas m y M.

total para un sistema formado por tres o más partículas? No es difícil encontrar que no es sino la suma de las energías potenciales respectivas de cada par de partículas. Así, con las partículas m_1, m_2, y m_3,

$$U_g = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} - \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} - \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} \qquad (13\text{-}11)$$

donde r_{13} es la distancia entre las partículas 1 y 3, y r_{23} la que hay entre las 2 y 3.*

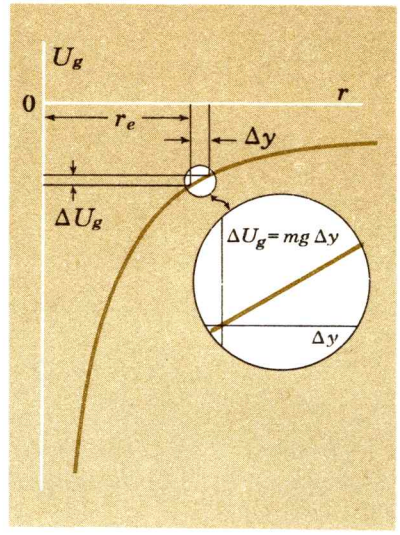


FIG. 13-11. Para objetos cercanos a la Tierra, la diferencia de energía potencial gravitacional está dada por $\Delta U_g = mg\,\Delta y$.

Ejemplo 13-3

Un objeto de masa m cercano a la superficie de la Tierra se eleva hasta una altura vertical Δy. Demuestre que, si Δy es pequeña comparada con el radio de la Tierra r_t, la relación general para la energía potencial gravitacional se reduce a la relación familiar $\Delta U = mg\,\Delta y$.

A partir de la Ec. (13-9),

$$\Delta U_g = U_2 - U_1 = Gm_tm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Hacemos que $r_1 = r_t$ y que $r_2 = r_t + \Delta y$. Vea la Fig. 13-11. Si $\Delta y \ll r_t$, podemos representar a $-1/r_2$ como

$$-\frac{1}{r_2} = -\frac{1}{r_t + \Delta y} = -\frac{1}{r_t}\left[\frac{1}{1 + \Delta y/r_t}\right]$$

$$= -\frac{1}{r_t}\left[1 - \frac{\Delta y}{r_t} + \left(\frac{\Delta y}{r_t}\right)^2 - \cdots\right] \approx -\frac{1}{r_t} + \frac{\Delta y}{r_t^2}$$

Entonces, la ecuación anterior toma la forma

$$\Delta U_g = Gm_tm\left[\frac{1}{r_t} + \left(-\frac{1}{r_t} + \frac{\Delta y}{r_t^2}\right)\right] = m\frac{Gm_t}{r_t^2}\Delta y$$

Pero, por definición

$$g = \frac{Gm}{r_t^2} \qquad (13\text{-}5)$$

Por lo tanto,

$$\Delta U_g = mg\,\Delta y$$

Ejemplo 13-4

Considérese un cohete que lleva una carga de masa m. Queremos que despegue desde la superficie de un planeta de masa M y radio R, de tal manera que su rapidez sea v después de que escape del campo gravitacional del planeta. (*a*) ¿Cuál es la rapidez necesaria

*Para una prueba de la Ec. (13-11) vea a R. T. Weidner y R. L. Sells, *Elementary Classical Physics*, 2a. Ed., Sec. 13-5, Allyn and Bacon, 1973.

para el despegue? (*b*) ¿Cuál es la rapidez mínima del despegue necesaria para que quede libre del planeta?

(*a*) Como una suposición que simplifique, considérese que el planeta está en reposo, entonces la energía total del sistema *m*-*M* se conserva:

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{D}$$

donde v_0 es la rapidez de despegue y $D \to \infty$ de tal manera que $(GMm/D) \to 0$. La rapidez necesaria de despegue entonces es

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R} + v^2}$$

(*b*) La rapidez mínima de despegue corresponde al caso en que $v = 0$:

$$(v_0)_{mín} = \sqrt{\frac{2GMm}{R}}$$

Esta rapidez de despegue mínima se llama *velocidad de escape* v_e:

$$v_e = (v_0)_{mín}$$

Si la carga despega con la rapidez v_e, la energía total es *cero* y se puede encontrar que la trayectoria es una parábola. En el caso más general para el escape ($v_e > 0$), la trayectoria es una hipérbola. Para una partícula de *cualquier* masa, la velocidad de escape desde la superficie de la Tierra es más o menos de 11 km/s.

Ejemplo 13-5

Una nave espacial está sobre una órbita circular como un satélite de la Tierra cercano a su superficie. ¿En cuánto deberá aumentar la rapidez, para que pase a una nueva órbita que sea elíptica alrededor de la Tierra y cuya máxima distancia a la superficie de ella sea igual al radio terrestre?

Vea la Fig 13-12. Cuando la órbita es elíptica, el centro de la Tierra está en un foco. La rapidez del satélite en la posición del perigeo es v_p, y su distancia desde el centro de la Tierra es r_p, donde $r_p = r_t$, el radio de la Tierra. Cuando está a la distancia de mayor alejamiento de la Tierra, en la posición del apogeo, la rapidez del satélite es v_a y su distancia al centro de la Tierra es $r_a = 2r_t$.

Aplicando el principio de la conservación de la energía a las posiciones del perigeo y del apogeo, tenemos para la energía total del sistema

$$K_p + U_p = K_a + U_a$$

$$\tfrac{1}{2}mv_p^2 - \frac{Gmm_t}{r_p} = \tfrac{1}{2}mv_a^2 - \frac{Gmm_t}{r_a}$$

donde m_e es la masa de la Tierra.

El momento angular del satélite también es constante cuando se mide con respecto al centro de fuerzas, y aplicando la conserva-

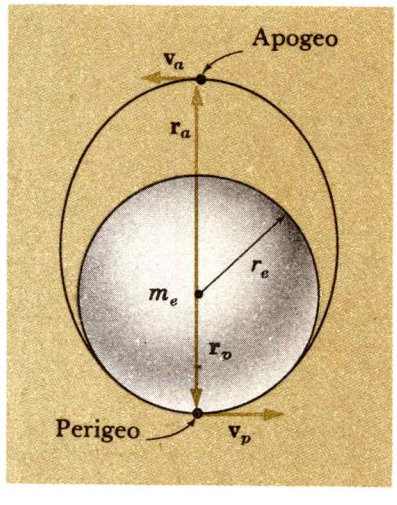


FIG. 13-12. Una nave espacial que al principio estaba en una órbita cercana a la superficie de la Tierra, aumenta su velocidad para pasar a una órbita elíptica.

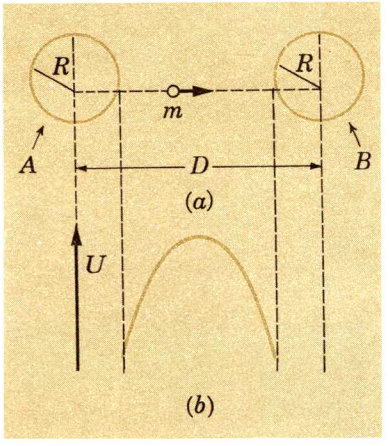


FIG. 13-13. (*a*) Las esferas *A* y *B*, con una partícula de masa *m* proyectada desde la superficie de *A* y que intenta llegar a la superficie de *B*. (*b*) La energía potencial gravitacional del sistema como una función de *x*, la distancia del centro de *A* a la partícula. Se considera que las esferas *A* y *B* son macizas, por lo que $U(x)$ no se grafica dentro de ninguna de ellas.

ción del momento angular a las posiciones del perigeo y el apogeo (en ambas posiciones el radio vector y la velocidad son perpendiculares) se requiere que

$$r_p m v_p = r_a m v_a$$

Eliminando v_a de las dos ecuaciones anteriores y despejando a v_p se obtiene:

$$v_p = \left[2\left(\frac{Gm_t}{r_p}\right)\left(\frac{r_a}{r_a + r_p}\right)\right]^{1/2}$$

Pero la rapidez v_c de un satélite en órbita circular cercana a la superficie de la Tierra es $v_c = (Gm_t/r_t)^{1/2} = (Gm_t/r_p)^{1/2}$, y $r_a = 2r_p$ Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior se obtiene $v_p = (2/\sqrt{3})v_c = 1.15v_c$. La rapidez del satélite debe aumentar en un 15%.

Ejemplo 13-6

¿Con qué rapidez mínima debe proyectarse una partícula de masa *m* desde la superficie de una esfera uniforme *A*, si debe llegar a la superficie de una esfera idéntica *B*? Ambas esferas *A* y *B* tienen la masa *M* y el radio *R*; sus centros están separados por la distancia *D*. Vea la Fig. 13-13*a*.

En la primera mitad del viaje de la partícula sufre una atracción mayor por la esfera *A* que por la *B*, y mayor atracción por *B* que por *A* en la segunda mitad del viaje. Si se proyecta con una rapidez demasiado baja, la partícula se mueve alejándose de *A*, queda en reposo, y después cae hacia atrás hacia el punto de partida sin llegar al punto central. Pero si la partícula se proyecta con velocidad bastante grande desde *A* hacia *B*, de tal manera que llegue al punto medio entre las dos esferas —una localización en la que las dos esferas la atraen por igual, pero con sentidos opuestos,— entonces la partícula ganará rapidez en la segunda mitad de su viaje y llegará a la superficie de la esfera *B*.

Se puede describir la misma situación en términos de la energía: La partícula pierde energía cinética y la energía potencial del sistema aumenta a medida que la partícula se mueve desde *A* hasta el punto medio y recíprocamente en la segunda porción del camino. La rapidez de lanzamiento crítica $v_{\text{mín}}$ es aquélla para la que la energía cinética de la partícula se anula en el punto medio. Para determinar $v_{\text{mín}}$ en forma más directa aplicamos la conservación de la energía, igualando la energía total del sistema con la partícula en la posición de lanzamiento a la energía total del mismo con la partícula en el punto medio.

La energía total del sistema cuando la partícula se encuentra sobre la superficie de la esfera *A* se puede indicar en la forma

$$E = K + U$$

Partícula sobre la superficie de *A*:

$$= \tfrac{1}{2}mv_{\text{mín}}^2 + \left(-\frac{GmM}{R}\right) + \left(-\frac{GmM}{D-R}\right)$$

donde el segundo término de la derecha es la energía potencial de la partícula m que interactúa con la esfera A de masa M a una distancia R de su centro, mientras que el tercer término es la energía potencial entre m y la esfera B con la partícula que al principio está a una distancia $D - R$ del centro de esa esfera.

Con la partícula en el punto medio y momentáneamente en reposo, para representar la energía total del sistema se puede escribir:

Partícula en el punto medio:

$$E = K + U = 0 + \left(-\frac{GmM}{\frac{1}{2}D}\right) + \left(-\frac{GmM}{\frac{1}{2}D}\right)$$

En esta localización la partícula está a la misma distancia $\frac{1}{2}D$ de ambas esferas. (Hemos ignorado la energía potencial gravitacional de la esfera A que interactúa con la esfera B en ambas ecuaciones anteriores, porque esta energía potencial permanece invariable.)

Igualando las dos relaciones anteriores para la energía total y despejando a $v_{\text{mín}}$, tenemos

$$\tfrac{1}{2}mv_{\text{mín}}^2 - \frac{GmM}{R} - \frac{GmM}{D-R} = -\frac{4GmM}{D}$$

y por último, después de algunas operaciones algebraicas

$$v_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}\,\frac{1-(4\,R/D)(1-R/D)}{1-R/D}}$$

Nótese que la rapidez de lanzamiento no depende de la masa de la partícula m.

Es instructivo examinar la curva indicada en la Fig. 13-13*b*, en la que la energía potencial gravitacional de la partícula m que interactúa con las esferas A y B se grafica como una función de la localización de la partícula. Vemos que la energía potencial aumenta a un máximo en el punto medio; la partícula debe tener suficiente energía cinética inicial para sobrepasar la "loma de potencia" si ha de llegar a la esfera distante. La misma clase de loma de potencial se presenta, por ejemplo, cuando una nave espacial viaja de la superficie de la Tierra a la de la Luna. En este caso, el punto más alto de la loma de potencial está mucho más cercano a la Luna que a la Tierra (debido a la gran diferencia que hay entre las masas de la Tierra y la Luna.) Además, la altura de la loma de potencial que debe sobrepasarse en el viaje de la Tierra a la Luna es mucho más alta que para el viaje de la Luna a la Tierra (de nuevo debido a la gran diferencia de las masas); por esta razón se debe usar un cohete relativamente grande para lanzar una nave espacial de la Tierra a la Luna, mientras que un cohete mucho más modesto es suficiente para el viaje de regreso.

RESUMEN

La fuerza atractiva central universal de gravitación entre dos partículas cualesquiera con masas m_1 y m_2 separadas por una distancia r tiene la magnitud

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \qquad (13\text{-}4)$$

donde G es una constante. Esta relación da, también, la fuerza entre dos capas esféricas con sus centros separados por r. La fuerza gravitacional sobre una masa puntual en el interior de una capa esférica de masa es cero.

El campo gravitacional g es la fuerza gravitacional por unidad de masa gravitacional, F_g/m; que puede representarse por medio de líneas del campo gravitacional.

En su forma general, las leyes de Kepler se indican como sigue: (1) Una partícula bajo la influencia de una fuerza central atractiva inversa al cuadrado se mueve en una trayectoria que es una sección cónica; (2) el radio vector que va del centro de fuerzas a la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales; (3) para órbitas elípticas, el cuadrado del periodo es proporcional, para un centro de fuerzas fijo, al cubo del semieje mayor.

La energía potencial gravitacional entre dos masas M y m separadas por r es

$$U_r = -\frac{GMm}{r} \qquad (13\text{-}10)$$

PROBLEMAS

Véanse las tablas 13-1 y 13-2 para datos astronómicos.

13-1. Tres partículas, cada una de masa m, se colocan en los vértices de un triángulo equilátero cuyos lados tienen la longitud d. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional resultante sobre cada una de las masas?

13-2. ¿A qué distancia de separación la fuerza de gravitación entre dos protones será igual al peso del protón sobre la superficie de la Tierra? La masa de un protón es de 1.7×10^{-27} kg, y su "radio" nominal es del orden de 10^{-15} m.

13-3. De acuerdo con el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno (1913), el átomo puede representarse por un electrón solo moviéndose a 2.2×10^6 m/s sobre una órbita circular alrededor del protón; el radio de la órbita es de 5.3×10^{-11} m. (*a*) Si la fuerza centrípeta fuera proporcionada por la gravitación sola, ¿cuál debería ser la masa del protón? (Considere el valor aceptado de la constante gravitacional.) (*b*) Desde un punto de vista alternativo, ¿cuál debería ser la "constante" gravitacional, si la masa del protón fuera de 1.67×10^{-27} kg (el valor aceptado)?

13-4. El periodo de cierto péndulo difiere en 0.10% entre la base y la cima de una montaña. El periodo de cualquier péndulo varía en forma inversa con la raíz cuadrada de g. ¿Cuál es la altura de la montaña?

13-5. ¿A qué distancia del centro de la Tierra debe girar un satélite en una órbita circular sobre el ecuador para que tenga la misma rapidez angular que el giro de la Tierra alrededor de su eje y que por ello se vería como estacionario desde ésta?

13-6. Antes de que Cavendish determinara por primera vez el valor numérico de G, no se podían calcular las masas absolutas del Sol y los planetas con la ley de la gravitación universal. Sin embargo, podemos determinar la razón de las masas de dos cuerpos cualesquiera, cada uno de los cuales tenga un satélite orbitando alrededor de él. Como un ejemplo, calcúlese, sin usar el valor numérico de G, la razón de la masa de Júpiter a la masa de la Tierra a partir de las observaciones siguientes:

	Radio de la órbita	*Periodo*
Luna de la Tierra	2.4×10^5 mi	27 días
Luna de Júpiter	4.2×10^5 mi	3.5 días

13-7. Cuando la "combustión" nuclear ya no es posible, una estrella como el Sol se convierte en una *enana blanca* —una estrella altamente condensada con una masa estelar normal comprimida dentro de las dimensiones de un planeta del tamaño de la Tierra—. La estrella Sirio, de hecho, corresponde a dos estrellas ligadas entre sí por su atracción gravitacional mutua. Sirio B, la menos brillante del par, es una enana blanca con una masa igual a la del Sol; sin embargo, su radio sólo es de un 2.2% del radio del Sol. Encuentre (a) la densidad y (b) la aceleración de la gravedad en la superficie de Sirio B.

13-8. Cuando una estrella masiva está cerca del fin de su existencia, explota; una estrella como éstas que explotan, se llama una *supernova*. Uno de los resultados de esta explosión es la creación de una *estrella neutrónica*. Una estrella neutrónica típica tiene un radio de 10 km y una masa igual a la del Sol. Determine (a) la densidad promedio y (b) la intensidad del campo gravitacional en la superficie —el valor de g en la superficie— de dicha estrella. (c) Compare este resultado con la aceleración de la gravedad en la superficie del Sol.

13-9. La magnitud de g es menor en el ecuador que en los polos debido a dos factores: el giro de la Tierra y la comba ecuatorial. La distancia del centro de la Tierra al ecuador es más grande en 13.5 mi que del centro a los polos. Suponiendo, por simplificar, que la Tierra es una esfera perfecta con el radio de 3 960 mi, calcule el decrecimiento fraccionario en g para (a) un punto 13.5 mi *arriba* de la superficie de la Tierra y (b) un punto 13.5 mi *abajo* de la superficie de ésta (despreciando el giro de la Tierra).

13-10. Calcule el periodo de la órbita circular de una nave espacial que se mueva cerca de la superficie de la Luna.

13-11. Dos partículas de masas M y 3 M están separadas por una distancia d. ¿A qué distancia de la masa 3 M el campo gravitacional de las dos masas es cero?

13-12. Dos objetos de masas m y 2 m, respectivamente, están separadas por la distancia d. (a) ¿Cuál debe ser la razón de sus rapideces y las direcciones de sus velocidades, si cada masa debe girar en un círculo alrededor del centro de masa del sistema, que permanece en reposo? (b) ¿Cuál es la energía mínima requerida para separar por completo estas dos masas?

13-13. Al reentrar en la atmósfera de la Tierra, un satélite pierde energía por el arrastre atmosférico. La fuerza de arrastre al principio es pequeña comparada con la fuerza radial que se ejerce sobre el satélite, y se puede considerar que el satélite se mueve en una órbita circular. Demuestre que en la reentrada el satélite en realidad *aumenta su rapidez*, en lugar de que disminuya.

13-14. Un sistema binario de estrellas está formado por dos estrellas que se mantienen juntas por su atracción gravitacional mutua y giran alrededor del centro de masa del sistema. Demuestre que $M_{sis}T^2 = D^3$, donde M_{sis} es la masa del sistema binario en unidades solares de masa, T es el periodo de la órbita en años, y D es la distancia de separación en unidades astronómicas (UA). Una unidad astronómica es igual al valor promedio de la distancia de la Tierra al Sol. (*Sugerencia:* El periodo de la órbita de la Tierra es de un año. Una unidad de masa solar $M_\odot$ es igual a la masa del Sol.)

13-15. Exprese la energía potencial de un objeto de masa m que se encuentre sobre la superficie de la Tierra en términos del peso del objeto y el radio de la Tierra. (Use la Ec. 13-10.)

13-16. Supóngase que la luna se encontrara en reposo a la distancia actual de la Tierra, en lugar de orbitarla. ¿Con qué rapidez chocaría con la Tierra? (Suponga, que la Tierra tiene una masa infinitamente mayor con respecto a la Luna.)

13-17. Un proyectil se dispara en sentido vertical hacia arriba desde la superficie de la Tierra con la rapidez de 6.0 km/s. (a) ¿Cuál es la distancia máxima que alcanza, desde el centro de la Tierra? (b) ¿En qué dirección con respecto a la vertical debe dispararse para que se coloque en una órbita estable?

13-18. ¿Cuál es la velocidad de escape desde la Luna?

13-19. Dos partículas que tienen cada una la masa M, al principio se encontraban separadas por la distancia d. Se sueltan desde el reposo con lo que se aproximan entre sí debido a la atracción gravitacional. ¿Cuál es la rapidez de cada partícula cuando la distancia que las separa es de $\frac{1}{2}d$?

13-20. Considérese un objeto de masa m que primero se encontraba en reposo sobre la superficie de la Tierra. Si m se levanta hacia arriba en sentido vertical hasta la altura h, el cambio *aproximado* en la energía potencial gravitacional del sistema Tierra-objeto es $U_{\text{aprox}} = mgh$, donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie. (*a*) Exprese U_{ex}, el valor *exacto* del cambio de energía potencial, en términos de U_{aprox} y el radio de la Tierra R_t. (*b*) Use el resultado para demostrar que el error relativo en usar la aproximación es h/R_t.

13-21. Demuestre que la velocidad de escape desde la superficie de la Tierra es igual o mayor que 11 km/s.

13-22. ¿Cuál es la velocidad de escape desde la superficie de Júpiter?

13-23. Se observa que un satélite orbita un planeta cerca de su superficie con un periodo de T. Demuestre que la densidad promedio del planeta es $3\pi/GT^2$.

13-24. Determine la energía mínima que es necesaria para separar a la Tierra de la influencia gravitacional del Sol.

13-25. Demuestre que la energía cinética requerida para proyectar un objeto en una órbita circular cercana a la superficie de la Tierra es de sólo la mitad de la energía cinética necesaria para que el objeto escape de la Tierra.

13-26. El cometa Halley, que se mueve en una órbita elíptica muy excéntrica alrededor del Sol, se ha observado en la vecindad de la Tierra cada 75.5 años, desde el año 87 A. C. Su distancia de perihelio es de 8.9×10^{10} m. (*a*) ¿Cuál es la distancia más grande entre el cometa Halley y el Sol? (*b*) ¿Cuál es la rapidez máxima del cometa?

13-27. ¿A qué porcentaje de la distancia desde el centro de la Tierra y el centro de la Luna se encuentra la cima de una "loma" de energía potencial gravitacional de la Tierra a la Luna, según se "vería" desde un tercer objeto?

13-28. Pruebe que, cuando interactúa con una masa externa, una esfera maciza de densidad uniforme ρ es gravitacionalmente equivalente a una *partícula* de la misma masa localizada en el centro geométrico de la esfera: Debido a que una esfera maciza puede considerarse como compuesta por un grupo continuo de capas esféricas concéntricas. Es suficiente con demostrar que la energía potencial gravitacional entre una capa esférica delgada de masa M_S y una masa externa m dada por $U = -GmM_S/r$, donde r es la distancia entre m y el centro de la capa. También, demostrar que la fuerza gravitacional neta entre una capa como ésta y una masa puntual en el interior es *cero*. Considérese una capa esférica delgada de masa M_S, radio R, espesor ΔR, y una densidad uniforme ρ; los multiples elementos de masa dM que componen la capa están a varias distancias s de la masa externa m. Vea la Fig. P13-28. De acuerdo con la Ec. 13-10, la energía potencial gravitacional entre un elemento de masa dM y la masa puntual m dada por $-Gm\,dM/s$, donde s es la distancia entre m y dM. Todos los puntos sobre el anillo particular cuyo eje es la línea entre m y el centro de la capa están a la misma distancia s de la masa m. El radio de este anillo es R sen θ, su ancho es $R\,d\theta$, y su espesor es ΔR. (*a*) Demuestre que la energía potencial gravitacional entre este anillo y m está dada por $dU = -Gm[\rho(2\pi R^2\,\Delta R)\,\text{sen}\,\theta\,d\theta]/s$.(*b*) Usando la ley de los cosenos aplicada al triángulo que tiene los lados s, r y R, y obteniendo que $s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$, compruebe que $\text{sen}\,\theta\,d\theta/s = ds/rR$. (*c*) Haciendo uso del cambio de variable, de θ a s, demuestra que dU se convierte en $dU = (Gm/r)[\rho(2\pi R\,\Delta R)]ds$. En seguida, demuestre que la energía potencial gravitacional entre m y la capa completa está dada por

$$U = -\frac{Gm}{r}\,[\rho(2\pi R\,\Delta R)]\int_{r-R}^{r+R} ds = -\frac{GmM_s}{r}$$

donde M_s es la masa de la capa completa. (*e*) Por último, demuestre que el potencial gravitacional para un punto interior a la capa esférica es una constante, y por ello la fuerza gravitacional sobre una partícula en cualquier lugar dentro de una capa esférica es cero.

13-29. La Tierra tiene una comba ecuatorial, y su giro no es perpendicular al plano de su órbita alrededor del Sol. Vea la Fig. P13-29. Debido a que

la fuerza de gravitación decrece con la distancia, el tirón del Sol sobre la protuberancia de la Tierra más cercana es mayor que sobre la protuberancia más alejada. Estas fuerzas *no* son colineales; en consecuencia, el Sol aplica una *torca* gravitacional resultante sobre el giro de la Tierra, siendo perpendicular la dirección de dicha torca al momento angular del giro de la Tierra. Así, la Tierra precesa, de la misma manera que un giróscopo, (*a*) ¿Cuál es la dirección y el sentido de la torca gravitacional del Sol sobre la Tierra (con respecto a la disposición indicada en la Fig. P13-29)? (*b*) ¿Cuál es la dirección y el sentido del vector velocidad angular que presenta la precesión del eje de giro de la Tierra?

Este fenómeno, explicado primero por Newton, se conoce como la *precesión de los equinoccios*. El periodo de la precesión es de alrededor de 26 000 años. Una consecuencia de esta precesión muy lenta es que la Estrella del Norte (Polar), con respecto a la cual apunta en el presente el eje de giro de la Tierra, no se encontrará a lo largo de dicho eje al transcurrir el tiempo.

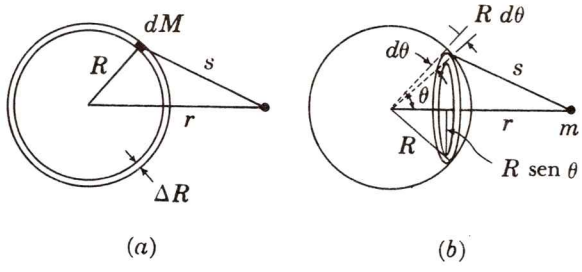


FIG. P13-28

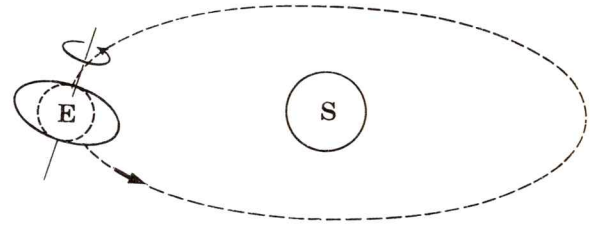


FIG. P13-29

Capítulo

14

MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

En este capítulo desarrollamos la dinámica básica del movimiento armónico simple e ilustramos este tipo de movimientos con un cierto número de ejemplos. Consideraremos también en forma breve el oscilador atenuado y las oscilaciones forzadas.

El movimiento armónico simple es característico de todos los objetos sujetos a una fuerza lineal de restauración. Muchas situaciones en física ilustran este comportamiento: una masa unida a un resorte, un objeto unido a una varilla de torsión, un péndulo simple y compuesto, los átomos de un sólido, los átomos de una molécula, la corriente en un conductor que transmita una corriente alterna, el campo eléctrico o el magnético en una onda electromagnética simple, la variación de presión en una onda sonora. En realidad, *cualquier partícula animada de oscilaciones pequeñas con respecto a un punto de equilibrio estable ejecuta un movimiento armónico simple.*

14—1 DINAMICA Y CINEMATICA DEL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

La fuerza F_r ejercida por un resorte estirado o comprimido en una cantidad pequeña x con respecto a su posición de equilibrio está dada por

$$F_r = -kx \qquad (9\text{-}10),(14\text{-}1)$$

donde el signo menos implica que la fuerza es opuesta al desplazamiento y k es la constante de fuerza del resorte.*

*La Ec., (14-1) se denomina en ocasiones con el nombre de *ley de Hooke*, en honor de Robert Hooke (1635-1678), un contemporáneo de Newton.

La energía potencial U_r de un resorte deformado es

$$U_r = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(10-2),(14-2)}$$

En realidad, el resorte sirve como un prototipo de la situación a que se llega en muchas áreas de la física en las que una partícula está sujeta a una *fuerza de restitución lineal* y, por ello, *la energía potencial del sistema varía con el cuadrado del desplazamiento de la partícula* desde la posición de equilibrio. Bajo estas circunstancias la partícula ejecuta un *movimiento armónico simple.*

Para un partícula de masa m unida a uno de los extremos de un resorte cuyo otro extremo está fijo, la segunda ley de Newton da

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

donde d^2x/dt^2 es la aceleración de la partícula a_x a lo largo de x.

Reacomodando la ecuación anterior, tenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Haciendo que la razón k/m sea igual a la constante ω_0^2, cuyo significado aclararemos pronto,

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} \qquad (14\text{-}3)$$

la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (14\text{-}4)$$

Cualquier situación física que lleve a una ecuación diferencial de segundo orden del movimiento de la forma de la Ec. (14-4) implica el movimiento armónico simple.

Es fácil encontrar que una solución de la Ec. (14-4) es

$$x = A\cos(\omega_0 t + \delta) \qquad (14\text{-}5)$$

donde A y δ son constantes.*

Tomando la primera y la segunda derivadas del desplazamiento x con respecto al tiempo para determinar la velocidad de la partícula $v_x = dx/dt$ y su aceleración $a_x = d^2x/dt^2$, tenemos

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \delta) \qquad (14\text{-}6)$$

*La solución puede darse en forma equivalente como a $x = B\operatorname{sen}(\omega_0 t + \epsilon)$, o $x = C\cos\omega_0 t + D\operatorname{sen}\omega_0 t$, donde B, ϵ, C y D, todas son constantes.

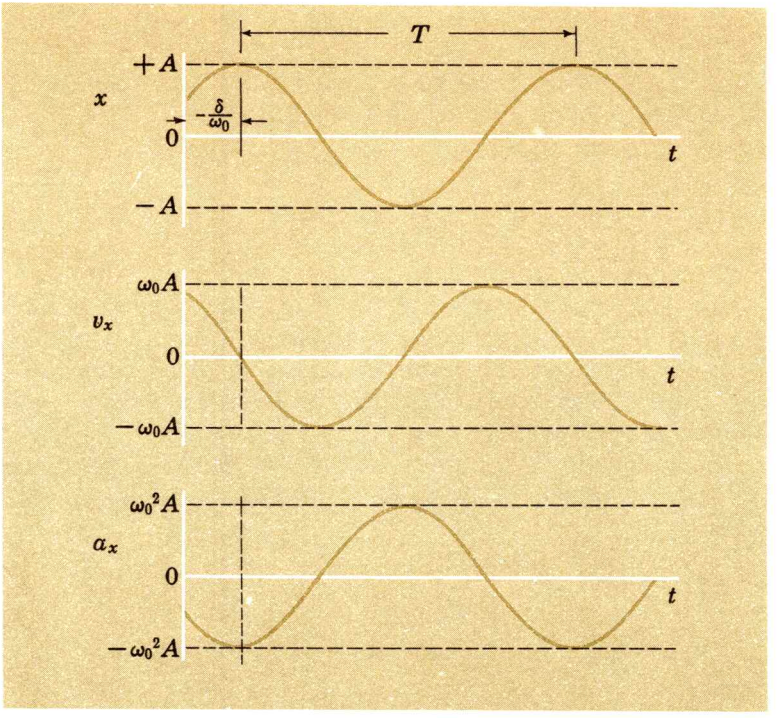


FIG. 14-1. (*a*) Desplazamiento, (*b*) velocidad, y (*c*) aceleración de una partícula animada de movimiento armónico simple graficados como funciones del tiempo.

y $$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \delta) = -\omega_0^2 x \qquad (14\text{-}7)$$

Comparando las Ecs. (14-7) y (14-4), vemos que, en realidad, la Ec. (14-5) es una solución.

El desplazamiento x, la velocidad dx/dt, y la aceleración d^2x/dt^2, todos ellos, *varían sinusoidalmente con el tiempo,* como se ve en la Fig. 14-1. El desplazamiento x adquiere valores que varían de $-A$ a $+A$; el desplazamiento máximo A se conoce como la *amplitud* de la oscilación. Observando la figura, nótese que x, v, y a no llegan a sus máximos al mismo tiempo; el máximo en la velocidad viene un cuarto del ciclo completo antes del máximo en el desplazamiento, y el máximo de la aceleración está adelantado un cuarto del ciclo al tiempo del máximo de la velocidad.

La *constante de fase* δ está determinada por el desplazamiento y la velocidad en el tiempo de partida $t = 0$. En las Ecs. (14-5) y (14-6), con $t = 0$, tenemos $x(t = 0) = A \cos \delta$ y $v(t = 0) = -\omega_0 A$ sen δ. Así, tan $\delta = -v(t = 0)/\omega_0 x(t = 0)$.

El *periodo* T de la oscilación es, por definición, el intervalo de *tiempo* para el que la partícula oscilante termina *un ciclo completo*. Así, si el tiempo t aumenta en un periodo a $t + T$, el argumento del coseno en la Ec. (14-5), debe haber aumentado en un ciclo, o sea 2π rad:

$$\omega_0(t + T) + \delta = (\omega_0 t + \delta) + 2\pi$$

o
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{14-8}$$

La *frecuencia f*,* que da el *número de oscilaciones por unidad de tiempo,* debe ser el recíproco del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \tag{14-9}$$

La cantidad ω_0 cuya magnitud determina la frecuencia y el periodo de las oscilaciones, algunas veces se denomina como *frecuencia angular.* El subíndice cero sirve para enfatizar que la oscilación se efectúa en ausencia de amortiguamiento (fuerza de amortiguación de *cero*).

Sustituyendo la Ec. (14-3) en las Ecs. (14-8) y (14-9), tenemos para el periodo y la frecuencia de una partícula unida a un resorte:

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2} \tag{14-10}$$

Nótese en especial que el periodo y la frecuencia *no* dependen de la amplitud A. El tiempo que dura una oscilación depende de la inercia de la partícula (medida por m) y la rigidez del resorte (medido por k); pero no del desplazamiento máximo de la partícula desde la posición de equilibrio. Podemos decir que la inercia de la partícula hace que se sobrepase la posición de equilibrio, mientras que la fuerza de restitución del resorte liga a la partícula con la posición de equilibrio. La oposición de los efectos inercial y elástico se refleja en la Ec. (14-10): T aumenta con m, pero decrece con k.

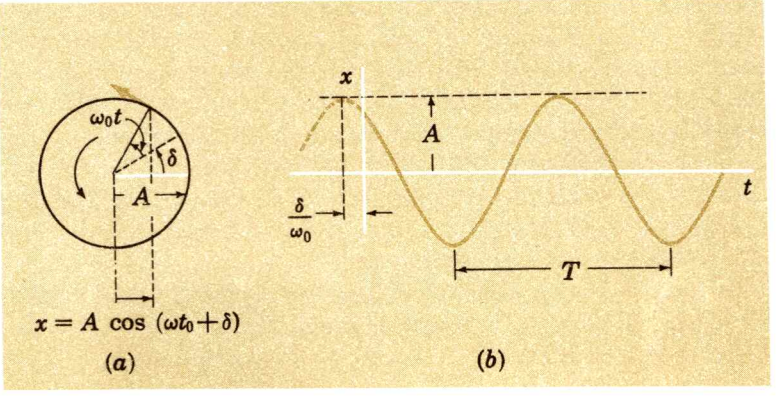


FIG. 14-2. (*a*) Representación del movimiento circular uniforme que corresponde al movimiento armónico simple. (*b*) Gráfica del desplazamiento-tiempo para el movimiento armónico simple con $x = A \cos(\omega_0 t + \delta)$. La constante de fase es δ, la frecuencia angular ω_0, la amplitud A y el periodo T.

*La unidad apropiada para la frecuencia es el s^{-1} o como ahora se le llama más a menudo, el Hertz (abreviado Hz), donde 1 Hz = 1 s^{-1}.

El movimiento armónico simple se puede definir cinemáticamente no sólo como una variación sinusoidal del desplazamiento en el tiempo, sino también como la *proyección de un movimiento circular uniforme sobre uno de sus diámetros.* Considérese la Fig. 14-2, donde una partícula se mueve en sentido contrario al de las manecillas del reloj en un círculo de radio A con una velocidad angular de magnitud ω_0. El ángulo θ, medido en radianes, que el radio vector forma con el eje X es $\theta = \omega_0 t + \delta$, donde $\theta = \delta$ cuando $t = 0$. Por lo tanto, la componente X del movimiento circular de la partícula es

$$x = A \cos \theta = A \cos (\omega_0 t + \delta) \qquad (14\text{-}5)$$

14—2 ENERGETICAS DEL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

La energía cinética K de la partícula oscilante es, usando la Ec. (14-6)

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \operatorname{sen}^2 (\omega_0 t + \delta) = \tfrac{1}{2}kA^2 \operatorname{sen}^2 (\omega_0 t + \delta)$$

donde hemos usado la Ec. (14-3) en el último paso.

La energía potencial del resorte es, a partir de las Ecs. (14-2) y (14-5),

$$U_r = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 \cos^2 (\omega_0 t + \delta)$$

Por lo tanto la energía total E del sistema oscilante es

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}kA^2 [\operatorname{sen}^2 (\omega_0 t + \delta) + \cos^2 (\omega_0 t + \delta)]$$

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad (14\text{-}11)$$

La energía de un oscilador armónico simple es proporcional al *cuadrado de la amplitud.*

La energía total de un oscilador armónico simple no amortiguado es constante. En la ausencia de fuerzas disipativas, las oscilaciones persisten en forma indefinida sin que la amplitud disminuya. Ambas, la energía cinética y la energía potencial varían sinusoidalmente con el tiempo como se indica en la Fig. 14-3, pero su suma E es constante. La masa oscilante tiene una

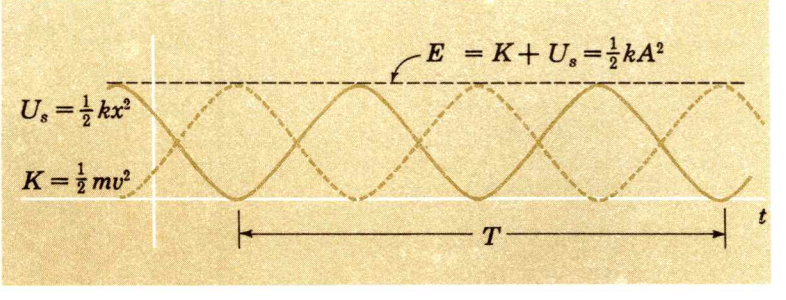


FIG. 14-3. La variación de la energía cinética K con el tiempo y la energía potencial elástica U_r para un oscilador armónico simple. Nótese que la energía total $E = K + U_s$ es constante.

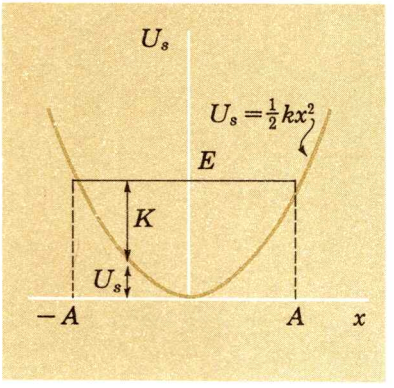


FIG. 14-4. La energía potencial elástica U_r como una función del desplazamiento x para un oscilador armónico simple. El movimiento está restringido a la región que se encuentra entre las posiciones de amplitud $x = \pm A$, para la cual la energía cinética K es positiva.

energía cinética máxima cuando pasa por la posición de equilibrio ($x = 0$), y el resorte tiene una energía potencial máxima cuando el cuerpo se encuentra por un momento en reposo en la posición de la amplitud ($x = \pm A$).

La Fig. 14-3 indica la energía potencial U_r como una función del tiempo. También se tiene que, como el movimiento armónico simple es repetitivo, se puede examinar la energía potencial como una función del desplazamiento. La Fig. 14-4 indica la U_r como una función de x; $U_r = \frac{1}{2}kx^2$, una parábola, de acuerdo con la Ec. (14-2).

Ejemplo 14-1

Un bloque de 2.0 kg reposa sobre una superficie horizontal sin fricción, y está unido al extremo derecho de un resorte cuyo extremo izquierdo está fijo. Vea la Fig. 14-5. El bloque se desplaza 5.0 cm hacia la derecha de su posición de equilibrio y se mantiene inmóvil en esa posición por medio de una fuerza externa de 10.0 N. (*a*) ¿Cuál es la constante de fuerza del resorte? (*b*) En seguida se suelta el bloque. ¿Cuál es el periodo de las oscilaciones del bloque? ¿Cuáles son (c) la energía cinética del bloque y (*d*) la energía potencial del resorte en el tiempo $t = \pi/15$ s?

(*a*) A partir de la Ec. (14-1),

$$k = -\frac{F}{x} = -\frac{-10.0\text{ N}}{0.050\text{ m}} = 200\text{ N/m}$$

(*b*) El periodo está dado por la Ec. (14-10).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.0\text{ kg}}{200\text{ N/m}}} = \frac{\pi}{5}\text{ s}$$

(*c*) La energía cinética es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega_0^2A^2\,\text{sen}^2(\omega t_0 + \delta) = \tfrac{1}{2}kA^2\,\text{sen}^2(\omega t_0 + \delta)$$

Como el movimiento principia a partir del reposo en la posición de la amplitud $A = 0.050$ m, sabemos que $\delta = 0$. Por lo tanto, cuando $t = \pi/15$ s, la ecuación anterior se convierte en

$$K = \tfrac{1}{2}(200\text{ N/m})(0.050\text{ m})^2\text{sen}^2\left[\frac{2\pi(\pi/15\text{ s})}{\pi/5\text{ s}}\right]$$

$$= (0.25\text{ N-m})\text{sen}^2\,120°$$

$$= 0.19\text{ J}$$

(*d*) Podemos encontrar la energía potencial del resorte usando la relación $U_r = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \delta)$. Pero, también podemos calcular correctamente la energía potencial del resorte cuando $t = \pi/15$ s restando la energía cinética del bloque en ese instante de la energía total $E = \frac{1}{2}kA^2$ del sistema bloque-resorte:

$$U_r = \tfrac{1}{2}kA^2 - K$$

$$= \tfrac{1}{2}(200\text{ N/m})(0.050\text{ m})^2 - (0.19\text{ J}) = 0.06\text{ J}$$

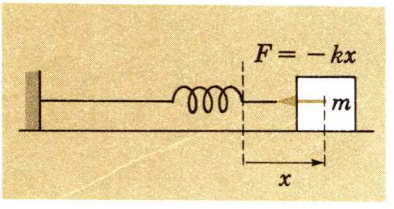


FIG. 14-5. Un oscilador armónico simple. Una masa m unida a un resorte que tiene la constante de fuerza k, está sujeta a la fuerza de restitución $F = -kx$, donde x es el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio.

14—3 EL PENDULO SIMPLE

Considérese una partícula de masa m atada al extremo inferior de una cuerda sin masa de longitud l cuyo extremo superior está fijo. Vea la Fig. 14-6. Este sistema constituye un *péndulo simple*.

El ángulo de la cuerda con la vertical es θ. En lo que sigue consideraremos que siempre el ángulo θ es pequeño, de tal manera que la partícula, cuando se suelta desde un lado con la cuerda tensa, ejecuta oscilaciones de pequeña amplitud. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son la tensión de la cuerda **T** y el peso de la partícula mg. La fuerza resultante a lo largo del arco circular de radio l en el que se mueve la partícula, tiene la magnitud mg sen θ en un sentido opuesto al del desplazamiento θ. Si θ es bastante pequeño, el desplazamiento de la partícula a lo largo del arco circular se puede considerar que es muy aproximadamente igual al desplazamiento horizontal x desde la posición de equilibrio, donde $x \approx \theta l$. Así, para θ pequeño,

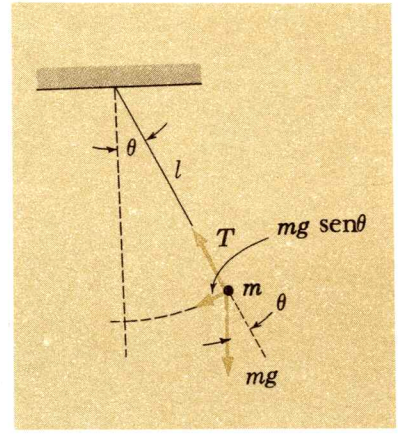


FIG. 14-6. Un péndulo simple. La fuerza resultante sobre la partícula m está dirigida a lo largo de un arco circular, y vale mg sen θ.

$$\frac{x}{l} \approx \operatorname{sen}\theta \approx \theta$$

de modo que, al aplicar la segunda ley de Newton, tenemos

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$-mg \operatorname{sen}\theta = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-mg\frac{x}{l} \approx m\frac{d^2x}{dt^2}$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

La ecuación anterior del movimiento es tan exacta como la Ec. (14-4), la ecuación general del movimiento armónico simple, donde

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Por lo tanto, el periodo de un péndulo simple para *amplitud pequeña* es, usando la Ec. (14-8),

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \qquad (14\text{-}12)$$

El periodo depende sólo de la longitud l y de la aceleración, g,

siendo independiente de la amplitud de la oscilación,* (tanto de x como de θ).

Un péndulo es un aparato adecuado para medir el tiempo, porque es *isócrono:* Su periodo es (de manera aproximada) *independiente de su amplitud.* El péndulo simple constituye una base sencilla y precisa para medir g: Medimos el periodo de un péndulo de longitud conocida y aplicamos la Ec. (14-12).

El periodo de un péndulo simple no depende de la masa de la partícula. Todos los péndulos simples de la misma longitud oscilan con la misma frecuencia. Sin embargo, hemos hecho una suposición importante al llegar a este resultado; que es la de que la masa inercial m_i y la masa gravitacional m_g son iguales (véase la Sec. 13-1). Como encontró Newton experimentalmente, péndulos de la misma longitud pero con materiales y masas diferentes, en realidad tienen el mismo periodo. Esto implica que $m_i = m_g$.

Ejemplo 14-2

Demuestre que el periodo T de un péndulo simple de longitud l y masa m *debe* tener, a partir de la consideración de sólo las dimensiones de estas cantidades (*análisis dimensional*), la dependencia funcional: $T \propto (l/g)^{1/2}$, o lo que es equivalente, $T = b(l/g)^{1/2}$, donde b, es una constante sin dimensiones.

Las cantidades que a priori podemos imaginar que determinan el valor del periodo del péndulo T son (con sus dimensiones entre paréntesis): m (M), l (L), y g (LT^{-2}).

Como ni en l ni en g interviene la dimensión de la masa, el periodo debe ser *independiente de la masa.* La aceleración g es la única que tiene las dimensiones del tiempo, y deberá aparecer como $g^{-1/2}$ para que T tenga las dimensiones que se necesitan $(T)^1$. Pero, si $T \propto g^{-1/2}$, tenemos que también aparece la dimensión $(L)^{-1/2}$ Para lograr que el periodo no tenga la dimensión de longitud, el largo l debe aparecer como $l^{1/2}$ con las dimensiones $(L)^{1/2}$. Por lo que,

$$T \propto \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2}$$

o, en términos de dimensiones,

$$(T)^1 = \left(\frac{L}{LT^{-2}}\right)^{1/2} = (T)^1$$

La proporcionalidad anterior puede escribirse como una ecuación:

$$T = b\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2}$$

*La relación general que da el periodo para una amplitud angular arbitraria θ_m (en radianes) es

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}\,[1 + \tfrac{1}{4}\text{sen}^2\frac{\theta_m}{2} + \tfrac{9}{64}\text{sen}^4\frac{\theta_m}{2} + \cdots]$$

Con $\theta_m = 30°$, $T = 2\pi\sqrt{l/g}\,(1.017)$; así, para este ángulo grande de oscilación, el periodo real es mayor que el que da la relación sencilla de la Ec. (14-12), en menos del 2%.

El valor de la constante sin dimensiones b [2π a partir de nuestro análisis dinámico detallado, Ec. (14-12)] no se puede determinar por medio del análisis dimensional. La utilidad de este procedimiento estriba en que, sin tener en cuenta los detalles, ni aun los principios físicos, en algunos casos podemos llegar a la dependencia dimensional, considerando nada más las dimensiones de las cantidades físicas.

14—4 LAS OSCILACIONES PEQUEÑAS Y EL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

Es fácil encontrar que *cualquier partícula que ejecute oscilaciones pequeñas con respecto a un punto de equilibrio estable, ejecuta un movimiento armónico simple.* Si una partícula tiene una posición de equilibrio que sea estable, deberá estar sujeta a una fuerza hacia la posición de equilibrio cuando se desplaza en una dirección o en otra. Dicho en forma diferente, si la partícula está en movimiento alejándose de su posición de equilibrio, su energía cinética debe disminuir. En consecuencia, la energía potencial U debe aumentar tanto para un desplazamiento x a partir del equilibrio que sea positivo, como para uno que sea negativo, como se indica en la Fig. 14-7. En la vecindad del mínimo de la energía potencial (la posición de equilibrio), la energía potencial puede ser en forma aproximada la que indica una parábola* con un eje vertical de simetría, y podemos escribir:

$$U \propto x^2 \qquad \text{para } x \text{ pequeño}$$

Pero una energía potencial que varíe como el cuadrado del desplazamiento desde el equilibrio implica, como hemos visto, una fuerza lineal de restitución. Entonces, una partícula que se desplaza una distancia pequeña de $x = 0$, adquirirá un movimiento armónico simple.

El movimiento armónico simple es un ejemplo importante de *movimiento periódico.* Por movimiento periódico se entiende un movimiento repetitivo. El *periodo* T se define en general como el intervalo de tiempo más pequeño tal, que si se conoce el movimiento durante cualquier intervalo de duración T, podemos encontrar el movimiento para *todos los tiempos,* con sólo prolongar la curva de desplazamiento-tiempo a la derecha o a la

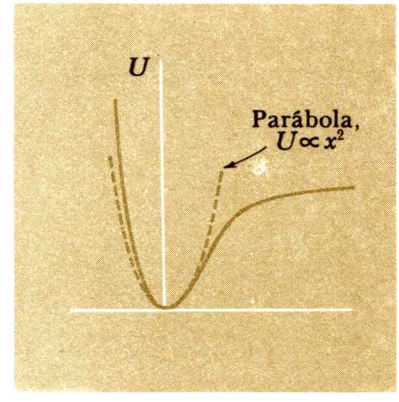


FIG. 14-7. La energía potencial como una función del desplazamiento para una partícula en equilibrio estable. La línea continua es la energía potencial para un átomo ligado a una molécula; la línea punteada, que se aproxima a la curva de energía potencial cerca del mínimo, es parabólica.

*Podemos representar la energía potencial U cercana al mínimo como una serie en el desplazamiento x:

$$U(\text{cerca de } x = 0) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

donde a_0, a_1, a_2, . . . son constantes. Como el cero para la energía potencial es arbitrario, y podemos elegir que $U = 0$ cuando $x = 0$, la constante $a_0 = 0$. Si a_1 no fuera cero su contribución a U haría que U aumentara para x positiva y disminuyera para x negativa en contradicción con el hecho de que U debe aumentar en ambas direcciones. Así, $a_1 = 0$ para el punto de equilibrio. Para x bastante pequeña, el término principal es a_2x^2, y $U \approx a_2x^2$. Para el equilibrio *estable* debemos tener que $a_2 > 0$.

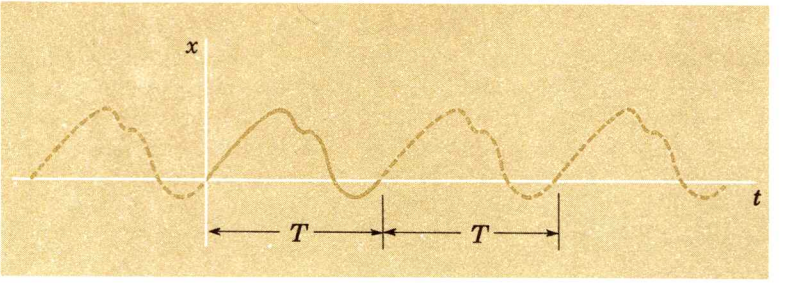


FIG. 14-8. Una gráfica de desplazamiento-tiempo para un ejemplo de movimiento periódico con el periodo T.

izquierda un número entero de periodos. El movimiento periódico ilustrado por la Fig. 14-8 Es claro que *no* es un movimiento armónico simple. El teorema matemático general conocido como el *teorema de Fourier* implica la importante propiedad siguiente. *Cualquier movimiento periódico* se puede considerar como la *superposición* o suma, *de un grupo de movimientos armónicos simples* que pueden diferir en amplitud, frecuencia, y fase.

Ejemplo 14-3

Encuentre el periodo T de un péndulo simple sin recurrir a la segunda ley de Newton. La estrategia será la de considerar la energía potencial de un péndulo simple oscilando con pequeña amplitud en la forma

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (14\text{-}2)$$

con el fin de encontrar lo equivalente a la "constante de fuerza" k. Entonces el periodo se puede determinar de inmediato por medio de las relaciones

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad (14\text{-}3)$$

y

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad (14\text{-}8)$$

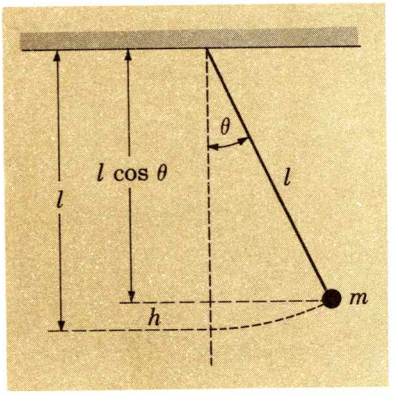


FIG. 14-9. Un péndulo simple formado por una partícula de masa m suspendida de una cuerda de longitud l. La partícula está a una distancia $h = l(1 - \cos\theta)$ sobre su punto más bajo cuando la cuerda forma el ángulo θ con la vertical.

Con respecto a la posición de equilibrio —el punto más bajo en su trayectoria— "La energía potencial gravitacional de la masa suspendida m es

$$U = mgh = mgl(1 - \cos\theta)$$

donde θ es el ángulo que la cuerda forma con la horizontal, l es el largo de la cuerda, y g la aceleración de la gravedad. Vea la Fig. 14-9.

El coseno de cualquier ángulo θ en radianes se puede representar por una serie:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

Si es θ pequeño podemos descartar todos los terminos menos los

dos primeros de la aproximación anterior, con lo que la relación general para la energía potencial se convierte en

$$U = \tfrac{1}{2}mgl\theta^2$$

Como en la Sec. 14-3 el desplazamiento de la partícula a lo largo del arco circular puede tomarse muy aproximadamente como x, el desplazamiento horizontal desde el equilibrio, donde $x = l\theta$, de tal manera que la ecuación anterior puede escribirse en la forma

$$U = \tfrac{1}{2}mgl\left(\frac{x}{l}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2}mg}{l}x^2$$

La forma patrón para la energía potencial de un oscilador armónico simple es

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2$$

Comparando estas ecuaciones descubrimos que el valor efectivo equivalente a la "constante del resorte" para el péndulo simple es

$$k = \frac{mg}{l}$$

Usando las relaciones que se tienen para ω_0^2 y T dadas antes, tenemos por último

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{mg/l}{m} = \frac{g}{l}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \qquad (14\text{-}12)$$

Ejemplo 14-4

Imagínese que se perfora un agujero angosto en sentido diametral a través de la Tierra. Además, una partícula se mueve a lo largo de este túnel. Encuentre que la partícula ejecutará un movimiento armónico simple para una Tierra de densidad uniforme.

La situación se indica en la Fig. 14-10*a*. Imaginamos una partícula de masa m que se encuentra exactamente *fuera* de una esfera de radio r y *dentro* de una capa esférica que tiene los radios interior y exterior r y r_t en este orden, donde r_t, es el radio de la Tierra.

Sabemos que *no* hay fuerza gravitacional sobre m que provenga de la *capa exterior* (Prob. 13-28). Por lo tanto, la fuerza gravitacional resultante que actúa sobre m proviene nada más de la esfera de radio r:

$$F_g = -\frac{GMm}{r^2}$$

donde M es la masa de dicha esfera, y el signo menos indica que la fuerza está dirigida hacia adentro.

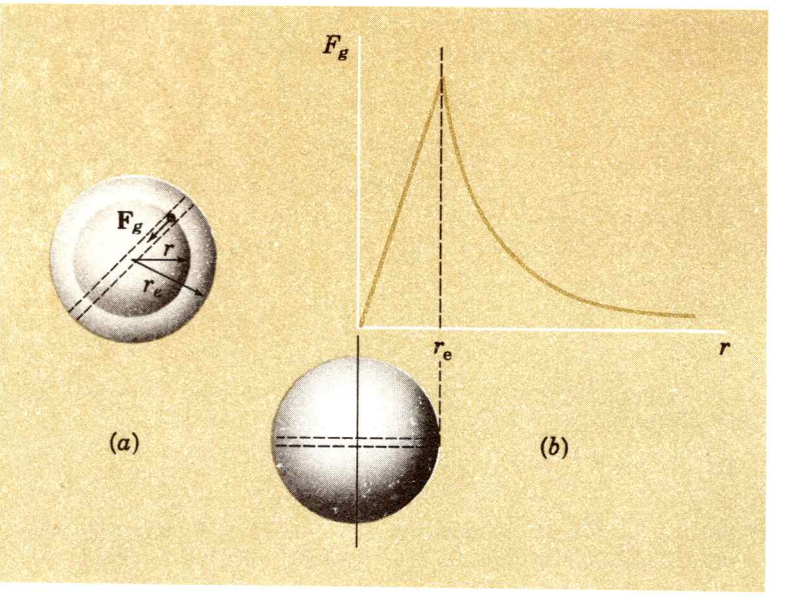


FIG. 14-10. (*a*) Fuerza gravitacional sobre una partícula que se mueve en un túnel a través de la Tierra. (*b*) La fuerza gravitacional como una función de la distancia de separación entre una partícula y el centro de la Tierra.

Si *suponemos* que la Tierra tiene una densidad *uniforme* ρ, podemos escribir

$$M = \rho \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Usando esta relación para M en la ecuación para F_g antes dada, obtenemos

$$F_g = -\frac{G(\rho \tfrac{4}{3}\pi r^3)\, m}{r^2} = -Kmr$$

donde K es una constante. La fuerza gravitacional sobre una partícula es proporcional a su distancia r al centro de la Tierra.

Cuando la partícula se encuentra sobre la superficie de la Tierra, $r = r_t$, la fuerza F_g sobre la partícula es mg. Por lo que

$$mg = Kmr_t$$

donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra.

La eliminación de K de las dos ecuaciones anteriores da, por último

$$F_g = -\frac{mg}{r_t}\, r$$

La fuerza gravitacional es proporcional al desplazamiento r de la partícula con respecto al centro de la Tierra, y tiene por ello la forma $F = -kx$, donde lo equivalente a la "constante de rigidez" es k

$= mg/r_t$. La partícula ejecuta un movimiento armónico simple con el periodo

$$T = 2\pi \left(\frac{m}{k}\right)^{1/2} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/r_t}} = 2\pi \left(\frac{r_t}{g}\right)^{1/2} \qquad (14\text{-}10)$$

La relación para T es precisamente la que se tiene para un satélite que orbita a la Tierra cerca de su superficie, con $T \approx 85$ min. Que la partícula en el túnel diametral de la Tierra tenga el mismo periodo que un satélite en órbita, se deduce también del hecho de que las proyecciones a lo largo del túnel de la fuerza resultante sobre el satélite, de su desplazamiento, de su velocidad y de su aceleración son iguales a las cantidades correspondientes para la partícula animada de un movimiento armónico simple.

14—5 OSCILACIONES AMORTIGUADAS Y RESONANCIA

Cuando una partícula se encuentra sujeta únicamente a una fuerza de restitución lineal, la energía del sistema permanece constante, y el movimiento oscilatorio persiste en forma indefinida sin que disminuya su amplitud. Sin embargo, si hay una pequeña fuerza de oposición —una fuerza de amortiguación— la energía ya no es constante, sino que decae de manera exponencial, como se muestra en la Fig. 14-11*a*. Además, el desplazamiento ya no es una función sinusoidal del tiempo, y la partícula oscila con una amplitud que decrece de modo continuo. Ver la Fig. 14-11*b*. Por último, si hay un amortiguamiento, la fuerza resistiva retarda al movimiento y el periodo aumenta —lo que corresponde a una frecuencia menor.

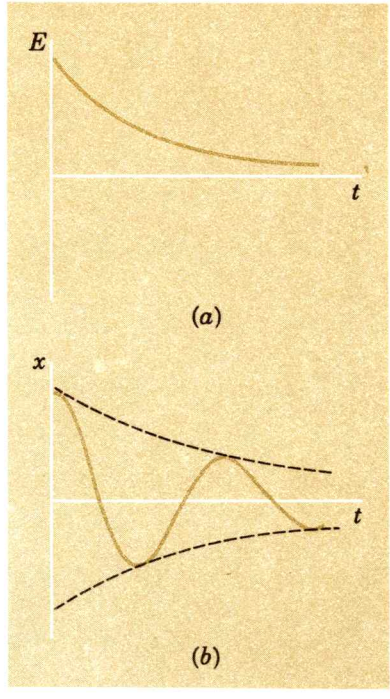


FIG. 14-11. (*a*) La energía total E como una función del tiempo para un oscilador amortiguado. (*b*) Gráfica de desplazamiento-tiempo para un oscilador amortiguado.

Cuando se pone en movimiento un oscilador amortiguado pierde energía y eventualmente queda en reposo. ¿Cómo se puede mantener constante esta energía? Debemos ejecutar un trabajo sobre el sistema, de tal manera que la energía alimentada al sistema, compense la energía que se disipa. La energía se alimenta al sistema sólo cuando se hace un trabajo *positivo* por medio de un agente externo, esto es, cuando el agente empuja en la *misma* dirección y sentido en que se mueve el oscilador. Por ejemplo, se puede mantener oscilando un oscilador amortiguado, como un columpio de un campo de juegos, con amplitud constante, empujándolo (en el momento adecuado) una vez cada ciclo. Entonces la frecuencia de los impulsos será igual a la frecuencia natural del columpio, y se hará un trabajo positivo sobre él cada vez que el agente empuje.

En general, si un oscilador amortiguado se impulsa por una fuerza externa oscilante cuya frecuencia pueda variar, el oscilador demuestra la respuesta máxima —esto es, la amplitud máxima del oscilador— cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual (o

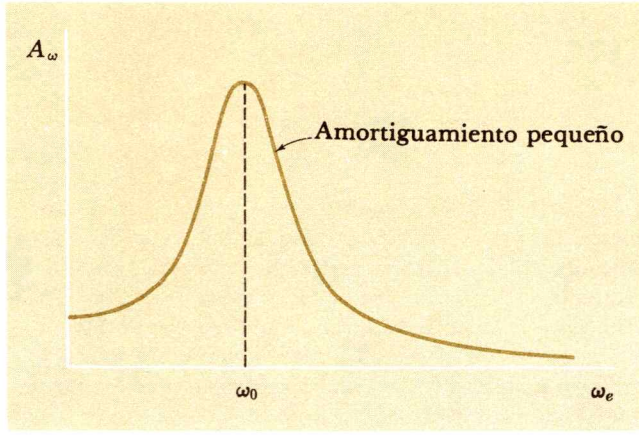


FIG. 14-12. La amplitud A_ω del movimiento forzado de un oscilador amortiguado como una función de la frecuencia de la fuerza externa impulsora. La resonancia se presenta cuando la frecuencia impulsora se acerca a la frecuencia natural del oscilador. La cima de la resonancia es angosta para el amortiguamiento pequeño.

está muy cercana) a la frecuencia natural del oscilador solo. Más explícitamente, para un oscilador con amortiguamiento pequeño, la amplitud A_ω del oscilador impulsado es un máximo cuando la frecuencia impulsora externa ω_e es igual a ω_0. Véase la Fig. 14-12. Este comportamiento de resonancia —respuesta grande cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es semejante a la frecuencia natural de oscilación del oscilador solo— caracteriza no sólo a los osciladores mecánicos, sino a cualquier sistema (incluyendo osciladores eléctricos, átomos y moléculas) para los que hay una o más frecuencias características de oscilación. La resonancia es mayor cuando el amortiguamiento es pequeño, el oscilador responde con amplitud a la fuerza impulsora sólo sobre una banda estrecha en la cual las frecuencias natural e impulsora son sensiblemente iguales. Por otro lado, si el amortiguamiento es grande, la resonancia es amplia; entonces el oscilador se influye menos por la fuerza impulsora, pero responde a una banda de frecuencias amplia.

El oscilador forzado tiene una amplitud de desplazamiento constante para una frecuencia dada ω_e. Es decir, la energía total de la masa oscilante y el resorte permanece constante con el tiempo. Como la energía se transmite hacia afuera del sistema en forma continua, por el amortiguamiento, se sigue que la fuerza impulsora alimenta energía al sistema con la misma rapidez. La frecuencia de resonancia representa a la frecuencia a la que se transmite la energía con más facilidad del agente externo al sistema oscilante.

El fenómeno de la resonancia aparece en muchas áreas de la física: en aparatos resonantes mecánicos, en circuitos eléctricos, en las estructuras atómicas y moleculares. De hecho, ocurre la resonancia siempre que un oscilador se encuentra bajo la acción de un segundo oscilador impulsor a la misma frecuencia.

RESUMEN

Cuando una partícula de masa m está sujeta a una fuerza de restitución de la forma

$$F = -kx \qquad (14\text{-}1)$$

y con una energía potencial asociada de

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (14\text{-}2)$$

la ecuación diferencial del movimiento tiene la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (14\text{-}4)$$

donde la constante $\omega_0^2 = k/\mathrm{m}$.

Entonces el desplazamiento varía sinusoidalmente con el tiempo

$$x = A\cos(\omega_0 t + \delta) \qquad (14\text{-}5)$$

donde A es la amplitud, δ la constante de fase, y la frecuencia angular ω_0 se relaciona con el periodo T y la frecuencia de oscilación por $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi f$.

La energía total E de un oscilador armónico simple es

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad (14\text{-}11)$$

PROBLEMAS

14-1. Una masa de 4.0 kg oscila con una frecuencia de 4.0 Hz y una amplitud de 2.0 cm. El reloj marca cero cuando la masa está en la posición de equilibrio, con la partícula moviéndose en la dirección y con el sentido $+X$; y el desplazamiento x está dado por $x = A\cos(\omega_0 t + \delta)$. Encuentre (*a*) la constante de fase δ, (*b*) la constante de fuerza k, y (*c*) la velocidad máxima de la masa. También, encuentre el signo y la magnitud de (*d*) el desplazamiento, (*e*) la aceleración, y (*f*) la velocidad cuando el tiempo que marca el reloj es de 0.20 s.

14-2. Un objeto vibra en un movimiento armónico simple con una amplitud de 6.0 cm y una frecuencia de 5.0 Hz. Encuentre (*a*) la aceleración y (*b*) la rapidez del objeto cuando se encuentre a 4.0 cm de la posición de equilibrio. (*c*) ¿Cuál es la frecuencia angular en rad/s del movimiento circular uniforme correspondiente?

14-3. Un plomo de plomada de 100 g se suspende de un resorte vertical. Cuando se desplaza en sentido vertical hacia abajo de su posición de equilibrio y se suelta, el plomo oscila ejecutando un movimiento armónico simple con una frecuencia de 6.0 Hz. (*a*) encuentre la constante de fuerza del resorte. (*b*) Si una masa de 1.00 kg sustituye el plomo de la plomada, ¿cuál es la nueva frecuencia de oscilación?

14-4. Una partícula que oscila en un movimiento armónico simple se mueve una distancia de 20 cm durante el tiempo que dura un ciclo completo. La aceleración máxima es de 4.0 $\mathrm{cm/s^2}$. ¿Cuál es la frecuencia de oscilación?

14-5. Un átomo típico en un sólido que está a la temperatura ordinaria se mueve con movimiento armónico simple, con una amplitud de 10^{-10} m y una frecuencia de 10^{13} Hz. ¿Cuál es (*a*) la rapidez máxima del átomo y (*b*) su aceleración máxima?

14-6. Una partícula ejecuta un movimiento armónico simple de acuerdo con la relación $x = A\cos(\omega_0 t + \delta)$. El desplazamiento y la velocidad iniciales de

la partícula ($t = 0$) son x_0 y v_0. Demuestre que la amplitud A de oscilación está dada por $A = [x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2]^{1/2}$, y que la constante de fase δ está dada por $\tan \delta = -v_0/\omega_0 x_0$.

14-7. Un oscilador armónico simple tiene la frecuencia f. Demuestre que las energías cinéticas y pontencial del oscilador, ambas oscilan con la frecuencia de $2f$.

14-8. Cuando una masa m se une a un extremo de un resorte cuyo otro extremo se encuentra fijo, la masa oscila con la frecuencia f. Si dos partículas, cada una de masa m, se unen cada una a uno de los extremos del mismo resorte y se ponen en oscilación, ¿cuál es su frecuencia?

14-9. Una masa de 2.0 kg está sostenida por un plano horizontal liso y está unida a dos resortes idénticos, como se indica en la Fig. P14-9. La masa está animada de un movimiento armónico simple con el periodo de 6.0 s y una amplitud de 10.0 cm. Tome la derecha como positiva, la izquierda como negativa, y el tiempo como cero cuando la masa se encuentra en la posición de equilibrio y se mueve hacia la derecha. Determine (*a*) lo equivalente a la constante de fuerza y (*b*) las magnitudes de los valores máximos de la velocidad y la aceleración. (*c*) También, encuentre la velocidad y la aceleración cuando el desplazamiento es -6.0 cm.

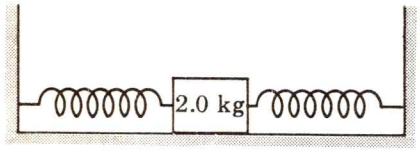


FIG. P14-9

14-10. Un automóvil desciende $\frac{1}{4}$ plg cuando un hombre de 160 lb se sienta frente al volante. Cuando el automóvil (y el chofer) pasan por un bache de la carretera, oscila hacia abajo y hacia arriba con un periodo de 2 s y una amplitud de 4 plg. (Suponiendo que $g = 32$ pie/s ^{2}.) Encuentre (*a*) la constante de fuerza del sistema de suspensión, (*b*) el peso del automóvil, (*c*) el valor máximo de la energía cinética asociada con esta oscilación, y (*d*) la frecuencia angular en rad/s del movimiento circular uniforme correspondiente.

14-11. Una moneda reposa sobre una mesa que vibra en la dirección vertical con la fecuencia de 1,000 Hz. ¿Cuál es la amplitud máxima de vibración de la moneda si no pierde contacto con la superficie?

14-12. Una partícula de masa m se localiza en el punto medio de un alambre vertical de longitud L, y dicho alambre está sujeto a la tensión T. Vea la Fig. P14-12. (*a*) Demuestre que si la partícula se desplaza un poco a un lado y se suelta vibrará en sentido horizontal con movimiento armónico simple. Encuentre (*b*) la constante de fuerza, y (*c*) la frecuencia del movimiento vibratorio.

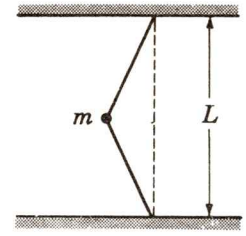


FIG. P14-12

14-13. Un resorte helicoidal ordinario con la constante de fuerza k se corta a la mitad para tener dos resortes con la mitad de la longitud original. ¿Cuál es la constante de fuerza de uno de estos resortes cortos?

14-14. Se tiene un resorte con la rigidez k que tiene un extremo fijo y una masa m unida al otro, masa que reposa sobre una mesa sin fricción y oscila a lo largo de la horizontal. Después se orienta el resorte a lo largo de la vertical, con su extremo superior fijo y la masa m colgando del otro extremo, lo que hace que el resorte se estire hasta que se encuentra en la posición de equilibrio. La masa se jala hacia abajo y en seguida se suelta. ¿Cuál es la razón entre los periodos de oscilación en el primer arreglo y en el segundo?

14-15. (*a*) Demuestre que el movimiento circular uniforme se puede considerar como la superposición de movimientos armónicos simples con la misma amplitud y frecuencia pero con una diferencia de fase de 90° y a lo largo de dos líneas perpendiculares entre sí. (*b*) Demuestre que el movimiento armónico simple a lo largo de una línea se puede considerar como la superposición de dos movimientos circulares uniformes que tengan el mismo radio y frecuencia angular pero que giren en sentidos opuestos.

14-16. Al extremo inferior de un péndulo se encuentra unida una pluma, la cual raya sobre una hoja de papel que se mueve con rapidez constante a lo largo de un plano horizontal en ángulo recto al plano de oscilación del péndulo. Demuestre que la línea trazada sobre el papel es una curva correspondiente al seno o al coseno. (En forma recíproca, si la línea trazada es sinusoidal, se trata de una demostración de que el movimiento es armónico simple.)

14-17. Dedúzcase por medio del análisis dimensional la dependencia funcional de la aceleración de una partícula que se mueve en un círculo de radio r con la velocidad angular ω.

14-18. Una partícula de 0.10 kg de masa está en un medio ambiente para el cual la energía potencial está dada por $U = (4.0\times10^3\ \text{J/m}^2)x^2$, donde x es el desplazamiento de la partícula con respecto a su posición de equilibrio. ¿Cuál es la frecuencia de oscilación de la partícula?

14-19. Demuestre que la superposición de dos movimientos armónicos simples a lo largo de los ejes X y Y, respectivamente, si tienen amplitudes *diferentes* y un retardo de uno a otro de un cuarto de ciclo, dan lugar a una trayectoria elíptica, en lugar de circular, cuyo eje de simetría está a lo largo del eje X o del eje Y.

14-20. Una partícula en el extremo de una cuerda larga tirante (un péndulo simple), se desplaza muy poco de la vertical y se lanza con una velocidad pequeña perpendicular a su desplazamiento inicial. (*a*) Demuestre que la trayectoria de la partícula es, en general, una elipse (despreciando el pequeño movimiento vertical). (*b*) ¿El radio vector que va del centro de la elipse a la partícula, barre áreas iguales en tiempos iguales? (*c*) El cuadrado del periodo del movimiento de la partícula, ¿es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse?

14-21. Un péndulo simple de masa m y longitud l ejecuta un movimiento armónico simple con la amplitud horizontal A. Demuestre que la tensión máxima en la cuerda de soporte está dada por $T = [1 + (A/l)^2]mg$, donde g es la aceleración de la gravedad.

14-22. Una partícula se desliza sobre el fondo de un recipiente hemiesférico perfectamente liso con el radio de curvatura R. (*a*) Demuestre que la situación es por completo análoga a la del péndulo simple, y por ello, para oscilaciones de pequeña amplitud, la partícula ejecuta un movimiento armónico simple. (*b*) Demuestre que el periodo de oscilación está dado por $2\pi(R/g)^{1/2}$.

14-23. Un péndulo simple de 1.0 m de longitud se fija al techo de un elevador. ¿Cuál es el periodo del péndulo cuando el elevador (*a*) se mueve hacia arriba con rapidez constante, (*b*) se mueve hacia arriba con una aceleración constante de 2.5 m/s^2, y (*c*) se acelera hacia abajo a razón de 9.8 m/s^2?

14-24. Se diseña un péndulo simple para que oscile con un periodo de exactamente 2 s cuando esté en el Naval Research Laboratory en Washington, D. C., donde la aceleración de la gravedad es $g_W = 9.8011$ m/s^2. Supóngase que este aparato se transporta a Anchorage, Alaska donde $g_A = 9.8218$ m/s^2. (*a*) Encuentre el *cambio* en el periodo en Anchorage. (*b*) ¿Cuál será el error acumulativo en un día exacto de 24 h? (*Sugerencia*: Use el desarrollo del binomio.)

14-25. ¿Cuál es la rapidez máxima de una partícula que cae en un túnel diametral de la Tierra?

14-26. Por medio del análisis dimensional deduzca la dependencia funcional del periodo de un satélite que orbite la Tierra cerca de su superficie en términos de la masa de la misma M, su radio R, y la constante de la gravitación universal G.

14-27. El recíproco de la fuerza constante de un sistema mecánico se llama su *complacencia*. ¿Cuál es el valor efectivo (en gramos) de la masa dinámica de un brazo fonográfico y la aguja si la complacencia dinámica de la aguja es de 30×10^{-6} cm/dina y el sistema brazo-aguja resuena a 10 Hz?

Capítulo
15

ONDAS EN UNA CUERDA

El estudio de las ondas tiene una importancia que es crucial en física. Fenómenos como el sonido y la luz son fenómenos ondulatorios. Aún es más importante, desde el punto de vista de la teoría cuántica, que las partículas exhiben características de onda en *todos* los fenómenos en el nivel de la física atómica y nuclear.

En este capítulo y en el siguiente nos interesaremos en las ondas mecánicas, ondas en las que interviene el acoplamiento de una serie de partículas y que tiene su origen en las propiedades elásticas del medio en que se transmiten. Primero, nos referiremos nada más a un tipo simple de onda, una onda que se mueve en una dimensión a lo largo de una cuerda. Muchos de los resultados que encontraremos para el comportamiento de este tipo familiar de ondas puede llevarse, en esencia sin cambio, a tipos de ondas mecánicas más complicadas.

15—1 COMPORTAMIENTO BASICO DE LAS ONDAS

Considérese una cuerda uniforme perfectamente flexible, bajo tensión y atada en su extremo derecho. Supóngase que el extremo izquierdo se desplaza en sentido lateral y en forma brusca para en

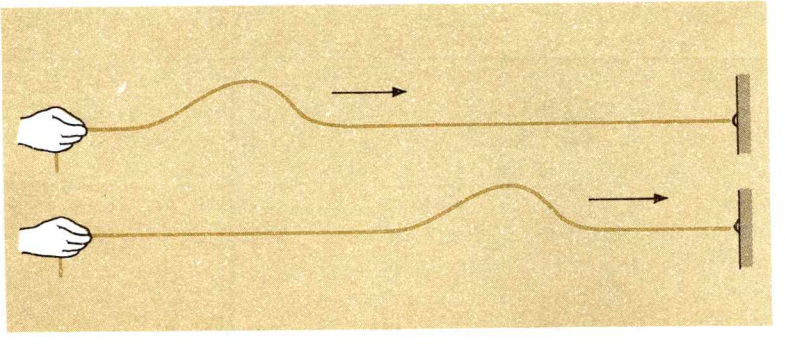


FIG. 15-1. Un pulso ondulatorio que se mueve a lo largo de una cuerda tensa.

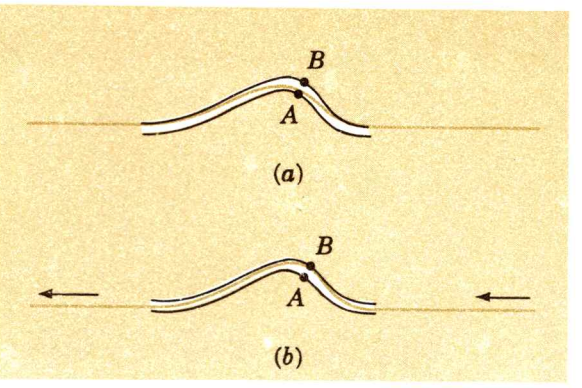


FIG. 15-2. Un tubo con una cuerda tirante (*a*) en reposo y (*b*) al deslizarse por el tubo con una rapidez alta.

seguida regresar a su posición inicial. Se produce un *pulso,* que se mueve hacia la derecha con rapidez constante y con forma invariable, como se ve en la Fig. 15-1. Cada partícula a lo largo de la cuerda lleva a cabo, en su caso, un movimiento transversal y regresa a su posición inicial. La forma de la onda, como un todo, se mueve hacia la derecha.

Esta es una observación común y corriente. Sin embargo, pensándolo mejor, el fenómeno de la propagación de la onda es en realidad notable porque en él cada partícula de la cuerda "sabe lo suficiente" para regresar en forma precisa a su posición inicial, mientras que la forma del pulso no cambia cuando la alteración se mueve a lo largo de la cuerda. En verdad, el comportamiento de las ondas mecánicas puede deducirse de manera directa a partir de las leyes de Newton y el conocimiento de los marcos de referencia, como veremos.

Ahora supóngase que una cuerda flexible de densidad lineal ρ (masa por unidad de longitud) y bajo tensión constante F_t se introduce en un tubo blando, como se indica en la Fig. 15-2. Es claro que si la cuerda tirante está en reposo, toca al tubo en el punto A. Por otro lado, si la cuerda, todavía bajo la tensión F_t, se jala hacia la izquierda por el tubo con una alta rapidez uniforme, la inercia de la cuerda hará que se pegue al tubo en el punto alto B. Debe haber una rapidez intermedia a la que la cuerda puede correr por el tubo, sin tocar ni A ni B. Encontrémosla.

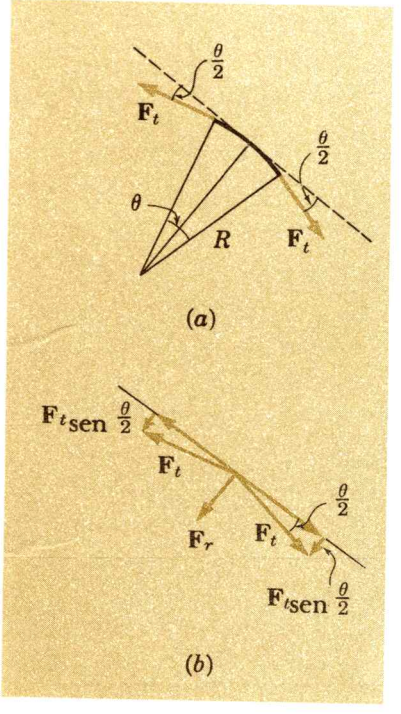


FIG. 15-3. (*a*) Fuerzas que actúan sobre un segmento de cuerda pequeño. (*b*) La fuerza resultante es $F_r = 2F$ sen $(\theta/2)$.

Nos fijaremos en el segmento pequeño de cuerda indicado en la Fig. 15-3*a*. Se supone que este segmento es tan corto que podemos tomarlo como un arco circular con el radio de curvatura R, siendo pequeño el ángulo θ, subtendido por el segmento desde el centro de curvatura. Ahora bien, si la rapidez c de este segmento está dirigida hacia la derecha, no tocará al tubo, por lo que las únicas fuerzas externas que actúan sobre él serán las fuerzas de tensión en sus extremos, ambas con la magnitud F_t. Estas fuerzas son tangentes a los extremos del segmento, porque se considera que la cuerda es perfectamente flexible. Como muestra la Fig. 15-3*b*, la fuerza resultante $\mathbf{F}_r$ sobre el segmento apunta al

centro de curvatura y tiene la magnitud $2F_t \operatorname{sen}(\theta/2)$. La aplicación de la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección radial da

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$2F_t \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \rho R\theta \frac{c^2}{R}$$

donde hemos usado el hecho de que el segmento de longitud $R\theta$ y la masa $\rho R\theta$ se mueve con la rapidez constante c en un arco circular de radio R, y por ello adquiere una aceleración radial c^2/R. Como θ es pequeño, sen $(\theta/2) \approx \theta/2$. Entonces la ecuación anterior se reduce a

$$F_t = \rho c^2$$

$$c = \sqrt{\frac{F_t}{\rho}} \qquad (15\text{-}1)$$

Cuando la cuerda se mueve por el tubo con la rapidez $\sqrt{F_t/\rho}$, el pequeño segmento de cuerda no toca al tubo en A ni en B. En realidad, *ningún* segmento de la cuerda toca al tubo, ya que la rapidez c es independiente de R y de θ. Así, si la cuerda corre por el tubo precisamente con la rapidez correcta, se puede quitar el tubo y la cuerda mantendrá su forma, cada partícula de la cuerda seguirá la forma del tubo cuando pasa de la derecha a la izquierda. Entonces, *cualquier forma,* una vez establecida, se mantendrá en el lugar mientras la rapidez de la cuerda esté dada por la Ec. (15-1).

Nótense las suposiciones: La cuerda es uniforme y del todo flexible, los desplazamientos transversales son pequeños, lo suficiente para que la tensión sea la misma en todos los puntos a lo largo de la cuerda, y no hay esquinas agudas que puedan impedir que se verifique la suposición de que sen $(\theta/2) \approx \theta/2$.

Ahora veamos este comportamiento desde otro marco de referencia, en el que la *cuerda* (a la izquierda y la derecha de la perturbación) se mantenga *en reposo.* Si nos movemos hacia la izquierda con la misma rapidez c que tiene la cuerda con respecto al tubo, entonces en este nuevo marco de referencia vemos que la perturbación de la onda, sin cambiar de forma, se mueve hacia la derecha con la rapidez c, como en la Fig. 15-1.

Nuestro desarrollo para la rapidez de la onda no depende del sentido en que la cuerda se movía por el tubo. Así, si la cuerda se desaloja por el tubo con la rapidez c en sentido opuesto, la perturbación de la onda se vería moviéndose hacia la izquierda en el marco de referencia en el que la cuerda se encuentra en reposo.

Podemos expresar estos resultados con más formalidad. Primero recordamos las relaciones galileanas para la transformación de las coordenadas, Ecs. (6-7), que se refieren a dos marcos de referencia en movimiento relativo. La coordenada x medida en el marco de referencia que se mueve hacia la izquierda (a lo largo del

eje $-X$) con la rapidez c, relativa al marco de referencia en el que la coordenada es x', está dada por $x = x' + ct$ o $x' = x - ct$. (El tiempo t es cero en ambos marcos en el instante en que los orígenes coinciden.) En la misma forma, si nuestro marco de referencia que está en movimiento se desplaza hacia la derecha con la rapidez c, y x representa de nuevo a la coordenada X en este marco, "el que se mueve", entonces $x' = x + ct$. Ahora hagamos que $y = F(x')$ represente la forma de la perturbación (o del tubo), la que sea, como se ve en el marco de referencia del tubo. Entonces, si la *cuerda* se mueve hacia la *izquierda* con la rapidez c con respecto al pulso ondulatorio, el *pulso* ondulatorio debe moverse hacia la *derecha* cuando se ve desde el marco de referencia de la cuerda. La forma* está dada, en general, por

Onda hacia la *derecha:* $y = F(x - ct)$ (15-2*a*)

Onda hacia la *izquierda:* $y = F(x + ct)$ (15-2*b*)

En el movimiento de las ondas debemos distinguir entre dos rapideces: la *rapidez de las ondas* c, la rapidez con que la *forma* se mueve a lo largo de la dirección X, y la velocidad transversal $\partial y/\partial t$ en cualquier x fija, que da la *velocidad de una partícula de la cuerda*. Mientras que la rapidez de las ondas $c = \sqrt{F_t/\rho}$ es constante para una cuerda determinada (dadas ρ y F_t), la rapidez de la partícula no lo es.

Ejemplo 15-1

Una cuerda uniforme de 10 m que tiene una masa de 490 g se fija en su extremo superior y tiene suspendida de su extremo inferior una masa de 50 kg. El extremo inferior de la cuerda se desplaza en forma brusca y en sentido horizontal. ¿Qué tiempo tarda el pulso que se produce en moverse hasta el extremo superior?

Denotando el largo de la cuerda por L, podemos expresar el tiempo t que tarda el pulso en recorrer esa distancia por $t = L/c$. De la Ec. (15-1), $c = \sqrt{F_t/\rho} = \sqrt{Mg/(m/L)}$, donde M es la masa suspendida y m es la masa de la cuerda. Por lo tanto,

$$t = \frac{L}{c} = \frac{L}{\sqrt{Mg/(m/L)}} = \sqrt{\frac{mL}{Mg}} = \sqrt{\frac{(0.490\text{ kg})(10\text{ m})}{(50\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}} = 0.10\text{ s}$$

Hemos ignorado el 1% de diferencia de la tensión entre los dos extremos superior e inferior de la cuerda, debido al peso de la cuerda misma que no es nulo. En sentido estricto, la rapidez de la onda en el extremo superior, donde la tensión es mayor, excede la de la parte inferior en 0.5%.

---

*Para una onda hacia la derecha, el argumento de F debe permanecer sin cambio: si t aumenta (tiempo final), x debe aumentar (más hacia la derecha), para que $x - ct$ sea constante.

15—2 EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICION Y LA INTERFERENCIA

Supóngase que dos perturbaciones ondulatorias se mueven en sentidos opuestos a lo largo de la misma cuerda, por lo que "chocan". Los resultados de la observación de este fenómeno se indican en la Fig. 15-4. Cuando los dos pulsos se juntan, la perturbación resultante en cada punto a lo largo de la cuerda y en cualquier instante de tiempo, se determina con sólo sumar en forma algebraica, o superponer, las perturbaciones ondulatorias separadas. Por el *principio de superposición,* el desplazamiento transversal resultante es exactamente igual a la suma algebraica del desplazamiento de las ondas individuales. Así, cualquier onda

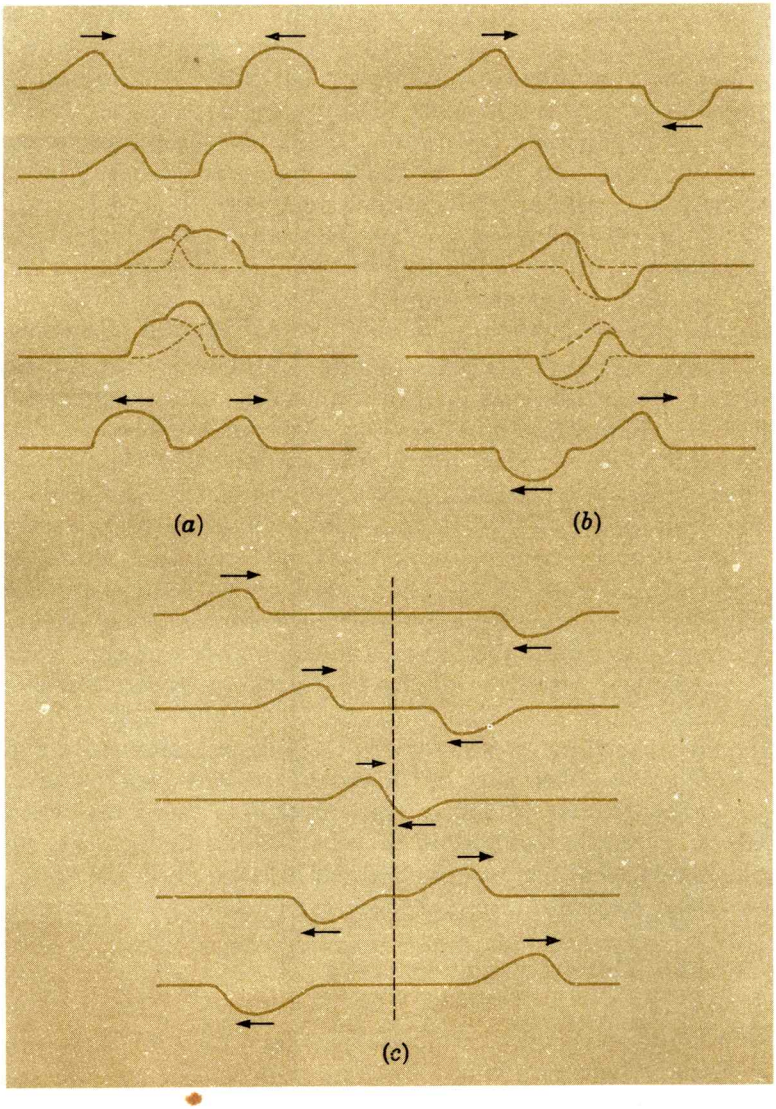


FIG. 15-4. "Choque" de pulsos ondulatorios que se mueven en direcciones opuestas: (*a*) interferencia constructiva, (*b*) interferencia destructiva. (*c*) Cuando los pulsos interfieren, un solo punto de la cuerda se encuentra sin desplazamiento en todos los tiempos. Cada grupo muestra instantáneas tomadas a intervalos de tiempo iguales, el tiempo aumenta hacia abajo.

pasará a través de otra onda *sin cambiar* de forma. Dicho de otra manera, no hay interacción entre una onda y otra; cada onda sale del "choque" con la misma energía e ímpetu lineal transversal con que llegó al "choque".

El principio de superposición para el desplazamiento de las ondas nos recuerda otro principio de superposición, el de las fuerzas. De hecho, la superposición de las ondas resulta de la superposición de las fuerzas. De acuerdo con el principio de superposición para las fuerzas, dos o más fuerzas que actúen en forma simultánea sobre un objeto son equivalentes a una sola fuerza, que es igual a su suma vectorial. Ahora, en el caso de las ondas transversales a lo largo de una cuerda, una fuerza aceleradora surge cuando la cuerda está deformada, la deformación de la cuerda, cuando se mide por la curvatura de un segmento pequeño, siendo proporcional a la fuerza deformadora. Mientras esta proporcionalidad se verifique, superponer fuerzas es equivalente a superponer desplazamientos. Así, para las ondas mecánicas, la superposición se aplica sólo para deformaciones *pequeñas* (aquí, desplazamientos pequeños de la cuerda). Si la cuerda se desplazara distancias grandes, o se deformara con esquinas agudas, o si la tensión no fuera constante, la aproximación hecha al derivar la Ec. (15-1) ya no se puede aplicar. Entonces el principio de superposición será inaplicable. En todo lo que sigue consideraremos que las perturbaciones ondulatorias son pequeñas, lo necesario para que el principio de superposición se verifique estrictamente.

La superposición de desplazamientos ondulatorios separados, para llegar a un desplazamiento resultante, se conoce como *interferencia*. (El término no es acertado, porque las formas de las ondas separadas en realidad no interfieren entre sí.) Cuando las dos ondas tienen desplazamientos positivos (o ambos son negativos), como en la Fig. 15-4*a*, la magnitud de su desplazamiento resultante es mayor que el de cada onda por separado. A esto se llama *interferencia constructiva*. Por otro lado, cuando dos ondas de desplazamiento y opuesto se superponen, como en la Fig. 15-4*b*, la magnitud del desplazamiento resultante es menor que el de cada onda por separado, y se dice que las ondas muestran *interferencia destructiva*.

Un caso especial de interferencias de ondas se indica en la Fig. 15-4*c*. Aquí, dos ondas, una hacia la izquierda, y otra hacia la derecha tienen formas idénticas pero invertidas tanto de arriba hacia abajo, como de izquierda a derecha. Vemos que cuando las dos ondas interfieren, hay un solo punto a lo largo de la cuerda en el que el desplazamiento resultante *siempre* permanece como cero.

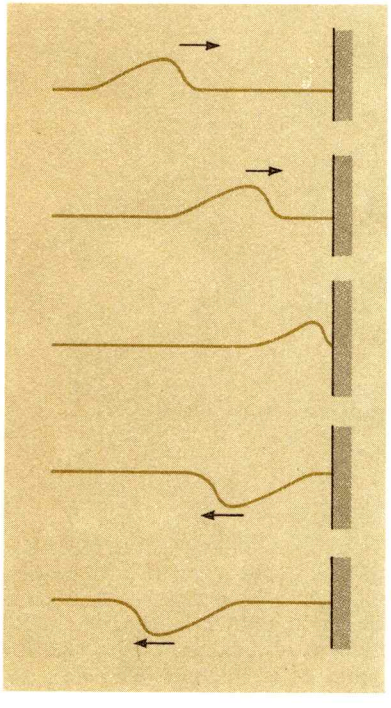


FIG. 15-5. Reflexión de un pulso ondulatorio en un límite de masa infinita.

15—3 REFLEXION DE LAS ONDAS

Cuando una onda choca con una segunda onda sobre la misma cuerda, nada le pasa a cada una de ellas. ¿Qué sucede cuando una

onda choca con un límite, un punto en el cual el medio en que se propaga la onda (aquí la cuerda) cambia?

Primero imagínese una cuerda atada con firmeza a una pared de masa muy grande, como en la Fig. 15-5. Como la pared no se puede mover, podemos describir esta situación de manera formal diciendo que el desplazamiento y debe ser siempre nulo en el punto en el que la cuerda se une a la pared. Ahora bien, si el pulso se propaga hacia la derecha, la encontramos reflejada hacia la izquierda del límite. Después de la reflexión, la forma se invierte a la *izquierda-derecha;* el borde principal inicial del pulso sigue siendo el borde principal después de la reflexión. Además, el signo de la onda se invierte; esto es, la onda se invierte de *arriba* hacia *abajo*, un desplazamiento transversal positivo se convierte en negativo por la reflexión, y recíprocamente.

Se puede dar una base física para este comportamiento. Cuando el borde principal de la perturbación llega al límite, la tensión de la cuerda produce una fuerza hacia arriba sobre la pared de masa infinita, y por ello en esencia inmovible. Por la tercera ley de Newton, la pared aplica una fuerza hacia abajo sobre la cuerda. Esta fuerza es, de hecho, de mayor magnitud que la fuerza aplicada al segmento vecino de la cuerda en ausencia de la pared, debido a que la cuerda, cuando está fija en sentido vertical en el límite, adquiere un gran cambio en su curvatura en ese punto. La fuerza de la pared sobre la cuerda es tan grande que no sólo la hace regresar a $y = 0$; la pared empuja tan fuerte sobre la cuerda, que dicha cuerda llega hasta abajo de la línea $y = 0$. Así, se genera una onda invertida hacia la izquierda.

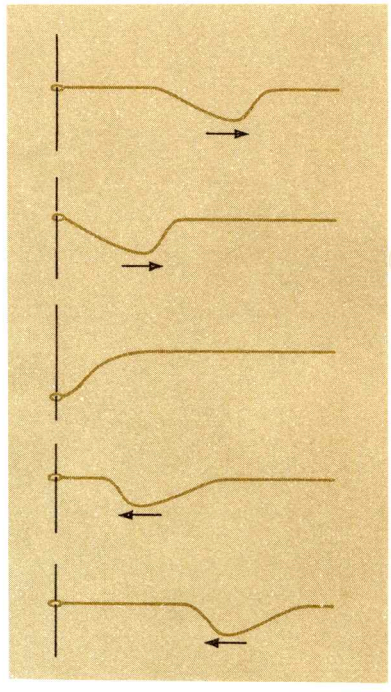


FIG. 15-6. Reflexión de un pulso ondulatorio desde un extremo libre.

Ahora imaginemos que el extremo de la cuerda, en lugar de estar fijo, se encuentra libre por completo para moverse en la dirección transversal. Precisamente, supongamos que la cuerda termina en un anillo sin masa que pueda deslizarse con libertad a lo largo de un poste vertical liso. El resultado de la reflexión se muestra en la Fig. 15-6. De nuevo hay una inversión de la forma izquierda-derecha, cuando el sentido de la propagación cambia de derecha a izquierda. Sin embargo, *no* hay cambio en el signo de la forma de la onda. Una onda incidente hacia arriba se refleja como una onda hacia arriba. Se puede dar una base física sencilla para la reflexión en un límite libre. Como no hay cuerda a la derecha del extremo libre que proporcione una componente hacia abajo de la fuerza debida a la tensión, la cuerda se mueve hacia arriba cuando la perturbación llega al extremo.

Hemos tratado dos casos extremos de reflexión: una cuerda atada a un segundo medio de masa infinita y una cuerda atada a un segundo medio sin masa. Ahora consideremos el caso más general en el cual una cuerda con la densidad lineal ρ_1 se conecta a una segunda cuerda de densidad lineal ρ_2. La tensión F_t es la misma en ambas cuerdas. Si $\rho_2 > \rho_1$, vemos por la Ec. (15-1) que la rapidez de la onda c_1 en la primera cuerda excede a la rapidez

de las ondas c_2 en la segunda cuerda. La Fig. 15-7*a* muestra lo que pasa cuando un pulso ondulatorio incidente desde la izquierda con la rapidez c_1 se encuentra con el límite. La onda en parte se transmite en el segundo medio y en parte se refleja hacia atrás sobre el primer medio. Aquí, el límite se mueve en sentido lateral cuando la onda llega a él. Como podríamos esperar, la onda transmitida no cambia de signo; por otro lado, la onda reflejada se invierte. Además, la forma de la onda transmitida se comprime longitudinalmente debido a la rapidez disminuida c_2. El hecho de que la onda reflejada se invierte en signo se sigue del comportamiento encontrado antes para la reflexión en un segundo medio de masa infinita. Aquí el segundo medio no es de masa infinita, pero su inercia es mayor que la del primero. En consecuencia ocurre una inversión de la polaridad en la reflexión. Como indica la Fig. 15-7*b*, la polaridad no se invierte, ni en la onda transmitida ni en la reflejada, para una onda incidente que se mueve desde la cuerda de mayor masa a la de menor masa, como era de esperarse a partir de la Fig. 15-6.

15—4 ONDAS SINUSOIDALES

Hasta aquí nuestro tratamiento de las ondas ha sido muy general. No nos hemos referido a la forma específica de las ondas, esto es, con la relación matemática que da al desplazamiento y de una partícula en la cuerda como una función explícita del tiempo t y la posición x. Aquí hacemos esto para el caso especial de ondas continuas sinusoidales generadas por un generador armónico simple. La importancia especial de las ondas sinusoidales no está nada más en que sus generadores son comunes, sino, en forma más especial, en que *cualquier* forma de onda puede tomarse como la superposición de ondas sinusoidales de varias frecuencias.

Supóngase que el extremo izquierdo ($x = 0$) de una cuerda muy larga bajo tensión se mueve hacia arriba y hacia abajo en un movimiento armónico simple con la amplitud A y la frecuencia f (y el periodo T, donde $T = 1/f$). Entonces (Sec. 14-1) el desplazamiento transversal en ese punto está dado por

$$y(x, t) = y(0, t) = A \operatorname{sen} \omega t$$

donde $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$. A partir de los argumentos de la Sec. 15-1, sabemos que el desplazamiento de cualquier otro punto de la cuerda a la derecha mostrará exactamente la misma variación con el tiempo, pero con una demora, o retraso de fase δ:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} (\omega t - \delta)$$

Como la perturbación de la onda se mueve a lo largo de la dirección X con una rapidez constante, el retraso de fase δ es proporcional a x, y podemos escribir:

$$\delta = kx \qquad (15\text{-}3)$$

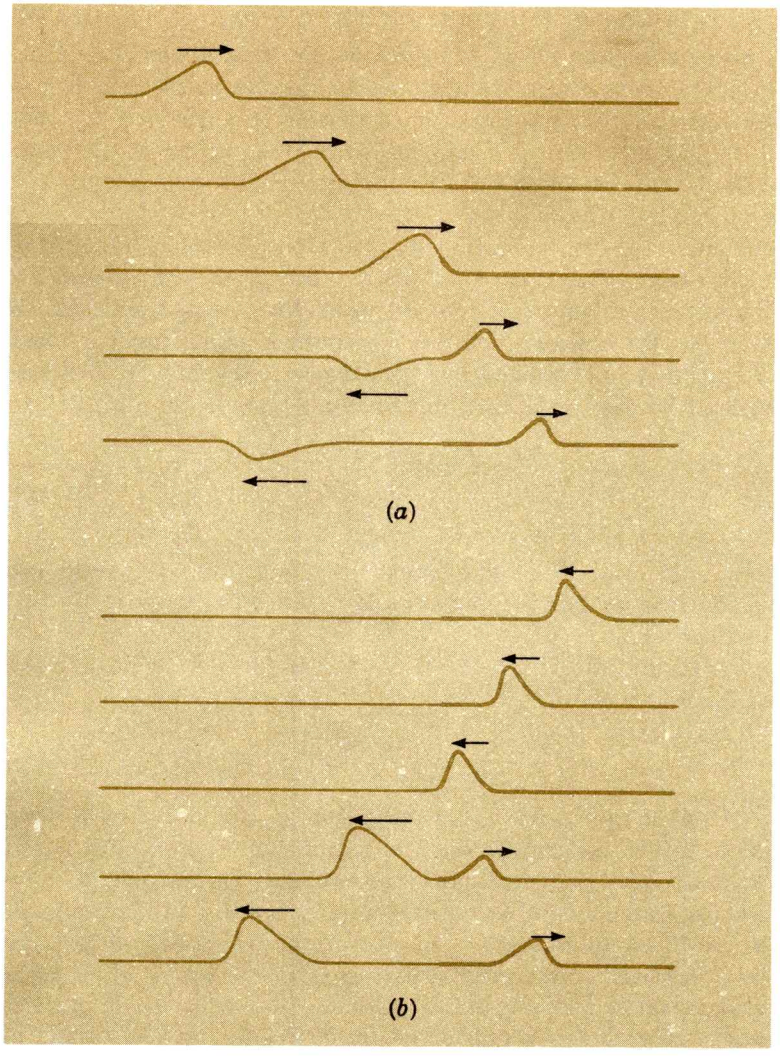


FIG. 15-7. Reflexión y transmisión de un pulso ondulatorio incidente sobre (*a*) una cuerda de densidad lineal mayor y (*b*) una cuerda de densidad lineal menor.

donde k se conoce como *número de onda* (por razones que pronto se verán). Entonces el desplazamiento transversal $y(x, t)$ puede escribirse en la forma

Onda hacia la *derecha:* $$y(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx) \qquad (15\text{-}4a)$$

Esta es una forma importante de la ecuación adecuada a una onda viajera sinusoidal. Ella da el desplazamiento transversal y como una función tanto de la coordenada x a lo largo de la dirección de propagación y el tiempo t para una onda que se mueve hacia la derecha. Si la onda fuera a viajar hacia la izquierda, el desplazamiento en el punto x estaría adelantado, más bien que retrasado, con respecto al desplazamiento $x = 0$. Entonces, la ecuación para la onda viajera se podrá escribir en la forma

Onda hacia la *izquierda:* $y(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega t + kx)$ (15-4*b*)

El desplazamiento y varía en forma sinusoidal con el tiempo para todos los puntos a lo largo de la cuerda. Las Ecs. (15-4) también indican que, para cualquier tiempo t, y varía de manera sinusoidal con x; esto es, una instantánea de una onda generada por un oscilador armónico simple corresponde a la de un seno o un coseno, como se indica en la Fig. 15-8.

Los puntos a lo largo de la onda que tienen el mismo desplazamiento y también la misma velocidad *transversal* se encuentran en la misma fase; por ejemplo, los puntos marcados en la Fig. 15-8. La distancia entre dos puntos cualesquiera como éstos, adyacentes, se conoce como la *longitud de onda,* λ. Así, si x cambia en λ, la fase debe cambiar en 2π o, por la Ec. (15-3),

$$k\lambda = 2\pi$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{15-5}$$

El número de onda k da el número de longitudes de onda por cambios de fase de 2π; esto es, k es la rapidez del cambio de fase con la distancia.

Usando la definición $\omega = 2\pi/T$, podemos escribir la Ec. (15-4*a*) en otra forma muy útil:

$$y(x,t) = A \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \tag{15-6}$$

La Ec. (15-6) se aplica para una onda que se mueva hacia la derecha; como antes, una onda hacia la izquierda se representa por la misma ecuación, pero un signo + reemplaza al signo −.

Es claro que un cambio en el tiempo t igual a la duración de un periodo T es equivalente a un cambio en el espacio a lo largo de X de una longitud de onda λ. Esto es en el tiempo T, durante el cual el generador de las ondas y cada partícula de la cuerda completan un ciclo, la longitud de onda avanza una distancia λ. Entonces, la rapidez c de las ondas es

$$c = \frac{\lambda}{T} \tag{15-7}$$

o, como $1/T = f$, $$c = f\lambda \tag{15-8}$$

Una forma alternativa de esta relación es $c = (2\pi f)(\lambda/2\pi) = \omega/k$. Como la fase de la oscilación avanza a lo largo de la dirección de propagación con la misma rapidez con que lo hace la forma de la onda, es apropiado llamar a la rapidez de las ondas, la *rapidez de la fase.*

La rapidez de la fase para una onda en una cuerda depende sólo de las propiedades elásticas e inerciales de la cuerda (la tensión y la densidad lineal), no de la forma de la onda. Entonces, de esto se sigue, a partir de la Ec. (15-8) que las oscilaciones de alta frecuencia generan ondas de longitudes de onda relativamente

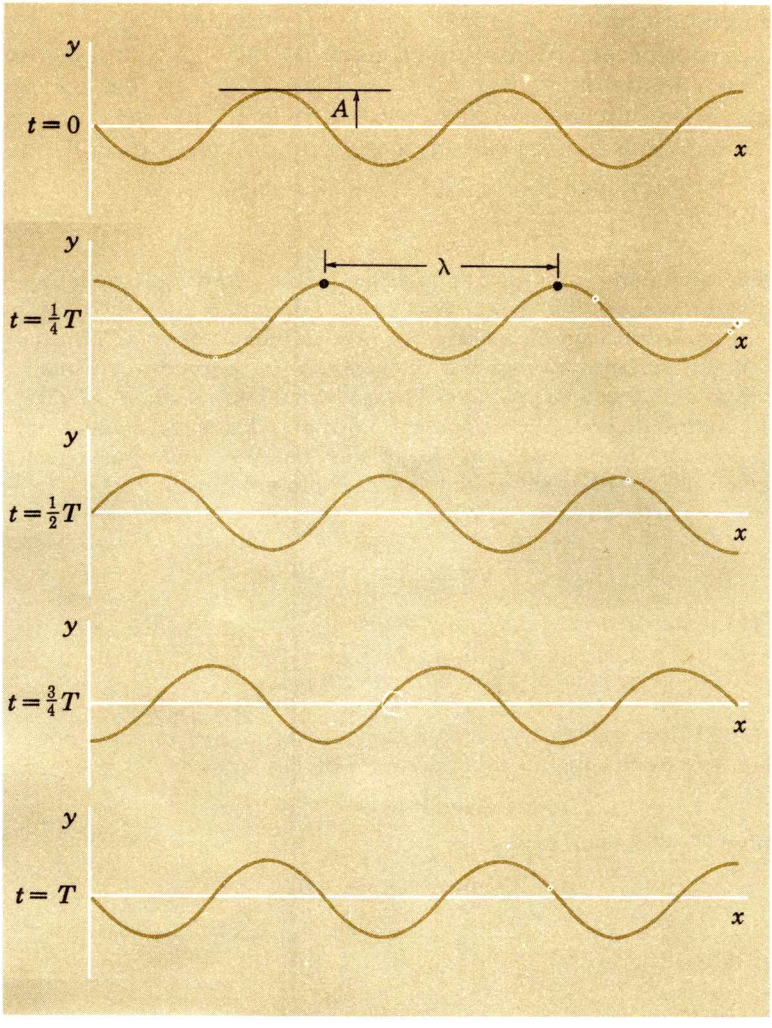


FIG. 15-8. Una onda sinusoidal en varios tiempos diferentes.

cortas, mientras que las oscilaciones de baja frecuencia generan ondas de longitudes de onda largas, el producto de f por λ siempre permanece constante.

Usando la forma alternativa de la Ec. (15-8), $c = \omega/k$, la Ec. (15-4*a*) para la onda viajera se puede escribir en otra forma:

$$y = A \operatorname{sen}(\omega t - kx) = A \operatorname{sen} k(ct - x)$$

Debido a que $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, tenemos

$$y(x, t) = -A \operatorname{sen} k(x - ct) \qquad (15\text{-}9)$$

de nuevo, para una onda que se propague a lo largo de X positivo. Notamos que las cantidades x, c, y t aparecen en la Ec. (15-9) en la combinación $x - ct$, como se requiere de acuerdo con los argumentos que nos llevaron a la Ec. (15-2).

Las tres formas de la ecuación para ondas sinusoidales viajeras dada en las Ecs. (15-4), (15-6), y (15-9) son equivalentes. Sólo

difieren en la forma en que aparecen las cantidades k, λ, ω, T, f, y c. Hemos considerado, de cualquier manera, que el desplazamiento y es cero cuando $x = 0$ y $t = 0$. Para tener en cuenta un desplazamiento inicial cuando $x = 0$ y $t = 0$, lo que necesitamos hacer es nada más incorporar una constante de fase ϕ, escribiendo

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}[k(x - ct) - \phi]$$

Ejemplo 15-2

Se genera una onda sinusoidal a lo largo de una cuerda que tiene la densidad lineal de 70 g/m y se encuentra bajo una tensión de 10 N por un oscilador armónico simple transversal colocado en el punto $x = 0$. El oscilador ejecuta 4.0 oscilaciones por segundo con una amplitud de 2.0 cm. (*a*) ¿Cuál es la rapidez de las ondas? (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda? (*c*) Suponiendo que el oscilador se encuentra en la posición superior de la amplitud en el tiempo $t = 0$, escriba la ecuación para la onda sinusoidal viajera como una función de x y t.

(*a*) A partir de la Ec. (15-1)

$$c = \sqrt{\frac{F_t}{\rho}} = \sqrt{\frac{10 \text{ N}}{0.070 \text{ kg/m}}} = 12 \text{ m/s}$$

(*b*) A partir de la Ec. (15-8),

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{12 \text{ m/s}}{4.0 \text{ Hz}} = 3.0 \text{ m}$$

(*c*) Al principio el desplazamiento transversal y *no* es cero; por lo que, deberemos incluir una constante de fase ϕ:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}[k(x - ct) - \phi]$$

Como $y = A$ cuando $t = 0$ y $x = 0$,

$$A = A \operatorname{sen}(-\phi) = -A \operatorname{sen}\phi$$

o

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

Entonces

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}\left[k(x - ct) + \frac{\pi}{2}\right]$$

o

$$y(x, t) = A \cos k(x - ct)$$

Recordando que $k = 2\pi/\lambda$, y sustituyendo los valores numéricos de λ, A, y c en la ecuación anterior, tenemos

$$y(x, t) = (2.0 \times 10^{-2}) \cos\frac{2\pi}{3}(x - 12t)$$

donde y y x se indican en metros y t en segundos.

15—5 ONDAS ESTACIONARIAS

Cuando dos o más ondas sinusoidales que se mueven en la *misma* dirección y sentido con la misma rapidez se superponen, la forma de la onda resultante se mueve con la misma rapidez que las ondas componentes. Ahora considérese la superposición de dos ondas sinusoidales de la misma rapidez pero con sentidos *opuestos*. Los resultados se indican en forma gráfica en la Fig. 15-9, donde

las dos ondas viajeras, junto con su resultante, están indicadas para una sucesión de tiempos.

Cuando la amplitud de la resultante excede la de cualquiera de las dos ondas componentes, tenemos un ejemplo de *interferencia constructiva.* Recíprocamente, siempre que la amplitud de la resultante es más pequeña que cualquiera de las ondas tomadas por separado, tenemos un caso de *interferencia destructiva.*

Primero, notamos que hay ciertos tiempos en los que las cumbres de las ondas coinciden exactamente, digamos, en $t = 0$ o $t = \frac{1}{2}T$, donde T es el periodo. Hay otros tiempos en los que las ondas dan una interferencia del todo destructiva, digamos en $t = \frac{1}{4}T$, $\frac{3}{4}T$, etc. La Fig. 15-9 muestra, además, que hay ciertos *puntos* a lo largo de la cuerda en los que las dos ondas viajeras siempre interfieren en forma destructiva. Estos puntos, en los que la cuerda nunca tiene un desplazamiento, se conocen como puntos nodales, o *nodos.* La cuerda tiene su amplitud mayor de oscilación en localizaciones llamadas *vientres,* colocados a la mitad de la distancia entre nodos adyacentes. Es claro que *los nodos adyacentes están separados por media longitud de onda* ($\frac{1}{2}\lambda$); de la misma manera que *los vientres adyacentes están separados por* $\frac{1}{2}\lambda$. La alteración oscilante resultante se llama *onda estacionaria,* u *onda estable.*

Estos términos son apropiados, porque no se ve ninguna forma de onda que se mueva hacia la izquierda o hacia la derecha, y no se transmite energía ni a la izquierda ni a la derecha. Las partículas de la cuerda oscilan, pero el patrón se mantiene, en lo que respecta a que los vientres y los nodos están fijos a lo largo del eje X.

¿Cómo se pueden producir dos ondas sinusoidales que se muevan en la misma dirección pero con sentidos opuestos para obtener así ondas estacionarias? Un camino es el de colocar osciladores armónicos simples transversales, o generadores de ondas, en los extremos opuestos de una cuerda. Lo que es aún más simple, podemos reflejar una onda sinusoidal incidente en un límite para producir una onda reflejada que se mueva en sentido opuesto. Como vimos en la Sec. 15-3, cualquier forma de onda se refleja del todo en un límite de masa infinita. Con respecto a la onda incidente, la onda reflejada está invertida de arriba hacia abajo y su sentido se invierte de izquierda a derecha. Cuando se cambia el signo de y para una onda sinusoidal, se invierte de arriba hacia abajo, todas las crestas se convierten en valles y recíprocamente; esto es, la *fase* de la onda *cambia* 180°. Así, cuando una onda sinusoidal en una cuerda se refleja en un límite duro, recibe un cambio de fase de 180° con respecto a la onda incidente. (Desde un mismo punto de vista, una cuerda reflejada en un límite "blando", como en la Fig. 15-6, *no* cambia en su fase.) Podemos, por lo tanto, generar un patrón de ondas estacionarias en una cuerda, oscilando un extremo en sentido lateral mientras que el otro está fijo, como se muestra en la Fig.

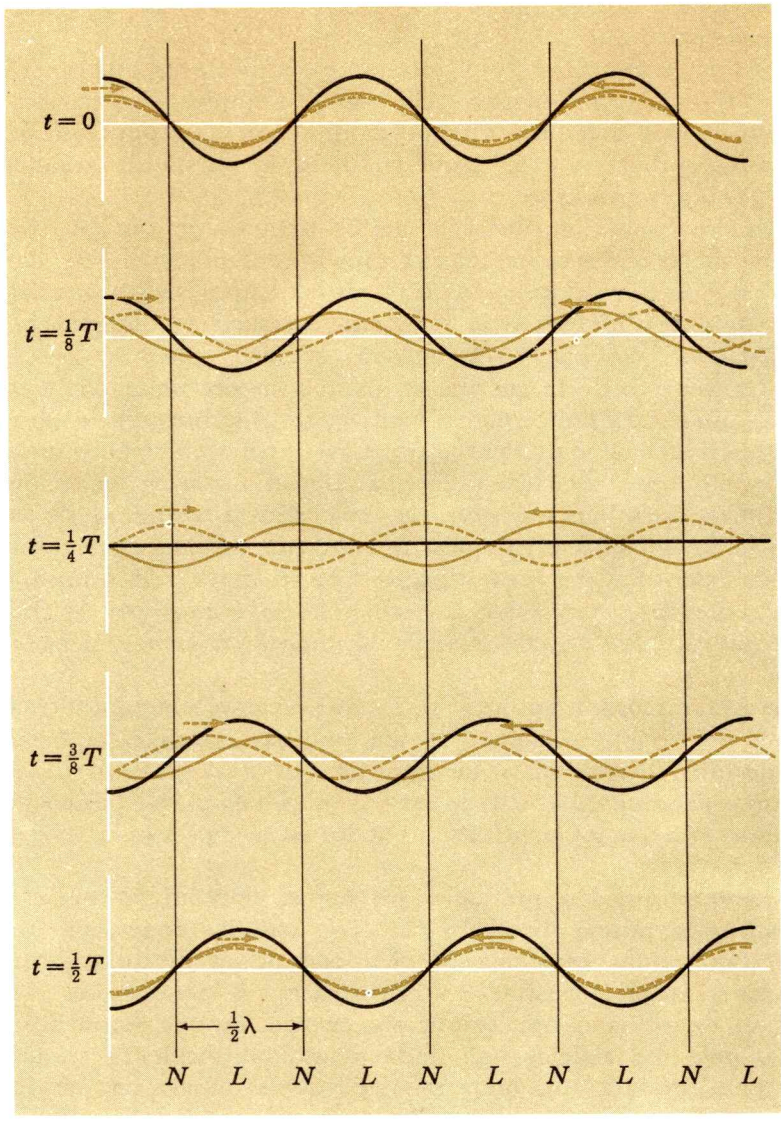


FIG. 15-9. Ondas estacionarias. La forma de la onda resultante (línea más negra) para dos ondas que se mueven en la misma dirección pero con sentidos opuestos para una sucesión de tiempos. Los nodos adyacentes (N) y los vientres adyacentes (L) están separados por media longitud de onda.

15-10. Este efecto se puede demostrar con claridad usando un diapasón u otro oscilador mecánico; las oscilaciones son tan rápidas que uno sólo ve la envolvente del modelo de ondas estacionarias.

Las ondas estacionarias pueden, de hecho, producirse cuando *ambos* extremos de la cuerda están fijos. El modelo de ondas estacionarias debe, en este caso, ajustarse entre los dos extremos de la cuerda; esto es, el largo de la cuerda L debe ser un múltiplo entero de medias longitudes de onda, si se satisfacen las *condiciones límite* de los extremos de la cuerda, $x = 0$ y $x = L$.

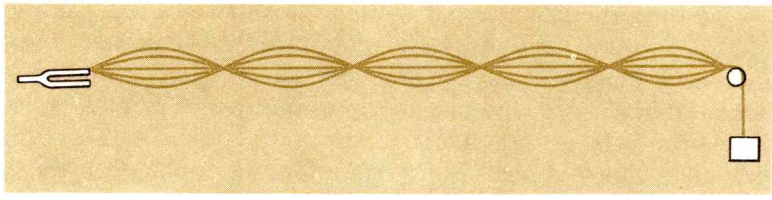


FIG. 15-10. Un arreglo para demostrar ondas estacionarias en una cuerda. Uno de los extremos de la cuerda se ata a un diapasón vibratorio; el otro extremo se ata a un peso y se hace pasar por una polea.

Las longitudes de onda y frecuencias permitidas para las ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos están dadas por

$$n\frac{\lambda}{2} = L \qquad \text{donde } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{15-10a}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = n\frac{\sqrt{F_t/\rho}}{2L} \tag{15-10b}$$

donde hemos usado la Ec. (15-1) para la rapidez de las ondas c.

La frecuencia más baja, llamada frecuencia *fundamental,* se tiene cuando $n = 1$. Designamos esta frecuencia por f_1. Entonces las ondas estacionarias se pueden producir para las frecuencias

$$f = nf_1 = f_1, 2f_1, 3f_1, \ldots$$

todas las frecuencias permitidas serán múltiplos enteros de la fundamental como se muestra en la Fig. 15-11. La frecuencia más

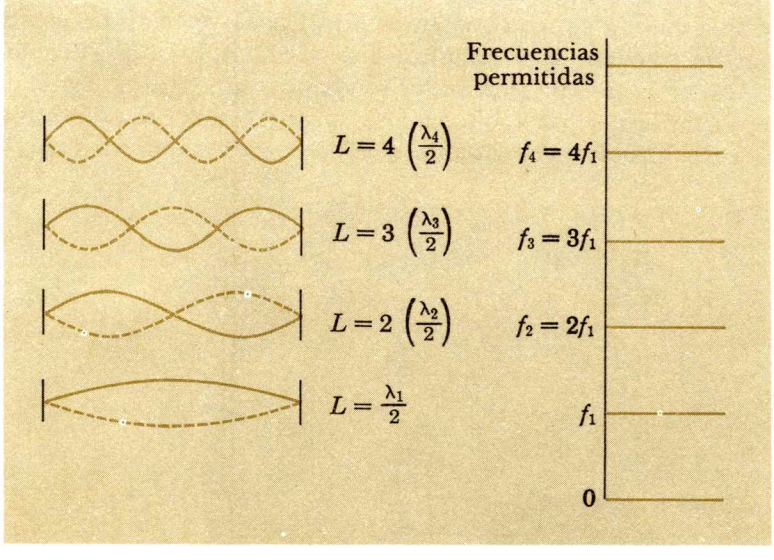


FIG. 15-11. Oscilaciones permitidas para una cuerda fija en ambos extremos.

baja a menudo se llama el *primer armónico.* El segundo armónico corresponde a $2f_1$, el tercer armónico a $3f_1$, etc. El término *armónico* se usa sólo cuando las frecuencias características son múltiplos *enteros* de la frecuencia fundamental.

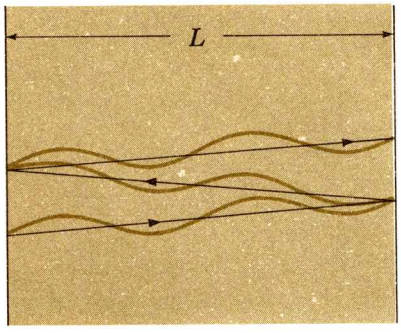


FIG. 15-12. Una onda viajera tiene reflexiones múltiples en sus límites.

Un argumento alternativo que nos lleva a las condiciones adecuadas para las ondas estacionarias es el siguiente. Imagínese una onda incidente que proviene de la izquierda de un límite. La onda reflejada se puede considerar como que es la onda incidente "doblada" hacia atrás, hacia la izquierda. Esta onda doblada, o reflejada, choca con el límite izquierdo, se dobla de nuevo, y de nuevo se mueve hacia la derecha. Ahora bien, esta onda dos veces reflejada debería interferir de manera destructiva con la onda inicial hacia la derecha (en realidad, su propio extremo inicial) a menos que la distancia que ha recorrido en un viaje redondo (2 L) entre los límites sea exactamente un múltiplo *entero* de longitudes de onda. Vea la Fig. 15-12. Entonces, la onda, por decirlo así, interfiere en forma constructiva con ella misma, estipulando que $2L = n\lambda$, o $n(\lambda/2) = L$, como en (15-10a). (Aunque se presente un cambio de fase de 180° en la reflexión en un límite duro, el argumento no cambia, porque se producen *dos* cambios de estos en un viaje redondo.) Así, una onda estacionaria puede tomarse como una onda viajera de extensión infinita doblada sobre sí misma un número infinito de veces, la longitud de onda deberá ser tal que garantice que se alcancen las condiciones de los límites, digamos, que se alcance un número entero de medias longitudes de onda entre los extremos.

De acuerdo con el principio de la superposición, pueden existir varias ondas en forma simultánea en una cuerda sin que se afecten entre sí de alguna manera. Las ondas pasan unas a través de las otras sin que interactúen. Así, pueden existir a la vez en una misma cuerda con sus extremos fijos, dos o más ondas estacionarias de frecuencias y longitudes de onda *diferentes*. Vea la Fig. 15-13, en la que se indican los modelos resultantes de las ondas en una cuerda para la excitación del primero y del segundo armónicos. Recíprocamente, *cualquier* alteración periódica en una cuer-

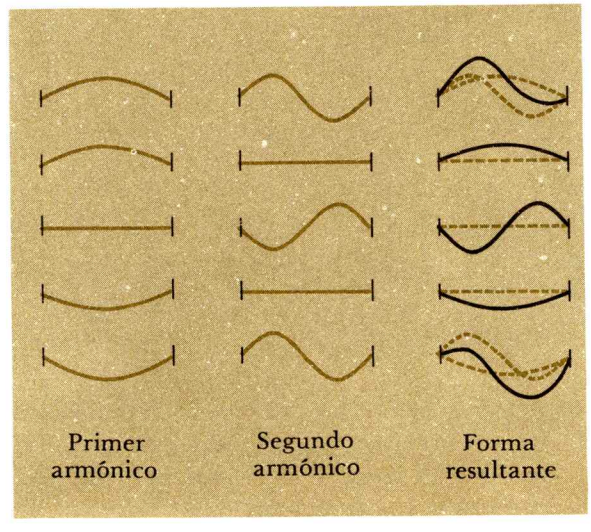


FIG. 15-13. Modelos de onda para una sucesión de tiempos correspondientes a la excitación del primero y segundo armónicos.

da —cualquier oscilación que persiste en el tiempo— debe estar formada por una o más ondas estacionarias. Por otro lado, cualquier alteración ondulatoria que no sea de una frecuencia permitida —cualquier oscilación que no corresponda a uno de los *modos* de oscilación permitidos— debe, de acuerdo con los argumentos del último párrafo, morir rápidamente, debido a que tales ondas interfieren en sentido destructivo, la energía se disipa en los alrededores. Así, cuando una cuerda se golpea o se roza con un arco, como en el piano o el violín, puede oscilar al mismo tiempo en una o más frecuencias permitidas. Es típico que la amplitud de la fundamental exceda la de los armónicos más altos. Los armónicos más altos se llaman algunas veces "sobretonos"; tienen una frecuencia "sobre" la fundamental. Para una cuerda con extremos fijos, el segundo armónico es el primer sobretono, etc.

Ejemplo 15-3

Una cuerda de 2.0 m de largo se encuentra fija en ambos extremos. Se observa que si se genera un pulso ondulatorio cerca de uno de sus extremos, tarda 0.10 s en efectuar un viaje redondo hasta el otro extremo y regreso. ¿Cuáles son las frecuencias de oscilación permitidas para esta cuerda?

La rapidez de las ondas c, es la distancia recorrida por el pulso ondulatorio dividida entre el tiempo transcurrido, (4.0 m)(0.10 s) = 40 m/s. El modelo de la onda estacionaria es aquel para el que la longitud L de la cuerda es un múltiplo entero de la mitad de la longitud de onda $L = n(\lambda/2)$. Así,

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{nc}{2L} = \frac{n(40\ \text{m/s})}{2(2.0\text{m})}$$

$$= n(10\ \text{Hz}) = 10, 20, 30, \ldots, \text{Hz}$$

Podemos llegar al mismo resultado a través de otro argumento: Con la cuerda oscilando en su forma fundamental, se mueve una onda sinusoidal en un viaje redondo entre los límites en un tiempo igual al periodo, porque sólo entonces interfiere en forma constructiva consigo misma en reflexiones posteriores. Así, el periodo del primer armónico es de 0.10 s, y su frecuencia de 10 Hz. Los armónicos más altos son múltiplos enteros de 10 Hz. Nótese que la longitud de la cuerda y la rapidez de la onda, aquí no intervienen.

15—6 RESONANCIA

Primero recordemos algunos resultados relacionados con el fenómeno de la resonancia, dados en la Sec. 14-5. En ella consideramos el caso simple de una sola masa unida a un resorte, amortiguada por una fuerza opuesta al movimiento, y movida por un oscilador externo de frecuencia variable. Con una fuerza de amortiguamiento relativamente pequeña y sin fuerza impulsora, la masa oscila a su frecuencia natural y poco a poco disminuye su

amplitud. Las oscilaciones se apagan. Cuando se aplica la fuerza impulsora, la masa oscila siempre a la misma frecuencia que la fuerza impulsora, pero su amplitud de oscilación llega a un máximo bien determinado, cuando la frecuencia de la fuerza aplicada es igual a la frecuencia natural del oscilador. Esto es, se transmite energía del impulsor al oscilador a su máxima rapidez, y se logra la *resonancia,* cuando el oscilador se impulsa a su frecuencia natural.

Ahora considérese una cuerda fija en sus extremos. Tiene muchas frecuencias naturales de oscilación, no sólo una. De hecho, tiene un número infinito de frecuencias características y modos de oscilación característicos, o normales. Las frecuencias resonantes están dadas por la Ec. (15-10*b*); son las frecuencias correspondientes a la existencia de las ondas estacionarias. Desde luego, todas las oscilaciones de la cuerda son amortiguadas, tanto por la fricción con el aire que la rodea, como por la fricción interna debida a la tensión de la cuerda. Si una cuerda se excita por una fuerza impulsora externa, por ejemplo, por las variaciones de la presión del aire debidas a una onda sonora, puede exhibir la resonancia; la amplitud de oscilación puede ser grande si la frecuencia de excitación es una de las frecuencias naturales de la cuerda. Note que, aunque existe un número infinito de frecuencias resonantes para una cuerda dada, estas frecuencias no están distribuidas de modo continuo, sino que más bien, están en la relación de los enteros, como se indica en la Fig. 15-11.

El hecho de que las ondas en una cuerda, u otras ondas atrapadas entre límites reflejantes, tengan un grupo de frecuencias discretas y modos característicos de oscilación tiene una analogía importante con la teoría cuántica. En realidad, la estabilidad y la estructura de los átomos, moléculas, y núcleos se puede comprender sobre la base de las propiedades ondulatorias que debemos atribuir a partículas como los electrones, los protones y los neutrones.

Ejemplo 15-4

Un violín que tiene una cuerda de 31.6 cm de largo, con la densidad lineal de 0.65 g/m, se coloca cerca de un altoparlante alimentado por un oscilador de audio de frecuencia variable. Se observa que cuando la frecuencia de las ondas sonoras que llegan al violín se hace variar de modo continuo desde 500 a 1 500 Hz, la cuerda se pone en oscilación sólo a frecuencias de 880 y 1 320 Hz. ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

La cuerda del violín, fija en ambos extremos, oscila en resonancia a sus frecuencias características que se encuentran en proporción con los enteros 1, 2, 3, ... La razón entre las frecuencias de resonancia que se tienen aquí es $\frac{1320}{880} = \frac{3}{2}$. Por lo tanto, las dos frecuencias de resonancia corresponden a las oscila ciones en sus segundo y tercer armónicos. (Si los dos armónicos fueran, por ejemplo, el cuarto y el sexto su razón sería de nuevo $\frac{3}{2}$,

pero entonces deberíamos encontrar, además, una resonancia correspondiente al quinto armónico, 1 100 Hz.) En consecuencia, el armónico fundamental o primero es de 440 Hz; éste corresponde a la nota "la" sobre el "do central" en la escala de concierto. La longitud de la cuerda para esta frecuencia es de la mitad de la longitud de onda:

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f} = \frac{\sqrt{F_t/\rho}}{2f}$$

$$F_t = 4f^2L^2\rho = 4(440\ \text{Hz})^2(0.316\ \text{m})^2(6.5 \times 10^{-4}\ \text{kg/m}) = 50\ \text{N}$$

RESUMEN

La forma general de la función F que describe a una onda que se mueva a lo largo del eje X con la rapidez c, es

$$y = F(x \mp ct) \qquad (15\text{-}2)$$

donde los signos menos y más se refieren, a su vez, a la propagación de la onda en los sentidos X positivo y negativo. Para una onda transversal en una cuerda estirada la rapidez de las ondas es

$$c = \sqrt{\frac{F_t}{\rho}} \qquad (15\text{-}1)$$

donde F_t es la tensión en la cuerda y ρ es la densidad lineal.

Una onda sinusoidal, generada por un oscilador armónico simple de amplitud A, frecuencia angular ω, y periodo T, que se mueve a lo largo del eje X positivo, se puede representar por cualquiera de las siguientes formas equivalentes:

$$y = A \operatorname{sen}(\omega t - kx) \qquad (15\text{-}4)$$

$$y = A \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (15\text{-}6)$$

$$y = -A \operatorname{sen} k(x - ct) \qquad (15\text{-}9)$$

donde la longitud de onda λ, la distancia entre dos puntos vecinos que se encuentren en la misma fase, se relaciona con el número de ondas k por $k = 2\pi/\lambda$. El producto de la frecuencia f por la longitud de onda λ es una constante, c, la rapidez de las ondas, o la rapidez de la fase

$$c = f\lambda \qquad (15\text{-}8)$$

El principio de la superposición gobierna la interferencia de las ondas: La perturbación ondulatoria resultante, no es sino la suma vectorial de las perturbaciones componentes. No hay una interac-

ción de una onda a otra en sistemas lineales. La superposición de ondas transversales en una cuerda requiere que el desplazamiento transversal sea pequeño. Las interferencias constructiva y destructiva se refieren, respectivamente, a situaciones en las que la perturbación resultante es más grande o más pequeña que las perturbaciones componentes. En un límite o cambio de medio para la propagación de las ondas, la onda incidente se transmite en parte y en parte se refleja. La reflexión debida a un segundo medio de mayor masa trae como consecuencia un cambio de fase de 180° en el límite; la reflexión en un segundo medio de menor masa no produce cambio de fase en el límite.

Un ejemplo de la interferencia de las ondas es el de las ondas estacionarias que, para una cuerda de longitud L fija en sus extremos, lleva a las frecuencias permitidas $nc/2L$.

PROBLEMAS

15-1. Encuentre la rapidez de una onda transversal en una cuerda con 75 cm de largo cuando la tensión sobre ella es de 320 N. La masa de la cuerda es de 120 g.

15-2. Una onda transversal se mueve con la rapidez de 400 m/s en un alambre de acero con la densidad lineal de 0.10 g/cm. ¿Cuál es la tensión en el alambre?

15-3. Un pulso ondulatorio transversal se propaga de un extremo de una cuerda tirante al otro. Se duplica en forma repentina la tensión aplicada a la cuerda. Describa qué pasa con la (*a*) forma, (*b*) amplitud, y (*c*) rapidez de la onda.

15-4. Un pulso ondulatorio triangular tiene la misma pendiente (magnitud) de 5.0×10^{-3} m a lo largo de los bordes frontal y posterior (véase la Fig. P15-4). La onda se mueve hacia la derecha a 5.0 m/s. ¿Cuál es la rapidez transversal de las partículas (*a*) a lo largo del borde frontal y (*b*) a lo largo del borde posterior?

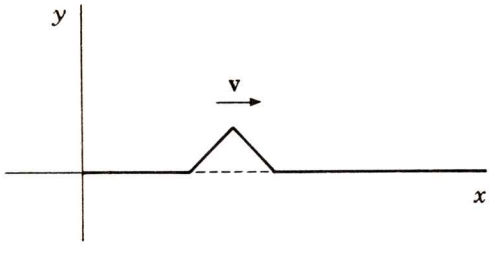


FIG. P15-4

15-5. Una cuerda cuelga en sentido vertical bajo su propio peso. Demuestre que la rapidez de las ondas a una distancia y desde el extremo inferior está dada por $\sqrt{gy}$. Note que la rapidez de las ondas es independiente de la densidad lineal de la cuerda; por lo que, esta relación se aplica aunque la cuerda *no* sea uniforme.

15-6. La Fig. P15-6 muestra una instantánea de la forma de la onda $y(x)$ en un instante del movimiento del pulso hacia la derecha. Dibuje las curvas que muestren (*a*) el desplazamiento, (*b*) la velocidad, y (*c*) la aceleración transversal como una función del tiempo.

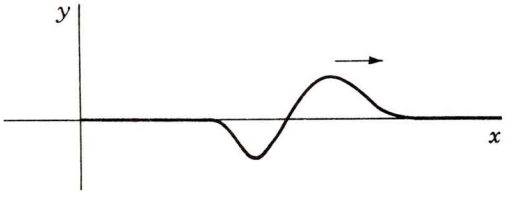


FIG. P15-6

15-7. Dos cuerdas con las densidades lineales ρ_1 y ρ_2 se unen entre sí y se encuentran bajo la misma tensión. (*a*) Si la onda tiene la longitud de onda de 2.0 cm en la cuerda 1, ¿cuál es la longitud de onda en la cuerda 2? (*b*) Si la frecuencia es de 100 Hz en la cuerda 1, ¿cuál es la frecuencia en la cuerda 2? (*c*) ¿Cuál es la rapidez de las ondas en la cuerda con la densidad ρ_1 y (*d*) la cuerda con la densidad ρ_2?

15-8. La Fig. P15-8 muestra una onda sinusoidal viajera para tres tiempos diferentes. ¿Cuál es (*a*) la rapidez de las ondas (mínima), (*b*) la amplitud, (*c*) la frecuencia, y (*d*) la longitud de onda? (*e*) ¿En qué sentido se mueven las ondas? (*f*) Escriba una ecuación para esta onda viajera.

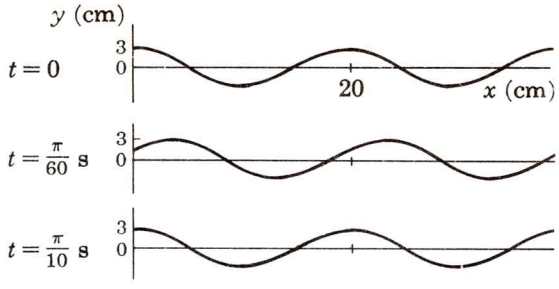


FIG. P15-8

15-9. Una onda viajera transversal se describe por medio de la ecuación $y = (2.0 \times 10^{-3})$ sen $(10x + 200t)$, donde todas las cantidades están en unidades del SI. (*a*) ¿Cuáles son la amplitud, la longitud y la frecuencia de la onda? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de onda? (*c*) ¿Cuál es la velocidad transversal de la partícula que se encuentra en $x = (\pi/10)$ m y $t = (\pi/160)$ s?

15-10. Una onda transversal que tiene la amplitud de 5.0 mm se mueve a lo largo del eje X negativo con la rapidez de 120 m/s; la longitud de onda es de 6.0 m. Encuentre las siguientes cantidades: (*a*) frecuencia en Hz, (*b*) frecuencia angular, (*c*) periodo T, y (*d*) número de onda k. Usando unidades SI, escriba ecuaciones para esta onda (*e*) en la forma de la Ec. (15-4) y (*f*) en la forma de la Ec. (15-6).

15-11. Considérese la onda sinusoidal en una cuerda que se describe en el Ej. 15-2. (*a*) Encuentre la magnitud del ímpetu lineal transversal máximo de un pequeño segmento de cuerda de 1.0 mm de largo. (*b*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza máxima resultante que se ejerce sobre dicho segmento?

15-12. Un requisito para la aplicabilidad del principio de superposición es el de que la rapidez de las ondas sea grande comparada con la rapidez transversal de una partícula. Demuestre que, para una onda sinusoidal, este requisito implica que la amplitud sea pequeña comparada con la longitud de onda.

15-13. Dos pulsos ondulatorios que se movían en la misma dirección con sentidos opuestos se anulan entre sí en un instante. ¿Qué pasó con la energía que llevaba cada pulso ondulatorio?

15-14. ¿Cuál es el cambio relativo en la tensión de cierta cuerda de violín cuando la frecuencia fundamental cambia de 435 Hz a 440 Hz? (La nota de concierto la tiene 435 Hz de acuerdo con la Escala Internacional; de acuerdo con la Escala Patrón, la nota de concierto la = 440 Hz.)

15-15. Si las frecuencias fundamentales de las cuerdas de piano la y re deben de estar en la razón $f_{re}/f_{ka} = \frac{3}{2}$, ¿cuál es la razón que se requiere entre sus tensiones? Supóngase que las dos cuerdas provienen de secciones de la misma pieza de alambre y que sus longitudes se encuentran en la razón $L_{re}/L_{ka} = \frac{5}{6}$. (Dos notas musicales que suenen al mismo tiempo y tengan la razón entre sus frecuencias de 3/2 constituyen una quinta justa.)

15-16. Al comienzo la frecuencia fundamental de la cuerda la de un violín es de 444 Hz. El violinista afina la cuerda a 440 Hz (Escala de concierto) ajustando la tensión. ¿En qué fracción debe decrecer la tensión de la cuerda?

15-17. Una cuerda sostenida en ambos extremos debe resonar con longitudes de onda de 0.16 y 0.18 m. ¿Cuál es la longitud mínima de la cuerda?

15-18. Una cuerda fija en sus extremos oscila en las formas normales a su primero y tercer armónicos. Ambas formas tienen la misma amplitud. Dibuje los patrones de la onda resultante para varios instantes de tiempo en la forma de la Fig. 15-13.

15-19. ¿Qué tensión en la cuerda de violín del Ej. 15-4 producirá resonancias en ella con frecuencias de 880, 1 100, y 1 320 Hz cuando el oscilador de audio varía de manera continua su frecuencia entre 700 y 1 500 Hz?

15-20. Cuando se fija en ambos extremos una cuerda que tiene la densidad lineal de 1.0×10^{-2} kg/m, y que se encuentra bajo la tensión de 400 N, resuena con la frecuencia de 150 Hz. (*a*) ¿Cuál es la longitud de la cuerda? (*b*) ¿Cuáles son los dos armónicos?

15-21. El extremo inferior de un cilindro vertical de 25 cm de largo se afianza en el centro y se une a un oscilador que se mueve con amplitud pequeña en la dirección horizontal. El extremo superior del cilindro se encuentra libre. La frecuencia menor a la que se presenta la resonancia es de 1 000 Hz. (*a*) ¿Con qué rapidez se propagan las ondas transversales por el cilindro? (*b*) ¿Con qué frecuencia se presentará la resonancia siguiente?

15-22. Una cuerda oscilante se amortigua por medio de una fuerza que es proporcional a la velocidad transversal de la cuerda. Demuestre que las formas de vibración de más alta frecuencia de la cuerda amortiguada, se amortiguan por completo con más rapidez que la fundamental. (Este efecto se puede oír, en particular en las notas bajas de algunos instrumentos de cuerda como el clavicordio: El tono cambia con el tiempo, el fundamental se hace relativamente más importante, a medida que los sobretonos se amortiguan con rapidez.)

Capítulo

16

ONDAS DE COMPRESION

Este capítulo se refiere a las ondas elásticas de compresión a través de un sólido, líquido, o gas. Hay un paralelismo muy marcado entre las características desarrolladas en el capítulo anterior para las ondas transversales en una cuerda tirante y las de las ondas longitudinales. Por fortuna, todos los fenómenos discutidos antes —superposición, reflexión, ondas estacionarias, resonancia— se aplican a las ondas de compresión, en esencia sin cambio. La principal diferencia es la siguiente: La propiedad que describe la perturbación ondulatoria ahora, no es un desplazamiento transversal, sino más bien un desplazamiento longitudinal, una variación de la densidad, o una variación de la presión.

16—1 ONDAS LONGITUDINALES

La Fig. 16-1 muestra una estructura sencilla que sirve como un prototipo para la propagación de las ondas elásticas longitudinales, un grupo de masas idénticas acopladas entre sí por resortes para formar una cadena. Cada resorte sigue la ley de Hooke para elongaciones o compresiones pequeñas.

Cuando cualquiera de las masas se desplaza en sentido longitudinal, los resortes unidos a ella se estiran o comprimen; estas deformaciones producen una fuerza no sólo sobre la masa desplazada, sino también sobre las masas vecinas. Así, las masas vecinas se ponen en movimiento, y cuando la masa que está en el extremo izquierdo de la cadena se desplaza bruscamente hacia la derecha, se encuentra que una perturbación de compresión se propaga hacia la derecha a lo largo de la cadena. Cada masa adquiere, a su vez, un desplazamiento longitudinal y después regresa a su posición

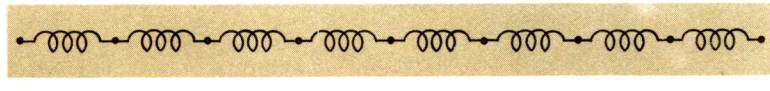


FIG. 16-1. Un modelo simple para ondas longitudinales.

de equilibrio, a medida que una onda *longitudinal* o de *compresión,* se mueve a lo largo de la cadena. La energía se transmite en sentido longitudinal —a lo largo de la línea en que se mueven las masas— como la energía cinética de las masas y la energía potencial elástica de los resortes deformados. Además, una onda longitudinal viajera lleva ímpetu lineal *a lo largo* de la dirección en que se propaga. (Recuérdese que una onda transversal en una cuerda tirante lleva ímpetu lineal en dirección perpendicular a la dirección de propagación de la energía.)

Las condiciones esenciales para la existencia de ondas longitudinales son que el *medio,* en este caso la cadena de masas y resortes, posea *inercia* y que sea *deformable elásticamente.* Es claro que si no hubiera acoplamiento entre las masas (si los resortes fueran infinitamente débiles), el desplazamiento de una masa no tendría influencia sobre las masas y los resortes vecinos, y la onda no se produciría. Por otro lado, si el medio fuera del todo rígido (si los resortes fueran de dureza infinita), el desplazamiento de una masa haría que *todas* las otras masas se desplazaran en forma *simultánea.* De nuevo, no se produciría una onda que se moviera con rapidez finita. En cambio, con un medio elástico, una fuerza externa al principio deforma y pone en movimiento sólo a una porción del medio, y esta porción deformada, debido a su acoplamiento con las porciones cercanas, las pone en movimiento.

Para simplificar, supóngase que uno de los extremos de la cadena indicada en la Fig. 16-1 se mueve en sentido longitudinal con un movimiento armónico simple. Al cabo de cierto tiempo, todas las masas adquieren un movimiento armónico simple con la misma amplitud y frecuencia que las de la fuente, cada masa oscilante tiene un atraso de fase con respecto a la fuente que es proporcional a su distancia a ella. Tenemos una onda longitudinal sinusoidal. ¿Cómo representamos gráfica y describimos analíticamente una onda como ésta?

La coordenada x da la localización de equilibrio de cada masa en la cadena con respecto a, digamos, al extremo izquierdo. Usemos a y para representar el desplazamiento *longitudinal* de cada partícula con respecto a *su* posición de equilibrio a lo largo del eje X, la dirección de propagación de la onda. La Fig. 16-2*a* muestra los desplazamientos Y de las partículas a lo largo de la cadena y la Fig. 16—2*b* es una gráfica de y contra x, ambas para una onda sinusoidal. De la misma manera que para una onda transversal en una cuerda tirante, la función $y(x)$ para cualquier tiempo dado t es una onda sinusoidal. Esta forma de la onda se mueve hacia la derecha con la rapidez de la onda, o la rapidez de la fase c, y podemos representarla en forma analítica por cualquiera de las relaciones [Ecs. (15-4), (15-6), o (15-9)] que describen una onda sinusoidal viajera. Por ejemplo,

$$y = A \operatorname{sen} (\omega t - kx) \qquad (15\text{-}4a),(16\text{-}1)$$

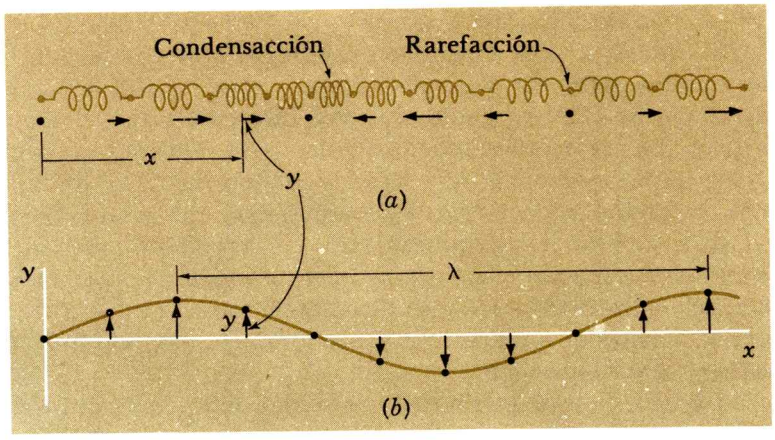


FIG. 16-2. (*a*) una onda sinusoidal longitudinal. (*b*) La forma correspondiente de la onda.

donde A es la amplitud de la oscilación longitudinal, $\omega = 2\pi f$, y $k = 2\pi/\lambda$. Como antes, la longitud de onda λ es la distancia entre dos osciladores adyacentes que tienen la misma fase, y la velocidad de la fase está dada por $c = f\lambda$.

Debe enfatizarse que la Fig. 16-2*b*, que grafica la forma de la onda $y(x)$, *no* es una instantánea de una onda longitudinal en ningún instante, como es el caso de la onda transversal en una cuerda. Podemos, sin embargo, usar exactamente las mismas expresiones matemáticas para describir ondas longitudinales, si se entiende que el desplazamiento de la partícula y ahora es el desplazamiento *longitudinal*. Las regiones en la Fig. 16-2*a* (una instantánea) en las que las partículas se encuentran más cercanas, las regiones de mayor densidad se conocen como *condensaciones*. Las regiones en las que las partículas tienen una separación relativa máxima, regiones de densidad mínima, se llaman *rarefacciones*. Las rarefacciones y las condensaciones se mueven en la dirección de la propagación de la onda con la rapidez de las ondas c. De hecho, una onda longitudinal en un medio deformable puede describirse como una perturbación para la cual la propiedad que se propaga, o función de onda, es la variación de la densidad del medio.

Nuestro modelo para una onda longitudinal está formado por masas discretas acopladas por resortes idénticos. Otro arreglo físico sencillo para las ondas longitudinales es el de un solo resorte helicoidal largo estirado. Aquí la masa se distribuye de modo continuo a lo largo del resorte, más bien que concentrarse en masas regularmente espaciadas. El desplazamiento y entonces da el cambio a partir de su posición de equilibrio de cualquier vuelta del resorte, y una onda longitudinal se ve como segmentos comprimidos y elongados que se mueven a lo largo del resorte.

16—2 VELOCIDADES DE LAS ONDAS DE COMPRESION

Las moléculas de un sólido o un líquido están sujetas a fuerzas intermoleculares, las que, para desplazamientos pequeños, obededen la ley de Hooke, siendo la fuerza intermolecular de restitución proporcional al desplazamiento de las moléculas de sus posiciones de equilibrio (Sec. 14-4). Así, el modelo sencillo de masas y resortes indicado en la Fig. 16-1 representa con gran fidelidad un sólido o un líquido deformable real. Las masas discretas se toman ahora como átomos y moléculas, y los resortes corresponden a las fuerzas interatómicas o intermoleculares. Para un medio tridimensional, cualquier molécula se acopla a *todas* las moléculas que la rodean inmediatamente.

La velocidad de las ondas c para una onda de compresión está dada por

$$c = \sqrt{B/\rho} \tag{16-2}$$

donde ρ es la masa por unidad de volumen. El *módulo de volumen* B se define como

$$B = \frac{\Delta p}{-\Delta V/V} \tag{16-3}$$

donde $-\Delta V/V$ es la *disminución* relativa en volumen debida a la presión agregada Δp.* Para un sólido típico, $B \approx 10^{11}$ N/m^2 y $\rho \approx 10^4$ kg/m^3. Usando la Ec. (16-2), encontramos una rapidez de las ondas de compresión típica que es de 3×10^3 m/s. Para una frecuencia de 10^3 Hz la longitud de onda es de 3 m.

La Ec. (16-2) es de la forma general: Rapidez de la onda = $\sqrt{\text{propiedad elástica/propiedad inercial}}$. Todos los tipos de las ondas mecánicas siguen una relación de este tipo. Esto también se ilustra con nuestra fórmula anterior $c = \sqrt{F_t/\rho}$, Ec. (15-1), para una onda transversal en una cuerda tirante, donde las propiedades elástica e inercial son, respectivamente, la tensión de la cuerda y la densidad lineal.

Una onda de compresión se puede describir como una onda de *desplazamiento;* también se puede describir como una onda de *presión*. Se puede demostrar que las variaciones de presión tienen una diferencia de fase de 90° respecto a las variaciones de desplazamiento; esto es, la presión es máxima (o mínima) en aquellos puntos donde las partículas no presentan desplazamiento. Esto es evidente por la Fig. 16-2*b*: las condensaciones y rarefacciones —las regiones respectivamente de máxima y mínima presión (y densidad)— se tienen en aquellos lugares donde las partículas se encuentran de manera temporal en sus posiciones de equilibrio.

*El concepto de *presión* se define y discute en la Sec. 17-3.

Las ondas de compresión a través de un gas son, desde luego, las responsables de los sonidos que llegan al oído. En un gas ideal no tenemos un grupo de partículas acopladas entre sí en la forma en que se presentan las moléculas de un sólido o de un líquido; las moléculas se encuentran en movimiento térmico aleatorio, interactuando sólo durante choques. No hay fuerzas elásticas actuando de continuo. Pero, si una porción del gas se comprime de manera brusca, y por ello las moléculas de gas se acercan unas a otras en una condensación, éstas por la presión alta tienden a moverse hacia las porciones del gas cercanas donde la presión y la densidad son menores. Entonces, una onda de compresión para un gas, corresponde a cambios de densidad, exactamente en la misma forma que en los sólidos y líquidos, sólo que superpuestos al movimiento molecular aleatorio.

Para las ondas sonoras a través de un gas —en forma aproximada, las ondas tienen frecuencias entre 20 y 20 000 vibraciones por segundo— las oscilaciones en la densidad del gas se llevan a cabo con tal rapidez, y la conductividad térmica del gas es tan baja, que no hay tiempo suficiente para que la energía térmica fluya de una condensación a una rarefacción, de una región de alta densidad y temperatura a una de baja densidad y temperatura. Se dice que el proceso es *adiabático*.

Para un proceso adiabático en un gas ideal, la Ec. (16-2) se puede escribir en la forma

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{w}} \tag{16-4}$$

donde R es la constante de la ley de los gases, T es la temperatura absoluta, w es el "peso" molecular, y γ es una constante para cualquier gas particular.*

La rapidez del sonido a través de un gas ideal varía en forma directa con la raíz cuadrada de la temperatura absoluta T. Para el aire a 0°C, $c = 331$ m/s.

16—3 SUPERPOSICION, REFLEXION Y ONDAS ESTACIONARIAS

Estos fenómenos aplicados a las ondas elásticas son similares a los efectos correspondientes encontrados antes en las ondas transversales de una cuerda tirante. Nada más, la propiedad ondulatoria es diferente: Ahora es el desplazamiento longitudinal o un cambio de presión o de densidad, en lugar de un desplazamiento transversal. Dos ondas de compresión interfieren de manera constructiva cuando la densidad o la presión aumentan de valor por la superposición de los cambios separados, y recíprocamente para la interferencia destructiva:

*Véase la Sec. 17-5 para un tratamiento de los parámetros R y T.

Supóngase que un medio deformable está limitado por un segundo medio de dureza y masa infinitas. Cuando una onda de compresión llega al límite, las partículas no pueden desplazarse en sentido longitudinal. Así, como la onda no puede propagarse en el segundo medio, la onda se refleja totalmente. El desplazamiento longitudinal y debe ser cero en el límite; por lo que, se tiene un *nodo de desplazamiento* en el límite entre un medio deformable y un medio no deformable. Recuérdese que entre el desplazamiento y la presión hay una diferencia de fase de 90°. Así, si y es cero en el límite, Δp debe tener un máximo en ese lugar: En el límite se tiene un antinodo o *vientre de presión*. Esto se sigue también del hecho de que las partículas tienden a juntarse en el límite, con lo cual se produce una densidad y una presión altas en ese punto. Por otro lado, si el medio deformable se termina con un medio menos denso, el desplazamiento y será un máximo, y la presión Δp será un mínimo o nodo en ese límite. Como antes, una onda recibe un cambio de fase de 180° cuando se refleja en un límite después del cual se pasa a un segundo medio en el que la rapidez de la onda es menor, mientras que no hay cambio de fase para ondas que se mueven en el sentido contrario, del segundo medio al primero.

Las ondas estacionarias pueden presentarse en un medio en el que se propague una perturbación ondulatoria, cuando se mueven en sentidos opuestos ondas que tengan la misma longitud de onda. La perturbación resultante es una onda estacionaria, con nodos y vientres alternados. Los vientres y los nodos adyacentes están separados por medias longitudes de onda.

Ejemplo 16-1

Una onda sonora se propaga a través de un tubo que está cerrado en uno de sus extremos. ¿Cuáles son los modos de oscilación permitidos y las frecuencias características?

Las condiciones de los límites son las siguientes: En el extremo cerrado hay un nodo de desplazamiento o vientre de presión; en el extremo abierto hay un vientre de desplazamiento o nodo de presión. Los modos de oscilación permitidos, o patrones de ondas estacionarias se indican en la Fig. 16-3 (en realidad, el vientre de desplazamiento se encuentra un poco antes del extremo abierto del tubo). Nótese en especial que la cantidad graficada aquí es el desplazamiento longitudinal de las partículas y; si se quisiera graficar Δp, los vientres y los nodos estarían invertidos.

La longitud L del tubo es un múltiplo impar de $\frac{1}{4}\lambda$; $L = n(\lambda/4)$, donde $n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$ Las frecuencias permitidas son $f = c/\lambda = n(c/4L) = nf_1 = f_1,\ 3f_1,\ 5f_1,\ \ldots$ Los sobretonos son armónicos *impares* de la frecuencia fundamental f_1. Puede haber, desde luego, dos o más modos característicos de oscilación a la vez y cualquier perturbación que persista en el tiempo, debe estar formada por una superposición de modos permitidos.

Si el largo del tubo cerrado es de 0.50 m, más o menos la longitud de un clarinete, la frecuencia fundamental es

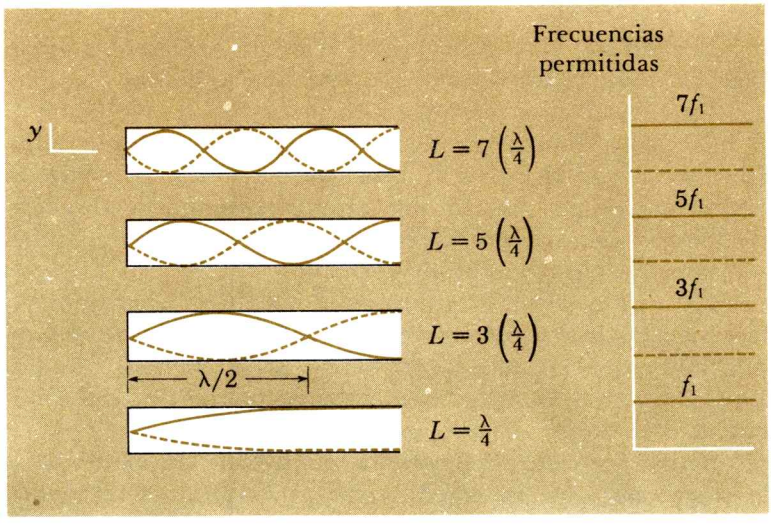


FIG. 16-3. Modos de oscilación permitidos y frecuencias características para ondas sonoras en un tubo cerrado en uno de sus extremos y abierto en el otro. Note que los modelos de las ondas estacionarias indican los desplazamientos longitudinales, más bien que variaciones de presión.

$$f_1 = \frac{c}{4L} = \frac{344 \text{ m/s}}{4(0.50 \text{ m})} = 172 \text{ Hz}$$

casi en el centro (logarítmico) del alcance de frecuencias audibles.

Ejemplo 16-2

Una onda sonora se propaga a través de un tubo abierto en ambos extremos. ¿Cuáles son los modos de oscilación permitidos y las frecuencias características?

Ahora, las condiciones de los límites son las siguientes. Debe haber un vientre de desplazamiento, o nodo de presión en cada uno de los extremos abiertos. En la Fig. 16-4 se indican los modos de oscilación permitidos. La longitud del tubo siempre es un múltiplo entero de $\frac{1}{2}\lambda$; las frecuencias permitidas corresponden a las de *todos* los armónicos de la fundamental.

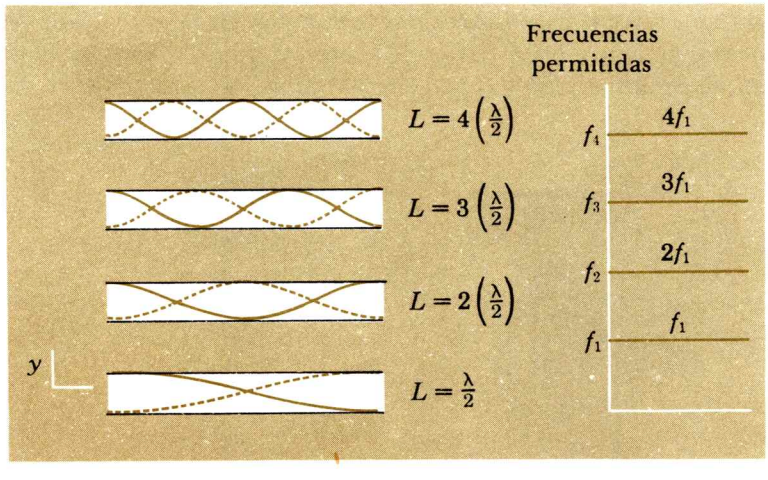


FIG. 16-4. Modos de oscilación permitidos y frecuencias características para ondas sonoras en un tubo abierto en ambos extremos. Los modelos de las ondas muestran los desplazamientos *longitudinales* de las partículas de gas.

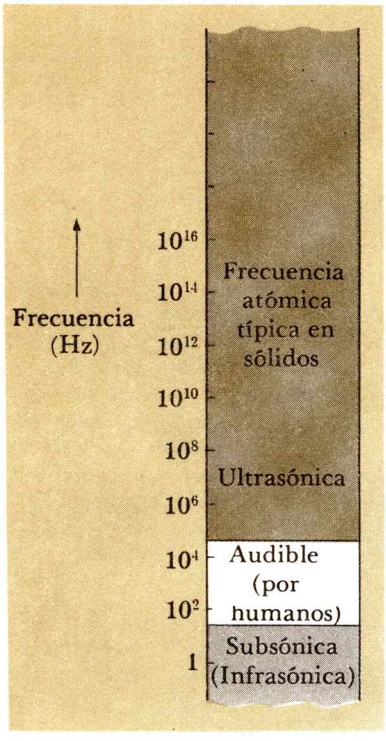


FIG. 16-5. Espectro acústico.

16—4 SONIDO Y ACUSTICA

El oído humano típico percibe como sonidos las vibraciones mecánicas de las frecuencias, de 20 a 20 000 Hz (un factor de 10^3), con intensidades comprendidas entre 10^{-16} y 10^{-4} W/cm^2. (El ojo percibe sólo vibraciones electromagnéticas sobre un margen de frecuencias con el factor 2, o sea, una octava.) Las variaciones no periódicas de la presión del aire corresponden al ruido. Las oscilaciones con frecuencias en la relación de los enteros simples, se reconocen como tonos musicales.

El *tono* o *altura* de un sonido musical corresponde a su frecuencia mínima o fundamental. Sin embargo, no es precisa la relación entre el tono percibido y la frecuencia fundamental. La *intensidad* del tono es la medida de la "fuerza" del sonido. La cualidad llamada *timbre,* por medio de la cual el oído puede distinguir, por ejemplo, entre un violín y un clarinete que toquen la misma nota, es una medida de las amplitudes relativas de los sobretonos excitados en forma simultánea con la oscilación fundamental.

Los instrumentos musicales por lo general contienen disposiciones adecuadas para que los sobretonos sean armónicos, o sea múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Esto se ilustra para cuerdas oscilantes en instrumentos de cuerda y columnas de aire que oscilan en tubos, como en los órganos y los instrumentos de bronce. Como la longitud de onda del sonido en el aire a 400 Hz, aproximadamente en el centro del alcance audible, es de alrededor de 0.8 m, se espera que los instrumentos de viento sean, y se encuentran que son, más o menos de ese tamaño.

El espectro acústico se indica en la Fig. 16-5. Nótese que se dan nada más las frecuencias; las longitudes de onda dependen del medio (la velocidad de las ondas) a través del cual se mueven las vibraciones acústicas.

16—5 FRENTES DE ONDA Y RAYOS

La configuración más sencilla para la propagación de las ondas en dos o tres dimensiones se indica en la Fig. 16-6. Aquí la fuente de las ondas se extiende sobre un plano, como en el caso de un diafragma plano que genera ondas, y las ondas se mueven

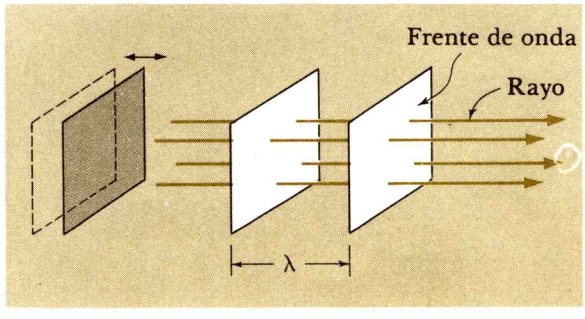


FIG. 16-6. Fuente de ondas planas y frentes de onda planas.

hacia la derecha en una sola dirección. Indicamos la dirección en la que las ondas son radiadas por la fuente por medio de líneas rectas, o *rayos*. Un *frente de onda* se define como una superficie en la que todos los puntos tienen la misma fase de oscilación. Los frentes de onda de una fuente plana están formados por planos en ángulo recto con los rayos. La distancia perpendicular entre dos frentes de onda en la misma fase y vecinos, es la longitud de onda. Las superficies de fase constante, o frentes de onda, se desplazan desde la fuente con la *rapidez de fase*, o sea la rapidez de las ondas, c. Una fuente lineal genera frentes de onda cilíndricos centrados en ella, como se indica en la Fig. 16-7. Los rayos de nuevo interceptan a los frentes de onda en ángulo recto. La fig. 16-8 indica frentes de onda esféricos en tres dimensiones que emanan de una fuente puntual. En general, los rayos siempre son perpendiculares a los frentes de onda asociados.

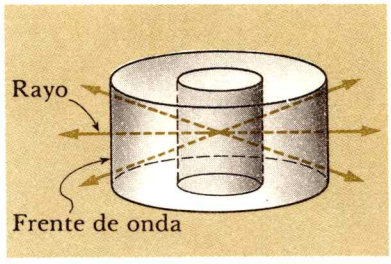


FIG. 16-7. Fuente lineal y frentes de onda cilíndricos.

Cualquier pequeña porción de una superficie cilíndrica o esférica es muy semejante a un plano; esto es, sobre un ángulo sólido pequeño, un frente de onda cilíndrico o esférico se aproxima mucho a un frente de onda plano.

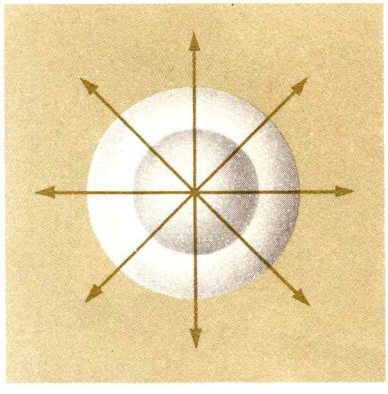


FIG. 16-8. Fuente puntual y frentes de onda esféricos.

16—6 VARIACION DE LA INTENSIDAD CON LA DISTANCIA A LA FUENTE

La intensidad, o flujo de energía, de cualquier onda se define como la energía que pasa por unidad de tiempo a través de la unidad de área de la sección recta. Esto es, la intensidad I es la potencia P por unidad de área transversal A:

$$I = \frac{P}{A}$$

Queremos encontrar cómo varía la intensidad de una onda con la distancia desde la fuente para tres configuraciones sencillas: frentes de onda planos, cilíndricos y esféricos. En una onda plana no hay divergencia de los rayos; los frentes de onda son planos paralelos; y por todas las áreas transversales pasa la misma energía procedente de la fuente. Por lo tanto, la intensidad es *constante*, independiente de la distancia a la fuente, suponiendo que no hay absorción de energía por el medio.

Para ondas cilíndricas la energía que llevan las ondas se diluye en el espacio a medida que los frentes de onda cilíndricos, al agrandarse, aumentan su área superficial con el tiempo. Considérese un segmento angular indicado en la Fig. 16-9. La energía que pasa por el área A_1 con radio r_1 es exactamente la misma que pasa después por el área A_2 con el radio r_2. Es claro que $A_1 = r_1\theta h$ y $A_2 = r_2\theta h$, o $A_1/A_2 = r_1/r_2$. Como la intensidad varía en forma inversa con el área transversal y $A = r\theta h$, la intensidad de una onda cilíndrica varía inversamente con la distancia r desde la fuente lineal.

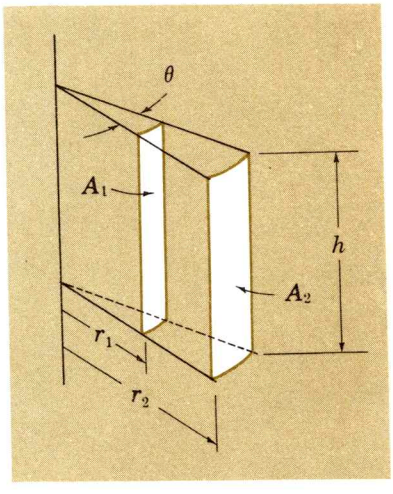


FIG. 16-9. Segmento angular para frentes de onda cilíndricos.

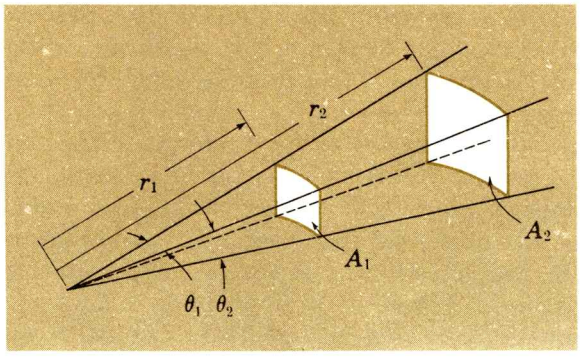


FIG. 16-10. Segmento angular para frentes de onda esféricos.

En el caso de una onda esférica que se propaga desde una fuente puntual, toda la energía que contiene un cono pequeño que tiene los ángulos θ_1 y θ_2 pasa, en turno por las áreas A_1 y A_2, como se indica en la Fig. 16-10. Pero $A_1 = r_1^2\theta_1\theta_2$ y $A_2 = r_2^2\theta_1\theta_2$; esto es, el área superficial de un ángulo sólido varía de manera directa con el cuadrado del radio de la esfera. Así, la intensidad de las ondas que provienen de fuentes puntuales varía en forma inversa con el cuadrado de la distancia a la fuente. En resumen, cuando el medio no absorbe energía de las ondas,

$$\begin{aligned} &\text{Ondas planas:} && I = \text{constante} \\ &\text{Ondas cilíndricas:} && I \propto \frac{1}{r} \\ &\text{Ondas esféricas:} && I \propto \frac{1}{r^2} \end{aligned} \qquad (16\text{-}5)$$

Ejemplo 16-3

Una fuente puntual radia en todas direcciones con la rapidez de 10 kW. ¿Cuál es la intensidad de la radiación a una distancia de 10 m de la fuente?

La intensidad I a un radio r de una fuente puntual está dada por la potencia P a través del área esférica $A = 4\pi r^2$:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{(1.0 \times 10^4 \text{ W})}{4\pi(10 \text{ m})^2} = 8.0 \text{ W/m}^2$$

16—7 PRINCIPIO DE HUYGENS

Dado un frente de onda para una onda que avanza, ¿cómo se encuentra un frente de onda futuro? Se puede usar un procedimiento geométrico sencillo y notable, el *principio de Huygens,* para determinar el progreso de un frente de onda por el medio. Este principio, desarrollado por C. Huygens (1629-1695) en 1678,

afirma que cada punto de un frente de onda en avance, puede tomarse como una fuente puntual que genera *onditas de Huygens* esféricas en dirección hacia adelante de la propagación de las ondas. Así, para encontrar el frente de onda en un tiempo posterior t, se dibujan arcos circulares de radio ct centrados en puntos a lo largo del frente de onda; el nuevo frente de onda en el tiempo t es simplemente la envolvente de estas onditas; vea la Fig. 16-11. Así, un frente de onda plano genera otro frente de onda plano; un frente de onda esférico genera otro frente de onda esférico, de radio mayor, con respecto a la misma fuente puntual.

La construcción de Huygens es un procedimiento geométrico, no un método físico. Es claro que, si se ha de determinar un frente de onda en cierto tiempo *futuro*, se debe dibujar la envolvente de las onditas a lo largo del lado *dominante* del frente de onda, en lugar de las partes laterales o posteriores. El método de Huygens da sólo el frente de onda *posible* en cierto tiempo futuro; no da la distribución de la energía sobre estos frentes de onda.

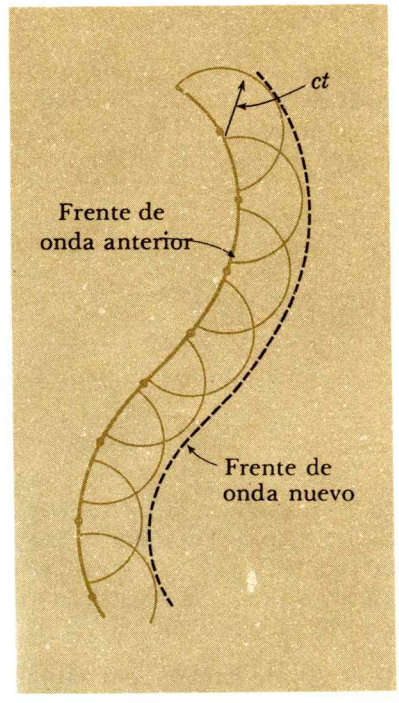


FIG. 16-11. Construcción de Huygens para ondas que avanzan.

RESUMEN

En una perturbación ondulatoria longitudinal o de compresión, las partículas oscilan a lo largo de la misma dirección en que se mueven la energía y el ímpetu lineal. El principio de superposición se aplica cuando las deformaciones elásticas siguen la ley de Hooke.

Las variaciones de presión para una onda longitudinal a través de un medio compresible tienen una diferencia de fase de 90° con respecto al desplazamiento longitudinal de las partículas.

Los frentes de onda son superficies de fase constante. Los rayos indican la dirección de la propagación de la onda y siempre forman un ángulo recto con los frentes de onda. Las fuentes plana, lineal y puntual generan, a su vez, frentes de onda planos, cilíndricos y esféricos.

La variación de la intensidad de la onda con la distancia, la potencia por área transversal de una onda, sigue las reglas:

$$\begin{aligned} &\text{Ondas planas:} && I = \text{constante} \\ &\text{Ondas cilíndricas:} && I \propto \frac{1}{r} \\ &\text{Ondas esféricas:} && I \propto \frac{1}{r^2} \end{aligned} \qquad (16\text{-}5)$$

Al usar el principio de Huygens para construir frentes de onda futuros, imaginamos que cada punto del frente de onda presente actúa como una fuente puntual de onditas de Huygens, siendo el frente de onda futuro la envolvente de dichas onditas.

PROBLEMAS

16-1. Si la rapidez de un pulso ondulatorio longitudinal indicado en la Fig. P16-1 es de 6.0 km/s, ¿Cuál es la rapidez longitudinal máxima de *cada partícula*?

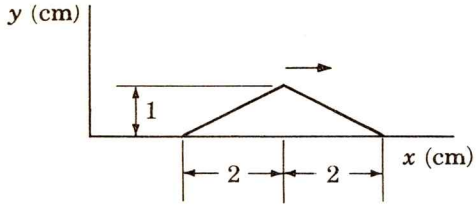


FIG. P16-1

16-2. El volumen de cierto sólido se contrae 2 partes en 10^6 cuando se sujeta a una presión hidrostática externa de 1 atm. La densidad del sólido es de 8.0 g/cm^3. ¿Cuál es la rapidez de una onda longitudinal a través de este material?

16-3. En el método sonar para medir distancias bajo el agua, un pulso sonoro se mueve del generador hasta un objeto distante y se refleja hacia atrás, hacia la localización del generador. La distancia se determina midiendo el intervalo de tiempo entre la transmisión y la recepción del pulso. Tomando el módulo de volumen del agua como 2.0×10^9 N/m^2 y la densidad del mismo líquido como 1.0×10^3 kg/m^3, ¿Cuál es el intervalo de tiempo para un pulso de sonar que localiza un objeto distante 50 m del transmisor?

16-4. Un temblor terrestre de compresión se mueve por la corteza de la Tierra con la rapidez de onda de 8.0 km/s. Determine el valor promedio del módulo de volumen de las rocas de la corteza, si su densidad promedio es de 3.3 g/cm^3. (Este valor caracteriza la corteza a una profundidad de 50 km.)

16-5. Un observador dispara un tiro y escucha su eco desde una superficie distante 150 m, 0.860 s después. ¿Cuál es la temperatura del aire, suponiendo que es un gas ideal?

16-6. ¿Cuáles son las longitudes de onda en el aire (a 20°C) de los límites del espectro sonoro audible?

16-7. ¿Cuál es la frecuencia del sonido de mínima frecuencia que puede producir una resonancia en virtud de la reflexión desde las paredes opuestas de un cuarto, si dichas paredes están separadas por 6.0 m?

16-8. Los oídos izquierdo y derecho de una persona están separados 15 cm. (*a*) ¿Cuál es la diferencia en los tiempos de llegada a los dos oídos de un pulso sonoro originado en una localización a 45° entre las direcciones del frente y a un lado? (*b*) ¿Para qué frecuencia de oscilación acústica esta diferencia en el tiempo de llegada es igual al periodo de oscilación?

16-9. (*a*) Use el cálculo diferencial para demostrar que en un gas ideal la rapidez de cambio diferencial de la velocidad de las ondas con la temperatura está dada por $(cd/dT) = c/(2T)$. (*b*) Determine la rapidez de cambio con la temperatura de la rapidez del sonido a 0°C.

16-10. (*a*) Demuestre que una forma alternativa de la Ec. (16-2) está dada por $c = (dp/d\rho)^{1/2}$, donde p es la presión y ρ es la densidad. (*b*) Use la ecuación para determinar la rapidez del sonido en la *tropopausa*, donde $p = 226.32$ mb y $\rho = 0.3639$ kg/m^3. (La tropopausa es el límite inferior de la estratosfera y 1 mb $= 10^2$ N/m^2.)

16-11. Un tubo, abierto en ambos extremos, se pone en resonancia sólo a las frecuencias de 800 y 1 000 Hz cuando un oscilador de audio de excitación varía en frecuencia sobre el margen de 700 a 1100 Hz. ¿Cuál es la longitud del tubo?

16-12. Un tubo, al principio abierto en ambos extremos, oscila con la frecuencia de 840 Hz (que no es por fuerza, la frecuencia fundamental). Cuando se cierra un extremo, su frecuencia de oscilación es de 210 Hz. ¿Cuál es la longitud mínima del tubo que satisface estas condiciones?

16-13. Cuando un generador de sonido recorre todas las frecuencias entre 1 000 Hz y 2 000 Hz, excita una resonancia en un tubo hueco precisamente a dos frecuencia — 1 400 Hz y 1 800 Hz. El tubo de 45 cm de largo está abierto al aire en un extremo y cerrado en el otro. Determine (*a*) la frecuencia fundamental de resonacia para el tubo, (*b*) la rapidez del sonido en el aire, y (*c*) la temperatura del aire. (A 0°C, la rapidez del sonido en el aire es de 331 m/s.)

16-14. Un tubo de órgano está afinado a 20°C. ¿Sobre qué margen de temperatura permanecerá la frecuencia dentro del 1% del valor "real"? Suponga que los cambios en las dimensiones del tubo pueden despreciarse.

16-15. La rapidez del sonido se mide con un tubo, abierto en uno de sus extremos y cerrado por medio de un pistón movible el otro. Las oscilaciones de resonancia se excitan por medio de un diapasón que tiene la frecuencia de 880 Hz colocado cerca del extremo abierto. Se encuentra que la intensidad del sonido presenta máximos cuando el pistón está en las posiciones de 9.2, 28.3, y 47.2 cm. ¿Cuál es la rapidez del sonido?

16-16. Un disco fonográfico de 12 plg y $33\frac{1}{3}$ rpm, puede reproducir sonidos con frecuencias de hasta 16 kHz. (*a*) ¿Cuál es la distancia máxima de separación entre los surcos del disco (cerca del principio del disco) entre las oscilaciones que corresponden a la frecuencia más alta? (*b*) ¿Cuál es la correspondiente distancia de separación en una cinta magnética con la rapidez de $1\frac{7}{8}$ plg/s?

16-17. Como el oído es sensible al sonido sobre un enorme margen de intensidades, de 10^{-16} a 10^{-4} W/cm^2, es conveniente medir la intensidad del sonido en una escala logarítmica. El nivel del sonido en *decibeles* (db) de una intensidad I está dado por $10 \log_{10} (I/I_0)$, siendo I_0 la intensidad mínima que se puede percibir, 10^{-16} W/cm^2. ¿Cuál es el nivel del sonido en decibeles de (*a*) una conversación ordinaria que corresponde a 10^{-10} W/cm^2, y (*b*) el umbral doloroso, 10^{-4} W/cm^2?

16-18. En la *escala* musical *diatónica,* la "quinta" tiene una frecuencia que es $\frac{3}{2}$ veces la de la tónica ("Sol", 396 Hz, comparada con "do", 264 Hz, por ejemplo). En realidad, todos los tonos de la escala mayor están en la misma relación que los enteros sencillos. En la *escala bien temperada,* por otro lado, cualquier par de tonos vecinos de los 12 medios tonos que corresponden a una octava difieren en frecuencia por el factor $2^{1/12} = 1.0595$. (*a*) ¿Cuál es la razón de la quinta (el séptimo medio tono) de la escala tónica a la bien temperada? (*b*) ¿En qué fracción de las quintas difieren las escalas diatónica y bien temperada?

16-19. Cuando un instrumento musical soprano toca una sola nota y se analiza el espectro acústico, se encuentra que están presentes *todos* los armónicos de la nota tocada en cantidades variadas. Demuestre que *no puede ser* un clarinete (que puede tomarse aproximadamente como un tubo cilíndrico abierto en el extremo de salida y cerrado en el extremo donde está la boquilla.)

16-20. ¿Cuál es la potencia mínima de salida de una fuente puntual isotrópica de sonido que produce una intensidad de 10^{-16} W/cm^2 (la intensidad mínima que puede oírse) en el oído de un escucha que se encuentra a 1.0 km de la fuente?

16-21. Una cámara con la abertura de 25 mm de diámetro ("$f/2$" para lentes de 50 mm de distancia focal) toma una fotografía de una fuente luminosa puntual de 50 W a la distancia de 100 m, con un tiempo de exposición de $\frac{1}{100}$ s. ¿Cuál es la energía de la luz incidente sobre la película?

16-22. Desde el punto de vista de un observador en la Tierra, el Sol actúa como una fuente isotrópica de radiación. ¿Qué fracción de la energía total radiada por el Sol es interceptada por la Tierra (y su atmósfera)? En este cálculo puede tomar a la Tierra como un disco circular de 6.4×10^6 m de radio; la distancia Tierra-Sol es de 1.5×10^{11} m. Supóngase que nada de la radiación solar se absorbe en el tránsito del Sol a la Tierra.

16-23. Con respecto a un marco de referencia unido a una fuente de frecuencia f, y moviéndose con la rapidez v_s a través de un medio que transmite una onda elástica con la rapidez c, las variaciones de presión se pueden escribir como

$$\Delta p = \Delta p_0 \operatorname{sen} 2\pi \left(ft - \frac{x'}{\lambda'} \right)$$

donde x' es la coordenada en el medio móvil y λ' es la longitud de onda. Como la rapidez de las ondas que se mueven a lo largo del eje X' positivo con respecto a este marco móvil es $c - v_s = f\lambda'$, podemos escribir

$$\Delta p = \Delta p_0 \operatorname{sen} 2\pi \left(ft - \frac{fx'}{c - v_s} \right)$$

Use las transformaciones de coordenadas galileanas (Sec. 6-3) para escribir la ecuación correspondiente a las variaciones de presión, medidas por un observador en reposo en el medio, y demuestre que con eso la frecuencia medida por un observador fijo cuando la fuente se aleja de él, está dada por $f/(1 + v_s/c)$.

Capítulo

17

LA TEMPERATURA Y LAS PROPIEDADES MACROSCOPICAS DE UN GAS IDEAL

Este es el primero de tres capítulos que tratan del tema general del calor, incluyendo la teoría cinética de los gases y las leyes de la termodinámica. Indicaremos aquí no sólo un adelanto del contenido de este capítulo, sino también un breve compendio de los siguientes.

Históricamente, el tema del calor se desarrolló muy aparte de la mecánica. Primero se consideró que el calor era una sustancia (llamada *calórico*), y las unidades diseñadas para medir la cantidad de calor (calorías) fueron muy distintas a las de la mecánica. Además, se consideraba que la temperatura de un cuerpo no se encontraba relacionada en alguna forma sencilla con sus propiedades mecánicas. El descubrimiento más importante relacionado con el calor fue el que se logró en 1840, de que *el calor y la temperatura,* y en realidad, *todos los fenómenos térmicos, se pueden interpretar en términos mecánicos.*

La clave es la teoría molecular de los gases. En esta teoría, la mecánica newtoniana ordinaria se aplica a los movimientos microscópicos de las moléculas de un gas. Se encuentra que los fenómenos térmicos no son más que fenómenos mecánicos que se llevan a cabo en una escala microscópica, que la energía térmica no es sino la energía mecánica desordenada de los átomos y las moléculas, la temperatura es nada más una medida de la energía cinética de translación de las moléculas de los gases, y que el calor no es más que una energía térmica en tránsito causado por una diferencia de temperaturas.

No seguiremos el desarrollo histórico de las ideas relacionadas con el calor y la termodinámica. Por el contrario, nuestra estrategia será la siguiente. En este capítulo consideraremos primero la medida de la temperatura, el significado del equilibrio térmico, y la tarea de encontrar termómetros confiables. Se tratará

de varias clases de termómetros. Después investigaremos las propiedades de un gas ideal, la ley general de los gases, los termómetros de gas ideal, y varios tipos de transformaciones que se llevan a cabo en el estado de un gas.

Pasaremos después (Cap. 18), al modelo molecular, o teoría cinética, del más sencillo de todos los sistemas de muchas partículas —un gas ideal—. Aquí aplicamos la mecánica a los choques moleculares, deduciendo la ley general de los gases a partir de un modelo mecánico, e interpretaremos la temperatura en términos del comportamiento molecular. Interpretaremos el significado de las palabras *calor, energía interna,* y *calor específico* en términos del comportamiento molecular, y consideraremos la primera y la segunda leyes de la termodinámica.

Después (Cap. 19), extenderemos el modelo molecular a sistemas más complicados —sólidos y líquidos—. Interpretaremos el comportamiento térmico de los sólidos y líquidos, y el significado de calor, temperatura, y la primera y segunda leyes de la termodinámica para esos sistemas.

17—1 LA TEMPERATURA Y LA LEY CERO DE LA TERMODINAMICA

El conocimiento más rudimentario de la temperatura nos llega por medio de nuestro sentido del tacto. Podemos decir, después de tocarlos, aunque sólo sea cualitativa y aproximadamente, si dos cuerpos tienen la misma temperatura, o si el primero está caliente o frío comparado con respecto al segundo. Lo que se necesita es un medio para poder asegurar que dos cuerpos tienen la *misma* temperatura y para obtener una medida de la *diferencia de temperatura.* Esto es, necesitamos un termómetro.

Supóngase que ponemos dos cuerpos juntos, en contacto, apartados (esto es, aislados) de influencias externas —y esperamos. Después de que pase un tiempo bastante largo, se dice que los dos cuerpos están en *equilibrio térmico,* y la propiedad que tienen entonces los dos cuerpos en común —cualesquiera que sean las diferencias que puedan tener en tamaño, masa, material, e historia pasada— es la *temperatura.* Por definición, dos cuerpos en equilibrio térmico, tienen la misma temperatura.

Supóngase ahora que tenemos tres cuerpos: recipiente A, recipiente B, y un termómetro. Primero se coloca el termómetro en el recipiente A. Después de que estos dos objetos han llegado al equilibrio térmico, leémos su temperatura común en el termómetro. (Un termómetro indica no sólo su propia temperatura, sino también la del cuerpo con el que se encuentra en equilibrio.) Supóngase que entonces el termómetro se coloca en el recipiente B y que encontramos la misma temperatura final que en el recipiente A. El termómetro tiene la misma temperatura que la de los recipientes A y B porque alcanzó el equilibrio térmico con cada uno de ellos. ¿Están A y B a la misma temperatura? ¿Están A y B en equilibrio

térmico? De acuerdo con *la ley cero de la termodinámica,* sí lo están. Esto es, *dos cuerpos A y B que separadamente estén en equilibrio térmico con un tercer cuerpo C, se encuentran en equilibrio térmico entre sí.* La ley cero de la termodinámica, que es fundamental para toda esta parte de la física, se llama así porque tiene prioridad sobre la primera y la segunda leyes de la termodinámica.

17—2 TERMOMETRIA

De la misma manera que un físico define la longitud como la cantidad que se mide con una regla métrica, y el tiempo es la cantidad que se lee en el reloj, se puede decir primero, que la temperatura no es más que lo que se lee en un termómetro. ¿Pero, qué es un termómetro? *Un termómetro es cualquier aparato que tenga alguna propiedad física medible que cambie con el grado de calentamiento o enfriamiento del cuerpo.* Por ejemplo, el cambio de volumen de un líquido con la temperatura es la base del termómetro común de líquido en vidrio. Consideraremos este tipo de termómetro con algún detalle, para ver cómo se definen las escalas de temperatura y cómo se calibran los termómetros, y también para ver algunos problemas importantes en termometría que se aplican a todos los termómetros.

Nuestro termómetro de líquido en vidrio está formado por un bulbo esférico de vidrio lleno hasta el borde con el mercurio, que es un líquido muy denso. Si entonces se aumenta la temperatura, el mercurio se dilata con más rapidez que el recipiente de vidrio. Algo de líquido se derrama. Se puede, en principio, determinar la temperatura midiendo la cantidad de mercurio que se derrama. Sin embargo, un procedimiento sencillo, para facilitar la medida, consiste en unir un tubo cilíndrico de sección recta uniforme al bulbo, de tal manera que, cuando el mercurio se derrame del bulbo al tubo, uno puede medir el derrame, fijándose en la posición del menisco a lo largo del tubo.

En seguida calibramos el termómetro. El termómetro se introduce en una mezcla de hielo y agua bajo la presión atmosférica normal. Marcamos la posición del menisco con "O". Por definición, el *punto de congelación* a presión normal tiene una temperatura de 0° en la escala de temperaturas *Celsius* (también conocida como *centígrada*). En seguida, el termómetro se lleva al equilibrio térmico con una mezcla de vapor de agua y agua hirviendo, de nuevo bajo la presión atmosférica normal. Hacemos una segunda marca en la nueva posición del menisco, rotulándola con 100°C. Por definición, el *punto de ebullición* del agua a la presión normal es de 100° Celsius. La calibración se completa cuando agregamos graduaciones uniformemente espaciadas entre 0 y 100°C, para colocar 100 graduaciones (centígrados) entre los dos *puntos fijos* escogidos. Vea la Fig. 17-1. Podemos extender la escala agregando graduaciones del mismo tamaño abajo de la marca de 0° y arriba de la de 100°.

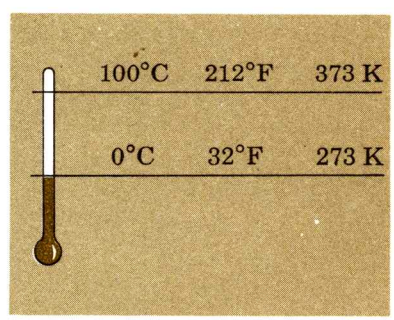


FIG. 17-1. Definición de los puntos fijos para las escalas de temperaturas Celsius, Fahrenheit y Kelvin.

En la escala *Fahrenheit* de temperaturas, el punto de congelación se define como 32°F y el punto de ebullición como 212°F. Así, 180 graduaciones separan los dos puntos fijos en la escala Fahrenheit, mientras que en la escala Celsius hay cien. No sólo son diferentes las lecturas en los puntos fijos en las dos escalas, sino que los tamaños de los grados también difieren. Como muestra la Fig. 17-1, cualquier temperatura t_C en la escala Celsius se relaciona con la misma temperatura t_F registrada en la escala Fahrenheit, por

$$\frac{t_C}{100} = \frac{t_F - 32}{180} \tag{17-1}$$

Aunque no hay límite superior para la temperatura, la temperatura mínima posible es de −213.15°C.*

¿Cómo sabemos que el mercurio de nuestro termómetro se dilata en él uniformemente entre 0 y 100°C? No lo sabemos —de hecho no podemos saberlo—, porque sólo es posible comprobar la dilatación térmica uniforme con un termómetro. Supóngase que construimos dos termómetros usando *diferentes* líquidos, uno con mercurio y el segundo con alcohol (coloreado con un tinte rosado). Calibramos este segundo termómetro en la misma forma que el primero, usando los dos puntos fijos del agua y con graduaciones uniformemente espaciadas.

¿Cómo son las lecturas de los dos termómetros cuando se comparan poniendo ambos termómetros en equilibrio térmico con un tercer cuerpo? En los puntos fijos los termómetros concuerdan del todo. Como debe ser, desde luego. Pero, si comparamos las lecturas a otras temperaturas, encontramos que las dos lecturas, aunque son casi iguales, *no* concuerdan precisamente. Véase la Fig. 17-2. Así, el comportamiento del termómetro depende de la *sustancia termométrica* (aquí, mercurio o alcohol). No podemos en este estado, decir cuál de estos dos termómetros está más cerca de ser correcto, sólo podemos decir, que la dilatación térmica del mercurio difiere de la del alcohol.

Los termómetros pueden basarse en efectos físicos diferentes a la dilatación térmica. Algunas propiedades que cambian con la temperatura son, la resistencia eléctrica (termómetros de resistencia), la fuerza electromotriz producida por un par de alambres distintos con sus uniones a temperaturas diferentes (termopares), el color de la luz emitida por un sólido o por un gas, como en el caso de las estrellas (pirómetros), y la presión de un gas (termómetro de

*Con el fin de distinguir *diferencias* de temperaturas de las temperaturas, es costumbre representar las *diferencias* de temperaturas como Celsius grados (C°) en lugar de grados Celsius (°C). Así, 60°C difiere de 40°C en 20C°. Además, 100C° = 180F°, aunque 100°C *no* es lo mismo que 180°F. En general, los tamaños relativos de los grados de las dos escalas están dados por $1\,C^\circ = \frac{9}{5}\,F^\circ$.

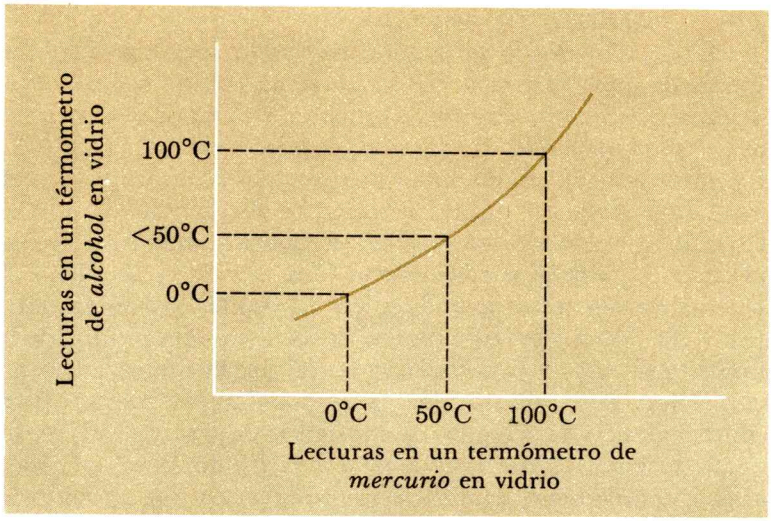


FIG. 17-2. Lecturas de un termómetro de alcohol en vidrio graduado uniformemente contra las lecturas correspondientes para un termómetro de mercurio en vidrio. (La desviación de la línea recta de la gráfica está muy exagerada.)

gas). La Tabla 17-1 lista varios tipos de termómetros diferentes, la propiedad física o efecto en que se basa, y los márgenes de temperatura sobre los que se usan más a menudo.

Tabla 17–1

Termómetro y propiedad física o efecto	*Margen de temperatura*
Propiedades magnéticas de sales paramagnéticas	−273 a −272°C
Presión del vapor de helio en equilibrio con helio líquido	−272 a −269°C
Termómetros de resistencias (resistencia eléctrica de las sustancias)	−261 a 600°C
Termopar (fuerza electromotriz de dos alambres de materiales distintos, con sus uniones a temperaturas diferentes)	−250 a 1000°C
Termómetro de líquido en vidrio (diferencia en sus propiedades de dilatación)	−196 a 500°C
Termómetro de gas (a presión constante o a volumen constante, gas ideal de densidad muy baja)	> ≈300°C
Pirómetro óptico (radiación electromagnética visible del cuerpo que se va a medir —el colo de un filamento incandescente se compara con el del cuerpo)	> 600°C

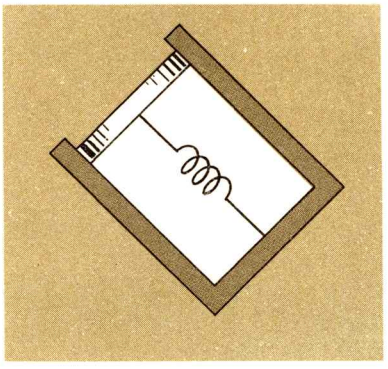


FIG. 17-3. Un aparato sencillo para medir la presión.

17—3 PRESION DE UN GAS

El significado de la presión se ilustra con más facilidad por medio de una definición en la que se especifiquen las operaciones de laboratorio que se usan para medirla. Considérese el sencillo aparato para medir la presión indicado en la Fig. 17-3. Está formado por un cilindro al vacío cerrado por completo mediante un pistón sin peso unido al cilindro por medio de un resorte. Cuando se encuentra en el vacío, ninguna fuerza neta actúa sobre el pistón, y el resorte adquiere su longitud de relajamiento.* Si el sistema de resorte se introduce en un fluido, la cabeza del pistón recibe la acción de una fuerza de compresión producida por el fluido, y el resorte se comprime hasta que la fuerza hacia adentro del fluido se equilibre por la fuerza hacia afuera del resorte comprimido. Conociendo la constante de fuerza del resorte, se puede calcular la fuerza que ejerce el fluido sobre la cabeza del pistón, simplemente midiendo la distancia en que se comprimió el resorte(y por la aplicación de $F = -kx$).

Hagamos que ΔF represente la magnitud de la fuerza sobre la cabeza del pistón, tal y como la mide el resorte, y ΔA el área del pistón. Entonces, por definición, la presión p del fluido es,

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \qquad (17\text{-}2)$$

Nótese que tomamos el límite de la razón $\Delta F/\Delta A$ cuando el área del pistón se hace muy pequeña. Lo que define a la presión *en un punto* dentro del fluido. Si ΔA es apreciable, $\Delta F/\Delta A$ da la presión *promedio* sobre el área escogida.

Por experimentación se encuentra que, en cualquier punto dentro del fluido, la compresión del resorte es la *misma* en *todas* las orientaciones del aparato de resorte. La presión es una cantidad *escalar,* no es un vector. Si se escoge una superficie con el área ΔA, la fuerza de compresión $\Delta F = p\,\Delta A$ actúa perpendicularmente a ella.

Además, como las fuerzas dentro de un fluido no viscoso sólo pueden ser de compresión, el resorte indicado en la Fig. 17-3 siempre se comprime, nunca se estira. La presión menor que se puede registrar es cero —un vacío—. Hemos tratado de la llamada presión absoluta, cuyo cero corresponde al vacío. A veces es conveniente, sin embargo, hablar de la presión de un fluido *con respecto* a la presión atmosférica p_0 que se debe a la atmósfera de la Tierra de nitrógeno y oxígeno. Esta presión relativa, llamada

*Aunque los aparatos de resorte como el que se indica en la Fig. 17-3 no se usan de ordinario para medir la presión, sí se usan mucho los *barómetros aneroides,* que operan bajo el mismo principio básico. Estos aparatos emplean una cámara de metal flexible al vacío, una de cuyas paredes se desplaza por los cambios de presión. La elasticidad de las paredes reemplaza al resorte y el desplazamiento de la pared flexible indica la presión absoluta.

presión manométrica p_m, se relaciona con la presión absoluta p y la presión atmosférica p_0 por

$$p_m = p - p_0 \tag{17-3}$$

Un manómetro ordinario, es el que se usa, por ejemplo, para medir la presión del aire en una llanta inflada; lo que indica este manómetro es: Si p_m es positiva, la llanta está inflada, si $p_m = 0$, la llanta está ponchada; si p_m es negativa, a la llanta se le extrajo cuando menos algo de aire.

La presión atmósférica normal se define como

$$1 \text{ atm} = 1.013250 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

La presión atmosférica tiene su origen en el jalón gravitacional de la Tierra sobre los gases que la rodean. De hecho, la presión atmosférica ($\approx$10 N/cm^2) representa el peso de todo el aire que hay en una columna de 1.0 cm^2 de sección recta, que se extiende desde la superficie de la Tierra hasta el límite de la atmósfera. Como el aire de esa columna pesa 10 N, la masa total de ese aire es más o menos de 1 kg.

Por definición, la presión es $\Delta F/\Delta A$. Ahora considérese una columna vertical dentro de un líquido, en la cual A sea su sección recta horizontal y h la altura de la columna. La diferencia de presión Δp entre la parte más alta y la parte más baja de la columna es mg (el peso del líquido que está dentro de la columna) dividido entre A:

$$\Delta p = \frac{mg}{A}$$

La masa m del líquido que está dentro de la columna es ρAh, donde ρ es la densidad del líquido y Ah el volumen de la columna. Entonces

$$\Delta p = \frac{\rho Ahg}{A} = \rho hg \tag{17-4}$$

En la Fig. 17-4 se indica un barómetro común. Por lo general el líquido empleado es el mercurio, porque a la temperatura ordinaria (1) es líquido, (2) tiene densidad alta, (3) es químicamente estable, y (4) tiene una presión de vapor relativamente baja. El tubo se encuentra cerrado en su extremo superior, y la región que se encuentra sobre el líquido está casi al vacío. Así, la presión que se presenta fuera de la superficie líquida igual a la que hay dentro del tubo a la misma elevación, es ρgh, donde h es la altura de la columna de mercurio. La presión atmosférica normal corresponde a una altura de mercurio de exactamente 760 mm (a

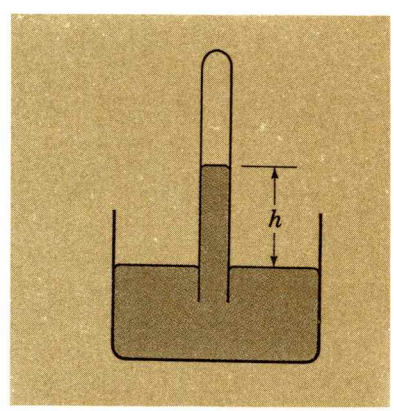


FIG. 17-4. Un manómetro de tubo cerrado o barómetro.

la temperatura de 27°C). Por lo que,

$$1 \text{ atm} = \rho g h = (13.595 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80665 \text{ m/s}^2)(0.760000 \text{ m})$$
$$= 1.013250 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

Una unidad alternativa que se usa a menudo para describir la presión de un gas es el *torr,* donde 1 torr ≡ 1 mm de Hg.

Como la densidad ρ del líquido y la aceleración gravitacional g son en esencia constantes. Se pueden medir las presiones en forma directa usando como unidades los centímetros de mercurio.

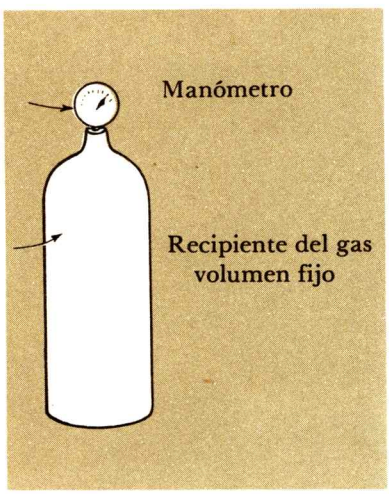


FIG. 17-5. Una forma rudimentaria para un termómetro de gas a volumen constante.

17—4 EL TERMOMETRO DE GAS A VOLUMEN CONSTANTE

¿Se puede diseñar un termómetro cuyas lecturas sean independientes de la sustancia termométrica? Sí, si se usa un gas de densidad muy baja para construir un *termómetro de gas a volumen constante.* Un tipo sencillo se muestra en la Fig. 17-5. *La presión del gas* es la cantidad física que usamos *para registrar la temperatura* del gas. La temperatura del gas debe ser lo bastante alta, y su presión lo suficientemente baja, para que la densidad del gas sea muy pequeña; esto es, el gas no debe encontrarse en condiciones cercanas a aquellas en las que se condensa para formar un líquido.

Procedemos en nuestra calibración de la misma manera que se hizo con los termómetros de líquido en vidrio. Manteniendo el volumen del gas constante, se registran las presiones correspondientes al punto de congelación y al punto de ebullición. Entonces, *suponiendo* que la presión varía en forma lineal con la temperatura, marcamos las presiones correspondientes a 0 y 100°C en papel para gráficas, y dibujamos una línea *recta* por los dos puntos, para establecer las temperaturas entre 0 y 100°C. Por extrapolación, extendemos la gráfica de las temperaturas más allá de este margen, como se indica en la Fig. 17-6. (El hecho de dibujar una línea *recta* corresponde aquí a marcar las graduaciones *uniformes* en el tubo del termómetro de mercurio.)

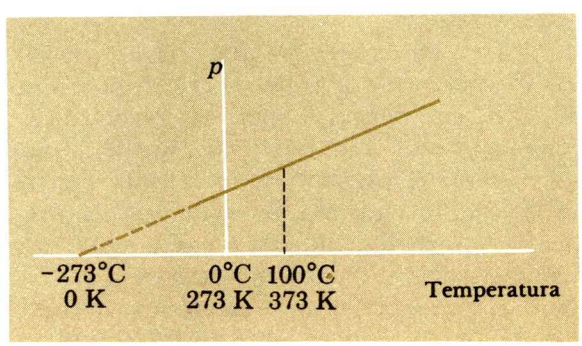


FIG. 17-6. Una gráfica de presión-temperatura para un termómetro de gas a volumen constante.

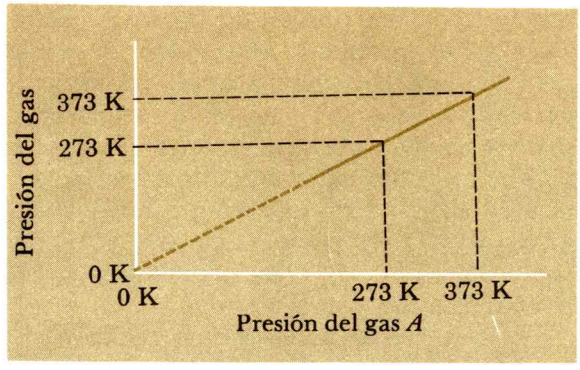


FIG. 17-7. Presión (esto es, temperatura absoluta) para un termómetro de gas a volumen constante contra la presión correspondiente (temperatura) para un segundo termómetro de gas a volumen constante. Las densidades de los dos gases son muy bajas. Compárela con la Fig. 17-2.

No hemos indicado qué gas se debe colocar en el termómetro de gas a volumen constante. ¡Los experimentos indican que esto *no* importa! Todos los gases de baja densidad muestran exactamente el mismo comportamiento. Dos termómetros con diferentes gases de baja densidad concuerdan no sólo en los puntos fijos, sino también en *todas* las otras temperaturas cuando se considera una relación lineal presión-temperatura. Vea la Fig. 17-7. Esto es, desde luego, porque un termómetro de gas es un buen termómetro.

La Fig. 17-6 implica una escala de temperaturas en la que la presión p_t es directamente proporcional a la temperatura. Cuando extrapolamos la línea recta a bajas temperaturas, encontramos que la presión es cero cuando la temperatura Celsius es de $-273.15°C$. En forma más adecuada, si el comportamiento del gas a temperaturas elevadas persiste sin cambio a las temperaturas más bajas (lo que no sucede, debido a que los gases se licúan), su presión será cero a $-273.15°C$. La temperatura de $-273.15°C$ estipula un *posible* límite inferior de temperatura. Es por ello conveniente introducir una nueva escala de temperatura con el cero en ese punto. La *escala Kelvin de temperatura* se escogió de tal manera que el cero está en $-273.15°C$, el tamaño de los grados Kelvin es igual al de los grados Celsius. Las temperaturas Kelvin se representan por T. Entonces, a través del *termómetro de gas a volumen constante,* la *temperatura Kelvin** está dada por

$$T = \frac{p_T}{p_{273}} 273.15 \text{ K} \qquad (17\text{-}5)$$

con

$$T = t_C + 273.15°$$

*En forma oficial se ha sancionado la representación de las temperaturas Kelvin sin el signo de grados, como en 273.15 K. Más propiamente, la Ec. (17-5) define la temperatura Kelvin sólo para termómetros de gas de densidad extremadamente baja.

donde $p273$ es la presión del gas en el punto de congelación.

Nos hemos referido a los puntos de congelación y de ebullición del agua bajo la presión atmosférica normal como las bases de las determinaciones de las escalas de temperatura. Podríamos de igual manera escoger correctamente el cero de la escala Kelvin y el punto triple del agua como los dos puntos fijos para definir la escala Kelvin. El *punto triple* del agua, que ocurre a la presión de 4.58 torr y la temperatura de 273.16°K, corresponde a la única condición en la cual el agua puede existir simultáneamente en los estados, líquido, sólido y vapor.

El cero de la escala Kelvin, el llamado cero absoluto, *es* la temperatura más baja posible. Claro que este caso debe ser comprobado por medio de argumentos termodinámicos; esto lo sugiere, pero *no* se deduce de la Fig. 17-6. Veremos que la escala de temperaturas Kelvin, o *absoluta* tiene una interpretación simple en términos de la mecánica del movimiento molecular. Baste decir aquí que la independencia de la sustancia termométrica que se encuentra para los gases a baja densidad no es del todo inesperada. En los gases de baja densidad las moléculas están muy distantes unas de otras, e interactúan por fuerzas intermoleculares sólo durante los pequeños periodos de tiempo en que chocan.

17—5 LA LEY GENERAL DE LOS GASES

Nos interesamos aquí en un gas *ideal*, o *perfecto*. Cualquier gas se comporta como gas ideal si su densidad es muy baja. Esto requiere, en efecto, que la temperatura del gas sea relativamente alta y su presión relativamente baja, de tal manera que el gas no se encuentre cerca de las condiciones bajo las cuales se condensa en un líquido. La mayor parte de los gases a la temperatura ordinaria y a la presión atmosférica se pueden tomar como gases ideales.

La ley general de los gases se ocupa de la relación que hay entre las propiedades macroscópicas medibles de un gas ideal: la temperatura absoluta T, la presión p, el volumen V, y la masa m. Se acostumbra especificar la masa m en forma indirecta por medio del número n de moles de gas. Por definición

$$n = \frac{m}{w} \tag{17-6}$$

donde w es el peso molecular* de las moléculas del gas. Si la masa m se da en gramos, entonces n es el número de moléculas gramo o moles. Así, 1 g mol de cualquier material contiene w gramos del material. Por ejemplo, el oxígeno tiene un peso molecular de 32; por lo tanto, 1 g mol de oxígeno está formado por 32 g.

Una forma muy común de la ley general de los gases, basada

*"Peso" molecular es, en sentido estricto, la *masa* molecular con respecto a un átomo de carbono 12 con masa de 12.

en experimentos con gases a bajas densidades, es

$$pV = nRT \tag{17-7}$$

donde R es la *constante universal de los gases.*

Es un hecho experimental que 1 g mol de un gas ideal a la temperatura normal (273.15 K) y a la presión atmosférica normal (1.013250×10^5 N/m^2) * ocupa un volumen de 22.415×10^{-3} m^3 $\approx$ 22.4 litros. Por lo tanto, a partir de la Ec. (17-7),

$$\begin{aligned} R &= \frac{pV}{nT} \\ &= \frac{(1.013250 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(22.415 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(1 \text{ g mol})(273.15 \text{ K})} \\ &= 8.314 \text{ J/g mol} - \text{K}^\circ \end{aligned}$$

El valor numérico de R depende, desde luego, de las unidades usadas para p y V. Con p en atmósferas y V en litros,

$$R = 0.08207 \text{ litro-atm/g mol} - \text{K}$$

y si las unidades en que se expresa la energía son calorías gramo, donde 1 g cal = 4.1840 J,

$$R = 1.986 \text{ g cal/g mol} - \text{K}$$

(Veremos en el Cap. 19 que la caloría tiene un significado sencillo en términos de las propiedades térmicas del agua.)

Una forma alternativa de la ley general de los gases, Ec. (17-7), es

$$\frac{p_1 V_1}{m_1 T_1} = \frac{p_2 V_2}{m_2 T_2} \tag{17-8}$$

donde los subíndices 1 y 2 denotan dos estados diferentes del gas.

Para volumen y masa constantes del gas, la Ec. (17-8) se convierte en

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \qquad \text{para } V \text{ y } m \text{ constantes}$$

La presión es directamente proporcional a la temperatura absoluta, lo cual es la base del termómetro de gas a volumen constante (Sec. 17-4).

Para presión y masa constantes, la Ec. (17-8) se reduce a

---

*Las condiciones normales de presión y temperatura se abrevian a menudo por NTB

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \qquad \text{para } p \text{ y } m \text{ constantes}$$

La proporcionalidad del volumen y la temperatura puede ser usado como la base del termómetro de gas a presión constante; en ocasiones, esta relación se llama ley de J. L. Gay-Lussac y J. A. C. Charles, sus descubridores.

La ley de Boyle, aplicable para temperatura y masa constantes del gas ideal, es

$$p_1V_1 = p_2V_2 \qquad \text{para } T \text{ y } m \text{ constantes}$$

Una forma alternativa, usando la densidad $\rho = m/V$, es

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_1}$$

Ejemplo 17-1

¿Cuál es la densidad del helio bajo NTP?

Calculamos ρ en forma directa recordando que, para una presión de 1 atm y una temperatura de 0°C, el volumen de 1 g mol para cualquier gas es de 22.415×10^{-3} m³. Como el helio es *monoatómico* y tiene un peso atómico de 4.003,

$$\rho = \frac{4.003 \times 10^{-3} \text{ kg}}{22.415 \times 10^{-3} \text{ m}^3} = 0.1786 \text{ kg/m}^3$$

Ejemplo 17-2

Un tanque que tiene el volumen de 30 l contiene gas nitrógeno (N_2) a 20°C a la presión manométrica de 3.00 atm. La válvula del tanque se abre momentáneamente y se escapa algo de nitrógeno. Después de que la válvula se cierra y el gas regresa a la temperatura ordinaria, el manómetro del tanque marca 2.4 atm. ¿Cuánto nitrógeno se escapó?

Designaremos el número de moles del gas y la presión antes y después de la fuga por los subíndices 1 y 2, en este orden. Entonces, por la Ec. (17-7),

$$n_1 - n_2 = \frac{p_1V}{RT} - \frac{p_2V}{RT} = \frac{V}{RT}(p_1 - p_2)$$

$$n_1 - n_2 = \frac{(30 \text{ litros})(0.60 \text{ atm})}{(0.082 \text{ litro-atm/g mol-K})(293 \text{ K})} = 0.75 \text{ g mol}$$

Como el nitrógeno tiene un peso atómico de 14, 1 g mol tiene una masa de 28 g. La masa que escapa es, entonces,

$$m = nw = (0.75 \text{ g mol})(28 \text{ g/g mol}) = 21 \text{ g}$$

17—6 CAMBIOS EN EL ESTADO DE UN GAS

Son en particular simples varios tipos de cambios de estado de un gas, aquéllos en los que una variable en la ecuación de estado permanece constante. En seguida se describe en forma breve cada proceso, para el caso sencillo de un gas ideal.

En un *proceso isotérmico* la *temperatura* es constante. Las líneas de T constante, correspondientes a $pV =$ constante, se llaman *isotermas*. En una compresión isotérmica la presión aumenta y en una expansión isotérmica la presión decrece. Vea la Fig. 17-8*a*.

Un *proceso isobárico* es aquel en el que la *presión* permanece constante. Vemos en la Fig. 17-8*b* que cuando un gas se expande en forma isobárica, su temperatura aumenta; y recíprocamente.

En un *proceso isovolumétrico,* el *volumen* permanece constante. La Fig. 17-8*c* indica que la temperatura de un gas en un recipiente de tamaño fijo cae a medida que su presión baja.

Un *proceso adiabático,* es uno en el cual *no* entra ni sale *calor* en el gas. Un gas presentará un proceso adiabático bajo dos circunstancias simples: cuando el recipiente es de un aislante térmico, que aísla al gas de los alrededores, y cuando un proceso se lleva a cabo tan rápidamente que no hay tiempo suficiente para que la energía se transmita desde el gas o hacia éste a través de las

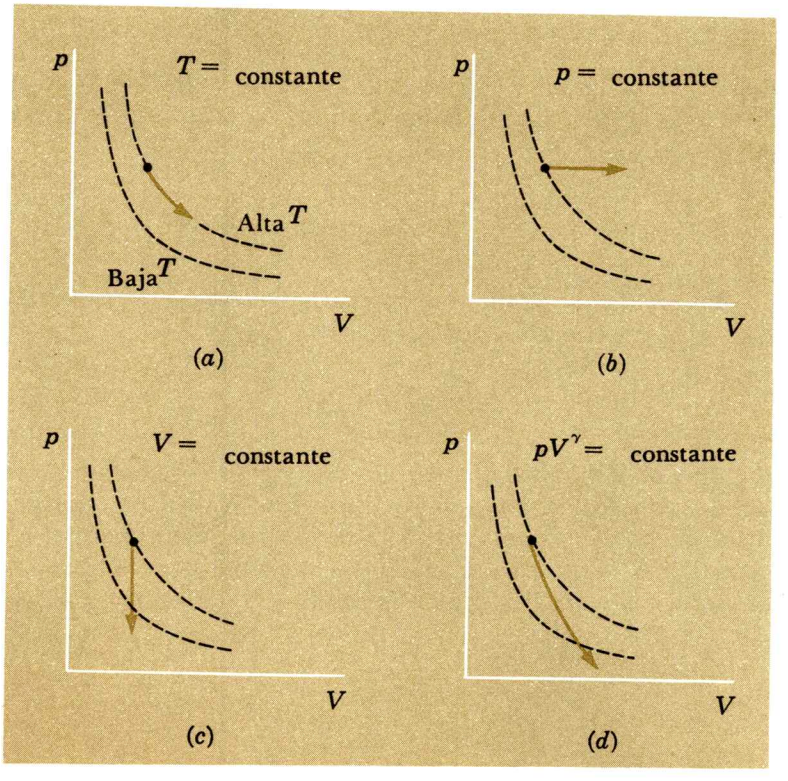


FIG. 17-8. Varios cambios importantes en el estado de un gas. Las líneas punteadas representan dos isotermas. Procesos (*a*) isotérmico, (*b*) isobárico, (*c*) isovolumétrico, y (*d*) adiabático.

paredes del recipiente. Para un gas ideal, un proceso adiabático se describe por la relación

$$pV^{\gamma} = \text{constante} \tag{17-9}$$

donde γ es una constante. El valor numérico de γ depende de la naturaleza del gas, pero siempre es mayor que 1. Por lo tanto, las líneas adiabáticas en el diagrama pV son más inclinadas que las isotérmicas, para las cuales pV es constante. La Fig. 17-8*d* indica que la temperatura cae en una expansión adiabática.

RESUMEN

Después de que pasa un tiempo bastante largo, un grupo de objetos aislados de influencias externas, alcanzan el equilibrio térmico. La propiedad que tienen en común todos los objetos del grupo es la temperatura. De acuerdo con la ley cero de la termodinámica, si A y C están en equilibrio térmico, y B y C también están en equilibrio térmico, se tiene que A y B se encuentran en equilibrio térmico.

La presión p se define como

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

donde ΔF es la fuerza normal al elemento plano de área ΔA. La diferencia de presión Δp entre dos puntos de un líquido separados por la distancia vertical h es

$$\Delta p = \rho h g \tag{17-4}$$

La ecuación de estado para cualquier gas de densidad baja, la llamada ley general de los gases, es

$$pV = nRT \tag{17-7}$$

donde n es el número de moles de gas y R es la constante universal de los gases (8.314 J/g mol K). En NTP 1 g mol de cualquier gas ideal ocupa un volumen de 22.4 l. Un gas ideal puede ser usado como base para un termómetro que registre la temperatura absoluta o Kelvin T, que se relaciona con la temperatura Celsius t_C por $T = t_C + 273.15°$.

PROBLEMAS

17-1. (*a*) ¿A qué temperatura la lectura de un termómetro Celsius es la misma que la lectura en un termómetro Fahrenheit? (*b*) ¿A qué temperatura la escala Kelvin y la Celsius serán iguales dentro de un 0.10%?

17-2. William Rankine, un ingeniero escocés del siglo XIX, desarrolló una escala de temperaturas en la que 1 R° = 1 F° con el cero absoluto $t_R = 0°\text{R}$. Encuentre la ecuación que relaciona la temperatura Rankine t_R con la temperatura Celsius t_C.

17-3. Supóngase que definimos una escala de temperaturas basada en los puntos de fusión y ebullición del elemento mercurio (Hg). Definimos esta nueva escala como sigue: $t_H = 0°\text{H} = -38.9°\text{C}$ (punto de fusión del mercurio) y $t_H = 600°\text{H} = 356.9°\text{C}$ (punto de ebullición del mercurio). Encuentre (*a*) 1 H° en términos de 1 C° y (*b*) t_H en términos de t_C.

17-4. Una llanta de automóvil se infla hasta la presión manométrica (en exceso sobre la presión atmosférica de 15 lb/plg²) de 30 lb/plg² (a menudo al referirse a esta presión, se dice impropiamente 30 lb") cuando la temperatura es de 68°F. ¿Cuál es la presión manométrica cuando la temperatura de la llanta y el aire que contiene aumenta a 90°F? Suponga, para simplificar, que la llanta no se dilata.

17-5. ¿Cuál es la masa total de la atmósfera de la Tierra (presión atmosférica, 1.0×10^5 N/m²; radio de la tierra, 6.4×10^6 m)? (Desprecie la variación en g con la elevación sobre la superficie de la Tierra.)

17-6. Si la atmósfera de la Tierra tuviera la misma densidad a cualquier distancia sobre la superficie de ella, densidad que en la superficie es (1.29×10^{-3} g/cm³), ¿Cuál sería la altura de la atmósfera cuando la presión sobre dicha superficie es de 1 atm? (despreciando la variación de g con la altura)

17-7. Un gas ideal está contenido en un cilindro recto circular vertical, en el cual se colocó un pistón que cierra herméticamente, y puede moverse en sentido vertical y con libertad sin que se escape el gas, de tal manera que flota en equilibrio. Demuestre que la distancia de la parte baja del cilindro a la cara inferior del pistón es proporcional en forma directa a la temperatura absoluta del gas que contiene.

17-8. Un gas ocupa un volumen de 6.0 litros cuando su temperatura es de 30°C y su presión es de 760 torr. ¿Qué volumen debe ocupar este gas cuando su temperatura se ha elevado a 100°C y su presión aumenta a 240 cm de Hg?

17-9. (*a*) Determine la rapidez de cambio isobárica del volumen con la temperatura para un gas ideal a la temperatura T. (*b*) Calcule $[(1/V)(dV/dT)]_p$ — el coeficiente de volumen de la dilatación térmica a presión constante — cuando la temperatura es de 273.15 K. (Un *proceso isobárico* es uno en el que la *presión* es constante.)

17-10. Un globo meteorológico se diseña para que quede inflado por completo a una altitud de 10 km, donde la temperatura es de −50°C y la presión es 2.64×10^4 N/m². ¿Qué volumen V_0 de helio se debe colocar en el globo al nivel del mar, donde la temperatura es de 15°C y la presión de 1 atmósfera? Exprese V_0 como un porcentaje del volumen V_F, del gas cuando está inflado del todo.

17-11. En las NTP la densidad del cloro gaseoso es de 3.214 g/litro. Calcule el valor promedio del peso molecular del gas cloro (Cl_2).

17-12. Calcule la densidad del aire en las NTP, suponiendo que el aire está formado de N_2 y O_2 en la razón de 5:1 en peso. Los pesos moleculares de las moléculas del nitrógeno y el oxígeno son 28 y 32, en este orden. (De acuerdo con la ley de las presiones parciales, la presión de cada uno de los dos gases es independiente de la presencia del otro.)

17-13. Un globo esférico de 1.0 m de diámetro contiene hidrógeno molecular. La masa del globo vacío es de 1.0 kg. ¿Qué cantidad de hidrógeno contiene el globo cuando flota en la atmósfera?

17-14. Demuestre que para un gas ideal se puede describir un proceso adiabático por medio de la relación $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$.

17-15. En un motor diesel el combustible arde debido al aire que se calienta por medio de una compresión adiabática — no hay bujías —. Determine (*a*) la temperatura y (*b*) la presión al fin del tiempo de compresión bajo las siguientes suposiciones: la relación de compresión adiabática es de 16 a 1; el aire a la

entrada se encuentra a 27°C y 1 atm de presión; $\gamma = 1.40$ para el aire en estas condiciones.

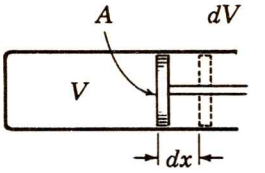
17-16. Demuestre que la rapidez de una onda de compresión en un gas ideal se puede indicar en la forma $c = (\gamma p/\rho)^{1/2}$. (*Sugerencia*: Compare las formas diferenciales de la Ec. (17-9) y la del módulo de volumen B.)

17-17. Use la ecuación desarrollada en el Prob. 17-16 para determinar la rapidez del sonido en el aire a una altitud de 10 km, donde la presión es de 0.261 atm, la densidad de 0.413 kg/m^3, y la temperatura −56.9°C. (A 15°C y 1 atm, la densidad del aire es de 1.225 kg/m^3 y el sonido se mueve a 340 m/s.)

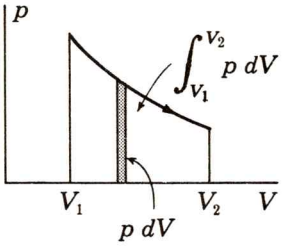
17-18. Considere un gas ideal confinado dentro de un recipiente cilíndrico cerrado en un extremo por una pared fija y el otro por un pistón movible. (*a*) Demuestre que la fuerza sobre el pistón es $F = pA$, donde p es la presión del gas y A el área del pistón. (*b*) Demuestre que cuando el volumen del gas aumenta en dV, el trabajo hecho sobre el pistón por el gas es $dW = pdV$. Vea la Fig. P17-18*a*. (*c*) Por último, demuestre que cuando el volumen pasa de V_1 a V_2, el trabajo total hecho es

$$W_{1\to 2} = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV$$

Vea la Fig. P17-18*b*. Así, el trabajo hecho por un gas en expansión es igual en magnitud al área bajo la curva de la línea que describe la expansión en un diagrama $p-V$.



(*a*)



(*b*)

FIG. P17-18

17-19. (*a*) Use la ecuación desarrollada en el Prob. 17-18 para demostrar que el trabajo hecho por un gas ideal cuando se dilata *isobáricamente* desde el volumen V_1 al volumen V_2 está dado por $W_{1\to 2} = p(V_2 - V_1)$. (*b*) Use la ecuación de estado para demostrar que el trabajo hecho por un gas ideal cuando se dilata de manera *isotérmica* desde V_1 hasta V_2 es $W_{1\to 2} = nRT \ln(V_2/V_1)$.

17-20. (*a*) Use la ecuación desarrollada en el Prob. 17-18 para demostrar que el trabajo hecho por un gas que sufre una dilatación adiabática del estado (p_1, V_1) al estado (p_2, V_2) es $(p_1V_1 - p_2V_2)/(\gamma - 1)$. (*b*) ¿Sube o baja la temperatura en este proceso? (*c*) Supóngase que, partiendo del mismo estado inicial, el gas se dilata isotérmicamente a la misma presión final p_2 como en la transformación adiabática. ¿Es mayor o menor el trabajo hecho?

Capítulo

18

LA TEORIA CINETICA Y LOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TERMODINAMICA

En este capítulo consideramos un gas que está compuesto por un gran número de partículas microscópicas. Por medio de la teoría cinética, relacionaremos las propiedades microscópicas de las moléculas del gas —sus rapideces, diámetros, masas, energías cinéticas, y su número— con el comportamiento macroscópico de los gases ideales. Lo cual nos llevará a la interpretación mecánica de los conceptos de temperatura y calor. Identificaremos la energía térmica de un gas con la energía desordenada de las moléculas, y consideraremos la primera y la segunda leyes de la termodinámica.

18—1 TAMAÑO MOLECULAR

Recuérdese primero que 1 g mol de cualquier elemento representa el peso atómico del elemento en gramos. Así, 1 g mol de *cualquier* sustancia pura contiene el mismo número de átomos o moléculas, llamado *número de Avogadro*, N_A. Experimentalmente,

$$\text{Número de Avogadro} = N_A = \frac{6.02217 \times 10^{23}}{\text{g-mol}}$$

Así, 2 g de H_2, 32 g de O_2 y 4 g de He, todos, contienen 6×10^{23} moléculas. El número de Avogadro da, también, el número de átomos por molécula gramo para sólidos formados por elementos puros; por ejemplo, 197 g de oro sólido (peso atómico 197) contienen N_A átomos y 2 g de hidrógeno sólido contienen $2N_A$ átomos o N_A moléculas.

Queremos encontrar el tamaño aproximado de una molécula típica y la distancia promedio entre las moléculas vecinas en un gas. Considérese el oxígeno. Se sabe que en las NTP 1 g mol (32 g) ocupa un volumen de $22.4\ \text{l} = 22.4 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$. Desde luego, el gas es compresible con facilidad.

Si bajamos la temperatura de este oxígeno a 90°K mientras mantenemos la presión constante, el gas se condensa a un líquido casi incompresible. Encontrándose que en el estado líquido los 32 g de oxígeno tienen un volumen que es más pequeño que el volumen gaseoso original por un factor de 700. Como el volumen del oxígeno líquido sólo se puede reducir en forma apreciable por medio de presiones externas relativamente grandes, podemos considerar que en el estado líquido las moléculas de oxígeno están "en contacto" entre sí. Todas las moléculas ejercen fuerzas intermoleculares repulsivas muy grandes sobre las moléculas vecinas cuando se aplican fuerzas externas de compresión al líquido.

Calculemos el volumen asociado con cada molécula de oxígeno. Sabemos que en el estado líquido 1 molécula de oxígeno ocupa un volumen de $(22.4 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)/(700)(6.023 \times 10^{23}) = 53 \times 10^{-30}\ \text{m}^3$. Podemos pues encontrar el diámetro aproximado d de la molécula por medio de la relación $d^3 \approx 53 \times 10^{-30}\ \text{m}^3$, o $d \approx 4 \times 10^{-10}$ m. Así, el diámetro de una molécula de oxígeno es muy cercano a $4 \times 10^{-10}\ \text{m} = 4$ Å (la unidad *angstrom* de longitud, abreviada Å, se define como $\text{Å} = 1 10^{-10}$ m). Se ha encontrado que todas las moléculas formadas por pocos átomos tienen diámetros del orden de algunos angstroms.

Hemos calculado el diámetro molecular usando precisamente el mismo procedimiento que se puede emplear para encontrar el diámetro de una esfera grande, como una pelota de billar. El diámetro de una entre varias pelotas de billar es la distancia entre los centros de un par de ellas en contacto con las otras; esto es, el diámetro es la distancia de separación bajo el cual la fuerza entre las pelotas se hace fuertemente repulsiva. En una forma semejante, hemos encontrado el diámetro molecular, que es la distancia de separación entre las moléculas adyacentes cuando se empujan con una fuerza repulsiva intermolecular muy grande.

Conociendo el tamaño aproximado de una molécula de oxígeno (4×10^{-10} m), podemos encontrar también la distancia promedio entre las moléculas de oxígeno bajo NTP. El volumen disponible por molécula en el estado gaseoso es 700 veces mayor que en el estado líquido. Así, la distancia promedio entre los centros moleculares es $(700)^{1/3} \approx 9$ veces la distancia entre los centros moleculares en el oxígeno líquido. Para el oxígeno a NTP, las moléculas están, por lo tanto, separadas en promedio, por 9 diámetros moleculares, de tal manera que para un gas de baja densidad, se pueden tomar las moléculas como puntos masa en el vacío.

18—2 LA TEORIA CINETICA APLICADA A UN GAS IDEAL

En seguida indicamos los supuestos de la teoría cinética de los gases. Estos supuestos están ampliamente justificados, no sólo porque nos llevan a interpretaciones muy satisfactorias de las

propiedades macroscópicas de las moléculas gaseosas, sino también debido a que las propiedades microscópicas se verifican directamente por medio de experimentos.

1. Las moléculas de un gas están, en promedio, separadas por distancias que son grandes comparadas con los diámetros moleculares. De hecho, para gases ideales suponemos que las *moléculas tienen volumen despreciable* en comparación con el volumen del recipiente en el que está el gas.
2. Las moléculas están en *movimiento aleatorio* constante. Debido a que el número de moléculas es enorme, suponemos que este movimiento es por completo caótico: Las moléculas se mueven en todas las direcciones con probabilidad igual y con una gran variedad de rapideces. El centro de masa del gas, como un todo, permanece en reposo, siendo cero, por ello, el ímpetu *total.*
3. Los choques de las moléculas entre sí y con las paredes son *perfectamente elásticos.*
4. Entre los choques, las moléculas están libres de fuerzas y se mueven con rapidez constante.* Se produce un choque cuando una molécula se encuentra bajo la acción de la fuerza intermolecular de corto alcance de una segunda molécula. *Se acepta que la duración de cualquier choque es muy pequeña comparado con el tiempo que transcurre entre los choques.* Así, aunque un par de moléculas perderá energía cinética y ganará energía potencial durante el choque, se puede ignorar la energía potencial debido a que la molécula gasta una fracción despreciable de su tiempo en los choques.
5. *La mecánica newtoniana se aplica* a los choques moleculares.

Queremos calcular ahora la presión (una propiedad macroscópica) de un gas ideal en términos de las propiedades microscópicas de las moléculas del gas; N, el número de moléculas en el recipiente; m, la masa de cada molécula; y v, una rapidez molecular típica. Se atribuye la presión del gas al bombardeo de las paredes del recipiente por las moléculas. Se considera que las N moléculas están en una caja cúbica de longitud l.

Consideremos el choque de una molécula con la pared de la derecha YZ del recipiente cúbico que tiene lados de longitud l en la Fig. 18-1. La molécula se acerca a ella con las componentes de la velocidad v_x, v_y, v_z y choca elásticamente con ella, rebotando con la misma rapidez. Sus componentes v_y y v_z no cambian, mientras que la componente v_x cambia a $-v_x$ después del choque.

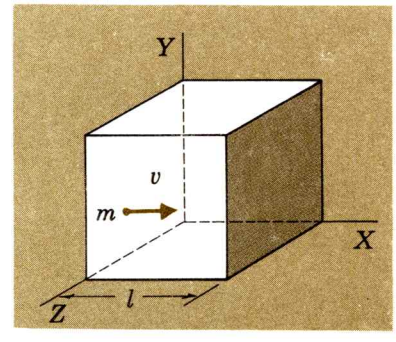


FIG. 18-1. La molécula de masa m y rapidez v, golpea la pared YZ de un recipiente cúbico cuyos lados tienen la longitud l.

*Estrictamente, las rapideces moleculares son constantes entre los choques sólo si las moléculas se mueven en un espacio libre de la gravedad. Todas las moléculas en un gas que se encuentre sobre la superficie de la Tierra, están sujetas a una aceleración constante g hacia abajo. Pero veremos que el cambio en velocidad provocado por la gravedad es pequeño comparado con las velocidades moleculares, por lo que se pueden ignorar. Diciéndolo diferencialmente, el cambio en la energía cinética de una molécula típica debido a su elevación o caída en un campo gravitacional, es despreciable, comparado con su energía cinética.

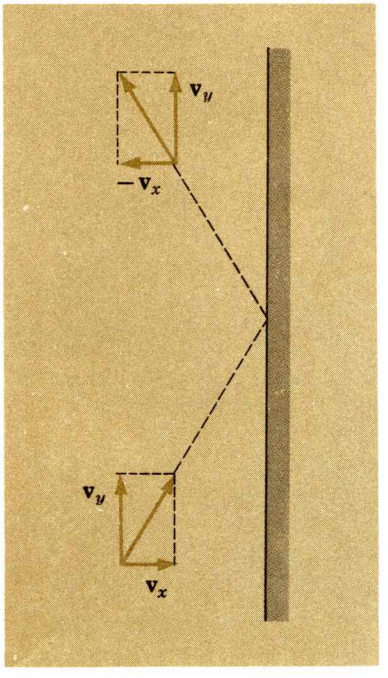


FIG. 18-2. Una molécula choca en ángulo oblicuo con una de las paredes del recipiente. Sólo la componente en ángulo recto a la superficie cambia.

Véase la Fig. 18-2. Por lo tanto, en el choque la componente X del ímpetu de la molécula cambia en $\Delta(mv) = (-mv_x) - (+mv_x) = -2mv_x$, y la pared del recipiente tiene un cambio del ímpetu de $+2mv_x$. El intervalo de tiempo Δt entre dos choques sucesivos con la pared derecha es $\Delta t = 2l/v_x$, porque la molécula recorre la distancia total $2\ l$ a lo largo del eje X en un viaje redondo con la rapidez v_x. (Usted se puede convencer fácilmente que el intervalo de tiempo no se altera por los choques con las paredes de arriba, de abajo y las laterales.)

La fuerza promedio F_m sobre la pared durante el tiempo entre choques sucesivos es, entonces, a partir de la segunda ley de Newton,

$$F_m = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2l/v_x} = \frac{mv_x^2}{l} \tag{18-1}$$

Cada vez que una molécula choca con la pared del recipiente le imparte una fuerza impulsora; la fuerza total es la resultante de un número muy grande de choques moleculares discretos y bruscos. Véase la Fig. 18-3. Las rapideces moleculares varían, y las moléculas golpean la pared desde diferentes direcciones; en consecuencia, los impulsos individuales difieren en tamaño. Pero debido a que el número de moléculas es grande, la fuerza total ΣF_m sobre la pared es en esencia constante. Dividiendo esta fuerza total entre el área de la pared l^2 obtenemos la presión p sobre ésta:

$$p = \frac{\Sigma F}{l^2} = \frac{F_1 + F_2 + F_3 + \cdots}{l^2}$$

que se convierte, con el uso de la Ec. (18-1) en

$$p = \frac{m(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x3}^2 + \cdots)}{l^3} \tag{18-2}$$

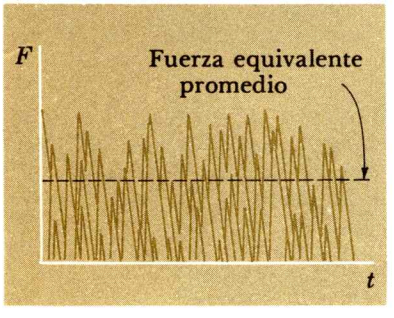


FIG. 18-3. Fuerza sobre una pared del recipiente, debida a choques moleculares discretos, como una función del tiempo. La fuerza equivalente promedio es constante.

donde los subíndices 1, 2, 3, etc., se refieren a las moléculas individuales.

Las *rapideces* de las moléculas están distribuidas en un margen continuo de valores. Así son las *componentes* X de las velocidades. Si $\overline{v_x^2}$ representa al promedio de los cuadrados,

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x3}^2 + \cdots}{N} \tag{18-3}$$

entonces la Ec. (18-2) se puede escribir

$$p = \frac{Nm\overline{v_x^2}}{l^3} \tag{18-4}$$

Los promedios para las componentes Y y Z de la velocidad están dados por relaciones análogas a la Ec. (18-3), y el promedio de los cuadrados de las rapideces moleculares es, por definición,

$$\overline{v^2} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots}{N}$$

donde, para cualquier partícula,

$$v_1^2 = v_{x1}^2 + v_{y1}^2 + v_{z1}^2$$

Entonces, se sigue que

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \tag{18-5}$$

Ahora bien, si las moléculas se mueven en direcciones realmente aleatorias, una dirección es igual a cualquier otra, de tal manera que

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

Entonces, la Ec. (18-5) se puede escribir en las formas

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2} \qquad \text{o} \qquad \overline{v_x^2} = \tfrac{1}{3}\overline{v^2}$$

y la Ec. (18-4) se convierte en

$$pV = \tfrac{1}{3}Nm\overline{v^2} \tag{18-6}$$

donde $V = l^3$.

Es útil introducir la *rapidez promedio raizcuadrática*, v_{rcm}, que es la raíz cuadrada promedio de los cuadrados de las rapideces moleculares. Por definición,

$$v_{\text{rcm}} \equiv \sqrt{\overline{v^2}}$$

y la Ec. (18-6) se puede escribir en la forma

$$pV = \tfrac{1}{3}Nmv_{\text{rcm}}^2 \tag{18-7}$$

Por medio del análisis anterior hemos relacionado las propiedades macroscópicas del gas (la presión p y el volumen V) con las propiedades microscópicas moleculares N, m, y v_{rcm}: La Ec. (18-7) se puede escribir en forma más compacta introduciendo la densidad del gas ρ, donde ρ es la masa total Nm de las moléculas dividida entre el volumen V que ocupa, $\rho = Nm/V$.

$$p = \tfrac{1}{3}\rho v_{\text{rcm}}^2 \tag{18-8}$$

Esta ecuación nos permite calcular la rapidez rcm de las moléculas, por el simple conocimiento de la presión y la densidad del gas. Por ejemplo, bajo las condiciones NTP, el hidrógeno molecular tiene una densidad

$$\rho = \frac{2.016 \text{ g}}{22.4 \text{ litros}} = 9.00 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3$$

y una presión $p = 1.013 \times 10^5$ N/m². A partir de la Ec. (18-8),

$$v_{\text{rcm}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3(1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2)}{9.00 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3}} = 1.84 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Una molécula de hidrógeno típica en las NTP tiene una rapidez de cerca de ¡2 km/s ≈ 4 000 mi/h! Esto no significa que en 1 s, una molécula se moverá 2 km a lo largo de una línea recta, tampoco que se moverá directamente de un extremo de una pequeña caja al extremo opuesto (ella presenta choques frecuentes con otras moléculas). Lo que la Ec. (18-8) *dice* es que, entre los choques, una molécula típica de hidrógeno en las NTP se mueve con la rapidez de 2 km/s.

18—3 EL SIGNIFICADO DE LA TEMPERATURA Y DE LA ENERGIA INTERNA

Ahora es fácil relacionar, el concepto macroscópico de la temperatura de un gas ideal, como se define por medio de la ley general de los gases

$$pV = nRT \qquad \text{(17-7),(18-9)}$$

con la energía cinética promedio de las moléculas que contiene el gas. Por la teoría cinética tenemos

$$pV = \tfrac{1}{3}Nmv_{\text{rcm}}^2 = \tfrac{1}{3}Nm\overline{v^2} \qquad \text{(18-7),(18-10)}$$

El número total de moléculas N es el producto del número de moles n por el número de moléculas por mol N_A (Número de Avogadro); esto es, $N = nN_A$.

Igualando las Ecs. (18-9) y (18-10), obtenemos

$$\tfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T$$

La energía cinética de traslación promedio de una molécula de un *gas ideal, es directamente proporcional a la temperatura*

absoluta del gas. Desde el punto de vista de la teoría cinética, la temperatura es una medida de la energía cinética de *translación* promedio por molécula de gas ideal. Si los gases siguieran la ley general a temperaturas muy bajas —lo que no hacen— las moléculas quedarían en reposo a la temperatura del cero absoluto.

La razón entre la constante universal de los gases R y el número de Avogadro N_A se llama la *constante de Boltzmann* k:

$$\text{Constante de Boltzmann} = k = \frac{R}{N_A} = 1.381 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$$

Se puede tomar a la constante de Boltzman como la constante universal de los gases *por molécula*.

Entonces, nuestra ecuación anterior puede escribirse:

Energía cinética de translación promedio por molécula

$$= \tfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T = \tfrac{3}{2}kT \qquad (18\text{-}11)$$

Esta ecuación tiene consecuencias profundas. Por ejemplo, si ponemos juntos dos gases, que al principio se encontraban a temperaturas diferentes, en un mismo recipiente. Las moléculas del gas más caliente transmitirán energía, por medio de los choques intermoleculares a las moléculas del gas más frío, hasta que se establezca el equilibrio térmico a una sola temperatura final. Además, la Ec. (18-11) implica que, a cualquier temperatura fija, *todas* las moléculas, cualesquiera que sea su masa, tienen la *misma* energía cinética de traslación promedio. Por lo tanto, en una mezcla de gases diferentes, las moléculas de masa pequeña se mueven a rapideces relativas más altas, y las moléculas de mayor masa se mueven a rapideces más bajas.

Otra consecuencia de la Ec. (18-11) es ésta: Para un gas dado, (masa dada m) la rapidez rcm es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. La rapidez no depende sólo de la presión, ni de la densidad por separado, sino de su razón p/ρ que, como podemos deducir de la ley general de los gases, la Ec. (19-9), es proporcional a la temperatura.

Como la energía potencial entre las moléculas durante un choque se puede ignorar, la energía total promedio por partícula es, cuando menos para los gases monoatómicos, simplemente la energía cinética de traslación promedio. Para líquidos, sólidos y gases no ideales, cuando la energía potencial molecular no es despreciable, la relación entre la temperatura y la energía de la partícula es más complicada. No obstante, la relación $\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$ entre la energía cinética de *traslación* y la temperatura, se aplica en todos los casos.

Ejemplo 18-1

¿Cuál es la rapidez molecular rcm para las moléculas del hidrógeno y el oxígeno (*a*) a 300 K y (*b*) a 30 000 K?

(*a*) Al terminar la Sec. 18-2 encontramos que la rapidez rcm para las moléculas de hidrógeno a 0°C era de 1.84 km/s. De la Ec. (18-11), la rapidez rcm para una masa molecular fija es

$$v_{\text{rcm}} \propto \sqrt{T}$$

Por lo que, la rapidez rcm de las moléculas de hidrógeno a 300 K es

$$v_{\text{rcm}} = (1.84 \text{ km/s})\sqrt{\tfrac{300}{273}} = 1.93 \text{ km/s}$$

Podemos calcular con facilidad la rapidez rcm para el oxígeno a 300 K, reconociendo, que las moléculas de todos los gases a la misma temperatura, tienen la misma energía cinética promedio, Así

$$\tfrac{1}{2}m_{\text{H}}v_{\text{H}}^2 = \tfrac{1}{2}m_{\text{O}}v_{\text{O}}^2$$

donde los subíndices H y O se refieren al hidrógeno y al oxígeno, respectivamente. Entonces, para el O_2 a (300 K),

$$v_{\text{O}} = v_{\text{H}}\sqrt{\frac{m_{\text{H}}}{m_{\text{O}}}} = (1.93 \text{ km/s})\sqrt{\frac{2.016}{32.00}} = 0.484 \text{ km/s}$$

(*b*) Para encontrar las rapideces a 30 000 K, nada más recordamos que, como la temperatura es más alta por el factor 100, las energías aumentan por el factor 100, y las rapideces, en consecuencia, por el factor 10, sobre los correspondientes valores a 300 K. Por lo tanto,

$$v_{\text{rcm}}^{\text{para } H_2} \text{ a } 30\,000 \text{ K} = (1.93 \text{ km/s})(10) = 19.3 \text{ km/s}$$

$$v_{\text{rcm}}^{\text{para } O_2} \text{ a } 30\,000 \text{ K} = (0.484 \text{ km/s})(10) = 4.84 \text{ km/s}$$

El término *energía interna* se usa para designar el contenido total de energía de un sistema. Así, si el sistema está formado por un resorte que tenga masas adheridas, la energía interna U del sistema es la suma de la energía cinética de las masas y la energía potencial del resorte. Si el sistema es un gas ideal compuesto por N partículas* en equilibrio térmico, su energía interna U es justamente la energía cinética promedio por partícula, $\frac{3}{2}kT$, multiplicado por el número de partículas N; esto es,

*Por simplicidad hemos supuesto que las moléculas son monoatómicas. Entonces no hay energía asociada con las vibraciones de los átomos dentro de la molécula, y no hay energía cinética de rotación de las moléculas como un todo.

$$U = \tfrac{3}{2}NkT = \tfrac{3}{2}nRT \qquad (18\text{-}12)$$

Como implica la Ec. (18-12), la energía interna de un gas ideal es una función de la temperatura absoluta nada más.

La energía interna de un gas ideal proviene del movimiento *desordenado,* o caos molecular, de muchas partículas pequeñas. Aunque las moléculas tienen energía cinética, el ímpetu lineal total del sistema como un todo es *cero.* La Fig. 18-4 muestra dos sistemas, ambos con la misma energía cinética total; en la Fig. 18-4*a* el movimiento de las partículas es *ordenado,* y el ímpetu total del sistema es exactamente N veces el ímpetu de cada partícula; en la Fig. 18-4*b* el movimiento de las partículas es *desordenado,* y el centro de masa del sistema permanece en reposo.

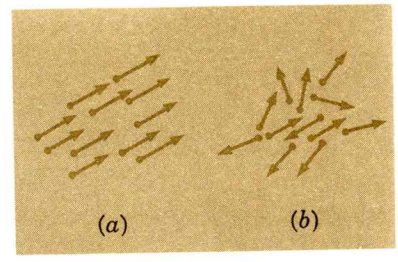


FIG. 18-4. (*a*) Las moléculas con la misma velocidad desarrollan un movimiento *ordenado.* (*b*) Las moléculas con velocidades distribuidas al azar desarrollan un movimiento *desordenado.*

Así, la energía interna de un sistema de partículas puede ser ordenado o desordenado (o una combinación de las dos). Cuando el movimiento es ordenado se manifiesta a nivel macroscópico como una energía cinética y potencial reconocibles. Cuando el movimiento es desordenado, como en el caso de un gas ideal, no se "ve" energía en una escala macroscópica, a pesar de que existe microscópicamente. Esta energía interna desordenada, caótica, de un sistema se llama *energía térmica.*

La energía térmica la mide un observador en reposo con respecto al centro de masa del sistema. Supóngase que estamos en movimiento con respecto al recipiente del gas. Las rapideces y energías cinéticas de las moléculas son entonces más altas que sus valores con respecto al recipiente en reposo. Lo que *no* quiere decir que la temperatura del gas ha aumentado, sólo porque nos movemos con respecto al recipiente. Así, la energía térmica desordenada de las moléculas de gas debe medirse en relación al centro de masa del sistema.

18—4 EL SIGNIFICADO DEL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA

Aquí nos interesamos en las formas en las que la energía interna de un gas puede cambiar Supongamos que se tiene un gas en equilibrio térmico con su recipiente; la temperatura del gas es igual que la del recipiente. A medida que transcurre el tiempo, la energía térmica total, y con ello la temperatura del gas permanece sin cambio. Los choques moleculares son del todo elásticos. Esto implica que, cuando las moléculas golpean la pared, rebotan con la misma energía cinética que tenían antes del choque.

Pero las paredes del recipiente no son superficies perfectamente lisas, duras. Están formadas por átomos ligados entre sí en un sólido, y todos están oscilando de continuo. Cuando una molécula golpea una pared, le pega a un átomo que está, como regla general, moviéndose, y por ello la molécula de gas se aleja de la pared con una energía cinética mayor o menor. Para el equilibrio

térmico, entonces, la energía *promedio* de las moléculas que rebotan de la pared es igual a la energía *promedio* de las moléculas que la golpean.

Hay sólo una manera por medio de la cual la energía interna de un gas en un recipiente puede cambiar: Las moléculas deben, en promedio, o ganar o perder energía cinética en sus choques con los átomos de las paredes del recipiente. (Suponemos, para simplificar, que las moléculas son monoatómicas.) Podemos distinguir *dos formas de la transmisión de energía* hacia las moléculas del gas y desde éstas: *trabajo y calor.*

Supóngase que el gas se encuentra en un recipiente con un pistón movible, que se desliza con libertad, como se ve en la Fig. 18-5. Las moléculas bombardean el pistón y las paredes. Supóngase, además, que la presión fuera del recipiente es nula. Entonces, el pistón se mueve hacia afuera debido al bombardeo molecular; esto es, el gas contenido hace trabajo sobre el pistón, con lo que éste gana energía cinética ordenada.

A medida que el pistón se mueve hacia afuera, la temperatura del gas (y su presión), bajan. Nos imaginamos que las paredes del recipiente se mantienen siempre a la misma temperatura que el gas. Entonces cualquier partícula que golpea una pared fija (excluido el pistón móvil) rebotará, en promedio, con su energía cinética sin cambio. Pero, ¿qué pasa con las moléculas que golpean el pistón? Cada una de ellas hace trabajo sobre el pistón al golpearlo. Cada una de ellas rebota con rapidez reducida (y con energía cinética reducida), como se indica en la Fig. 18-5. En consecuencia, la energía interna total del gas baja, siendo la disminución de la energía interna, $-dU$, exactamente igual al trabajo hecho por el gas sobre el pistón:

$$-dU = dW$$

o

$$0 = dU + dW$$

(Nótese que dU y dW son cantidades *algebraicas.*) En este proceso algo de la energía térmica desordenada de las moléculas del gas se convierte en energía cinética ordenada del pistón.

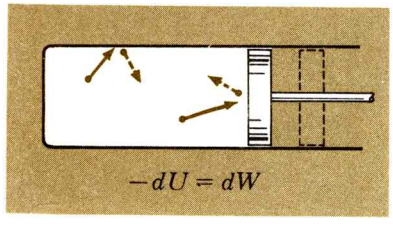


FIG. 18-5. La energía interna dU disminuye y el gas hace el trabajo dW cuando, en promedio, una molécula rebota del pistón a una velocidad menor.

El proceso que se acaba de describir puede, desde luego, invertirse. Entonces, un agente externo comprime el gas, las paredes de nuevo se mantienen a la temperatura del gas. Con el pistón desplazado hacia adentro, se hace trabajo *sobre* el gas, las moléculas se apartan del pistón con una energía cinética *aumentada,* y la energía interna total del gas *aumenta.*

¿Es posible que cambie la energía interna del gas, aunque no se haga trabajo? Para responder a esto, imaginamos ahora que el recipiente al principio se encontraba a una temperatura más alta que la del gas que contiene, esto es, empezamos con un gas frío en un recipiente caliente. El pistón se mantiene en su posición. Los

átomos de las paredes oscilan enérgicamente, y cuando las moléculas del gas golpean las paredes, rebotan en promedio con energía cinética *mayor,* Véase la Fig. 18-6. Este proceso de transmisión de la energía, que tiene su origen en la diferencia de temperaturas entre el gas y el recipiente, se llama *calor.* El gas se calentó debido a que hay una diferencia de temperatura entre él y el recipiente. La energía interna del gas aumenta dU. La ganancia de energía interna es igual a la energía térmica dQ transmitida al sistema en forma de calor; esto es,

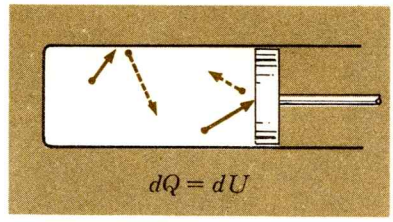


FIG. 18-6. El gas se calienta dQ y su energía interna aumenta dU cuando, en promedio, cada molécula rebota de las paredes del recipiente con una rapidez mayor.

Sin trabajo: $$dQ = dU$$

(De nuevo, dU y dQ son cantidades *algebraicas.*)

También este proceso puede invertirse. Con el gas primero a una temperatura más alta que las paredes del recipiente, una molécula típica *pierde* energía al golpearlas. Entonces, la energía interna del gas cambia en $-dU$, la cantidad de calor transmitida *hacia* el gas es $-dQ$. De nuevo $dQ = dU$.

Ambos, el calor y el trabajo describen los procesos de transmisión de energía. El *trabajo* se identifica con el desplazamiento *macroscópico* de un objeto que tenga energías cinética y potencial *ordenadas;* no se necesita que intervenga una diferencia de temperaturas. Por otro lado, el *calor,* se identifica por la transmisión de energía térmica, energía de movimiento *desordenado,* presentándose por una diferencia de temperaturas. Cuando se calienta un sistema, se puede tener la seguridad de que se hace trabajo; pero éste ocurre en una escala microscópica y en forma desordenada. Corresponde a la interacción entre átomos y moléculas individuales, y se puede describir macroscópicamente en términos de una diferencia de temperaturas.

El calor se puede expresar en cualquier unidad de trabajo o energía. Por tradición, muy a menudo se da el calor en términos de las unidades de energía llamadas *calorías,* donde 1 cal = 4.18 J.

En una escala microscópica, cuando tratamos con partículas individuales, no se tiene nada como el calor, o "energía térmica". La energía cinética de una partícula individual cambia, debido a que una partícula hace trabajo sobre una segunda partícula. Por otro lado, el calor y la energía calorífica sólo tienen significado para un número de partículas grande. Esto nos permite mantener y usar el principio de la conservación de la energía, sin tener que considerar en detalle los movimientos de muchas partículas interactuantes.

Desafortunadamente, el término *calor* algunas veces se usa no sólo para describir un proceso de transmisión de energía, sino también para denotar el contenido de energía térmica del sistema. Pero no se puede hablar con propiedad de "contenido" de *calor* de un sistema, de la misma manera que no podemos hablar de "conteni-

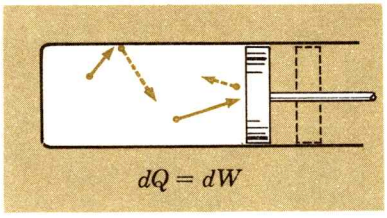


FIG. 18-7. El gas se calienta dQ, hace el trabajo dW, pero no cambia su energía interna cuando, en promedio, un rebote molecular en las paredes que aumenta la rapidez, corresponde con otro en el pistón en el que disminuye la rapidez.

do de trabajo" de un sistema. Además, es engañoso describir al calor como una "forma" de la energía o hablar de "flujo" de calor. Estas frases se han quedado debido a la noción, ahora rechazada, de que el calor (o "calórico") era una sustancia. Por desgracia estas frases han invadido el lenguaje de la termodinámica.

La Fig. 18-5 muestra un proceso en el que no hay calor; se hace trabajo y la energía interna cambia. La Fig. 18-6 muestra un proceso en el que no se hace trabajo; aquí el gas se calienta y la energía interna cambia. Ahora consideraremos la situación de la Fig. 18-7, en la que el gas se calienta y hace trabajo sin que, no obstante, cambie su energía interna. La energía fluye hacia adentro del sistema en forma de calor dQ; al mismo tiempo que una cantidad igual fluye hacia afuera de él en forma de trabajo dW hecho sobre el pistón:

Con energía interna constante: $dQ = dW$

La energía interna del gas (y por ello, la temperatura) no cambia, ocurriendo lo siguiente: En una escala molecular, una molécula típica gana energía cinética cuando golpea una pared fija (caliente), pero pierde energía cinética cuando golpea (y empuja) el pistón. (Como el calor necesita una diferencia de temperatura, las paredes del recipiente deben estar, en sentido estricto, a una temperatura infinitesimalmente más alta que el gas. La "dirección" de la diferencia de temperatura siempre da, es una forma de decirlo, la dirección del flujo neto de energía térmica.)

Por último, considérese un proceso en el que intervengan cambios de los tres —el calor, la energía interna, y el trabajo hecho por el sistema—. Si el calor que entra excede al trabajo que sale —esto es, si la energía térmica introducida al sistema excede a la energía ordenada que sale de él— la energía interna aumentará. La relación que gobierna un proceso como éste es

$$dQ = dU + dW \tag{18-13}$$

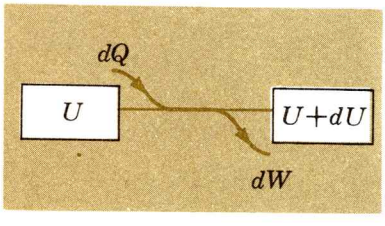


FIG. 18-8. Representación esquemática de la primera ley de la termodinámica. La energía entra al sistema como calor dQ, sale como trabajo dW, y la energía interna aumenta en dU.

Esta es la *primera ley de la termodinámica*. No es más que principio de la conservación de la energía expresado en su forma más general. Corresponde a la transformación de energía en trabajo y calor, e incluye en la energía interna el sistema a *todas* las formas de la energía, tanto ordenadas como desordenadas.

Nótese la convención para los signos en la Ec. (18-13): $+dQ$ representa la energía térmica que *entra* al sistema por calentamiento, $+dW$ representa la energía que *sale* del sistema en virtud del trabajo hecho por él, y dU es el cambio de energía interna del sistema. La Fig. 18-8 es una representación simbólica de la primera ley.

Aunque hemos llegado a la primera ley de la termodinámica

considerando el comportamiento microscópico de las moléculas de un gas ideal, esta relación es del todo general. Después consideraremos sus aplicaciones a sistemas de líquidos y sólidos y su confirmación experimental completa.

Ejemplo 18-2

Una de las mitades de un recipiente aislado contiene 1 g mol de gas helio a 0°C; la otra mitad contiene 1 g mol de gas neón a 100°C. Se quita la separación aislante entre las dos mitades, los gases se mezclan y alcanzan el equilibrio térmico. ¿Cuál es la temperatura final de la mezcla?

Al principio la energía interna total de las moléculas de helio es igual a su número total de N_A multiplicado por la energía interna por molécula $\frac{3}{2}kT$, o sea $\frac{3}{2}N_A kT = \frac{3}{2}RT = \frac{3}{2}R(273\text{ K})$. En forma similar la energía interna total de las moléculas de neón es $\frac{3}{2}RT = \frac{3}{2}R(373\text{ K})$. Después las moléculas se mezclan y alcanzan el equilibrio térmico, cada uno de los dos tipos de gas tendrá una energía interna de $\frac{3}{2}RT_f$, donde T_f es la temperatura final. Por lo tanto, por la conservación de la energía,

$$\tfrac{3}{2}R(273\text{ K}) + \tfrac{3}{2}R(373\text{ K}) = (2)\tfrac{3}{2}RT_f$$

$$T_f = \frac{273 + 373}{2}\text{ K} = 323\text{ K} = 50°\text{C}$$

18—5 EL DESORDEN Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA

La primera ley de la termodinámica, o en forma más sencilla, el principio de la conservación de la energía aplicado a un sistema formado por un número muy grande de partículas, *no* es suficiente para explicar el comportamiento térmico de los gases. Por ejemplo, cuando mezclamos un gas caliente con uno frío, sabemos que la temperatura final de equilibrio queda *entre* las temperaturas iniciales. *No* encontraremos el gas caliente a una temperatura final más alta, ni el gas frío a una temperatura final más baja, aunque esta posibilidad no queda eliminada por la conservación de la energía. Aquí opera una ley fundamental de la física, la *segunda ley de la termodinámica.*

Una formulación muy general de la segunda ley es ésta: *Si un sistema aislado, libre de influencias externas, está al principio en un cierto estado de orden relativo, siempre pasa a estados de desorden relativo, hasta que llega luego de cierto tiempo al estado de desorden máximo.* Discutiremos cualitativamente las ideas incluidas en este enunciado, como se ilustran por el comportamiento de las moléculas gaseosas.

Desde el punto de vista microscópico, *todo* lo que sucede en un gas es esto: las moléculas chocan. En cada choque las moléculas intercambian energía e ímpetu de tal manera que cada una de

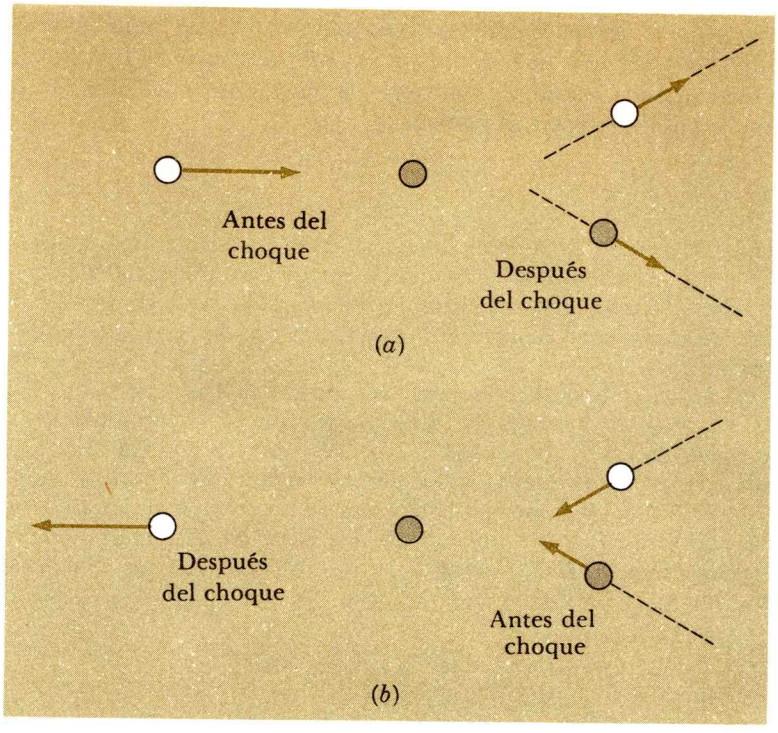


FIG. 18-9. Dos choques moleculares. En el choque (*a*) las energías moleculares toman valores entre los cuales casi no hay diferencia en el choque (*b*) las energías moleculares toman valores más diferentes. El choque (*b*) no es sino el choque (*a*) desarrollándose en sentido inverso en el tiempo.

estas cantidades se conserva. *Todas* las conclusiones generales que se relacionan con el comportamiento del gas se pueden deducir del análisis de los choques moleculares.

Considérese el choque indicado en la Fig. 18-9*a*. Aquí una molécula con una rapidez alta golpea, y le transmite energía e ímpetu a una molécula con rapidez baja (cero). En este choque en particular las energías y las rapideces de las dos moléculas tienden a ser casi iguales. Esto es, desde luego, solo uno de los muchos choques posibles. Otro se encuentra ilustrado en la Fig. 18-9*b*. Aquí dos moléculas, ambas al comienzo en movimiento, chocan de tal manera que una de ellas queda en reposo, mientras que la otra sale del choque con toda la energía que en un principio tenían las dos. Para asegurarnos de que esto es así, de hecho, un choque posible, uno que sea consistente tanto con la conservación del ímpetu como de la energía, sólo necesitamos observar que ese choque no es más que el de la Fig. 18-9*a* desarrollándose hacia atrás en el tiempo. Si se toma el primer choque en una película cinematográfica, se verá el segundo corriendo la película hacia atrás, todas las velocidades moleculares ahora se invierten. *En la escala microscópica, todos los procesos* —lo que es como decir, todos los choques— *son reversibles.*

Hemos visto que en un choque, las rapideces moleculares pueden hacerse más semejantes, o pueden hacerse más desiguales.

Esto es, en los choques moleculares, la energía puede transmitirse de partículas rápidas a lentas, o de lentas a rápidas. En un gas ordinario hay choques frecuentes, y cualquiera de las moléculas cambiará de velocidad con frecuencia, moviéndose en una trayectoria en zigzag. Queremos ahora considerar aquí cómo cambiará la energía cinética molecular individual de un gran número de moléculas, cuando las partículas interactúan por choques intermoleculares. El análisis detallado de estos procesos queda en el área de la *mecánica estadística,* que combina las leyes de la mecánica newtoniana con las reglas de la estadística, para predecir el comportamiento más probable de grupos de partículas.

Considérese un gas con N moléculas monoatómicas confinadas en un volumen V, que tienen una energía interna total constante, así como una energía cinética de translación también constante. ¿Qué forma se podría esperar para la curva de distribución de la energía? Esto es, ¿qué curva dará el número de moléculas N_E como una función de la energía cinética E por partícula? Hay, desde luego, muchas posibilidades consistentes con la ley de la conservación de la energía y la de la conservación del ímpetu; se indican tres de ellas en la Fig. 18—10. En la Fig. 18—10*a* todas las moléculas tienen en esencia la misma energía cinética; para esta distribución todas las moléculas se mueven con la misma rapidez, y el estado del sistema es uno altamente ordenado. La Fig. 18—10*b* muestra otra posible distribución de la energía; en este caso hay dos picos en la curva. Por último, la Fig. 18—10*c* indica la distribución observada en experimentación para cualquier gas en equilibrio térmico, la llamada *distribución maxwelliana.**

Ahora supongamos que se inicia el fenómeno con las moléculas del gas en un estado altamente ordenado indicado por la Fig. 18—10*a*. Si esperamos lo suficiente para que se produzcan muchos choques (quizá 10^{-5} s), la distribución se convierte en la de la Fig. 18—10*c*. De hecho, *cualquier* distribución inicial de energías moleculares, se convierte en la distribución maxwelliana, cuando las moléculas pueden transmitir energía en los choques y alcanzan el caos molecular. Entonces, la energía total distribuida de tal manera que se llega al máximo desorden posible, en realidad el estado de equilibrio térmico a la temperatura T. De hecho, *sólo* se puede definir una temperatura para un grupo de moléculas de gas cuando dichas moléculas han llegado al equilibrio térmico; entonces, la energía cinética promedio por molécula es, desde luego, $\frac{3}{2}kT$. No se puede hablar de una temperatura para distribuciones que no estén en equilibrio, como las indicadas en las Figs, 18—10*a* y *b*, aunque las tres distribuciones tengan la misma energía cinética promedio por molécula.

Un grupo de moléculas alcanza el equilibrio térmico, cuales-

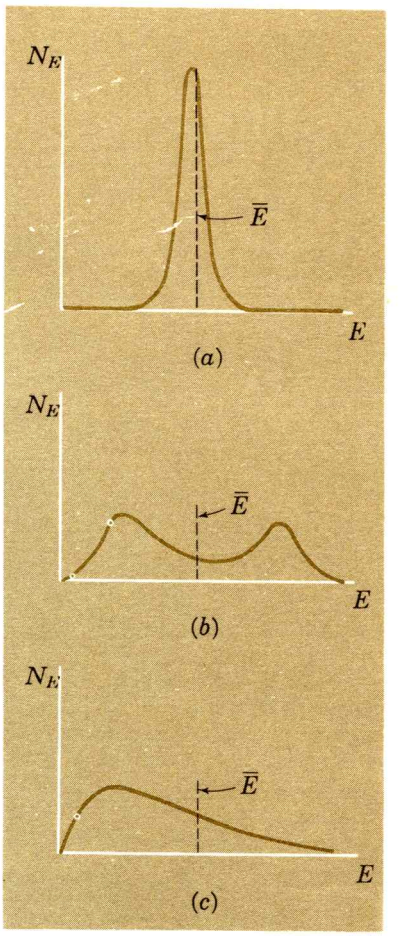


FIG. 18-10. Tres distribuciones posibles de la energía molecular, todas con la misma energía molecular promedio $\bar{E}$. (*a*) Todas las moléculas tienen casi la misma energía. (*b*) Dos picos en la distribución de la energía para un gas en equilibrio térmico. (*c*) La distribución maxwelliana de la energía para un gas en equilibrio térmico.

*Derivada primero por J. C. Maxwell, usando las suposiciones básicas de la mecánica estadística.

quiera que sea la distribución inicial de las energías moleculares, porque el estado de equilibrio representa al estado *más probable.* La suposición básica de la mecánica estadística para llegar a este resultado es la siguiente: *Todos los estados microscópicos son de igual modo probables,* y esos estados se ocupan de acuerdo con el azar. Desde luego hay las exigencias adicionales de que la energía total de todas las moléculas sea constante y de que el ímpetu total de todas las moléculas sea cero.

Por un estado microscópico se entiende un estado que corresponde a una posición e ímpetu específicos para cada una y para todas las moléculas de un gas. Hay muchos más estados microscópicos posibles que presentan desorden o que están cerca del desorden que los que presentan orden, por lo que el estado macroscópico más probable es de desorden máximo, en realidad, esto es casi lo más seguro. De manera análoga, esto no es como encontrar las cartas de un paquete bien barajado en un estado de orden tal, que las primeras cuatro cartas sean ases, sólo porque el número de arreglos desordenados excede y con mucho al número de arreglos para los que las primeras cuatro cartas sean ases. *Es posible* que las moléculas de un gas al principio en equilibrio, en un cierto tiempo posterior, puedan estar moviéndose con exactamente la misma rapidez, como en la Fig. 18—10*a*, pero esta posibilidad es tan abrumadoramente difícil, que es de hecho imposibe. Un sistema aislado pasará de un estado de orden relativo a uno de desorden relativo porque el estado de desorden es, de hecho, el estado más probable.

Considérese el ejemplo siguiente. En la mitad izquierda de un recipiente aislado, se pone oxígeno gaseoso que al comienzo estaba en equilibrio térmico a la temperatura T_b. Vea la Fig. 18—11*a*. Un número igual de moléculas de helio gaseoso está en la mitad derecha del recipiente, separado del lado izquierdo por medio de un tabique aislante removible. El gas helio al principio estaba en equilibrio térmico a la temperatura T_a, donde $T_a > T_b$. La distribución de las dos clases de moléculas, en el *espacio* y en la *energía,* se indica en las Figs. 18-11*b* y *c,* en este orden. Supóngase que se quita el tabique de separación y se espera hasta que se alcanza el estado de equilibrio final. Ahora, ¿cómo será la distribución de las moléculas en el espacio y la energía?

Antes de quitar el tabique, hay un grado de orden espacial: Todas las moléculas de oxígeno están en la mitad izquierda, y las moléculas de helio en la mitad derecha. Hay, además, desorden entre las moléculas de oxígeno a T_b; en forma similar, hay desorden de energía entre las moléculas de helio a la temperatura T_a. Después de que el tabique se quita, las moléculas de oxígeno pueden moverse en la mitad derecha y las moléculas de helio en la de la izquierda. Se producen choques intermoleculares, los gases se mezclan por completo, y en un tiempo corto encontramos a las moléculas de helio y oxígeno distribuidas de manera uniforme en

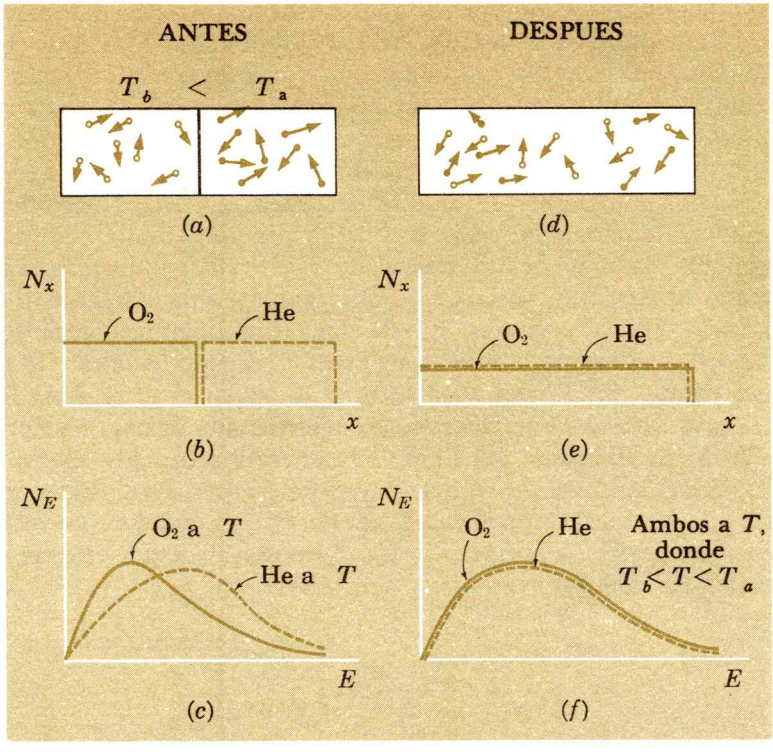


FIG. 18-11. Las moléculas de oxígeno (O_2) a una temperatura baja T_b y las moléculas de helio (He) a una temperatura alta T_a están en un recipiente aislado con un tabique de separación. Las moléculas en el recipiente (*a*) antes, y (*d*) después de que el tabique se retira. La distribución espacial de las moléculas (*b*) antes, y (*e*) después de mezclarse. La distribución de la energía molecular (*c*) antes, y (*f*) después de mezclados.

el recipiente. Así, la distribución final de ambas clases de moléculas es de un desorden máximo, tanto en el espacio como en la energía.

Por la segunda ley, la distribución de la energía, después de que el tabique se quita, corresponde al desorden máximo de energía. Además, como las moléculas de helio inicialmente estaban a un temperatura más alta que las moléculas de oxígeno, la probabilidad de que la energía se transmita en un choque de una molécula de helio a una molécula de oxígeno es mayor que para la transmisión en sentido inverso. Así, la energía térmica irá desde el gas helio caliente al gas oxígeno frío hasta que las dos llegan a una temperatura común intermedia entre T_b y T_a. Entonces ellos tendrán una distribución común de espacio y energía, como se ve en las Figs. 18—11*c* y *f*.

¿Es posible que, en cierto tiempo posterior, encontráramos de nuevo todas las moléculas de oxígeno del lado izquierdo a T_b y todas las moléculas de helio al lado derecho a la temperatura T_a? Sí. ¿Esto es probable? No. Es extraordinariamente improbable porque hay muchos más estados microscópicos que corresponden a la distribución uniforme en el espacio y que tienen la distribución maxwelliana, que aquellos estados correspondientes al alto grado de orden en el que los dos gases están separados en el recipiente y a temperaturas diferentes.

Vimos antes que los choques individuales entre las partículas son reversibles en el tiempo. No podemos decir, al ver una película de cine que proyecte un choque intermolecular, si se corre hacia adelante o hacia atrás. Esto *no* sucede cuando se trata de un número de partículas muy grande. En la escala macroscópica, los procesos son en esencia irreversibles, porque un sistema se mueve de modo inexorable de estados de orden relativo al desorden. De nuestra experiencia, *podemos* decir de inmediato cuándo una película de cine de un fenómeno ordinario en gran escala, tal como la explosión de una bomba, corre hacia adelante o hacia atrás. Así, la segunda ley de la termodinámica implica una direccionalidad para el tiempo. En el nivel macroscópico, la flecha del tiempo apunta hacia el futuro. El orden pasa al desorden, la energía ordenada se degrada a desordenada o energía térmica. También, el sentido del flujo de la energía térmica —el "sentido" del calor, si tuviera— es del cuerpo de temperatura alta al cuerpo de baja temperatura, se puede asegurar que dos cuerpos aislados, en un principio a temperaturas diferentes, alcanzan una temperatura final común.

RESUMEN

En la teoría cinética se supone que las moléculas de tamaño despreciable se encuentran en movimiento aleatorio y producen choques elásticos con otras y con las paredes del recipiente, la duración de cualquier choque es muy corto comparado con el tiempo que pasa entre los choques. Esta teoría relaciona la presión p y el volumen V de un gas ideal con el número N de moléculas, la masa molecular m, y la rapidez promedio raizcuadrática v_{rcm}.

$$pV = \tfrac{1}{3}Nmv_{\text{rcm}}^2 \qquad (18\text{-}7)$$

La energía cinética de traslación promedio de una molécula en un gas que se encuentre en equilibrio térmico a la temperatura T es $\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv_{\text{rcm}}^2$.

La energía interna U de un gas monoatómico con N moléculas, debida al movimiento molecular de translación es

$$U = N(\tfrac{3}{2}kT) \qquad (18\text{-}11)$$

La primera ley de la termodinámica se puede escribir en la forma

$$dQ = dU + dW \qquad (18\text{-}13)$$

donde dQ es el calor que entra al sistema, dU el cambio en la energía interna del mismo, y dW el trabajo hecho por el sistema sobre lo que lo rodea. Esta ley no es sino el principio de la

conservación de la energía generalizado, para incluir la transmisión de energía en forma de calor, que es la transmisión de energía desordenada provocada por una diferencia de temperatura.

Las moléculas de un gas en equilibrio térmico están distribuidas en un margen de rapideces muy grande. La rapidez promedio raizcuadrática v_{rcm} se relaciona con la temperatura T por $\frac{1}{2}m\bar{v}_{rcm}^2 = \frac{3}{2}kT$. La energía cinética de translación promedio por molécula, $\frac{3}{2}kT$, es la misma para todos los gases a la misma temperatura T.

En términos del comportamiento microscópico molecular, la segunda ley de la termodinámica se puede indicar como sigue: Cualquier sistema libre de influencia externa, siempre pasará de estados de orden relativo a estados de desorden relativo, hasta que llega al estado de máximo desorden, el equilibrio térmico. Entonces, el estado de desorden máximo es consistente con la conservación de la energía y el ímpetu, correspondiendo al estado más probable.

PROBLEMAS

18-1. La mayor parte de los materiales de bajo peso atómico tienen densidades del orden de pocos gramos por centímetro cúbico. Calcule el tamaño aproximado de una molécula de materiales como éstos.

18-2 Demuestre que los diámetros atómicos (aproximados) d_1 y d_2 de los elementos "1" y "2" en la forma de sólidos se relacionan en la forma siguiente:

$$\frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{A_2/\rho_2}{A_1/\rho_1}\right)^{1/3}$$

donde A y ρ se refieren al peso atómico y la densidad, respectivamente. (Aunque las magnitudes de A varían entre 1 y alrededor de 240, y los de ρ entre 0.075 y 22.48, la razón A/ρ se restringe a un margen de 5 a 1, y todos los elementos tienen casi el *mismo* diámetro atómico.)

18-3. Un cierto rayo está formado por partículas cada una de masa m, que se mueven en la misma dirección y sentido con la rapidez v. El rayo incide en dirección normal sobre una superficie, el número de partículas que la golpean por unidad de tiempo es N. ¿Cuál es la fuerza promedio sobre la superficie si todas las partículas chocan elásticamente?

18-4. En seguida se indican las rapideces en metros por segundo de 10 moléculas: 2,4,6,6,8,9,9,10,11,15. Calcule (*a*) la rapidez promedio y (*b*) la rapidez promedio raizcuadrática para esas moléculas.

18-5. El peso de un recipiente que contiene un gas excede al peso del mismo recipiente al vacío; una balanza indica un peso para un recipiente lleno igual a la suma del peso del recipiente vacío y el peso del gas solo. Explique por qué sucede esto, aunque todas y cada una de las moléculas del gas, de acuerdo con la teoría cinética, se mueven con libertad en el espacio excepto durante los choques de duración despreciable. Use las consideraciones siguientes: Un recipiente de altura h contiene una molécula de masa m que se mueve en sentido vertical hacia arriba y hacia abajo, y ejecuta choques perfectamente elásticos con las paredes inferior y superior. Su rapidez es v cuando se mueve hacia arriba de inmediato después de chocar con la pared inferior, y se acelera en forma constante hacia abajo con una aceleración que tiene el valor de g. Demuestre que la fuerza promedio de la molécula sobre la pared inferior excede la de la pared superior en mg; esto es, la fuerza promedio de la molécula sobre el recipiente, es exactamente su peso.

18-6. Demuestre que las siguientes son consecuencias de la teoría cinética de los gases. (*a*) La ley de Avogadro: Bajo las mismas condiciones de temperatura y presión, volúmenes iguales de gases diferentes contienen el mismo número de moléculas. (*b*) La ley

de Dalton de las presiones parciales: Cuando dos o más gases que no interactúan químicamente se encuentran juntos en el mismo recipiente, la presión total es igual a la suma de las presiones parciales con que contribuyen por separado cada uno de los diferentes gases.

18-7. ¿Cuál es la rapidez rcm de las moléculas del gas helio a 4.216 K? El gas helio es monoatómico, con el peso molecular de 4.00. (El helio líquido hierve a 4.216 K cuando la presión es de una atmósfera.)

18-8. ¿Cuál es la razón de la rapidez rcm de las moléculas de oxígeno en el aire a la rapidez rcm de las moléculas de nitrógeno, también en el aire, a cualquier temperatura?

18-9. Un neutrón térmico es uno cuya energía cinética promedio es igual a la de una molécula de gas a 300 K. ¿Cuál es la rapidez rcm de un neutrón térmico (masa, 1.67×10^{-27} kg)?

18-10. Los fragmentos de los átomos de uranio que han sufrido la fisión nuclear tienen una energía cinética promedio de 1.1×10^{-11} J. ¿Cuál será la temperatura aproximada de un gas formado por estos fragmentos de la fisión?

18-11. Demuestre que la rapidez rcm de un gas de peso molecular w a la temperatura absoluta T está dada por $v_{rcm} = \sqrt{3RT/w}$.

18-12. La rapidez del sonido a través de un gas ideal es directamente proporcional a la rapidez rcm de las moléculas del gas. ¿Cuál es la razón de la rapidez del sonido a través del gas helio a la rapidez del sonido a través del gas oxígeno, considerando a ambos como gases ideales, a la misma temperatura?

18-13. ¿Cuál es la energía cinética de translación total de 1 g mol de cualquier gas a 300 K?

18-14. Encuentre la rapidez a la que la energía cinética de un automóvil de 1 000 kg sería igual a la energía térmica contenida en 1.0 kg de gas helio a las NTP. El peso atómico del helio, un gas monoatómico, es de 4.00 g.

18-15. Un gas ideal en un recipiente perfectamente aislado se comprime cuando un pistón se desplaza 2.0 cm por medio de una fuerza de 100 N. (*a*) ¿En cuánto cambia la energía interna del gas? (*b*) ¿Sube o baja la temperatura?

18-16. (*a*) Demuestre que para un gas ideal $pw = \rho RT$, donde w es el peso atómico del gas. (*b*) Use esta relación para determinar la densidad del aire a una altura de 20 km, donde la temperatura y la presión son $-56°C$ y 0.0540 atm, respectivamente. El peso molecular promedio del aire es de 29.0

18-17. En la parte más alta de la fotósfera, la superficie visual del Sol, la temperatura, presión y densidad son 4 500 K, 1.0×10^{-2} atm, y 2.8×10^{-8} g/cm^3, en este orden. Determine la masa promedio de una partícula en la atmósfera solar a ese nivel. (En este cálculo, suponga que los gases en la atmósfera solar pueden tratarse como si fueran gases ideales.)

18-18. *Una bomba de difusión* puede mantener fácilmente una presión de 1.0×10^{-6} torr a 273 K. (El *torr* es una unidad usada muy a menudo para caracterizar presiones bajas; 1 torr = 1 mm de Hg.) (*a*) Si el gas residual es helio, encuentre la densidad correspondiente y el espaciamiento intermolecular. El peso atómico (y molecular) del gas helio es 4.00. (*b*) Determine la razón entre estos valores y las cantidades correspondientes para el gas helio a NTP.

18-19. Un recipiente con el volumen de 1 000 cm^3 contiene 10^8 moléculas. ¿Cuál es la probabilidad de (*a*) encontrar una molécula en particular localizada en una cierta región de 1 cm^3 del recipiente, (*b*) encontrar todas las 10^8 moléculas en esa región, (*c*) encontrar una molécula particular que se mueva hacia la derecha, (*d*) encontrar todas las moléculas moviéndose hacia la derecha, y (*e*) encontrar todas las moléculas ubicadas dentro de una región de 1 cm^3 y moviéndose hacia la derecha?

Capítulo

19

PROPIEDADES TERMICAS DE SOLIDOS Y LIQUIDOS

En este capítulo extendemos los conceptos básicos termodinámicos —temperatura, energía térmica, calor, y la primera y segunda leyes de la termodinámica— desde el sistema sencillo del gas ideal, a los sistemas más complicados de los sólidos y los líquidos. Consideramos los experimentos fundamentales de Joule, que establecen la primera ley de la termodinámica, junto con los calores específicos y los calores latentes. Por último, tratamos de los modos de transmisión de la energía térmica; conducción y radiación.

19—1 SOLIDOS Y LIQUIDOS COMO SISTEMAS TERMICOS

Los gases ideales son sistemas térmicos sencillos. A bajas densidades todos los gases siguen la misma ecuación de estado, la ley general de los gases; la temperatura absoluta de cualquier gas ideal no es más que una medida de la energía cinética de translación molecular promedio, y se pueden relacionar el comportamiento microscópico molecular con las propiedades macroscópicas de un gas, directamente a través de un modelo mecánico, la teoría cinética.

¿Cuál es la razón fundamental por la que los gases muestran este comportamiento en cierta forma simple? Esta es: Aparte de los choques perfectamente elásticos de duración despreciable, una molécula en un gas de baja densidad siempre está en un movimiento libre de fuerzas desplazándose a lo largo de una línea recta con rapidez constante. Los choques intermoleculares sirven sólo para mantener el caos molecular y el equilibrio térmico; aparte de esto, no se necesita (para los gases ideales) tener en cuenta otras interacciones entre moléculas.

Los sólidos y los líquidos son diferentes. En esos estados, las moléculas *no* están separadas, en promedio, por distancias que

sean grandes comparadas con el alcance de la fuerza intermolecular. En realidad, en los estados sólido y líquido, las moléculas vecinas interactúan de continuo. Como una consecuencia, la energía total de las partículas *no* es solamente la suma de sus energías cinéticas. Se debe tener en cuenta, además, a las energías *potenciales* intermoleculares. Entonces, busquemos el significado de la energía térmica para los estados sólido y líquido.

Primero recordamos que, para un gas ideal monoatómico en equilibrio térmico, la única contribución a la energía térmica es la energía cinética de *traslación* desordenada de las moléculas. El ímpetu lineal de todas las moléculas es cero. Para moléculas diatómicas o poliatómicas, pueden haber contribuciones adicionales a la energía total del sistema. Si las moléculas giran, la energía cinética de rotación forma una parte de la energía térmica del gas. Esta energía cinética de *rotación* es desordenada porque las moléculas giran alrededor de ejes orientados en todas direcciones; esto es, el momento angular de todas las moléculas giratorias es cero. Además, si las moléculas están animadas de movimientos vibratorios, la energía asociada con la oscilación molecular contribuye a la energía térmica del gas. La energía de *vibración* —ahora una combinación tanto de energía cinética como de energía potencial— es desordenada porque los ejes de vibración están orientados desordenadamente.

Ahora consideraremos las contribuciones a la energía desordenada, o térmica para un sólido. Un sólido se puede tomar como un grupo de átomos ligados entre sí, cada átomo oscila alrededor de una posición de equilibrio a cualquier temperatura finita. Además, algunos de los electrones atómicos menos ligados pueden vagar por el sólido. Excepto para temperaturas sumamente bajas, la energía cinética de traslación de estos electrones no tiene importancia en la termodinámica, por razones que explica la teoría cuántica. Por lo que, para un sólido, la energía térmica está formada (casi enteramente) por la energía cinética y potencial de los átomos que vibran alrededor de posiciones de equilibrio.

Es importante distinguir de nuevo entre energía *ordenada* y *desordenada*. Supóngase que todos los átomos de un sólido tienen la misma velocidad. Entonces el sólido como un todo estará en movimiento en la dirección y con el sentido de los vectores velocidad, y la energía cinética del cuerpo será *ordenada*. Vea la Fig. 19-1*a*. De la misma manera, si el cuerpo estuviera en reposo y se aplicaran un par de fuerzas externas al sólido para estirarlo, los átomos aumentarán sus distancias de separación a lo largo de la dirección de las fuerzas aplicadas y el cuerpo como un todo tendrá energía potencial elástica *ordenada*. Vea la Fig. 19—1*b*.

La energía *térmica* de un sólido es algo más que eso. Está formada en parte de la energía cinética de vibraciones atómicas; Esta *energía cinética es desordenada* en virtud de la variedad de

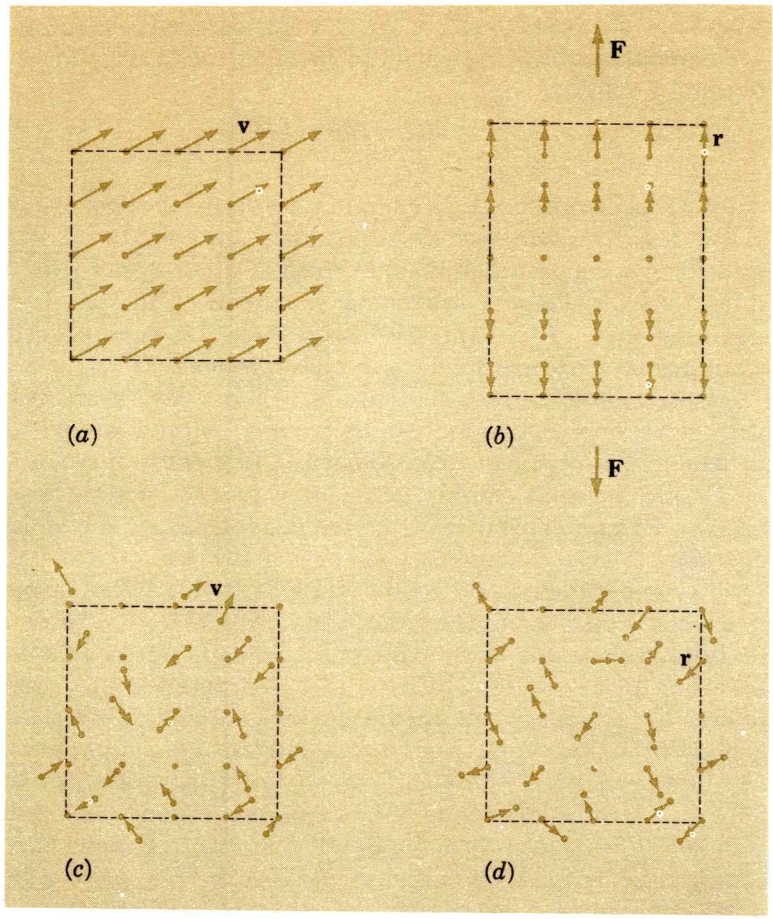


FIG. 19-1. Energía ordenada-vs-desordenada para las partículas de un sólido. (*a*) El cuerpo como un todo está en movimiento y tiene *energía cinética ordenada,* debido a que todos los átomos tienen la *misma* velocidad. (*b*) El cuerpo como un todo está estirado y tiene *energía potencial ordenada,* en tanto los átomos están desplazados a lo largo de una dirección común a las fuerzas aplicadas. (*c*) *Energía cinética desordenada:* los vectores indican que las velocidades atómicas están distribuidas al azar en magnitud y dirección. (*d*) *Energía potencial desordenada:* Los vectores muestran los desplazamientos atómicos, que están distribuidos al azar en magnitud y dirección.

las velocidades atómicas, tanto en magnitud como en dirección y sentido, como se indica en la Fig. 19—1*c*. El ímpetu lineal resultante asociado con esta energía desordenada es cero. Además, hay energía térmica asociada con la energía potencial molecular. Esta *energía potencial* es *desordenada* (Fig. 19—1*d*); los átomos tienen desplazamientos desordenados, a partir de sus posiciones de equilibrio, que difieren en magnitud, dirección y en sentido, y el sólido como un todo no muestra deformación neta (aparte de la dilatación térmica). En pocas palabras, las oscilaciones desordenadas de los átomos de un sólido son el origen de la energía térmica del sólido (con una contribución relativamente mínima de los electrones "libres" que están dentro del sólido).

En una forma semejante, la energía térmica de un líquido está asociada con las energías moleculares cinética y potencial desordenadas. En este estado, sin embargo, las moléculas no están ligadas a una posición de equilibrio, y la energía cinética de traslación desordenada de las moléculas también contribuye a la energía térmica.

19—2 LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA

Queremos ahora aplicar la primera ley de la termodinámica a líquidos y sólidos:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \qquad (18\text{-}13)$$

Aquí ΔU es el cambio en la energía interna del sistema. Ambos ΔQ y ΔW describen procesos de transmisión de energía. El calor ΔQ mide la energía desordenada que entra al sistema en virtud de una diferencia de temperatura entre el sistema y lo que lo rodea, mientras que el trabajo ΔW representa la energía ordenada transmitida desde el sistema a lo que lo rodea.

Para establecer la validez de la primera ley, se necesita sólo demostrar que el cambio en la energía interna de un sistema depende de la *cantidad neta* de energía que entra al sistema, pero *no de que llegue* el cambio de energía interna, *por trabajo o por calor,* o en una combinación de las dos formas de transmisión de energía.

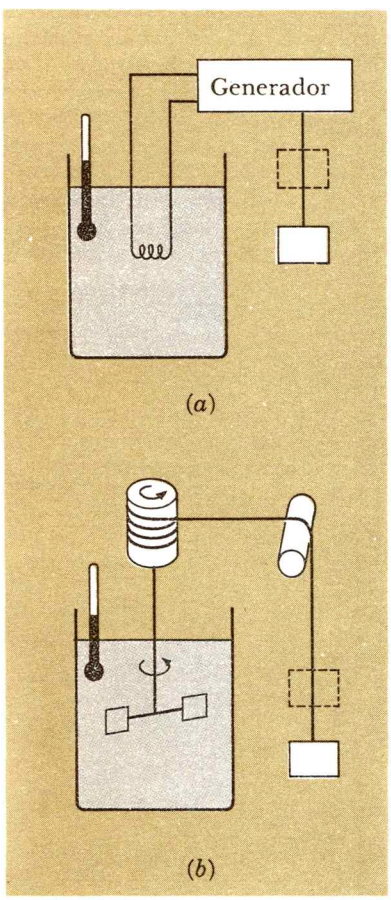


FIG. 19-2. El experimento de Joule: (*a*) Un peso que desciende mueve un generador eléctrico, que opera un calentador eléctrico, el cual a su vez eleva la temperatura de un líquido; (*b*) un cuerpo que desciende mueve un agitador, el cual hace girar el líquido y aumenta su temperatura.

Los experimentos de J. Joule (1818—1889) hacen justamente eso. Considérese la situación mostrada en la Fig. 19—2*a* en la que un líquido tiene una energía interna cambiada por el calentamiento. Aquí un generador eléctrico (a cuyos detalles no necesitamos referirnos) se mueve por medio de un cuerpo que desciende. El generador manda una corriente eléctrica hacia una bobina de alambre, y el alambre caliente eleva la temperatura del líquido. Suponiendo que la energía interna del generador no cambia, el trabajo $\Delta W = mg\,\Delta y$, hecho por el peso mg al descender una distancia Δy, es igual en magnitud al calor ΔQ que pasa al líquido, y ΔQ también equivale al cambio $\Delta U_{\text{líq}}$ en la energía interna del líquido.

$$\Delta W = \Delta Q = \Delta U_{\text{líq}}$$

Para la situación mostrada en la Fig. 19—2*b*, la energía entra al líquido como trabajo, no como calor. Ahora el cuerpo que desciende hace girar un agitador sumergido en el líquido. Inicialmente, el líquido se pone en movimiento de rotación por el agitador, y adquiere una energía cinética de rotación macroscópica. Pero el líquido pronto queda en reposo debido a la fricción interna, y la energía de rotación ordenada se convierte en energía térmica desordenada. El trabajo ΔW hecho por el cuerpo que desciende es igual al trabajo hecho por el agitador sobre el líquido, que es, a su vez, igual al aumento ΔU en la energía interna del líquido.

$$\Delta W = \Delta U_{\text{líq}}$$

El cambio en la energía interna del líquido se manifiesta como un cambio ΔT en su temperatura. Los experimentos de Joule indican

que el monto de este cambio de temperatura era el mismo para los arreglos en las Figs. 19—2*a* y *b* —esto es, la energía agregada tanto por el calor como por el trabajo— si el trabajo ΔW hecho por el peso que desciende fue el mismo.

Los experimentos también muestran que el cambio de temperatura del líquido ΔT es proporcional al trabajo ΔW; y que, para un ΔW constante, ΔT, es inversamente proporcional a la masa m del líquido. En resumen,

$$\Delta W \propto m\,\Delta T$$

que, teniendo en cuenta las dos ecuaciones anteriores, es equivalente a

$$\Delta U_{\text{liq}} = cm\,\Delta T \qquad (19\text{-}1)$$

donde c es una constante de proporcionalidad cuya magnitud depende de la naturaleza del líquido. La Ec. (19—1) implica que el cambio en la energía térmica de un líquido es directamente proporcional tanto a la masa del líquido m como al cambio de temperatura ΔT. Posponemos la consideración de los valores de c y de sus unidades a la sección siguiente.

La temperatura de un líquido puede cambiarse calentándolo, o haciendo trabajo sobre él o cambiando la energía cinética interna ordenada o energía potencial en energía térmica. Cuando la temperatura cambia, el cambio de la energía térmica interna es proporcional a la masa y a la diferencia de temperatura, independientemente del modo por medio del cual la energía entra al sistema.

Para los sólidos se encuentra el mismo resultado. Se puede, por ejemplo, cambiar la temperatura de una barra metálica calentándola, haciendo trabajo sobre ella flexionándola varias veces o golpeándola o poniéndola en reposo en un choque inelástico. De nuevo, la Ec. (19-1) relaciona el cambio de energía interna térmica de la masa del sólido y el aumento de temperatura.

19—3 CALORES ESPECIFICOS Y UNIDADES DE CALOR

Los experimentos de la clase descrita en la sección anterior, muestran que se necesitan 4.18 J de trabajo o de calor para elevar la temperatura de 1 g de agua en 1 C°. Es conveniente darle un nombre especial a esta cantidad, la *caloría*. Por definición (U.S. National Bureau of Standards),

$$1 \text{ cal} = 4.18400 \text{ J}$$

En sentido estricto, la cantidad de energía que se necesita para cambiar la temperatura del agua 1 C° difiere un poco, de acuerdo con la temperatura inicial del agua; la caloría es, casi exactamente, la energía térmica que cambia la temperatura de 1 g de agua de 14.5 a 15.5°C. Esta unidad de energía algunas veces se indica

como la *caloría gramo. La caloría kilogramo,* que también se conoce como caloría "grande" abreviándose kcal, es igual a 10^3 g cal. Una caloría kilogramo eleva la temperatura de 1 kg de agua 1 C°.*

Debe hacerse hincapié en que la caloría, aunque se use sobre todo al medir el calor y la energía térmica, no es más que otra unidad de energía. Se puede expresar perfectamente bien la energía cinética de una pelota de beisbol en calorías.

Por *calor específico* (capacidad) c de una sustancia se entiende la energía térmica necesaria para cambiar la temperatura de una unidad de masa del material 1°; esto es,**

$$c = \frac{\Delta U}{m\,\Delta T} \tag{19-2}$$

Esta relación no es sino la Ec. (19—1) despejando a la constante c.

El calor específico del agua es 1.00 cal/g C°. Se encuentra que el aumento de temperatura de 1 g de mercurio en 1 C° necesita 0.033 cal; por lo tanto, el calor específico del mercurio es de 0.033 cal/g C°.

*El nombre *British thermal unit* (Btu) se le da a la energía necesaria para elevar la temperatura de 1 lb de agua en 1 F°.

**Estrictamente, para los gases debemos definir el calor específico como $c = \lim_{\Delta T \to 0} (\Delta Q/m\,\Delta T)$.

Pero $\Delta Q \approx \Delta\ U/$para sólidos y líquidos, ya que es muy pequeño el trabajo ordenado que hacen cuando se calientan.

Tabla 19—1

Sustancia	*Temp.* (°C)	*Calor Esp.* (cal/g-C°)	*Calor Esp. Molar* ($\times R$)
*Gases**			
Helio	−260–3000	1.25	2.49
Vapor de agua	100–120	0.48	4.33
Sólidos			
Aluminio	20	0.217	2.92
Cobre	−263	0.00086	0.005
Cobre	20	0.093	2.94
Cobre	1000	1.10	3.48
Hierro	20–100	0.113	3.00
Plomo	20–100	0.031	3.22
Vidrio	20–100	0.199	
Hielo	−10–0	0.55	
Líquidos			
Mercurio	0–100	0.033	3.35
Agua	0	1.009	
	15	1.000	
	100	1.006	

*Los calores específicos de los gases están tomados a presión constante.

La Tabla 19—1 es una lista de los calores específicos para cierto número de materiales. Para líquidos y sólidos los calores específicos a volumen constante y a presión constante son tan semejantes que de ordinario no se necesita distinguirlos. Esto es porque los líquidos y los sólidos son altamente incompresibles y el trabajo hecho en la espansión es despreciable. Debe notarse que el calor específico de un líquido o un sólido *no* es independiente de la temperatura. Por ejemplo, el cobre tiene el calor específico de 0.093 cal/g C° a 20°C, pero su calor específico a −263°C es sólo de 0.00086 cal/g C°. En realidad, los calores específicos de todas las sustancias tienden a cero al acercarse a la temperatura del cero absoluto. Así, en general el calor específico c no es constante, y la Ec. (19—2) se aplica sólo cuando la diferencia de temperaturas ΔT es suficientemente pequeña. No obstante, los calores específicos de la mayoría de los materiales a temperaturas no muy alejadas de la temperatura ordinaria (300 K) pueden tomarse como constantes.

El término *capacidad calorífica* (más apropiadamente, *capacidad de energía térmica*) se usa para denotar la energía térmica necesaria para cambiar la temperatura de un objeto en 1°. Así, la capacidad calorífica de un objeto de masa m y calor específico c es igual a $\Delta U/\Delta T = cm$.

Cuando la energía térmica entra, o sale de, una sustancia, además de un cambio de temperatura, (o en lugar de él), puede muy bien haber un cambio de estado. A este cambio de estado se le debe asociar el *calor latente*. Por ejemplo, para fundir hielo a 0°C para que pase a ser agua a 0°C, se necesita que se le *agreguen* 80 cal/g a presión atmosférica; recíprocamente, para la congelación de agua a 0°C con el fin de que pase a hielo a 0°C, se necesita que se le quiten 80 cal/g al agua.

Ejemplo 19-1

Un bloque de cobre 40 g que originalmente se encontraba a 20°c se deja caer en un recipiente aislado que contiene 200 g de agua en un principio a 80°C. ¿Cuál es la temperatura del cobre y del agua después que se alcanza el equilibrio térmico?

El bloque de cobre se calienta por el agua que al principio está a una temperatura más alta. El contenido de energía térmica del cobre aumenta y el contenido de energía térmica del agua disminuye, ambos en la misma cantidad, hasta que las dos sustancias alcanzan la temperatura común. El aumento de energía interna del cobre es, por la Ec. (19-2),

$$\Delta U_{\text{cobre}} = cm\,\Delta T_{\text{cobre}} = (0.093\ \text{cal/g-C°})(40\ \text{g})(t_f - 20°\text{C})$$

donde t_f es la temperatura final. En forma similar, la disminución en la energía interna del agua es

$$\Delta U_{\text{agua}} = cm\,\Delta T_{\text{agua}} = (1.00\ \text{cal/g-C°})(200\ \text{g})(80\ \text{C°} - t_f)$$

Como la energía se conserva, $\Delta U_{\text{cobre}} = \Delta U_{\text{agua}}$, y tenemos

$$(0.093)(40)(t_f - 20°C) = (1.00)(200)(80 - t_f)$$

$$t_f = 79°C$$

La temperatura del agua decrece sólo en 1°C, no sólo porque la masa del agua es mayor que la del cobre, sino en forma más especial, porque el calor específico del agua es mucho mayor que el del cobre. Como puede verse en la Tabla 19-1, el calor específico del agua es relativamente alto; viendo como son los líquidos y los sólidos, se nota que el agua es muy difícil de calentar.

El procedimiento descrito en este ejemplo, puede usarse para medir el calor específico de una sustancia. Las masas, las temperaturas iniciales, y las temperaturas finales del equilibrio, se miden con facilidad, y se puede calcular el calor específico desconocido. Este procedimiento experimental se conoce como *calorimetría*.

Ejemplo 19-2

Un bloque de cobre, originalmente a 20°C y en reposo, se deja caer desde una altura de 40 m. El bloque golpea y queda en reposo en una superficie aislada. ¿Cuál es la temperatura final del cobre, suponiendo que no se pierde energía térmica?

En el Ej. 19-1 la energía interna y la temperatura del cobre fueron aumentadas porque el cobre recibió energía transmitida en forma de calor. En este ejemplo el cobre *no* se calienta; esto es, el cobre *no* cambia de temperatura por haber estado en contacto con un material más caliente. Aquí el bloque (y la Tierra) pierde energía potencial gravitacional, y el bloque gana energía cinética macroscópica al caer, al chocar con la superficie, se hace *trabajo* sobre el bloque. Su energía interna aumenta cuando el bloque se deforma, y la fricción interna cambia la energía ordenada en desordenada, o energía térmica. La energía potencial gravitacional original $mg\,\Delta y$ se convirtió en energía térmica interna $cm\,\Delta T$. Por lo que,

$$mg\,\Delta y = cm\,\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{g\,\Delta y}{c} = \frac{(9.8\ \text{m/s}^2)(40\ \text{m})(1\ \text{kg}/10^3\ \text{g})}{(0.093\ \text{cal/g-C°})(4.18\ \text{J/cal})} = 1.0\ \text{C°}$$

La temperatura final del cobre es de 21°C.

Aunque *todo* el trabajo hecho sobre un gas, líquido, o sólido se puede transformar en energía térmica, la recíproca no es cierta. Una limitación fundamental en la conversión de energía térmica en trabajo útil proviene, por ejemplo, de la consideración de una *máquina térmica* ideal, el término se usa para designar cualquier aparato que, cuando opera sobre un ciclo completo que regresa a su estado inicial, transforma calor de un depósito a alta temperatura en trabajo sobre un objeto externo. Aunque un aparato como éste estuviera por completo libre de fricción y operara en el ciclo más eficiente de todos los concebibles (el ciclo de Carnot), de

acuerdo con la segunda ley de la termodinámica, sólo una parte del calor que entra a la máquina partiendo del depósito caliente, se puede sacar en forma de trabajo útil hecho por la máquina sobre un ciclo completo, la energía térmica restante necesariamente se descarta (sin uso) en un depósito de calor a baja temperatura. En consecuencia, cualquier fuente de energía térmica, como un combustible químico o nuclear, y los aparatos usados para convertir energía térmica a alta temperatura en trabajo útil, están sujetos a una limitación fundamental en eficiencia. Estos resultados se siguen de argumentos muy generales de la termodinámica esencial, que típicamente emplean el concepto de la *entropía,* una medida cuantitativa del desorden relativo de un sistema. De la misma manera que el desorden relativo de cualquier sistema aislado debe aumentar con el tiempo, la segunda ley de la termodinámica también puede formularse en términos de una entropía creciente de un sistema aislado.*

19—4 CONDUCCION TERMICA

El calor es aquel proceso de transmisión de energía que se lleva a cabo en virtud de una diferencia de temperatura. Cuando un objeto caliente está en contacto con un objeto frío, fluye energía térmica desde el cuerpo caliente al frío. Este flujo puede llevarse a cabo dentro de un solo objeto: La energía térmica fluye de una región que está a alta temperatura a una región vecina que se encuentre a menor temperatura, si entre los dos puntos se mantiene la diferencia de temperatura. Esta transmisión de energía térmica (frecuente y redundamentemente llamada, un "proceso de transmisión de calor") es la *conducción térmica.*

La energía térmica de un sólido está formada sobre todo por la vibración de los átomos alrededor de sus posiciones de equilibrio. Los átomos vecinos en el sólido interactúan; cuando un átomo oscila, influye en el movimiento de los átomos vecinos. Si una región de un sólido se encuentra a una temperatura más alta que las regiones vecinas, las amplitudes (y energías) de las oscilaciones atómicas son más grandes en las regiones calientes. Entonces la energía térmica se transmite desde las regiones calientes, a las frías por el acoplamiento entre los osciladores vecinos.

Si, además de los átomos vibrantes, un sólido también tiene electrones libres, como en el caso de los metales, estos electrones libres también contribuyen a la conducción térmica. Que los electrones libres representan un papel importante en la conductividad térmica, se demuestra con el hecho de que los buenos conductores térmicos, como los metales, usualmente también son buenos conductores eléctricos. Los electrones libres son el origen

*Véase R. T. Weidner y R. L. Sells, *Elementary Classical Physics,* 2a. Ed., Vol 1, Cap. 21, Allyn and Bacon, 1973.

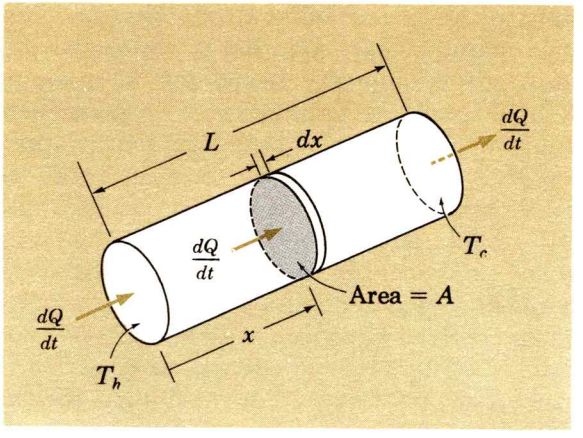


FIG. 19-3. Conducción térmica a través de una barra de longitud L y área de sección recta A, que tiene sus extremos izquierdo y derecho a las temperaturas alta y baja constantes T_a y T_b, respectivamente. La rapidez del calor a través de cualquier sección recta es dQ/dt.

de las corrientes eléctricas; y dichos electrones también transmiten energía térmica.

Para los aspectos cuantitativos de la conducción térmica, considérese la situación mostrada en la Fig. 19—3. Aquí una barra de sección recta A constante está rodeada de un material aislante, de tal manera que no haya fugas de calor ni hacia adentro ni hacia afuera de la barra a través de su superficie lateral. El extremo caliente de la izquierda se mantiene a la temperatura alta constante T_a, mientras que el extremo frío de la derecha mantiene a la temperatura baja constante T_b. La energía térmica que entra a la barra por unidad de tiempo del depósito caliente (esto es, la rapidez del calor hacia la barra) es dQ/dt. En las condiciones de un estado estable, éste es también el calor que sale en el extremo derecho por unidad de tiempo. De hecho, dQ/dt representa la energía térmica que cruza el área A por unidad de tiempo en *cualquier* punto a lo largo de la barra. El calor *neto* que entra a la barra, o que entra a cualquier pequeño volumen de la barra, es *cero;* por lo tanto, la energía interna de la barra permanece *constante*. La barra, un conductor térmico, actúa simplemente como un "tubo para calor" entre los depósitos caliente y frío, degradando la energía térmica porque la manda hacia la temperatura baja. Desde luego, este comportamiento se mantiene sólo mientras los dos extremos se mantienen a T_a y T_b. Cuando $T_a = T_b$, $dQ/dt = 0$.

Nos fijamos ahora en la caída de temperatura dT que se presenta a través de una sección angosta de espesor dx. La cantidad dT/dx, llamada *gradiente de temperatura,* mide el cambio de temperatura por unidad de desplazamiento a lo largo de la dirección del flujo de calor. Si x se toma como que aumenta a lo largo del sentido en que dQ/dT, el gradiente de temperatura dT/dx es *negativo*; esto es, la temperatura *cae* cuando x aumenta.

Los experimentos demuestran que la rapidez del calor $R \equiv dQ/dt$ se relaciona con el gradiente de temperatura dT/dx por

$$R = \frac{dQ}{dt} = -KA\,\frac{dT}{dx} \qquad (19\text{-}3)$$

donde A es el área de la sección recta a través de la cual fluye la energía térmica. La cantidad K es una constante positiva, llamada *conductividad térmica*. Es característica del material del conductor térmico. La Ec. (19—3) entonces muestra que, para una rebanada de espesor infinitesimal, la rapidez del calor varía directamente con el área de la sección recta y el gradiente de temperatura.

Si dT/dx es constante a lo largo de la longitud del material, entonces la diferencial de la temperatura dT se puede escribir como $(T_a - T_b)$, y el desplazamiento elemental dx se puede reemplazar por la longitud finita L. Nótese que R, K, y A, todas son constantes. Entonces

$$R = \frac{dQ}{dt} = \frac{KA(T_a - T_b)}{L} \qquad (19\text{-}4)$$

Nótese que, de acuerdo con la Ec. (19—4), la temperatura cae *uniformemente* a lo largo de la barra. La forma diferencial de la ecuación de la conducción térmica dada en la Ec. (19—3) es más general que la dada en la Ec. (19—4). La Ec. (19—3) se puede aplicar a *todas* las formas de los conductores, no sólo a las barras uniformes. (Se puede considerar que el conductor está formado por un grupo de láminas delgadas infinitesimales para cada una de las cuales la forma diferencial se verifica exactamente.)

En la Tabla 19—2 se dan los valores medidos para la conductividad térmica K para varios materiales. Un buen conductor térmico tiene un valor alto de K; un valor bajo de K caracteriza a un conductor térmico pobre, o buen aislante.

Tabla 19—2

Sustancia	*Temp.* (°C)	*Conduct. térmica* (mW/cm K)
Conductores		
Aluminio	−190 a 30	2.1×10^3
Cobre	−160	4.5×10^3
Cobre	18	3.9×10^3
Cobre	100	3.8×10^3
Plata	18	4.2×10^3
Plomo	18	3.5×10^2
Agua	20	5.9×10^1
Aislantes		
Concreto		8
Corcho		0.4
Vidrio, lana	50	0.4
Hielo	0	21
Aire	0	0.25

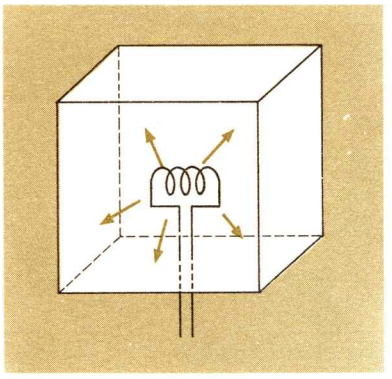


FIG. 19-4. Un calentador eléctrico dentro de una caja aislante.

Ejemplo 19-3

Un calentador eléctrico operado a 200 W se coloca en el interior de una caja cúbica construida de un material aislante. Vea la Fig. 19-4. El largo de sus lados es de 20 cm y el espesor de cada cara es 1.0 cm. Después que el calentador se ha hecho trabajar por un tiempo bastante largo, se alcanza un equilibrio térmico dinámico; la superficie interior de la caja permanece a la temperatura constante de 60°C, mientras que las superficies exteriores están a la temperatura de 20°C. (*a*) ¿Cuál es la rapidez del flujo de la energía térmica hacia afuera de la caja? (*b*) ¿Cuál es la conductividad térmica del material de que está construida la caja?

(*a*) La energía térmica del calentador eléctrico que pasa a las paredes de la caja debe ser igual a la energía térmica que sale de la caja. Así, la rapidez de la energía térmica que fluye hacia *afuera* de la caja es de 200 W.

(*b*) El área total A se puede tomar como el área de una cara, $(0.20\ \text{m})^2$, multiplicada por el número de caras (6) del cubo. El espesor es $L = 0.010$ m. Como el largo de un lado es grande en comparación con el espesor de una cara, podemos despreciar apropiadamente el flujo de calor a lo largo de los lados. Así, La Ec. (19-4) da

$$K = \frac{(dQ/dt)L}{A(T_a - T_b)} = \frac{(200\ \text{W})(0.010\ \text{m})}{6(0.20\ \text{m})^2(40\ \text{C°})} = 2.1\ \text{mW/cm-°C}$$

Los buenos aislantes térmicos como el asbesto, tienen conductividades térmicas de este orden.

19—5 TRANSMISION DE ENERGIA TERMICA POR RADIACION

Supóngase que un objeto caliente se coloca en un recipiente al vacío completo que se encuentra a una temperatura baja. El objeto caliente y el recipiente no están en contacto directo; están conectados únicamente con un hilo delgado que actúa como aislante térmico perfecto; vea la Fig. 19—5. Bajo estas circunstancias, la energía térmica no se puede transmitir de un modo efectivo por conducción. Ni puede haber convección, el transporte por medio de un líquido o un gas caliente, porque la cámara está por completo al vacío. Sin embargo, si uno espera por un tiempo bastante largo, se encuentra experimentalmente que tales objetos llegan a la *misma* temperatura final, intermedia entre las dos temperaturas iniciales. Se debe concluir que opera aquí otro proceso de transmisión de energía térmica. Este proceso es el de la *emisión y absorción de radiación electromagnética.*

FIG. 19-5. Un objeto caliente suspendido por un hilo delgado y aislante en el interior de un recipiente al vacío.

Un análisis minucioso de la radiación requiere un conocimiento de la teoría del electromagnetismo. Nosotros solamente resumiremos las propiedades más pertinentes de la radiación electromagnética, las que se relacionen con la transmisión de la energía térmica. Siempre que una partícula con carga eléctrica se

acelera (o desacelera), pierde energía al emitir radiación electromagnética que se propaga por el espacio vacío a la rapidez única de 3.0×10^8 m/s, la de la luz.* El proceso inverso a la emisión es la absorción de la radiación electromagnética. En los campos de la absorción electromagnética, se producen fuerzas sobre las partículas eléctricamente cargadas, con lo cual se transmite energía a las partículas. Como la materia está formada por partículas con carga eléctrica, todos los materiales radian y absorben energía electromagnética.

Ahora consideremos de nuevo la situación de la Fig. 19—5, en la que dos objetos están a temperaturas iniciales diferentes. El cuerpo caliente emite y *absorbe* ondas electromagnéticas. Lo mismo hace el frío. Encontramos, sin embargo, que el objeto caliente pierde energía térmica y su temperatura baja, mientras que el objeto frío gana energía térmica y su temperatura aumenta. Como el objeto caliente tiene una pérdida neta de energía y el frío una ganancia neta, se debe concluir que el objeto caliente emite más radiación de la que absorbe y que el frío absorbe más radiación que la que emite. Los experimentos muestran que, aunque *el proceso de absorción es independiente de la temperatura, la emisión es dependiente de la temperatura.* En la emisión, a medida que la temperatura de un cuerpo es más alta, es mayor a la rapidez con que emite energía.

Se encuentra que la energía electromagnética total emitida por unidad de tiempo desde la unidad de área de un cuerpo negro (se definirá después) a la temperatura absoluta T, es directamente proporcional a T^4. Esta es la *ley de Stefan-Boltzmann,* que se puede escribir en la forma

$$P = \sigma T^4 \tag{19-5}$$

donde P es la potencia radiada por unidad de área y σ es la constante universal igual a 5.67×10^{-8} W/m^2-K^4.

Supóngase que cierto cuerpo se mantiene a una temperatura fija. Entonces debe emitir precisamente con la misma rapidez con que absorbe. Un objeto es negro cuando absorbe toda la luz visible que llega a él, sin reflejar nada, y es blanco y cuando refleja toda la luz visible que llega a él sin absorber nada. En termodinámica un *cuerpo negro* se define como un objeto que absorbe *toda* la radiación electromagnética, visible y no visible que choca con él. Por lo tanto un cuerpo negro es un *radiador perfecto,* al mismo tiempo que un *absorbedor perfecto* de onda electromagnéticas.

*Es interesante comparar las rapideces asociadas con los tres procesos de transmisión de la energía térmica. La radiación se mueve con la rapidez de la luz ($\approx 10^8$ m/s), la conducción térmica se propaga con la rapidez del sonido ($\approx 10^4$ m/s en un sólido típico), y la convección se lleva a cabo con una rapidez sumamente baja, correspondiendo al transporte del volumen de un fluido (≈ 1 m/s).

Desde el mismo punto de vista, un radiador pobre, es un absorbedor pobre.

Paradójicamente, un cuerpo negro no necesita parecer negro; puede, de hecho, parecer brillante. Por ejemplo, el Sol puede considerarse como un cuerpo negro, porque absorbe en forma esencial toda la radiación que llega a él. Un cuerpo negro aún mejor está formado simplemente por un agujero que lleva al interior de un local cerrado hecho de *cualquier* material; las ondas electromagnéticas que entran por el agujero sufren reflexiones dentro hasta que toda la radiación es absorbida. La Ec. (19—5) da la potencia electromagnética total emitida por la unidad de área por *cualquier* cuerpo negro a la temperatura T. (Recuerde que la potencia absorbida por la unidad de área es independiente de la temperatura del cuerpo *absorbedor*.)

Regresamos de nuevo a la situación mostrada en la Fig. 19—5. Ambos, el objeto caliente suspendido y la cubierta fría, eventualmente llegan al equilibrio térmico a una temperatura final común. Hasta que esta temperatura se alcance, el cuerpo negro caliente emite más energía radiante que la que absorbe, y el cuerpo frío absorbe más energía radiante que la que emite. Debido a que la energía está asociada con un campo electromagnético en el espacio, vemos que hay *tres* contribuciones a la energía térmica total para este sistema: del objeto suspendido, de la cubierta, y de la radiación electromagnética que llena el espacio entre ellos. La radiación electromagnética representa energía que ha sido emitida pero todavía no ha sido absorbida. La radiación dentro de una envoltura que actúa como un cuerpo negro a la temperatura T, se puede decir que está en equilibrio térmico con el cuerpo y se conoce como *radiación térmica* a la temperatura T.

RESUMEN

La energía térmica de los sólidos está formada principalmente por la energía cinética desordenada y la energía potencial de las oscilaciones atómicas. Para los líquidos, además se tiene la energía cinética de traslación desordenada.

Cuando un sólido o un líquido sufre un cambio de temperatura ΔT, su energía interna cambia en

$$\Delta U = cm\,\Delta T \qquad (19\text{-}1)$$

donde m es la masa y c es una constante, característica del material, llamada calor específico.

El calor latente es la energía térmica asociada con un cambio de estado de una sustancia, sin que cambie su temperatura.

La rapidez de transmisión del calor dQ/dt a través de una capa con el área de la sección recta A, está dada por

$$\frac{dQ}{dt} = -KA\frac{dT}{dx} \qquad (19\text{-}3)$$

donde dT es el cambio de temperatura a través de la capa, de espesor dx, y la conductividad térmica K es una característica del material.

La energía térmica puede ser transmitida por la emisión o absorción de la radiación electromagnética. El proceso de absorción independiente de la temperatura, pero la emisión de radiación de un cuerpo negro, un radiador perfecto (y absorbedor), está gobernada por la relación de Stefan-Boltzmann,

$$P = \sigma T^4 \qquad (19\text{-}5)$$

donde P es la potencia radiada desde una unidad de área superficial del cuerpo negro, a la temperatura T, y σ es una constante universal.

PROBLEMAS

19-1. Una pelota de aluminio se deja caer desde el reposo y a una distancia de 3.0 m sobre una superficie aislante. Rebota un cierto número de veces y queda en reposo. ¿En cuánto aumentó su temperatura?

19-2. Un bloque de cobre de 5 000 g a 20°C se introduce en 3 000 g de agua a una temperatura inicial de 100°C. ¿Cuál es la temperatura cuando se alcanza el equilibrio térmico? (Supóngase que el sistema cobre-agua está completamente aislado.)

19-3. Una esfera de metal de 1 000 g a 20° se coloca en 1 000 g de agua a 80°C, la cual se encuentra en un recipiente de cobre aislado contra pérdidas de calor hacia afuera. (Un recipiente aislado como éste se llama *calorímetro,* y se usa para medir los calores específicos de los materiales.) Inicialmente el cobre está en equilibrio térmico con el agua. Cuando el equilibrio se restablece, la temperatura se estabiliza a 72°C. Determine el calor específico de la esfera de metal.

19-4. Encuentre la rapidez a la que la energía cinética de un automóvil de 1 000 kg es igual a la energía térmica requerida para calentar 1.0 kg de agua desde 0°C hasta 100°C.

19-5. En un experimento de Joule, como el que se muestra en la Fig. 19-2, una masa de 50 kg cae una distancia de 1.0 m 20 veces. El líquido calentado es agua y su aumento de temperatura es de 5.0 C°. ¿Cuál es la masa del agua?

19-6. Un bloque de plomo que se movía inicialmente a 3.0 m/s choca contra otro bloque de plomo idéntico, y se adhiere a él, inicialmente en reposo sobre una superficie del todo lisa. ¿Cuánto aumenta la temperatura del bloque compuesto?

19-7. Dos bloques idénticos que se mueven con rapideces iguales en la misma dirección y sentidos opuestos sobre una superficie perfectamente lisa chocan, se adhieren uno a otro y quedan en reposo. La temperatura de cada uno aumenta en Δt debido al choque inelástico. ¿Cuál será el aumento de temperatura si uno de los bloques hubiera estado al principio en reposo?

19-8. Perdigones de plomo que primero se encontraban a 100°C se colocan sobre un bloque de hielo de la misma masa e inicialmente a 0°C, ¿Qué fracción del hielo se convierte en agua?

19-9. ¿Qué longitud de una varilla de aluminio de 1.0 cm de radio, y aislada excepto en sus extremos,

conducirá calor con la rapidez de 2.0 W entre los depósitos caliente y frío cuyas temperaturas difieren en 100 C°?

19-10. Una larga varilla cilíndrica de plata aislada de 5.0 mm de diámetro conduce calor a lo largo de su eje con la rapidez de 5.0 W. ¿Cuál es el gradiente de temperatura a lo largo de la varilla?

19-11. Un cuarto sin ventanas se aísla por todos lados (piso, techo y paredes) por medio de una capa de lana de vidrio con un espesor de 4.0 plg, para la cual la conductividad es $K = 4.0 \times 10^{-1}$ mW/cm K°. ¿Cuál es la potencia a la que debe operar continuamente un calentador dentro del cuarto, si mantiene la temperatura interior del cuarto a 20°C (68°F), cuando la temperatura exterior es de 0°C (32°F)? Las paredes tienen 8 pies de altura y el piso tiene una área de 15 pies × 20 pies.

19-12. Los 200 pies² del techo de un cuarto se aislan de un ático por medio de una capa de 6.0 plg de lana de vidrio, para la cual $K = 4.0 \times 10^{-4}$ W/cm K°. Si la temperatura del ático es de 50°C (122°F) y la temperatura del cuarto debe mantenerse a 20°C (68°F), ¿qué cantidad de energía por hora transporta el aislamiento por conducción? Considérese que la caída de temperatura completa se mantiene a través de la lana de vidrio.

19-13. Al calcular la conducción de calor a través de una lámina de vidrio es esencial que se tome en cuenta el hecho de que sobre las superficies del vidrio expuestas a la atmósfera se adhieren películas delgadas de aire. Como una consecuencia de esto, la trayectoria real del calor está formada de una capa de vidrio entre dos películas delgadas de aire. Una vez que se ha establecido el equilibrio dinámico, la rapidez de transmisión de calor R es la misma para cada una de las tres capas:

$$R = \frac{dQ}{dt} = K_a A \frac{\Delta T_a}{d_a} = K_v A \frac{\Delta T_v}{d_v} = K_a A \frac{\Delta T_a}{d_a}$$

donde K, d, y ΔT son, respectivamente, la conductividad térmica, espesor, y diferencia de temperatura a través de las capas que intervienen. Los subíndices a y v se refieren al aire y el vidrio, en este orden. La cantidad A es el área de la sección recta de la trayectoria del calor. (*a*) Demuestre que la caída total de temperatura a través de las tres capas está dada por

$$\Delta T = \Delta T_a + \Delta T_v + \Delta T_a = \Delta T_v + 2\,\Delta T_a$$
$$= \frac{R}{A}\left(\frac{1}{K_v/d_v} + \frac{2}{K_a/d_a}\right) = \frac{R}{A}\left(\frac{1}{\Gamma_v} + \frac{2}{\Gamma_a}\right)$$

donde suponemos que las dos películas de aire son idénticas en todas sus características. Nótese que, por definición, $\Gamma_a = K_a/d_a$ y $\Gamma_v = K_v/d_v$ (*b*) Demuestre que para el sandwich aire-vidrio-aire, la rapidez del calor está dada por

$$R_{ava} = \left[\frac{\Gamma_a \Gamma_v}{\Gamma_a + 2\Gamma_v}\right] A\,\Delta T = \left[\frac{\Gamma_a}{\Gamma_a + 2\Gamma_v}\right] K_v A \frac{\Delta T}{d_v}$$
$$= \left[\frac{\Gamma_a}{\Gamma_a + 2\Gamma_v}\right] R_v$$

donde R_v es la rapidez del calor que resultaría si estuvieran ausentes las películas de aire. Para el aire el *coeficiente de película* Γ_a es de alrededor de 1.0 mW/cm²- K°, y para el vidrio de ventana de 3.2 mm de grueso

$$\Gamma_v = \frac{K_v}{d_v} = \frac{8.0 \text{ mW/cm-K°}}{0.32 \text{ cm}} = \frac{25 \text{ mW}}{\text{cm}^2\text{-K°}}$$

(*c*) Determine el valor de la razón R_{ava}/R_v y encuentre que es de alrededor de 2 %. Este indica que las dos capas de aire aumentan efectivamente las propiedades aislantes del vidrio, por un factor de alrededor de 50.

19-14. Dos conductores térmicos cuya longitud, área de sección recta, y material son idénticos, se conectan entre dos depósitos térmicos a temperaturas constantes pero diferentes. Primero se conectan los conductores extremo a extremo (en serie) entre los depósitos, después se conectan ambos directamente entre los dos depósitos (en paralelo). ¿Cuál es la razón entre la rapidez del flujo de calor en el segundo caso y el primero?

19-15. Un tubo cilíndrico de longitud L y los radios interior y exterior r_1 y r_2 conduce calor en sentido radial hacia afuera con la rapidez constante $R = dQ/dt$, ambas, las superficies cilíndricas interior y exterior se mantienen a temperaturas constantes. Demuestre que la diferencia de temperatura entre las superficies interior y exterior está dada por $(R/2LK)$ ln (r_2/r_1), donde K es la conductividad térmica del material del tubo. [*Sugerencia:* Aplique la Ec. (19-3) a una capa cilíndrica de espesor dr, e intégrela de r_1 a r_2.]

19-16. Se sabe que la estrella enana blanca Eridano 40 B tiene las siguientes características: temperatura superficial efectiva $T = 2.7\ T_\odot$, luminosidad $L = 1.2 \times 10^{-2}\ L_\odot$, y la masa $M = 0.427\ M$; donde $T = 5.76 \times 10^3$ K, $L_\odot = 3.8 \times 10^{26}$ W, $M_\odot = 2.0 \times 10^{30}$ kg y $R_\odot = 7.0 \times 10^8$ m son la temperatura efectiva, la luminosidad, masa y radio del Sol. (La luminosidad de una estrella es la rapidez con que radia energía.) Suponiendo que las estrellas radian como si fueran cuerpos negros perfectos, determínese (*a*) el radio y (*b*) la densidad media de Eridano 40 B.

19-17. Un cierto cuerpo negro cuya superficie es de 0.20 m^2 tiene una temperatura constante de 1 000 K. (*a*) ¿Cuál es la potencia *total* radiada por el cuerpo negro? (*b*) Si el cuerpo negro absorbe radiación con la rapidez de 5 000 W, ¿Cuál es la potencia *neta* radiada por el cuerpo negro?

19-18. La temperatura de un horno de corazón abierto usado para producir acero es óptima a 1850 K. En una instalación particular la temperatura del horno se controla por medio de un *pirómetro de radiación,* un instrumento que mide la energía radiante que escapa por una abertura en la pared del horno por unidad de tiempo. (*a*) Encuentre la rapidez a la cual escapa la energía radiante por una abertura, si su área es de 20 mm^2 y la temperatura es de 1850 K. (*b*) Encuentre las rapideces mínima y máxima del flujo de la energía radiante si la temperatura de operación debe mantenerse dentro de un 3% de 1850 K.

19-19. La temperatura del filamento del bulbo de una lámpara incandescente es de 2 400 K. Se puede tomar el filamento como un cuerpo negro. (*a*) Si la potencia del bulbo de la lámpara es de 100 W, ¿cuál es el área de la superficie del filamento? (*b*) Si la misma lámpara se opera a 200 W, ¿cuál es entonces la temperatura del filamento?

19-20. (*a*) Demuestre, a partir de la ley de Stefan-Boltzmann que la potencia radiada desde 1 cm^2 de superficie de un cuerpo negro a la temperatura Kelvin T es $(T/648)^4$ W. (*b*) ¿A qué temperatura el cuerpo negro radiará 1.0 W/cm^2?

19-21. Una capa esférica de 10 cm de radio actúa como cuerpo negro y absorbe íntegramente los 2.0 MW de radiación que caen de continuo sobre ella. La temperatura de la capa permanece constante. ¿Cuál es su temperatura?

19-22. El Sol se puede tomar como un cuerpo negro con una temperatura de alrededor de 6 000 K. El radio del Sol es de 0.70×10^6 km. (*a*) ¿Cuál es la potencia total radiada por el Sol? (*b*) Suponiendo que la potencia radiada a través de la unidad de área colocada en ángulo recto a la dirección de propagación de la radiación varía inversamente con el cuadrado de la distancia desde el Sol, ¿cuál es la potencia que pasa por un área en centímetros cuadrados, a la distancia de 1.5×10^8 km, la distancia a la Tierra desde el Sol? (*c*) La intensidad de la radiación observada en la superficie de la Tierra es de 0.13 W/cm^2. ¿Qué fracción de la radiación emitida por el Sol intercepta la atmósfera de la Tierra?

Capítulo

20

LA FUERZA ELECTRICA ENTRE LAS CARGAS

Todas las fuerzas que se conocen en Física, provienen de cuatro interacciones fundamentales: la fuerza nuclear intensa, la fuerza electromagnética, la fuerza de interacción débil y la fuerza gravitacional. Las fuerzas nucleares y de interacción débil tienen sólo importancia dentro del núcleo atómico, en ciertas colisiones entre los núcleos y en el decaimiento de las partículas elementales inestables. La conocida fuerza gravitacional es importante sólo cuando la masa de uno de los dos cuerpos que interactúan es comparable a la de un planeta, lo que deja a la *fuerza electromagnética* como la mas común. Con excepción de la gravedad, todas las fuerzas de nuestra experiencia ordinaria —la fuerza de restitución de un resorte estirado, la fuerza normal que ejerce el piso hacia arriba sobre una persona, la fuerza que ejercen entre sí dos automóviles que chocan— en realidad, todas las fuerzas que actúan entre el núcleo atómico y los electrones que lo rodean, o las fuerzas entre los átomos en las moléculas, son, en último análisis, de origen electromagnético. Las fuerzas electromagnéticas dominan todas las interacciones entre los sistemas desde el tamaño de los átomos hasta el de los planetas.

Se usa la palabra electromagnetismo para hacer resaltar que los fenómenos eléctricos y magnéticos no están separados o sin relación, pues ambos efectos son una consecuencia de una propiedad de la materia llamada *carga eléctrica*. Aunque los efectos electromagnéticos tienen una historia memorable, no se hará la crónica del desarrollo de esta importante rama de la física clásica.

20—1 CARGA ELECTRICA

El nuevo concepto, distintivamente introducido en electromagnetismo, es el de *carga eléctrica*. Se sabe que cuando dos

cuerpos diferentes no metálicos se ponen en íntimo contacto —por ejemplo cuando se frota el vidrio con seda— y después se separan, aparece una atracción mutua que excede con mucho a su fuerza de atracción gravitacional. Dichos cuerpos se dice que tienen carga eléctrica, y que la presencia de las cargas eléctricas en cada uno de ellos es la responsable de su interacción por medio de una fuerza eléctrica. Se supone que el lector está familiarizado con estos fenómenos y con los muchos experimentos cualitativos que establecen los siguientes hechos fundamentales con relación a estas interacciones eléctricas: (*a*) Existen *dos clases de carga,* (*b*) *Cargas semejantes se rechazan,* y (*c*) *Cargas diferentes se atraen.* (Fig. 20-1.)

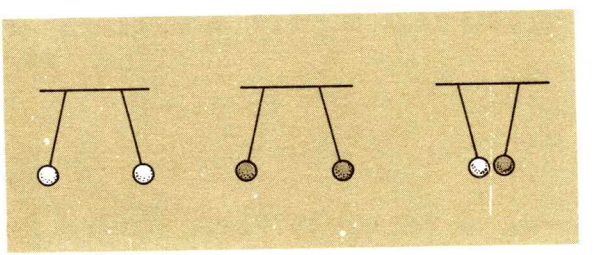


FIG. 20-1. Cuerpos cargados suspendidos de hilos aisladores. Cargas iguales se rechazan, cargas diferentes se atraen.

En éste y los siguientes capítulos trataremos de la electrostática, la ciencia de las cargas eléctricas en reposo. Además de la atracción o repulsión debida a las fuerzas eléctricas, las cargas en movimiento interactúan con la denominada fuerza magnética. Aquí trataremos sólo con situaciones en donde las velocidades de las cargas sean mucho más pequeñas que la velocidad de la luz (3.0×10^8 m/s), en cuyo caso las fuerzas magnéticas entre las cargas son despreciables comparadas con las fuerzas eléctricas entre ellas.

Todos los fenómenos eléctricos provienen de que las partículas elementales y fundamentales de la Física, pueden tener la propiedad de la carga eléctrica. Así, el electrón tiene una carga negativa, el protón positiva y el neutrón cero. El uso de los signos algebraicos + y − para denotar las dos clases de carga resulta apropiado, puesto que al combinar cantidades iguales (que se definirán con precisión en forma posterior) de cargas positivas y negativas se tiene como resultado una fuerza eléctrica nula que actúa sobre un cuerpo. La cuantización de la carga se descubrirá en la Sec. 20−5. Como se sabe, el núcleo de un átomo está formado de neutrones y protones reunidos en un volumen cuyas dimensiones lineales nunca son mayores que 10^{-14} m; el núcleo está rodeado por electrones ligados a él. En conjunto un átomo es eléctricamente neutro cuando el número de electrones que rodean al núcleo es igual al número de protones que el núcleo contiene.

Los átomos están empaquetados en estrecho contacto en los sólidos, estando los núcleos separados uno de otro por distancias del orden de los 10^{-10} m. En los *conductores,* de los que son ejemplo los metales, la mayoría de los electrones están ligados y

permanecen unidos con su núcleo, pero más o menos un electrón por átomo puede ser un *electrón libre*. Un electrón libre (o de conducción) aunque ligado al conductor, puede vagar por todas partes del interior del material conductor y puede ser desplazado con facilidad dentro del conductor por fuerzas eléctricas externas. Por otro lado, en los materiales *aisladores o dieléctricos, todos* los electrones atómicos están *ligados*, en mayor o menor grado, a su propio núcleo. Los electrones son quitados o agregados a un material aislador sólo con suministro de energía. Son ejemplos de conductores comunes los metales, los líquidos que pueden disociarse en iones (los electrólitos), la Tierra, y el cuerpo humano. Los buenos aisladores son muy a menudo materiales transparentes: los plásticos, el vidrio y el vacío, que es un aislador perfecto.

El mejor conductor eléctrico se relaciona con el peor conductor (o mejor aislador) por un factor enorme, más de 10^{20}, que es un número al que se le dará un significado cuantitativo preciso en el Cap. 24. Entre estos extremos están los llamados semiconductores, cuya conductividad es intermedia entre la de los conductores y la de los aisladores. Ejemplos de semiconductores son el germanio y el silicio. En los semiconductores sólo son libres una fracción muy pequeña de los electrones. El número de electrones de conducción en un semiconductor puede hacerse variar calentándolo, iluminándolo o aplicándole un campo eléctrico externo muy intenso.

Los fenómenos electrostáticos pueden comprenderse fundándose en el modelo atómico y en las propiedades de los conductores y de los dieléctricos. Cuando dos dieléctricos diferentes se frotan entre sí, algunos electrones, en la interfase entre los dos materiales, saldrán del material donde estén ligados menos estrechamente y pasarán al material que los ligue con más intensidad, debido a que los sistemas siempre tienden a adquirir los estados de mínima energía.

Después de separarse, un cuerpo tiene un exceso de electrones y tiene carga negativa, mientras que el otro cuerpo tiene una deficiencia de electrones y queda con carga positiva. Se dice que un cuerpo de gran tamaño está positivamente cargado cuando su neutralidad eléctrica ha sido perturbada por pérdida de electrones; en forma semejante un cuerpo con carga negativa tiene un exceso de electrones. "Cargar" un cuerpo no consiste sino en agregarle o sustraerle electrones. Cuando un tipo de carga se produce en un cuerpo ordinario, el otro tipo aparecerá en igual cantidad en un segundo cuerpo. La carga de cualquier cuerpo de gran tamaño, se debe a la separación de partículas cargadas (véase la Fig. 20—2). Puesto que un cuerpo cargado ha ganado o perdido electrones se habla a veces de la carga que contiene *el* cuerpo. Por supuesto el cuerpo gana (o pierde) no sólo la carga de electrones adicionada (o removida), sino también la masa de los electrones agregados (o quitados). Sin embargo la masa adicional es por lo general tan pequeña que puede despreciarse.

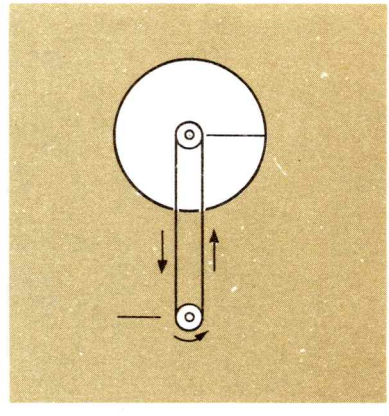


FIG. 20-2. Diagrama esquemático de un generador de Van de Graaff, un dispositivo para separar cargas. Al moverse la banda, continuamente lleva cargas desde las puntas cerca del rodillo inferior a las puntas que están en el interior de un conductor esférico.

No es apropiado hablar de la carga que *contiene* un electrón (o cualquier otra partícula elemental). La carga eléctrica no es algo que puede agregarse o quitarse de un electrón, pues un electrón sin carga no existe. Como la carga eléctrica es, de modo semejante a la masa, una propiedad intrínseca del electrón, se habla de la carga eléctrica *de* un electrón.

20—2 LEY DE COULOMB

Estableceremos ahora el aspecto cuantitativo de la interacción eléctrica entre cargas. A menudo a la fuerza eléctrica se le llama fuerza de Coulomb, llamada así en honor de C. A. de Coulomb (1736—1806), quien en 1785 encontró que la fuerza eléctrica varía como el cuadrado inverso de la distancia.

Consideraremos cargas puntuales. Una carga puntual es un grupo de una o *más* partículas elementales cargadas, confinadas en una región del espacio, pequeña cuando se compara con otras dimensiones con las que debe tratarse como, por ejemplo, la distancia entre las dos cargas puntuales. Una única partícula elemental es un buen ejemplo del concepto de carga puntual, pero aún en este caso la carga tiene un tamaño finito. La estabilidad de una partícula cargada con tamaño diferente de cero, opuesta a la intensa repulsión mutua de sus partes, no se conoce basándose en las actuales teorías fundamentales. No diremos más que, por ejemplo, la carga del electrón está encerrada en un volumen muy pequeño, dejando de lado la cuestión de qué la mantiene reunida, como una cuestión importante que aún no tiene respuesta.

La fuerza eléctrica entre cargas puntuales en reposo se encuentra situada en la línea que las une; así, la fuerza de Coulomb es una *fuerza central.* De hecho no podría ser de otro modo, porque entre dos puntos en reposo en un espacio isotrópico vacío, la sola y única dirección es la recta que las une.

La fuerza de Coulomb varía en forma *inversa al cuadrado de la distancia r* entre las dos cargas puntuales:

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

Esta ley fue confirmada, de un modo aproximado al menos, por experimentos llevados a cabo por Coulomb y, después, por Cavendish, usando una balanza de torsión (Véase Fig. 20—3). La torca de recuperación de la delgada y torcida fibra, es proporcional al ángulo de torsión.* Así, se puede medir la fuerza de atracción o repulsión entre pequeños cuerpos cargados, separados una distancia conocida, midiendo el ángulo desplazado por la

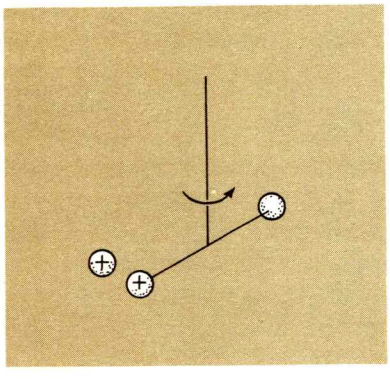


FIG. 20-3. La balanza de torsión de Cavendish, empleada para medir la variación de la fuerza de coulomb con la distancia entre dos cuerpos cargados.

*R. T. Weidner y R. L Sells, *Elementary Classical Physics.* 2a. Ed. Sec. 14-4, Allyn and Bacon, 1973.

varilla unida a la fibra. Este experimento con cuerpos cargados es semejante al experimento de Cavendish para medir la fuerza gravitacional entre dos cuerpos pequeños (Sec. 13—2). Aunque con los experimentos con la balanza de torsión puede establecerse que el exponente de r, en la ecuación $F \propto 1/r^n$ es igual a 2, con un error de algunas unidades de porcentaje, otros experimentos (que serán descritos en la Sec. 22—5) demuestran de modo indirecto que el exponente vale precisamente 2 (con un error de unas pocas partes en 10^9).

Los experimentos de dispersión, en los cuales partículas con carga positiva se disparan a los núcleos atómicos, demuestran que la fuerza de coulomb de cuadrado inverso, es válida hasta la distancia de unos 10^{-14} m el tamaño del núcleo atómico, que es muy pequeño y positivamente cargado. En realidad, la fuerza de Coulomb actúa entre los protones en el *interior* del núcleo; allí la repulsión eléctrica entre los protones compite con la gran fuerza nuclear de atracción entre ellos y los neutrones. En los átomos pesados, en los cuales hay muchos protones, la repulsión de Coulomb es responsable de la inestabilidad que puede llevar a la expulsión de un núcleo de helio, en la decaimiento α, o en el escición del núcleo en la fisión nuclear. Por otra parte, experimentos indirectos relacionados con la interacción de electrones y muones con el núcleo atómico, demuestran que la ley de Coulomb es válida hasta distancias de alrededor de 10^{-16} m.

Una importante propiedad de la fuerza de Coulomb estriba en que es una fuerza *conservativa* (Sec. 10—4)., dependiendo sólo de la distancia entre las dos partículas cargadas, y no del tiempo o de las velocidades de las partículas, siempre que éstas sean pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. En consecuencia, se puede asociar una energía potencial con la interacción eléctrica entre partículas cargadas.

Las fuerzas gravitacional y eléctrica son semejantes en varios aspectos. Ambas son *fuerzas centrales, conservativas y de cuadrado inverso*. En consecuencia, muchos de los conceptos desarrollados para la gravitación —el campo gravitacional, la energía potencial de gravitación, la energía de las partículas que interactúan con la fuerza de gravitación (Cap. 13) —son igualmente aplicables a las fuerzas eléctricas. Sin embargo también existen categóricas diferencias. Por una parte, existen dos tipos de carga eléctrica pero sólo una de carga gravitacional (o masa gravitacional); por otra parte, las cargas eléctricas pueden atraerse o repelerse; las cargas gravitacionales sólo se atraen. Otra importante diferencia es la magnitud relativa de las interacciones eléctricas y gravitacionales; la fuerza eléctrica es inmensamente mayor que la gravitacional; por ejemplo, entre un electrón y un protón, la atracción eléctrica es 10^{39} veces mayor que la atracción gravitacional.

A nivel atómico la atracción gravitacional es por completo despreciable comparada con la fuerza eléctrica. Por otro lado,

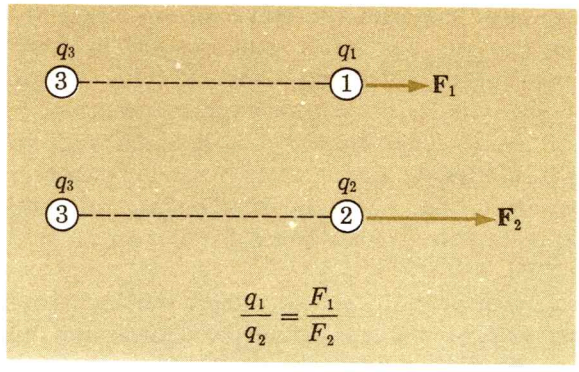


FIG. 20-4. La magnitud relativa de las dos cargas q_1 y q_2 es, por definición, la relación F_1/F_2 de las fuerzas respectivas debidas a una tercera carga.

debido a que las cargas negativas y positivas de las partículas elementales (que constituyen a los cuerpos ordinarios) son iguales en magnitud y la fuerza eléctrica entre ellos es grande, los cuerpos ordinarios son, por lo general, eléctricamente neutros. Así, la fuerza eléctrica, al actuar de modo interno a escala atómica, no se manifiesta en cuerpos de gran tamaño, como lo hace la fuerza gravitacional.

Cuando se tienen sólo dos cargas puntuales se puede saber que la fuerza eléctrica es una fuerza que varía con proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia, pero con sólo las dos cargas puntuales no se puede determinar si una carga es grande y la otra pequeña. Para saber algo con relación a las magnitudes de las cargas eléctricas se necesitan por lo menos *tres* cargas. Supongamos que los pequeños cuerpos cargados 1 y 2 se colocan uno después de otro a la misma distancia del cuerpo cargado 3 (Véase Fig. 20-4). Se encontrará que la fuerza eléctrica en 1, debida a 3, es $\mathbf{F}_1$ y que la que recibe 2, debida a 3, es $\mathbf{F}_2$. Entonces, *por definición,* las magnitudes relativas de las cargas q_1 y q_2 son:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{F_1}{F_2} \tag{20-1}$$

La relación de las respectivas fuerzas es la relación de las magnitudes de las cargas. (Esto es, por supuesto, lo que se hace al comparar las masas gravitacionales: si dos cuerpos en el mismo lugar de la Tierra tienen pesos en la relación de 2 a 1, sus respectivas masas gravitacionales estarán también en la relación de 2 a 1).

Escogiendo alguna carga eléctrica arbitraria como carga de comparación se puede medir la magnitud de cualquier otra carga en unidades de la carga de comparación por medio de la Ec. (20-1).

Existe un procedimiento muy sencillo para dividir a la mitad la carga de un conductor. Supongamos que se tienen dos conductores

esféricos idénticos uno cargado al principio y el otro descargado; si las dos esferas se ponen en contacto, la carga, por simetría, se dividirá en partes iguales y al separar las esferas cada una llevará exactamente la mitad de la carga inicial. Este procedimiento puede extenderse, por supuesto, para reducir la carga de un conductor a 1/4, 1/8, ... lo que fue llevado a cabo por Coulomb. Este procedimiento no puede continuarse de modo indefinido, pues al cabo de cierto tiempo puede llegar a obtenerse un solo electrón extra en el conductor, y la carga de un electrón no puede dividirse.

La Ec. (20-1) da la relación de las cargas q_1/q_2 para dos cargas en términos de la relación de fuerzas F_1/F_2 para las dos cargas que interactúan, una tras otra, con una *tercera* carga. Así se determina la relación q_1/q_2 de las cargas. Supongamos ahora que estas dos cargas interactúan nada más entre sí, como se muestra en la Fig. 20-5. De la Ec. (20-1) se infiere que la fuerza eléctrica en q_1 es proporcional a q_2; por la misma razón, la fuerza en q_1 es proporcional a q_2. Ahora, si las fuerzas que actúan en las dos cargas que interactúan son iguales y opuestas, de acuerdo con la tercera ley de Newton, la magnitud de la fuerza **F** que actúa en cada una de ellas, será proporcional tanto a q_1 como a q_2, así como inversamente proporcional a r^2; es decir:

$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2} \tag{20-2}$$

donde k es una constante cuyo valor depende de las unidades escogidas para medir la carga y la distancia.

Si se emplea el radio vector $\mathbf{r}_{12}$ para designar la posición de la carga q_2 con relación a q_1, se puede escribir entonces la Ec. (20-2) en forma vectorial de la manera siguiente:

$$\mathbf{F}_{1\text{ en }2} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} = -\mathbf{F}_{2\text{ en }1} \tag{20-3}$$

donde $\mathbf{r}_{12}/r_{12}$ es un vector unitario cuyo sentido es de q_1 a q_2. (Véase Fig. 20-6). Nótese que la dirección de $\mathbf{F}_{1\text{ en }2}$ está dada correctamente si se emplean los signos algebraicos para q_1 y q_2: la fuerza es positiva (esto es, repulsiva) cuando q_1 y q_2 tienen el mismo signo, y negativa (esto es, atractiva) cuando los signos son diferentes.

Hasta ahora se ha tratado la fuerza de Coulomb sólo entre la interacción de dos cargas puntuales en reposo. Supongamos que una carga q_3 se encuentra en la presencia de otras dos cargas q_1 y q_2, como se representa en la Fig. 20-7. El experimento demuestra que la fuerza que recibe q_3 es la *suma vectorial* de las fuerzas separadas que recibe de q_1 y de q_2; esto es, el *principio de superposición* de las fuerzas se mantiene para la fuerza de

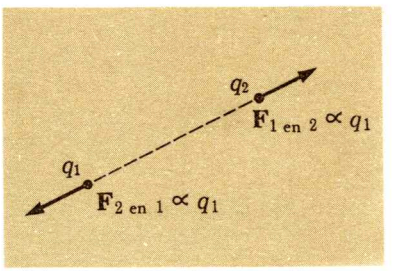


FIG. 20-5. Dos cuerpos cargados que interactúan. La fuerza que recibe cada cuerpo cargado es proporcional a la magnitud de su carga.

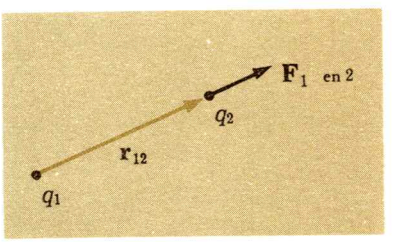


FIG. 20-6. Relación entre la fuerza $\mathbf{F}_{1\text{ en }2}$ en la carga q_2 y el radio vector $\mathbf{r}_{12}$ de la carga q_1 a la q_2.

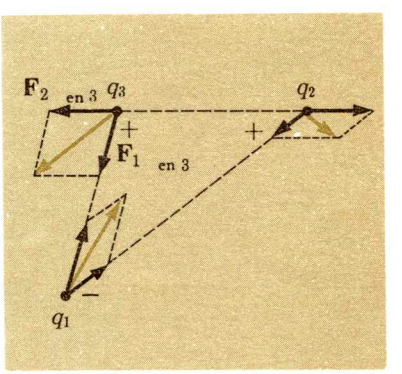


FIG. 20-7. Interacción entre tres cargas puntuales. El principio de superposición se aplica a las fuerzas de Coulomb.

Coulomb; o dicho de otro modo, la fuerza entre dos cargas cualesquiera es independiente de la presencia de otras cargas: para encontrar la fuerza resultante basta sumar las fuerzas individuales como vectores. El principio de superposición, aunque es sencillo, *no* es evidente por sí mismo, sino que es el resultado de la observación de las interacciones eléctricas. Como veremos, sus consecuencias son muchas e importantes.

20—3 UNIDADES ELECTRICAS

El valor numérico de la constante k, que aparece en la ley de Coulomb [Ec. (20-2)] depende, por supuesto, de las unidades escogidas para medir F, q y r. En trabajos científicos se prefiere el Sistema Internacional de unidades —que es un sistema métrico. En el *sistema racionalizado de unidades mksa* (Metro-kilogramo-segundo-ampere), que usaremos exclusivamente en lo sucesivo, las unidades "mecánicas" son las del SI (o mks) —metro para la longitud, newton para la fuerza, joule para energía, etc.— y la unidad de carga es el *coulomb* (abreviado C).

Con F en newtons, r en metros, y q en coulombs, la constante k (de la Ec. (20-2)) tiene el siguiente valor:

$$k \equiv 8.98755 \times 10^9 \text{ N-m}^2/\text{C}^2 \tag{20-4}$$

Así, dos cargas puntuales de 1 C cada una y separadas 1 m, ejercen entre sí una fuerza eléctrica de, más o menos, 9.0×10^9 N. La carga de un coulomb es, como carga, una cantidad enorme. La carga neta en un aparato de laboratorio de tamaño ordinario es como de 10^{-7} C $= 0.10$ μC. Dos cargas puntuales de esta magnitud a 1 cm de distancia, se rechazan con una fuerza de alrededor de 1 N.

La definición del coulomb es un poco complicada; primero, por definición, la carga neta de 1 C pasa por la sección transversal de un conductor eléctrico durante 1 s, cuando la corriente de 1 A (ampere) existe en este conductor. El ampere se define, a su vez, por la fuerza magnética entre dos conductores que llevan corriente (Sec. 27-4).

Para la mayoría de los cálculos será suficiente redondear el valor de k tomándolo como 9.0×10^9 N-m^2/C^2. En el SI*, la constante k se escribe así:

$$k \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tag{20-5}$$

---

* El único sistema, diferente del mksa, ahora en uso, es el sistema llamado *cgs gaussiano*. Los nombres de las unidades eléctricas, la forma de las leyes fundamentales electromagnéticas y los factores de conversión del sistema gaussiano se encuetran en el Apéndice III.

donde ε_0, la *permitividad eléctrica del vacío,* vale:

$$\varepsilon_0 = 8.85435 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N-m}^2 \qquad (20\text{-}6)$$

Entonces se puede escribir la ecuación de Coulomb en la siguiente forma

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad (20\text{-}7)$$

Se usarán una u otra constante, k y ε_0, según la que lleve a la relación matemática más sencilla.

En el sistema *racionalizado* de unidades el factor 4π aparece en la Ec. (20-7), pero no algunas otras relaciones fundamentales como por ejemplo en la ley de Gauss, Ec. (22-3).

La carga del electrón, cuya magnitud es la de cualquier otra partícula elemental cargada, se designa con $-e$; su magnitud es:

$$e = 1.602192 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

La medida directa de la carga e del electrón, obtenida en el experimento de Millikan, se discute en la Sec. 21-5.

La carga del electrón es muy pequeña. Un microcoulomb, una carga típica en las normas de laboratorio, corresponde a un exceso o deficiencia de 6×10^{12} electrones. Así, se puede por lo general suponer que la carga eléctrica es infinitamente divisible y continua, ignorando su esencial "granulación". Por ejemplo se puede imaginar una superficie con carga negativa cuya carga esté esparcida en forma continua sobre ella, en vez de tratar con el número finito de electrones, que actúan como cargas puntuales. Se hace lo mismo al tratar con la masa de un cuerpo ordinario: nos imaginamos que es infinitamente divisible, aunque la naturaleza atómica, o granulación, de toda la materia implica que la masa siempre sea un múltiplo entero de la masa de un átomo o de una molécula.

Cuando los electrones son transferidos a, o de un cuerpo de laboratorio cargado, la diferencia de masa es despreciable; así, cuando un cuerpo adquiere una carga de 1 μC (o 6×10^{12} electrones), su masa cambia sólo (9.1×10^{-31} kg/electrón) (6×10^{12} electrones) $= 5 \times 10^{-18}$ kg $= 5 \times 10^{-9}$ μg.

El aparato más sencillo para detectar la carga eléctrica es el electroscopio; la separación angular de las ligeras hojas conductoras que lo forman (que se repelen una a otra), miden la carga del electroscopio (Fig. 20-8). Sin embargo el electroscopio no es un instrumento preciso o fácil de calibrar. El electrómetro es un aparato de este tipo para medir cargas; básicamente es un electroscopio que ha sido calibrado para que el desplazamiento angular de un conductor cargado, suspendido de una fibra de torsión mida la carga. Otra manera de medir la carga consiste en

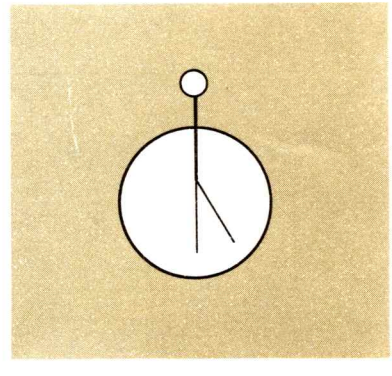


FIG. 20-8. Un tipo sencillo de electroscopio.

medir la corriente eléctrica durante un cierto periodo de tiempo o medir el potencial de un conductor cargado de geometría sencilla (Sec. 23-8).

Ejemplo 20-1

Calcular la relación entre las fuerzas atractivas eléctricas y gravitacionales, que existen entre un protón y un electrón.

La fuerza gravitacional (Ec. 13-4) es $F_g = Gm_p m_e/r^2$, y la fuerza eléctrica es $F_e = ke^2/r^2$, donde e es el valor de la carga en ambas partículas. La relación entre las fuerzas para cualquier separación r es:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{ke^2}{Gm_p m_e}$$

$$= \frac{(9.0 \times 10^9 \text{ N-m}^2/\text{C}^2)(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N-m}^2/\text{kg}^2)(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})}$$

$$= 10^{39}$$

20—4 CONSERVACION DE LA CARGA

Se ha encontrado por experimentación que la carga eléctrica se conserva. De acuerdo con la ley de la conservación de la carga, la carga neta, o *suma algebraica de las cargas, en cualquier sistema aislado es constante.* Esta ley se ilustra de modo muy sencillo en el proceso donde *dos* cuerpos neutros quedan cargados: los electrones son transportados de uno a otro quedando un cuerpo con una carga positiva y el otro con igual cantidad de carga negativa. *Nunca se ha observado una violación a la conservación de la carga.*

Sin embargo la conservación de la carga eléctrica *no* implica que la carga eléctrica nunca pueda ser creada o destruida, sino sólo que la creación de una carga positiva se acompaña de la creación de igual cantidad de carga negativa. Un ejemplo importante es el fenómeno de la *producción de pares.* (Véase Sec. 36-5.) Cuando un fotón lo bastante energético, —una partícula sin carga eléctrica de radiación electromagnética— penetra en un recipiente cerrado, como en la Fig. 20-9, puede resultar aniquilado, apareciendo en su lugar dos partículas, un electrón con carga $-e$ y un positrón con carga $+e$: la carga *neta* dentro del recipiente no ha cambiado.

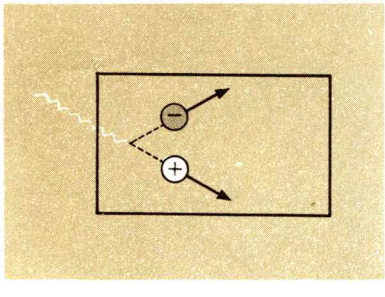


FIG. 20-9. Un fotón penetra en una cámara cerrada y produce un par electrón-positrón.

El positrón, idéntico al electrón en todos sus aspectos excepto en el signo de su carga (y las consecuencias de esta diferencia en signos), se le llama la *antipartícula* del electrón. El electrón y el positrón no son sino un ejemplo de un par partícula-antipartícula.

Otros ejemplos son el protón y el antiprotón (respectivamente con cargas $+e$ y $-e$) y otras partículas elementales más exóticas como el mesón π^- y el mesón π^+. Así como pueden crearse los pares partícula-antipartícula, una partícula y su antipartícula pueden *aniquilarse* una a otra, produciéndose dos o más fotones, o bien pares de otras partículas. Sin importar qué proceso tenga lugar dentro de un sistema —transporte de carga entre cuerpos en contacto, transformaciones nucleares, creación de materia, o aniquilación de partículas— la carga total siempre se conserva. Con la conservación de la carga eléctrica, la lista *clásica* de leyes de conservación queda completa; estas leyes son: la conservación del ímpetu lineal (Sec. 5-6), del ímpetu angular (Sec. 11-7), de la masa (Sec 5-4), de la energía (Sec. 10-5) y, ahora, de la carga eléctrica.

20—5 CUANTIZACION DE LA CARGA

La carga eléctrica neta de cualquier cuerpo es la suma algebraica de las cargas de las partículas elementales que lo componen. *Todas* las partículas elementales ahora conocidas, aunque pueden diferir mucho en masa y en otras propiedades, tienen uno de *tres* posibles valores de carga:*

$$+e,\ 0,\ \text{o}\ -e$$

donde e es el valor de la carga de un electrón. Por ejemplo, las cargas del electrón y del positrón son respectivamente, $-e$ y $+e$; y las cargas de las tres clases de π mesones π^+, π^0, π^-, son, en este orden $+e$, 0 y $-e$. El neutrón y su antipartícula, el antineutrón, tienen cargas iguales a cero. El porqué las partículas fundamentales con carga tienen sólo el valor e no se conoce, y no tiene más base sino la de que es un hecho experimental bien establecido.

Puesto que cada cuerpo cargado no es más que una colección de partículas elementales, los únicos valores posibles de la carga total Q de cualquier cuerpo valdrá:

$$Q = \pm Ne \quad \text{donde} \quad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{20-8}$$

La carga eléctrica se dice que está *cuantizada:* siempre es un *múltiplo entero,* positivo o negativo, de la carga del electrón, y no puede tener otro valor; véase la Fig. 20-10.

La discontinuidad, o granulación, de la carga eléctrica sólo es evidente en experimentos bastante elaborados, sencillamente porque la mayoría de los cuerpos cargados tienen una carga que es mucho mayor que e; esto es, lo típico es que el entero N en la Ec. (20-8) sea mucho mayor que 1. Pero la carga única del electrón se

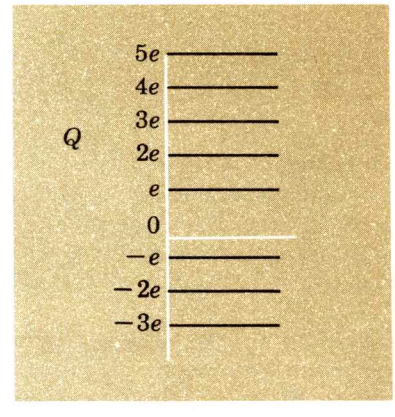


FIG. 20-10. Cuantización de la carga. Los únicos valores posibles de cualquier carga Q son múltiplos enteros de la carga electrónica e.

* La exótica partícula de muy corta vida $\Delta(1236)$ tiene una carga de $+2e$.

demuestra de modo directo en el experimento fundamental de Millikan (Sec. 21-5). La cuantización de la carga está implícita en la idea química del número atómico, donde este entero representa el número total de electrones (o protones) y, por tanto, el número total de cargas negativas (o positivas) de un átomo neutro. Por ejemplo, los elementos $_1$H, $_2$He, y $_3$Li tienen en este orden los números atómicos 1, 2 y 3. La cuantización de la carga se encuentra también implícita en la idea química de valencia, donde otra vez se le asigna un entero positivo o negativo.

RESUMEN

La fuerza eléctrica, o de Coulomb entre cargas puntuales vale:

$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2} \qquad (20\text{-}2)$$

donde $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9.0 \times 10^9$ N-m^2/C^2. La unidad carga en el SI es el coulomb. La fuerza eléctrica es una fuerza conservativa y central, y el principio de superposición de las fuerzas se aplica a la interacción de Coulomb.

La carga eléctrica se conserva: en cualquier sistema aislado, la carga neta es constante. La carga eléctrica está cuantizada: cualquier carga que se observe es un múltiplo entero, positivo o negativo, de la carga electrónica $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C.

PROBLEMAS

20-1. Demostrar que el valor de la carga total de una mol de electrones es de 96487 C. (Este valor particular de la carga eléctrica, 96487 C, — igual al producto del número de Avogadro y de la carga electrónica, se denomina *constante de Faraday*).

20-2. Dos esferas metálicas pequeñas e idénticas se encuentran descargadas al principio. Calcular cuántos electrones deben transportarse de una esfera a la otra si deben atraerse con una fuerza de 1.0 N cuando se encuentren a la distancia de 10 cm.

20-3. Una carga de $+0.30\ \mu$C está a 10.0 cm de una carga de $-2.70\ \mu$C. Calcular en qué punto (que no esté en el infinito), relativo a la primera carga, deberá colocarse una tercera carga positiva para que la fuerza eléctrica resultante en ella valga cero.

20-4. Considérense las cinco cargas de la Fig. P 20-4 a igual distancia separadas a lo largo de una línea recta, con 10 cm de distancia entre ellas. Las dos cargas extremas, de $+2.0\ \mu$C cada una, se encuentran fijas. Encontrar el valor y el signo de las cargas q_1 y q_2 para que la fuerza resultante que recibe cada una de las tres cargas centrales, valga cero.

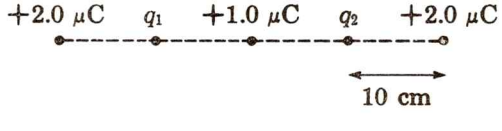


FIG. P20-4

20-5. Calcular la distancia entre un electrón y un protón para que la fuerza de atracción de Coulomb

entre ellos sea igual a la fuerza de gravitación cuando el electrón y el protón estén a la distancia de 5.3×10^{-11} m. (Nótese que el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, la distancia entre el electrón y el protón es de 5.3×10^{-11} m).

20-6. Dos conductores esféricos idénticos están al principio cargados con signos *opuestos*. Cuando se separan a la distancia r, la fuerza que recibe cada conductor es F. Entonces los dos conductores se ponen en contacto y se separan otra vez a la distancia r. La fuerza que recibe cada uno se encuentra que vuelve a tener la magnitud F. ¿Cuál es la relación de las dos cargas iniciales?

20-7. En el experimento de Cavendish se mide la fuerza atractiva gravitacional entre dos masas de 1.0 kg y 100 kg. Calcular la máxima carga que puede contener cada masa para que la fuerza electrostática entre ellas sea menor que 10^{-3} veces la fuerza gravitacional. Supóngase que cada masa tiene la misma carga.

20-8. Cuatro cargas iguales $+Q$, se colocan en los cuatro vértices de un cuadrado cuyo lado vale L. Encontrar la magnitud de la fuerza que recibe cada carga de las otras tres.

20-9. Dos esferitas cargadas, a 4.0 cm de distancia, se atraen con una fuerza de 180 N. Encontrar el signo y la magnitud de cada una de las dos cargas si su suma algebraica es de $+4.0\ \mu$C.

20-10. Una carga de $+2.0\ \mu$C se encuentra en el plano XY con coordenadas $(-4.0$ cm, $0)$; una segunda carga de $-3.0\ \mu$C se encuentra en $(0, +3.0$ cm). Una tercera carga Q se coloca en $(+3.0$ cm, $0)$. (*a*) Encontrar el valor de Q, para que la componente X de la fuerza eléctrica resultante en la carga de $-3.0\ \mu$C sea igual a cero; (*b*) Encontrar una Q tal, que la componente Y de la fuerza sobre la carga de $-3.0\ \mu$C valga cero.

20-11. Tres cargas iguales $+Q$ se encuentra en los vértices de un triángulo equilátero de lado L. Encontrar el o los puntos dentro del triángulo en donde una cuarta carga no reciba una fuerza eléctrica.

20-12. Encontrar a qué distancia la fuerza electrostática de repulsión entre dos electrones, vale 1.0 N.

20-13. Encontrar a qué distancia la fuerza de repulsión electrostática entre dos protones es igual al peso de 1.0 kg, en la superficie de la Tierra.

20-14. Supongamos que tanto el Sol como la Tierra estuvieran cargados negativamente, teniendo cada uno de ellos la carga neta de 1.0 gramo de electrones. (*a*) Calcular la magnitud de esta carga. (*b*) Calcular la fuerza electrostática, en estas circunstancias, entre la Tierra y el Sol. (La distancia de la Tierra al Sol es de 1.5×10^{11} m.)

20-15. Tres cargas puntuales $q_A = +1.0\ \mu$C, $q_B = -2.0\ \mu$C, y $q_C = +4.0\ \mu$C se encuentran en los vértices de un triángulo isósceles cuyos lados $AB = AC$ tienen 5.0 cm de longitud, y cuyo lado $BC = 8.0$ cm. Calcular la magnitud de la fuerza que recibe cada carga e indicar la dirección de estas fuerzas en un diagrama apropiado.

20-16. Las cargas puntuales q_1, q_2 y q_3 están en los vértices de un triángulo equilátero de 6.0 cm por lado. Se sabe que $F_{12} = -10$ N, $F_{13} = +7.5$ N, y $F_{23} = -30$ N, donde F_{12} es la magnitud y el signo (+, repulsión; −, atracción) de la fuerza electrostática entre las cargas q_1 y q_2, etc. Encontrar la magnitud y signo de las tres cargas, tomando a q_1 como positiva.

20-17. Dos esferitas conductoras, teniendo cada una la masa de 10 g, están suspendidas de dos hilos aisladores de 50 cm de largo, unidos en un punto en su parte superior. A uno de los conductores se le da una carga inicial Q, y entonces se pone en contacto con el otro conductor, al principio sin carga. Los dos conductores se rechazan uno a otro ahora y llegan al reposo cuando el ángulo entre los hilos es de 74°. ¿Cuánto vale la carga inicial Q del conductor?.

20-18. Dos esferitas de 6.0 g llevan iguales cargas eléctricas. Cada esfera está colgada del mismo punto por medio de un hilo aislador de 13 cm de largo. Al llegar al equilibrio las dos esferitas quedan a 10 cm de distancia. Encontrar la magnitud de la carga eléctrica de cada esferita.

20-19. Una partícula de masa m y con carga $-q$ se encuentra a la mitad de la distancia entre otras dos cargas puntuales fijas, cada una con la carga $+q$. Cuando la partícula negativa se desplaza un poco a lo largo de la línea que une las tres cargas, oscilará con movimiento armónico simple. Encontrar la frecuencia de la oscilación.

20-20. Suponiendo que el Sol, la Tierra y la Luna tienen cada uno una carga eléctrica neta ¿podría explicar el lector sus movimientos observados en términos de interacciones eléctricas en lugar de las interacciones gravitacionales?

20-21. El electrón de un átomo de hidrógeno gira alrededor del protón en un círculo de 0.53 Å. de radio. (*a*) ¿Cuál es la fuerza que recibe el electrón?. (*b*) ¿Cuánto vale la velocidad del electrón? ($1\ Å = 10^{-10}$ m.)

20-22. Dos electrones giran alrededor de un protón en la misma órbita circular, en posiciones diametralmente opuestas. Si el radio de la órbita es de 0.53 Å, ¿cuál es la velocidad angular del movimiento orbital de los electrones?.

20-23. Imagínese que un electrón se mueve alrededor de un protón en una órbita circular de 1.0×10^{-10} m. (*a*) ¿Cuánto vale la frecuencia del movimiento orbital del electrón?. (*b*) Calcular la frecuencia del movimiento orbital si las cargas de las dos partículas no existieran y la órbita del electrón se mantuviera sólo por medio de la interacción gravitacional. (masa del electrón, 9.1×10^{-31} kg; masa del protón 1.7×10^{-27} kg.)

20-24. Calcular las fuerzas de Coulomb que reciben cada uno de los dos fragmentos nucleares de $^{146}_{56}\mathrm{Ba}$ y de $^{90}_{36}\mathrm{Kr}$ formados en la fisión nuclear del $^{236}_{92}\mathrm{U}$ cuando, al acabar de formarse, sus centros están separados por 1.3×10^{-14} m.

20-25. Las partículas de un núcleo atómico, los protones y los neutrones, se atraen entre sí con una fuerza nuclear muy intensa. Esta fuerza exhibe saturación; esto es, cualquier partícula nuclear interaccionará sólo con aquellas partículas próximas que estén dentro del alcance de la fuerza nuclear. La fuerza de Coulomb, por otra parte, aunque disminuye con la distancia, tiene un alcance infinito; además, actúa entre cualquier pareja de partículas cargadas. ¿En qué tipo de núcleo, ligero o pesado, es la repulsión de Coulomb relativamente más importante que la atracción nuclear?

20-26. (*a*) Supongamos que durante la noche todas las partículas con carga positiva se vuelven negativas y todas las negativas se vuelven positivas ¿podría usted saberlo?. (*b*) Supongamos que la magnitud de e aumentara en un factor de 10^{10} ¿podría usted descubrirlo?

20-27. ¿Qué evidencia existe de que la carga total del universo, si no fuera cero exactamente, sería solamente una pequeña fracción de la carga total positiva o negativa?.

Capítulo

21

EL CAMPO ELECTRICO

El campo eléctrico es un concepto útil en los cálculos que incluyen la fuerza de Coulomb. Las líneas del campo eléctrico que lo representan son útiles para representar la interacción de Coulomb. En este capítulo calcularemos el campo eléctrico debido a varias sencillas distribuciones de carga.

21—1 DEFINICION DEL CAMPO ELECTRICO

Considérense algunas cargas puntuales, como q_a, q_b y q_c de la Fig. 21-1, en posiciones fijas. Si se introduce otra carga q_t, una carga de prueba, en la posición P, se encuentra la fuerza eléctrica resultante $\mathbf{F}_t$ que actúa en ella, por la sobreposición de las fuerzas eléctricas individuales debidas a las cargas q_a, q_b y q_c. Supongamos ahora que se reemplace a esta carga de prueba por otra del mismo signo pero de doble valor. La fuerza eléctrica que ejerce cada una de las tres cargas fijas en q_t en la Fig. 21-1 es proporcional a ella; por tanto, la fuerza que recibe la carga $2q_t$ colocada en el punto P, será el doble que la fuerza sobre la carga q_t. Si se conoce la fuerza eléctrica resultante en la unidad de carga positiva colocada en la región de un conjunto de cargas fijas, la fuerza eléctrica en cualquier otra carga puntual colocada en la misma posición se encontrará fácilmente: la fuerza es proporcional a la magnitud de la carga de prueba; para una carga positiva, la dirección de la fuerza es la misma que para la carga positiva unitaria, pero de sentido *contrario* para una carga negativa.

Resulta conveniente definir el *campo eléctrico* **E**, para cualquier punto del espacio, como la *fuerza eléctrica resultante por unidad de carga positiva.*

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$$

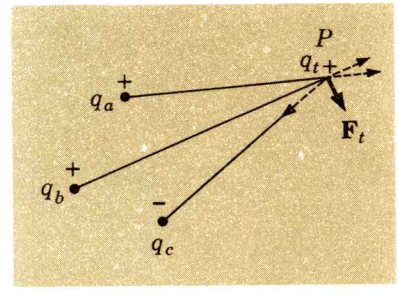


FIG. 21-1. La carga de prueba q_t recibe la fuerza eléctrica resultante $\mathbf{F}_t$ debido a las cargas q_a, q_b y q_c.

Conociendo **E** en cualquier punto se podrá encontrar la fuerza eléctrica **F**, que actúa en cualquier carga q_t en el mismo punto con la relación:

$$\mathbf{F} = q_t\mathbf{E} \tag{21-2}$$

Si se desea que el campo eléctrico originado por las cargas puntuales (q_a, q_b y q_c en la Fig. 21-1) permanezca sin cambio, es esencial que las cargas estén en posiciones fijas; sólo entonces, al introducir la carga de prueba, estas cargas no se moverán por la fuerza eléctrica adicional que reciben, fuerza que altera al campo. Así, para calcular un campo estacionario **E**, debido a una o más cargas puntuales, habrá que imaginar que estas cargas permanecen en una posición fija; en forma alternativa, se puede imaginar que la carga de prueba q_t sea tan pequeña que no afecte de modo apreciable la posición de las otras cargas. **E** representa un campo vectorial en el espacio cuya magnitud, dirección y sentido están dados por la fuerza que recibe la unidad de carga positiva antes de que se introduzca cualquier carga de prueba.

A veces la cantidad indicada con **E** se denomina la "intensidad" del campo eléctrico: aquí la llamaremos sencillamente el campo eléctrico. Las unidades del campo eléctrico son newtons sobre coulomb. Veremos después (Sec. 23-4) que las unidades equivalentes son volts sobre metro.

Es fácil encontrar el campo eléctrico a la distancia r de una única carga puntual q con la ley de Coulomb. La fuerza entre q y la carga q_t es:

$$F = k\frac{qq_t}{r^2}$$

por tanto

$$E = \frac{F}{q_t} = \frac{kq}{r^2} \tag{21-3}$$

Esta relación puede escribirse en forma vectorial por medio de radio vector **r** que indica la posición de la carga de prueba con relación al origen colocado en la carga q:

$$\mathbf{E} = \frac{kq}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{21-4}$$

donde $(\mathbf{r}/r)$ es un vector unitario con dirección de q a q_t. La magnitud del campo eléctrico de una sola carga puntual varía inversamente con el cuadrado de la distancia a ella. Como las fuerzas eléctricas se superponen como vectores, los campos eléctricos debidos a las cargas puntuales individuales se suman como vectores para dar el campo resultante.

El concepto de campo eléctrico proporciona un nuevo modo de considerar la interacción entre dos cargas q_a y q_b. Se puede decir

que la carga q_a crea, o actúa como fuente, de un campo eléctrico q_b, que la rodea y que la carga q_d sumergida en este campo, queda entonces sometida a una fuerza eléctrica $\mathbf{F}_{a\text{ en }b}$. Esto es,

$$\mathbf{E}_a = \frac{kq_a}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}_{a\text{ en }b} = q_b\mathbf{E}_a$$

De manera semejante, se puede interpretar la fuerza eléctrica que ejerce q_b en q_a suponiendo que q_b engendra el campo eléctrico $\mathbf{E}_b = (kq_b/r^2)\ (\mathbf{r}/r)$ y que q_a sumergida en el campo $\mathbf{E}_b$ experimenta la fuerza $\mathbf{F}_{b\text{ en }a} = q_a\mathbf{E}_b$.

Este proceso en dos etapas, la producción del campo por una carga y la respuesta a este campo por la segunda carga puede parecer a primera vista una cosa nimia. Pero en realidad existe una justificación real para el concepto del campo; esto es, para considerar que las interacciones eléctricas tienen lugar por la vía del campo eléctrico. Por un lado, cuando q_a se mueve, de modo que cambia su distancia a q_b esta carga *no* percibe en forma *instantánea* una fuerza diferente, sino que q_b continúa experimentando la fuerza original (y por tanto, el campo eléctrico) durante el tiempo necesario para que la luz recorra la distancia de a a b. Es decir, las perturbaciones del campo eléctrico que provienen de cargas aceleradas, se propagan a la velocidad finita de la luz, lo que no es un mero accidente. Como veremos, la luz consiste de un campo eléctrico (y magnético) que viaja por el espacio. Así, un campo eléctrico puede desprenderse del campo eléctrico que lo genera. Estos campos eléctricos (y magnéticos), u ondas electromagnéticas, son reales físicamente, en el sentido de que se les puede atribuir propiedades "mecánicas" como la energía, el ímpetu lineal y el ímpetu angular.

Ejemplo 21-1

Dos cargas puntuales, una de + 36 μC y otra de −36 μC, están a 8.0 cm de distancia. Calcular el campo eléctrico en el punto P de la Fig. 21-2.

Se puede encontrar el campo eléctrico debido a cada una de las dos cargas y sumar estos campos para calcular la resultante por medio de la Ec. (21-3), o bien, lo que es equivalente, puede encontrarse la fuerza eléctrica que reciba la carga de + 1 C colocada en el punto P.

La magnitud del campo eléctrico $\mathbf{E}_+$, debido a la carga de + 36 -μC vale:

$$E_+ = \frac{kq}{r^2} = k\,\frac{36\times10^{-6}\text{ C}}{(6\times10^{-2}\text{ m})^2} = k(1.00\times10^{-2}\text{ C/m}^2)$$

El sentido y dirección de $\mathbf{E}_+$ es de alejamiento de la carga positiva y sobre la línea que une al punto P con la carga. De modo similar la magnitud del campo $\mathbf{E}$ de la carga negativa, es:

$$E_- = \frac{kq}{r^2} = k\,\frac{36\times10^{-6}\text{ C}}{(10\times10^{-2}\text{ m})^2} = k(0.36\times10^{-2}\text{ C/m}^2)$$

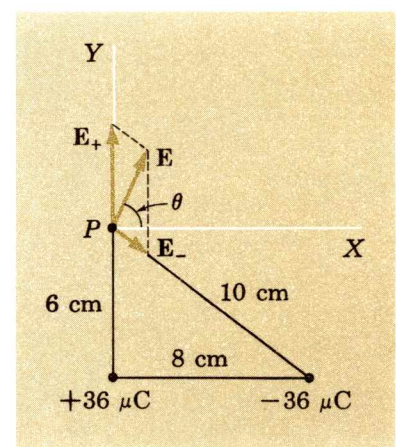


FIG. 21-2

Siendo ahora el sentido de $\mathbf{E}_-$ *hacia* la carga negativa.

Entonces se suman vectorialmente $\mathbf{E}_+$ y $\mathbf{E}_-$ para encontrar el campo resultante E con las componentes E_x y E_y en el punto P. Se tiene entonces:

$$E_x = k(0.36 \times 10^{-2}\ \text{C/m}^2)\left(\frac{8\ \text{cm}}{10\ \text{cm}}\right) = k(0.29 \times 10^{-2}\ \text{C/m}^2)$$

$$E_y = k\left[(1.00 \times 10^{-2}) - (0.36 \times 10^{-2})\left(\frac{6\ \text{cm}}{10\ \text{cm}}\right)\right](\text{C/m}^2)$$

$$= k(0.78 \times 10^{-2}\ \text{C/m}^2)$$

La magnitud de E es

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = k(0.83 \times 10^{-2}\ \text{C/m}^2)$$

$$= (9.0 \times 10^9\ \text{N-m}^2/\text{C}^2)(0.83 \times 10^2\ \text{C/m}^2) = 7.5 \times 10^7\ \text{N/C}$$

y su dirección θ con respecto al eje de las X, es:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{E_y}{E_x} = \tan^{-1}\frac{0.78}{0.29} = 70°$$

21—2 LINEAS DEL CAMPO ELECTRICO

Se puede usar un cierto número de vectores, como en la Fig. 21-3*a*, para representar el campo eléctrico de una carga puntual (positiva en este ejemplo). Todos los vectores son radiales, con sentido hacia afuera, y con una magnitud inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la carga. Un modo equivalente de hacer el "mapa" de este campo eléctrico se representa en la Fig. 21-3*b*, donde un cierto número de *líneas del campo eléctrico,* con sentido hacia afuera y espaciamiento uniforme, están representadas saliendo de la carga puntual. Las líneas eléctricas del campo son llamadas a veces líneas eléctricas de fuerza. Es evidente que, el sentido y dirección de las líneas continuas corresponden al sentido y dirección de **E**. Por otra parte, el número de dichas líneas que pasen por una pequeña área de tamaño fijo y perpendicular a las líneas del campo eléctrico, varía en forma inversa al cuadrado de la distancia a la carga puntual. Esto se deduce del carácter inverso al cuadrado de la interacción eléctrica: si se fija el número de líneas de una carga puntual, se sabe que el número, en tres dimensiones, atravesando una superficie esférica (cuya área es $4\pi r^2$) cuyo centro esté en la carga, y el número de líneas atravesando una área perpendicular, varía en forma inversa con el cuadrado de la distancia. Puesto que el campo eléctrico producido por una carga puntual varía también inversamente con el cuadrado de la distancia, puede verse que la magnitud del campo eléctrico en un punto, es proporcional al número de líneas que atraviesan una área pequeña perpendicular a las líneas del campo.

Para campos eléctricos más complicados o para más complicadas distribuciones de carga, siempre se podrán dibujar líneas para dar la dirección de **E**, pero no es evidente que *siempre* la densidad de líneas sea igual a la magnitud del campo. En realidad éste es el

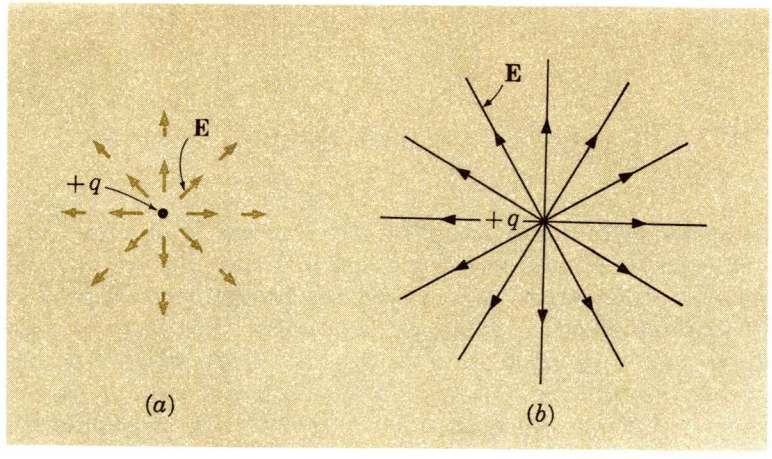


FIG. 21-3. El campo eléctrico de una carga puntual está representado en (*a*) con los vectores E, y en (*b*) por líneas del campo eléctrico.

caso para cualquier distribución de cargas como se probará en el capítulo siguiente. Por el momento sólo se hará notar que las líneas del campo eléctrico son un medio muy útil para representar a dicho campo. El campo eléctrico es *real,* tan real como cualquier otra propiedad física medible; en cambio las *líneas* que lo representan, son una útil *ficción.*

En la Fig. 21-4, se representan dos configuraciones de cargas y sus campos eléctricos asociados. Las líneas eléctricas se originan en las cargas positivas y terminan en las negativas; donde las líneas están amontonadas el campo es intenso; donde las líneas son equidistantes y paralelas, el campo es uniforme o constante. Cuando se observa desde una gran distancia un cuerpo cualquiera que contenga cargas de un *solo signo,* se tendrá el campo de una carga puntual, esto es, $E \propto 1/r^2$.

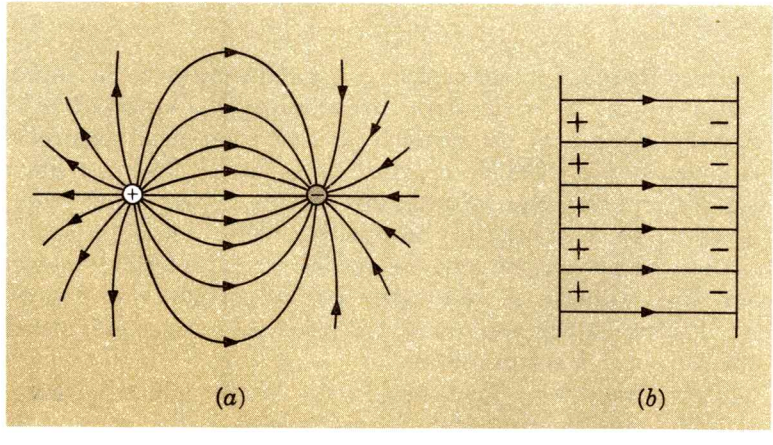


FIG. 21-4. Configuraciones del campo eléctrico en (*a*) cargas puntuales de signos diferentes, y en (*b*) para dos placas paralelas y uniformente cargadas y con signos opuestos.

Debe hacerse resaltar que las líneas del campo eléctrico dan la dirección y sentido de la *fuerza* que recibe la unidad de carga *positiva,* introducida dentro del campo. Las líneas eléctricas *no* representan las *trayectorias* de una partícula cargada, liberada dentro del campo eléctrico. (Por supuesto la trayectoria puede *calcularse* si se conoce el campo eléctrico y la masa de la partícula.)

21—3 LOS CAMPOS ELECTRICOS EN TRES CASOS DE GEOMETRIA SENCILLA

La ley de Coulomb se aplica sólo a *cargas puntuales,* pero se puede calcular el campo eléctrico en una distribución cualquiera de cargas, encontrando la suma vectorial de los vectores individuales del campo eléctrico debidos a las cargas puntuales que forman la distribución, y aplicando la ley de Coulomb a las cargas puntuales consideradas por separado. En situaciones especiales caracterizadas por una gran simetría geométrica es posible alcanzar una simplificación considerable de los cálculos por medio de la ley de Gauss, que será tratada en el Cap. 22. Existen tres sencillas distribuciones continuas de carga —una carga puntual, una carga lineal y una carga superficial— para las cuales es fácil encontrar cómo varía **E** con la posición; para distribuciones más complicadas, éstas pueden a menudo imaginarse como superposiciones de distribuciones sencillas; conociendo las configuraciones del campo eléctrico en estos tres casos, puede conocerse, al menos cualitativamente, el campo para dichas complicadas distribuciones del campo.

Carga puntual. Ya se ha resuelto este problema. El campo eléctrico es radial, con sentido hacia afuera si la carga puntual es positiva, y varía con la distancia r a la carga de acuerdo con la Ec. (21-3):

Carga puntual: $$E \propto \frac{1}{r^2}$$

Carga lineal. En este caso la carga eléctrica está distribuida de modo uniforme a lo largo de un alambre de longitud infinita, siendo dicho alambre un cilindro de área transversal despreciable. A la carga por unidad de longitud se le llama densidad lineal de carga, λ (lambda), en coulombs por metro. Se comprende que una línea de carga, en realidad, no puede ser infinitamente larga, por eso lo que se encuentra es el campo eléctrico debido a una carga lineal finita (donde el conductor puede ser un alambre o una barra dieléctrica delgada) en aquellos puntos mucho más próximos al alambre que a sus extremos.

Es fácil establecer la dirección del campo eléctrico con sólo consideraciones de simetría: **E** será radial hacia afuera (hacia

dentro) de una carga lineal positiva (negativa), estando las líneas eléctricas en un plano perpendicular a la línea y siendo rectilíneas; sólo esta dirección es compatible con el hecho de que una línea infinita es simétrica a la izquierda y a la derecha de cualquier punto. Si **E** no fuera perpendicular al alambre, habría una diferencia entre la izquierda y la derecha.

Por medio de la ley de Gauss es fácil demostrar (Véase el Ej. 22-2, Sec. 22-2) que la magnitud del campo eléctrico resultante debido a una carga lineal infinita vale

$$E = \frac{2k\lambda}{r} \tag{21-5}$$

donde r es la distancia perpendicular del punto considerada a la línea infinita. El campo eléctrico es proporcional a la densidad lineal de carga y disminuye con la *primera* potencia de r:

Carga lineal: $$E \propto \frac{1}{r}$$

Es curioso saber que el campo eléctrico de una carga lineal infinita, que contiene una carga total *infinita,* es *finito*.

Carga superficial infinita. Consideremos ahora el campo eléctrico producido por una superficie plana infinita, con carga uniforme. La carga por unidad de área, llamada densidad superficial de carga (en coulombs por metro cuadrado), constante en este caso, se simboliza con la letra σ. Fundándose nada más en consideraciones de simetría, se puede determinar de inmediato que el campo eléctrico debe ser perpendicular a la superficie, con sentido hacia afuera para una hoja con carga positiva, y hacia adentro para una con carga negativa; esto se deduce de que existe sólo una dirección asociada con un plano, que es la normal.

De nuevo con la ley de Gauss puede demostrarse (Véase Ej. 22-3, Sec. 22-2) que el campo eléctrico debido a una superficie infinita, con densidad de carga σ es

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{21-6}$$

El campo eléctrico es *constante* en magnitud e independiente de la distancia a la superficie. Un plano infinito de carga uniforme produce un campo eléctrico uniforme a lo largo de la normal al plano:

Carga superficial: E = constante

Si la superficie con carga uniforme se imagina como una hoja cargada de espesor infinitesimal, un campo eléctrico uniforme de magnitud $E = \sigma/2\varepsilon_0$ se produce en *ambos lados* de la hoja, como se

muestra en la Fig. 21-5*a*. Por supuesto, **E** siempre se aleja de la superficie en ambas direcciones para una hoja con carga positiva y apunta hacia la superficie en ambas direcciones cuando la hoja esté negativamente cargada. Ahora, si se tienen dos hojas cargadas y paralelas con cargas superficiales *opuestas,* pero ambas con la misma magnitud σ, como en la Fig. 21-5*b* el campo resultante entre las hojas recibe iguales contribuciones, tanto en magnitud como en dirección, de las dos superficies, por lo que el campo resultante es $E = \sigma/\varepsilon_0$; fuera de esta región los campos de las dos superficies se cancelan y $E = 0$ (Véase Fig. 21-5*c*). Este par de hojas paralelas con cargas opuestas, proporciona una manera sencilla de establecer en el espacio un campo eléctrico uniforme. Si las dos hojas con carga opuesta son conductoras, el par constituye un *capacitor* (Véase la Sec. 23-7).

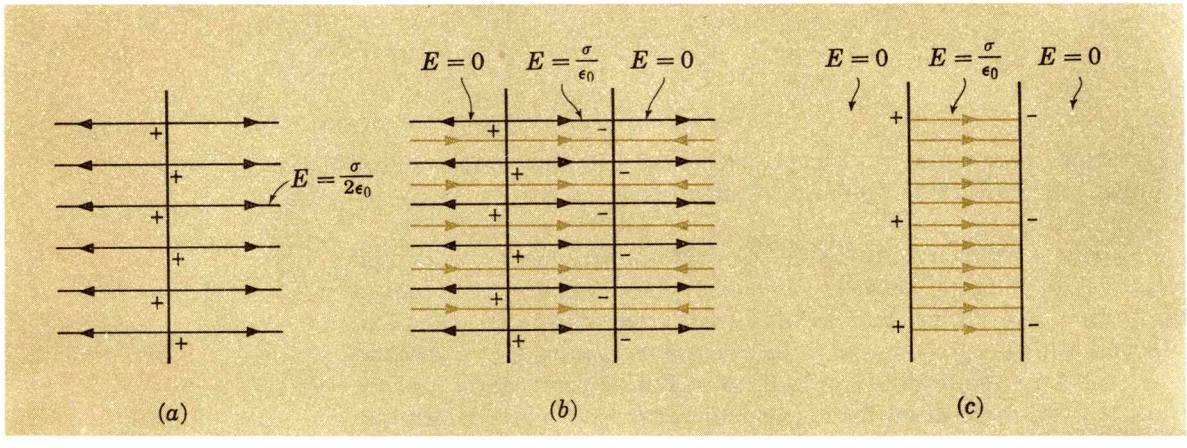


FIG. 21-5. (*a*) Campo eléctrico de una sola hoja con carga uniforme; (*b*) Campos eléctricos de dos hojas paralelas con cargas uniformes de signos opuestos; (*c*) campo eléctrico resultante de la parte (*b*).

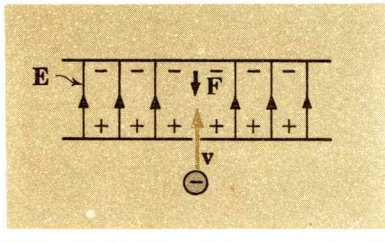


FIG. 21-6. Un electrón recibiendo una fuerza retardadora en un campo eléctrico uniforme.

Ejemplo 21-2

Un haz de electrones, cada uno con una energía de 10 eV (un eV = 1.6×10^{-19} J), penetra a la región que hay entre dos placas paralelas, separadas 10 cm, y que contienen dos cargas opuestas. Los electrones entran por un hoyo en la placa con carga positiva y se mueven al principio en la dirección del campo eléctrico (Fig. 21-6). Calcular la magnitud mínima del campo eléctrico que detenga los electrones antes de que peguen en la segunda placa.

La fuerza eléctrica que reciben los electrones es opuesta a su velocidad inicial; por tanto, están sometidos a una fuerza retardadora constante la cual puede llevarlos al reposo y acelerarlos después haciéndolos retroceder hacia el hoyo. Al llevar las partículas, con una energía cinética inicial K, hasta el reposo a una distancia d, la fuerza eléctrica constante F dará el trabajo Fd. Por tanto.

$$K = Fd = eEd$$

de donde $$E = \frac{K}{ed} = \frac{(10 \text{ eV})(1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.10 \text{ m})} = 100 \text{ N/C}$$

Nótese la conversión de electrón volts a joules. Como el valor de la carga del electrón es el mismo número (no por accidente, como veremos), el cálculo se vuelve muy sencillo. Nótese además, que *no* se toma en cuenta la masa de la partícula cargada. Un ion de cloro, Cl^-, de 10 eV, será detenido por el mismo campo eléctrico; por supuesto, este ion se moverá a mucho menor velocidad inicial.

21—4 CAMPOS ELECTRICOS Y CONDUCTORES

En un conductor en equilibrio electrostático el campo eléctrico, tanto en el interior como en el exterior del conductor, es muy sencillo: En cualquier punto dentro de la superficie del conductor, $\mathbf{E} = 0$; en la superficie del conductor, $\mathbf{E}$ siempre es perpendicular a ésta; véase Fig. 21-7. Probaremos ahora estas afirmaciones.

Imaginemos que una carga neta se colocó de algún modo en el interior de un conductor sólido: entonces se establece momentáneamente un campo eléctrico dentro del conductor; este campo actúa en los electrones libres que están dentro del conductor, los redistribuye en todo el volumen hasta que ya no reciban fuerzas del campo eléctrico resultante y lleguen por último al reposo. Como los electrones de conducción se mueven muy fácilmente, el estado de equilibrio electrostático se alcanza, en realidad, con gran rapidez. Si un electrón libre en el interior del conductor *no* está sometido a una fuerza eléctrica neta, el campo eléctrico en el interior del conductor valdrá exactamente *cero*. Esto significa que no habrá una carga neta dentro del conductor. ¿Dónde habrá ido la carga neta agregada? Estará, por supuesto, en la superficie del conductor, habiéndose movido las cargas de signo opuesto, cancelándose así la configuración original de la carga neta.

En equilibrio electrostático la carga neta que contiene un conductor se encuentra en reposo en la superficie exterior. Si cualquier carga está en reposo en la superficie no actuará sobre ella ninguna fuerza a lo largo de la superficie, puesto que tal fuerza obligaría a la carga a moverse sobre dicha superficie; por esto el campo eléctrico en la superficie del conductor será *perpendicular* a su superficie en todos sus puntos. En términos de líneas del campo eléctrico puede decirse que (1) no hay líneas del campo eléctrico dentro del conductor y (2) las líneas del campo eléctrico se originan en las cargas que están en la superficie y son siempre perpendiculares a ella (Fig. 21-7).

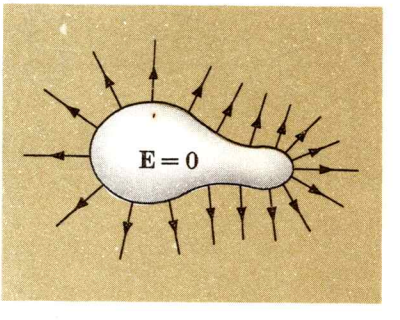


FIG. 21-7. El campo eléctrico de un conductor cargado. Dentro del conductor E = 0; en la superficie exterior E es perpendicular a ésta.

Recuérdese que el campo eléctrico de cualquier plano infinito con carga uniforme, es perpendicular al plano y proporcional a la densidad superficial de carga σ de acuerdo con la Ec. (21-6).

Cualquier porción muy pequeña de la superficie de un conductor, se aproxima mucho a ser una superficie plana y, como se ha visto, el campo eléctrico será perpendicular a dicha superficie. Como $E \propto \sigma$, la carga en la superficie de un conductor es más densa en aquellos puntos donde el campo eléctrico es mayor; por consiguiente las líneas del campo eléctrico que emanan de un conductor cargado indican cómo se distribuye la carga sobre la superficie: la carga se concentra donde son más densas las líneas eléctricas.

El comportamiento de las cargas que se encuentran en un cuerpo no conductor es bastante diferente, ya que una carga en él —en su superficie o en su interior— *no* se mueve, porque los electrones en un aislador *no* son libres de redistribuirse por sí mismos. En general deberá existir un campo eléctrico dentro de un no conductor, la carga *no* estará por fuerza sólo en la superficie, y las líneas de fuerza eléctricas en la superficie *no* formarán necesariamente ángulos rectos con ella.

21—5 EL EXPERIMENTO DE MILLIKAN

La carga del electrón fue primero medida directamente en los históricos experimentos de R. A. Millikan (1868-1953), iniciados en 1909. Estos experimentos comprenden la observación de gotillas de aceite con carga eléctrica y colocadas en un campo eléctrico uniforme. La estrategia del experimento es ésta: se equilibra la fuerza que ejerce un campo eléctrico sobre un solo electrón, o sobre un pequeño número de electrones, que se encuentran en la gotilla, con una segunda fuerza: el peso de la pequeñísima gota de aceite (el aceite no se evapora con facilidad). Las partes esenciales del arreglo experimental se indican en la Fig. 21-8. Las gotillas de aceite de un pulverizador caen en la región que existe entre dos placas horizontales, a través de una perforación en la placa superior. Si las placas están descargadas no hay campo eléctrico y una gota de aceite inicialmente se acelera hacia abajo por la fuerza gravitacional; sin embargo, muy pronto alcanza su velocidad terminal, porque al caer queda sometida a dos fuerzas, su peso $\mathbf{F}_g$ hacia abajo y una fuerza de resistencia $\mathbf{F}_r$ hacia arriba. Esta última fuerza, debida al bombardeo molecular de las moléculas del aire, es proporcional a la velocidad v_0 de la gota de aceite. Observando el movimiento de una determinada gotilla con un microscopio, puede medirse su velocidad, cronometrando su caída. Así, en ausencia de un campo eléctrico:

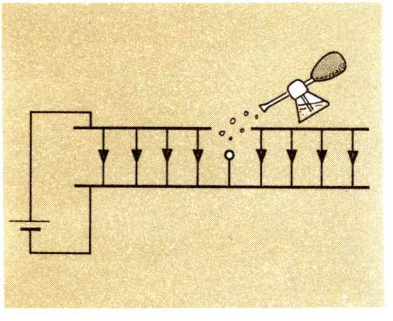


FIG. 21-8. Esquema del experimento de Millikan de la gota de aceite.

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_r = 0 \qquad \text{donde } \mathbf{F}_r = -K\mathbf{v}_0$$

La gotilla es tan pequeña que no es posible pesarla directamente, pero midiendo $\mathbf{v}_0$ y conociendo el coeficiente resistivo K, puede determinarse el peso $\mathbf{F}_g$ de la gotilla.

Cuando se conecta el campo eléctrico vertical, la gotilla, si está cargada, queda sujeta a una fuerza eléctrica adicional $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$, donde q es la carga de la gotilla y $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico constante actuando ya sea hacia arriba o hacia abajo. (Como veremos después, en un campo uniforme $E = \Delta V/d$, donde ΔV es la diferencia de potencial entre las placas cargadas, que se mide fácilmente, y d la distancia entre ellas.) De nuevo, la gotilla cargada está sometida a una fuerza no equilibrada, pero muy pronto adquiere una velocidad terminal, bajo la influencia de la fuerza resistiva $\mathbf{F}_r$. Cuando se alcanza la velocidad terminal, la fuerza resultante sobre la gotilla valdrá cero de nuevo, por lo que:

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_e = 0$$

donde $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}_r = -K\mathbf{v}$ (21-7)

Se mide entonces la magnitud y dirección de la velocidad constante, $\mathbf{v}$, que adquiere la gotilla. La constante K se conoce, $\mathbf{E}$ se mide fácilmente y $\mathbf{F}_g$ se determina por las observaciones realizadas sin el campo eléctrico. Así, aplicando (21-7), se puede determinar la magnitud y signo de la carga q. Por otra parte, exponiendo la gota a cortos estallidos de rayos X ionizantes, se puede cambiar la carga q de la gota (desde luego, sin cambiar su peso F_g).

El resultado de los experimentos, incluyendo muchas cargas y gotitas diferentes es el siguiente:

$$q = n\,e$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots$ $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C.

La carga eléctrica está cuantizada; el experimento de Millikan demuestra que las cargas eléctricas observadas siempre son un múltiplo entero del cuanto básico de carga, la carga elemental e.

RESUMEN

El campo eléctrico $\mathbf{E}$, en cualquier punto del espacio, es la fuerza resultante que recibe una carga de prueba positiva y unitaria:

$$\mathbf{E} = \sum \frac{\mathbf{F}}{q} \qquad (21\text{-}1)$$

Se puede hacer un "mapa" con las líneas de fuerza eléctricas, indicando la magnitud y dirección del campo eléctrico. El campo eléctrico varía con la posición en tres casos geométricos sencillos, como sigue:

carga puntual: $$E = \frac{kq}{r^2} \propto \frac{1}{r^2} \qquad (21\text{-}3)$$

carga lineal: $$E = \frac{2k\lambda}{r} \propto \frac{1}{r} \qquad (21\text{-}5)$$

carga superficial: $$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \propto \text{constante} \qquad (21\text{-}6)$$

La densidad lineal de carga es λ; la densidad superficial de carga es σ.

La carga en un conductor cargado en equilibrio reside en la superficie exterior del conductor. El campo eléctrico es perpendicular a la superficie exterior del conductor y cero dentro del conductor.

PROBLEMAS

21-1. Dos cargas estacionarias q_1 y q_2 están en posiciones fijas y a 10 cm de distancia. Encontrar el punto (o puntos) donde el campo eléctrico es cero, en las siguientes condiciones: (*a*) $q_1 = -9\ \mu C$, $q_2 = +4\ \mu C$; y (*b*) $q = +9\ \mu C$, $q_2 = +4\ \mu C$.

21-2. (*a*) Dos cargas puntuales, una de $+ 1.0\ \mu C$ y la otra de $-4.0\ \mu C$, se encuentran a 10 cm de distancia. Encontrar los puntos, sobre la línea que une a las dos cargas, en donde el campo eléctrico valga cero. (*b*) Resolver la parte (*a*) si la carga negativa es de $- 40\ \mu C$.

21-3. Encontrar el campo eléctrico en el punto P en la Fig. 21-2, si la carga de $+ 36\ \mu C$ se reemplaza por una carga de $- 36\ \mu C$

21-4. Un cuadrado, cuyo lado vale L, tiene las cargas de $+ q$, $- q$ $+ q$ $- q$, respectivamente en los vértices nordeste, noroeste, suroeste y sudeste. (*a*) ¿Cuál es la dirección y magnitud del campo eléctrico en el centro del cuadrado? (*b*) ¿Cuál es el campo en el centro si las dos primeras cargas se intercambian?.

21-5. Bosquéjense las líneas de fuerza eléctrica en las siguientes configuraciones: (*a*) Dos cargas puntuales iguales q colocadas a la distancia d; (*b*) Un triángulo equilátero con las cargas $+q$, $+ q$ y $- q$ en sus vértices; (*c*) Dos cáscaras esféricas, concéntricas, delgadas y no conductoras, respectivamente de radios R y $2R$, que contienen cada una de ellas una carga $+ q$ repartidas de manera uniforme en toda su superficie.

21-6. Una carga puntual $- q$ se encuentra en $x = - d/2$, $y = 0$, y una carga puntual $+ 2q$ está en $x = + d/2$, $y = 0$. (*a*) Bosquejar las gráficas de las componentes X y Y del campo eléctrico resultante, E_x y E_y, a lo largo del eje de las Y. (*b*) Encontrar el valor de y, en el cual E es máximo a lo largo del eje de las Y. (*c*) Encontrar el valor de y en el cual E_y es máximo a lo largo del eje de las Y.

21-7. Cuatro cargas iguales de magnitud Q, se encuentran en los vértices de un tetraedro equilátero cuya arista tiene el largo a. (La figura es una pirámide limitada por cuatro triángulos equiláteros.) Demostrar que el campo eléctrico en donde está cualquiera de las cargas (y debido a las otras tres) está dado por:

$$E = \tfrac{3}{4}\sqrt{13}\,\frac{kQ}{a^2}$$

21-8. Una partícula con carga q, y masa m, se mueve circular y uniformemente alrededor de un alambre recto de longitud infinita, con una densidad uniforme de carga, λ, de signo opuesto al de la partícula Demostrar que la velocidad de la partícula en órbita *no* depende de la distancia de la partícula al alambre y que su única velocidad vale $(2k\lambda q/m)^{1/2}$.

21-9. Un electrón se mueve en sentido circular alre-

dedor de un alambre con carga uniforme con la velocidad de 2.0×10^4 m/s. ¿Cuánto vale la densidad lineal del alambre?

21-10. Al principio un electrón se mueve con la velocidad v_0 en dirección paralela a un campo eléctrico uniforme **E**. Escribir las relaciones que dan (*a*) el tiempo Δt y (*b*) la distancia Δx que recorre el electrón antes de llegar (temporalmente) al reposo.

21-11. Calcular la relación entre las velocidades de un electrón y un protón si, partiendo del reposo, recorren una distancia de 10 cm impulsados por un campo eléctrico $E = 1{,}0 \times 10^3$ n/C $= 1.0$ kV/m.

21-12. Los ejes X y Y se encuentran uniformemente cargados con una densidad final de carga λ. Encontrar la magnitud y dirección del campo eléctrico resultante en cualquier punto de la línea $y = 2x$. Usese el principio de superposición de los campos eléctricos, el cual supone que el campo eléctrico resultante es la suma de los dos campos debidos a las dos cargas lineales.

21-13. Un anillo con carga uniforme de radio r tiene una carga total q. (*a*) Demostrar que a la distancia x, a lo largo del eje de simetría del anillo, la magnitud del campo eléctrico es $kqx\,(r^2 + x^2)^{-3/2}$. (*a*) Bosquejar las líneas eléctricas de fuerza de este anillo uniformemente cargado.

21-14. Cuando un ion de hidrógeno H^+ se mueve cerca de una superficie plana y de carga uniforme, se encuentra sometido a una fuerza constante de 4.0×10^{-15} N. ¿Cuánto vale la densidad superficial de carga?

21-15. Un electrón y un protón, partiendo ambos del reposo, son acelerados por un campo eléctrico de 5.0×10^4 N/C. Encontrar la distancia y el tiempo en que cada partícula adquiere una energía cinética de 500 eV.

21-16. Un cañón electrónico dispara en sentido horizontal un estrecho haz de electrones entre dos placas horizontales y paralelas, con cargas opuestas. El campo eléctrico uniforme entre las placas es de 500 N/C, siendo la distancia promedio entre los electrones del haz de 1.0×10^{-5} m. Comparar la fuerza eléctrica entre un electrón y el campo eléctrico de las placas con (*a*) la fuerza eléctrica entre dos electrones próximos y (*b*) la fuerza gravitacional entre un electrón y la Tierra.

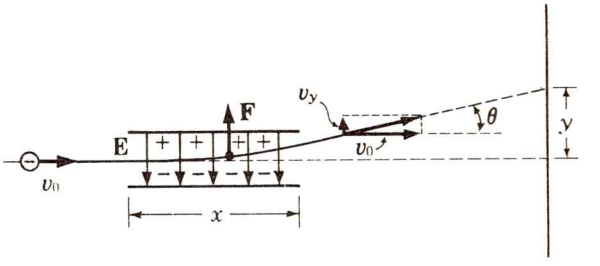


FIG. P21-17.

21-17. En un osciloscopio de rayos catódicos un estrecho haz de electrones se lanza horizontalmente entre un par de placas horizontales y paralelas, con cargas opuestas. Después de pasar entre las placas, los electrones siguen en vuelo libre y chocan con una distante pantalla fluorescente (véase Fig. P21-17). Demostrar que $\tan\theta = eEx/2K_0$, donde E es la magnitud del campo constante entre las placas y K_0 es la energía cinética inicial de un electrón. Nótese que para K_0, constante, $\tan\theta \propto x$; por tanto, ignorando la pequeña desviación vertical del haz mientras pasa entre las placas, la desviación Y en la pantalla es proporcional al campo eléctrico E.

21-18. En la Fig. P21-17, penetra un electrón entre las placas con una velocidad inicial y horizontal de 3×10^5 m/s. El campo eléctrico entre las placas horizontales es de 0.50 N/C, y la distancia horizontal a lo largo de las placas es de 3.0 cm. La pantalla distante está a 20 cm del extremo próximo de las placas. (*a*) Calcular el desplazamiento vertical del electrón al salir de las placas. (*b*) En ese instante, ¿cuál es la dirección de la velocidad del electrón? (*c*) Calcular el desplazamiento del electrón en la pantalla con relación a su posición cuando el campo eléctrico entre las placas paralelas vale cero.

21-19. Dos hojas, una conductora y otra dieléctrica, están cargadas con la misma y constante densidad superficial de carga; por tanto el campo eléctrico para ambas configuraciones es el mismo. Cuando un cuerpo cargado se coloca a la misma distancia, primero de una superficie y después de la otra, se ha encontrado que la fuerza eléctrica que recibe el

cuerpo, *no* es la misma en los dos casos. Explíquese este resultado.

21-20. Dos hojas cargadas y paralelas, con densidades opuestas de carga $+\sigma$ y $-\sigma$ se encuentran a la distancia d. (*a*) Calcular el campo eléctrico debido a la hoja con carga positiva, en el lugar de la hoja negativamente cargada. (*b*) ¿Cuál es la fuerza por unidad de área, que recibe la hoja con carga negativa?

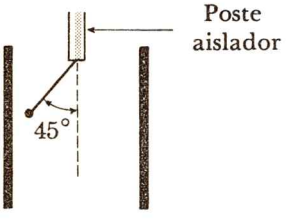


FIG. P21-22

21-21. Empezando desde el reposo, en una posición próxima a una hoja conductora uniformemente cargada, un protón alcanza una energía cinética de 1.60×10^{-16} J después de moverse, en el vacío a la distancia de 10 cm. Encontrar (*a*) la magnitud del campo eléctrico y (*b*) la densidad superficial de carga de la hoja.

21-22. Una esfera de 2.0 g cuelga de un hilo aislador, colocado entre las placas verticales de un capacitor cargado. (Véase Fig. P21-22.) Encontrar la densidad superficial de carga en cada placa del capacitor, si el hilo hace un ángulo de 45° con la vertical. La esfera contiene una carga eléctrica de + 1.0 μC

21-23. En un experimento de Millikan se observa que una gotita de aceite está equilibrada y en reposo entre las placas cuando existe entre ellas un campo eléctrico de 1.0×10^5 N/C, siendo el exceso de carga de la gotita de $+ 1.6 \times 10^{-19}$ C. (*a*) ¿Cuál es la dirección y sentido del campo eléctrico? (*b*) ¿Cuánto vale la masa de la gotita de aceite?

21-24. Con referencia al problema anterior, cuando no hay campo eléctrico, se observa que la gotita cae a la velocidad constante de 0.10 mm/s. (*a*) Determinar el valor de la constante resistiva K. (*b*) ¿Con qué velocidad (en magnitud y sentido) se mueve la gotita cuando tiene un exceso de 5 electrones? (*c*) Idem ¿si tiene una deficiencia de 10 electrones?.

21-25. Refiriéndose al Prob. 21-23, cuando no hay campo eléctrico, la gotita cae con velocidad constante de 0.10 mm/s. Calcular cuál sería su velocidad si le falta un electrón y el campo eléctrico es de 2.0×10^5 N/C.

21-26. Un *dipolo eléctrico* consiste de las cargas q y $-q$, separadas por la distancia $2a$. (Véase Fig. P21-26). (*a*) Demostrar que el campo eléctrico en un punto del bisector perpendicular al eje del dipolo, y a la distancia r, vale:

$$E = \frac{kp}{r^3} \frac{1}{(1 + a^2/r^2)^{3/2}}$$

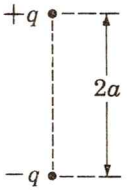


FIG. P21-26

donde $p = q\,(2a)$ es el *momento eléctrico dipolar* o sea el producto de la magnitud de una de las cargas y la distancia entre ellas. (*b*) ¿Cuál es la dirección y sentido del vector del campo eléctrico encontrado en la parte (*a*)? (*c*) Demostrar que el campo eléctrico en un punto en el eje del dipolo y a la distancia r de su centro, donde $r \gg a$, vale:

$$E = \frac{2kp}{r^3} \frac{1}{(1 - a^2/r^2)^2}$$

(*d*) ¿Cuál es la dirección del vector del campo eléctrico encontrado en el inciso anterior? Nótese que en ambos casos $E \propto 1/r^3$ cuando la distancia es tan grande que $a/r \to 0$. Mientras que el campo eléctrico de una sola carga puntual (un monopolo) varía inversamente como el *cuadrado* de r, el campo eléctrico de un dipolo varía (cuando r es grande) inversamente al *cubo* de r.

Capítulo 22

LEY DE GAUSS

La ley de Gauss es una formulación alternativa de la ley de Coulomb, que expresa de un modo sencillo y por completo general el hecho de que la fuerza eléctrica entre cargas puntuales es en sentido estricto una relación inversa al cuadrado. En distribuciones de carga de gran simetría geométrica, la ley de Gauss permite calcular fácilmente el campo eléctrico producido por una cierta variedad de distribuciones de carga. En forma recíproca, conociendo el campo eléctrico que emerge de cualquier superficie cerrada, se puede deducir la carga neta dentro de la superficie. Cuando se aplica a un conductor eléctrico, la ley de Gauss implica que la carga estática neta de cualquier conductor debe encontrarse por completo en la superficie exterior; la observación experimental que comprueba este resultado, es la más precisa demostración de la ley de las fuerzas de Coulomb.

22—1 FLUJO ELECTRICO

Como la ley de Gauss es un enunciado con relación al flujo eléctrico, definiremos primero esta cantidad. Imaginemos una superficie *cerrada* de forma arbitraria (la llamada superficie gaussiana) con el campo eléctrico atravesando esta superficie. El elemento superficial de área dS, representado en la Fig. 22-1, es lo bastante pequeño para que pueda considerarse como del todo plano; la orientación de este elemento superficial se define por la dirección de una línea normal dibujada hacia afuera. Entonces al vector $d\mathbf{S}$ se le asigna una dirección a lo largo de la normal al elemento de superficie, con sentido hacia *afuera,* y cuya magnitud es el área del elemento. El campo eléctrico **E,** el cual puede provenir de una o más cargas puntuales o de una distribución continua de carga, puede suponerse que es constante en la pequeñísima área dS. El ángulo entre **E** y $d\mathbf{S}$ es θ. Por definición,

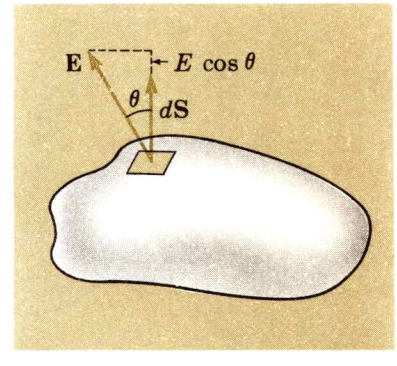


FIG. 22-1. Cálculo del flujo eléctrico que atraviesa el elemento de superficie dS, cuya dirección es la de la normal a la superficie, siendo su sentido hacia afuera.

el flujo eléctrico $d\phi_E$, que atraviesa este elemento de superficie, vale:

$$d\phi_E = E \cos \theta \, dS$$

Esto es, el flujo eléctrico es la componente $E \cos \theta$, del campo eléctrico paralelo a $d\mathbf{S}$ (o perpendicular a la superficie) multiplicada por el área dS. Esto se puede expresar en forma más abreviada por medio del producto punto, o escalar, de los vectores **E** y $d\mathbf{S}$. (Sec. 2-5.). Entonces se tiene:

$$d\phi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \tag{22-1}$$

Si el campo eléctrico se dirige hacia afuera de la superficie gaussiana, esto es, si el ángulo θ es menor de 90°, el flujo $d\phi_E$ es positivo; si el ángulo θ es mayor que 90°, el campo eléctrico penetra hacia adentro a la superficie gaussiana y el flujo es negativo. Cuando el campo eléctrico está en el plano del elemento de la superficie, $\theta = 90°$, y el flujo a través de la superficie vale *cero*. Como veremos la superficie gaussiana puede escogerse de cualquier forma, por lo que a menudo podrá escogerse de tal manera que **E** sea paralela a $d\mathbf{S}$, con lo que el flujo será sencillamente $d\phi_E = E \, dS$, o bien **E** perpendicular a $d\mathbf{S}$ y el flujo será $d\phi_E = 0$.

Para encontrar el *flujo eléctrico total* ϕ_E que sale de toda la superficie gaussiana cerrada, basta sumar las contribuciones de todos los elementos de superficie, tomando en cuenta por supuesto, las variaciones de **E** tanto en magnitud como en dirección entre un punto y otro de la superficie:

$$\phi_E = \oint d\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \tag{22-2}$$

El flujo se denomina la integral de superficie de **E** sobre la superficie cerrada gaussiana. El círculo en el signo integral indica que la integración debe calcularse en toda la superficie cerrada gaussiana. A primera vista el cálculo de esta integral parece

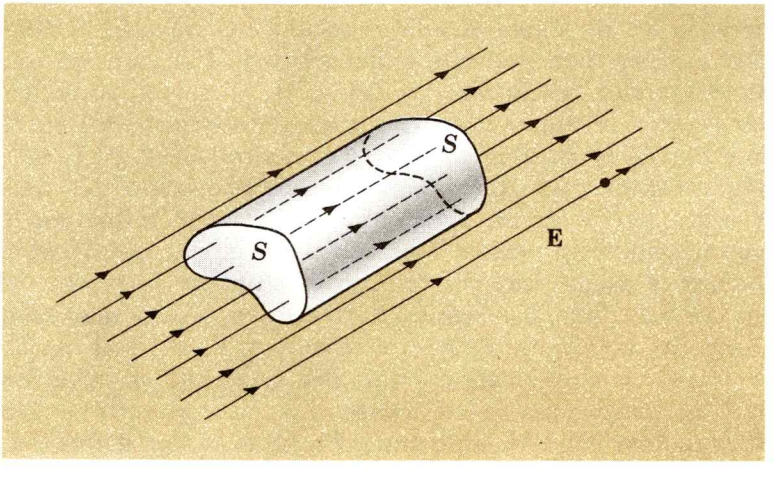


FIG. 22-2. El flujo total eléctrico a través de una superficie cerrada colocada en un campo eléctrico uniforme vale cero.

formidable; no obstante veremos que el cálculo del flujo eléctrico puede resultar notablemente sencillo cuando es sencillo el arreglo geométrico de la carga.

Ejemplo 22-1.
Calcular el flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada, colocada en un campo eléctrico uniforme, siendo la superficie la de un cilindro cuyo eje está en la dirección del campo eléctrico, como se indica en la Fig. 22-2.

En este caso no hay contribuciones a ϕ_E en la superficie curva, porque E es perpendicular a $d\mathbf{S}$. Por otro lado, las líneas de fuerza eléctrica son perpendiculares a las dos bases del cilindro, entrando por una y saliendo por otra. Las líneas que entran producen un flujo ES; las líneas que salen, el flujo $+ES$. El flujo total $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ es cero.

22—2 LEY DE GAUSS

Consideremos primero una carga puntual q (que se supone positiva para fijar ideas) rodeada por una superficie gaussiana, esférica, de radio r_1 cuyo centro esté en la carga puntual (Véase la Fig. 22-3). Se puede encontrar con facilidad que el flujo total eléctrico que atraviesa esta superficie, puesto que el campo eléctrico es radial hacia afuera, es perpendicular a la superficie en todos sus puntos. La magnitud del campo eléctrico $\mathbf{E}_1$ a la distancia r_1, de la carga puntual vale:

$$E_1 = \frac{kq}{r_1^2} \tag{21-3}$$

El área superficial de la esfera es $4\pi r_1^2$. Por tanto, el flujo eléctrico es:

$$\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{kq}{r_1^2} 4\pi r_1^2 = 4\pi kq$$

$$\phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{22-3}$$

Nótese que la distancia r_1 se cancela. Conforme aumenta el radio de la esfera, la dilución del campo eléctrico de la carga puntual, se compensa de manera exacta por la dilatación del área de la superficie de la esfera. Por supuesto, esto sucede sólo porque la interacción de Coulomb manifiesta justamente proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia.

Se ha encontrado, según la Ec. (22-3) que el flujo eléctrico de una carga puntual que atraviesa una esfera que le rodea, es nada más la carga q dividida entre la constante de permitividad ε_0. Esta

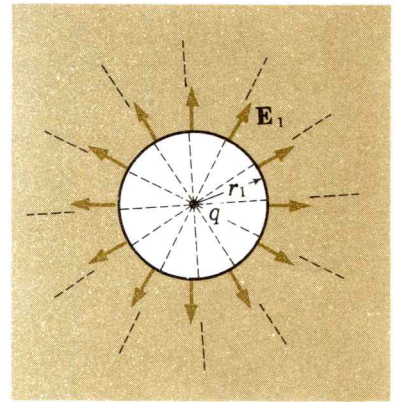


FIG. 22-3. El campo eléctrico E_1 a la distancia r_1 de una carga puntual q.

sencilla relación es por completo general: *el flujo eléctrico total* ϕ_E *que atraviesa cualquier superficie cerrada, y que proviene de cualquier número de cargas eléctricas es* q/ε_0 donde q es la carga *neta* que está dentro de la superficie. Este es el enunciado de la ley de Gauss, que probaremos a continuación.

Imaginemos primero una sola carga puntual q por una superficie de forma arbitraria, como se representa en la Fig. 22-4. Fijémonos en el flujo que atraviesa el elemento de superficie $d\mathbf{S}_2$ a la distancia r_2 de la carga puntual. El campo eléctrico aquí es:

$$E_2 = \frac{kq}{r_2^2} \tag{22-4}$$

El elemento de superficie está escogido de tal manera que subtiende el mismo ángulo sólido que el elemento de superficie dS_1, que se encuentra en la esfera concéntrica de radio r_1 con centro en q; esto es, un cono dibujado con su vértice en la carga intercepta los elementos de superficie $d\mathbf{S}_1$ y $d\mathbf{S}_2$. Demostraremos que el flujo es el mismo a través de estos dos elementos de superficie.

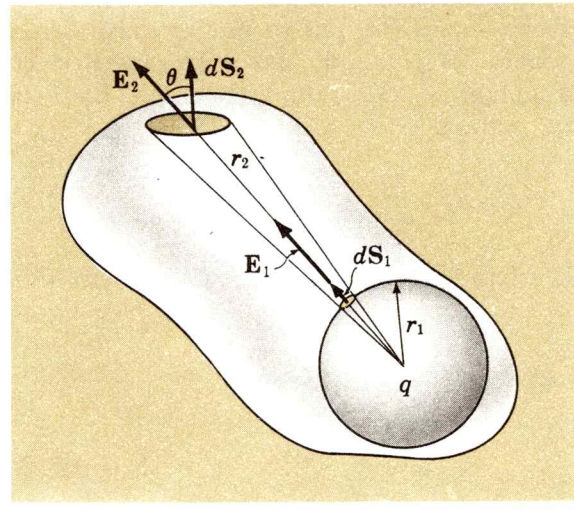


FIG. 22-4. Una carga puntual q, rodeada por un volumen de forma arbitraria y por una esfera concéntrica. El flujo eléctrico que atraviesa las dos áreas sombreadas, es exactamente el mismo.

Notemos primero que $\mathbf{E}_2$ y $d\mathbf{S}_2$, en general, no son paralelos; por consiguiente el flujo a través de este elemento de superficie es

$$d\phi_2 = \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = E_2 \cos\theta \, dS_2 \tag{22-5}$$

El área dS_2 es mayor que dS_1, no sólo porque está más lejos de la carga q, sino también porque $d\mathbf{S}_2$ está inclinada con respecto a $\mathbf{E}_2$.

(Nótese que tanto $\mathbf{E}_1$ como $\mathbf{E}_2$ están dirigidas radialmente hacia afuera a partir de q.) De hecho:

$$\frac{dS_2 \cos\theta}{dS_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \tag{22-6}$$

donde el factor $(r_2/r_1)^2$ proviene de la diferencia en las distancias, y el factor $\cos\theta$, de la inclinación de dS_2, con respecto a la dirección de E.

Sustituyendo las Ecs. (22-4) y (22-6) en (22-5), se tiene

$$d\phi_2 = \frac{kq}{r_2^2} \cos\theta \frac{(r_2/r_1)^2\, dS_1}{\cos\theta} = \frac{kq}{r_1^2}\, dS_1$$

Pero el flujo eléctrico $d\phi_1$ que atraviesa el elemento de superficie dS_1, vale

$$d\phi_1 = E_1\, dS_1 = \frac{kq}{r_1^2}\, dS_1$$

y por tanto

$$d\phi_2 = d\phi_1$$

El flujo eléctrico que atraviesa a los dos elementos correspondientes de superficie *es el mismo*.

Para encontrar el flujo que atraviesa una superficie cerrada de forma arbitraria, se extiende este procedimiento, escogiendo parejas correspondientes de elementos de superficie, hasta que toda la superficie arbitraria (y, por tanto, toda la superficie esférica) sea tomada en cuenta. Se infiere que el flujo eléctrico total que atraviesa cualquier superficie arbitraria es precisamente el mismo que el flujo eléctrico que atraviesa una esfera cuyo centro está en la carga puntual y, en consecuencia, la Ec. (22-3) se aplica a cualquier carga puntual y a cualquier superficie gaussiana cerrada, de forma arbitraria, que rodee a la carga.

Cuando la superficie gaussiana encierra a una carga positiva, el flujo eléctrico es positivo y las líneas eléctricas de fuerza salen de la superficie. Por otra parte, una carga encerrada negativa origina un flujo negativo, entrando las líneas de fuerza eléctrica a través de la superficie gaussiana.

Si la carga puntual está *fuera* de la superficie cerrada, como en la Fig. 22-5, el flujo total que atraviesa la superficie vale cero, puesto que cualquier línea del campo eléctrico que penetra en la superficie emerge también de ella.

Hasta aquí hemos tratado con una única carga puntual dentro de cualquier superficie cerrada. Supongamos ahora que se tiene un cierto número de cargas q_a, q_b, . . . dentro de alguna superficie

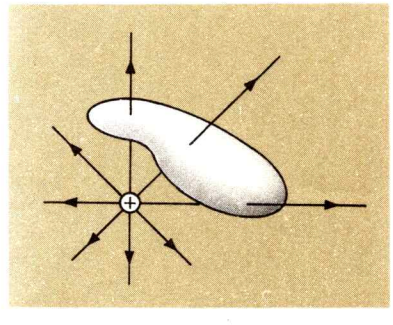


FIG. 22-5. El flujo total eléctrico que atraviesa una superficie cerrada, que *no* contiene una carga neta, vale cero.

que atraviesa la superficie, calcularemos primero el flujo debido a cada carga que atraviesa a la superficie:

$$\oint \mathbf{E}_a \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_a}{\varepsilon_0} \qquad \oint \mathbf{E}_b \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_b}{\varepsilon_0} \qquad \text{etc.}$$

Sumando estas relaciones en una sola ecuación se obtiene:

$$\oint (\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b + \cdots) \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_a + q_b + \cdots}{\varepsilon_0} \tag{22-7}$$

Esta adición (dentro del signo integral) *es* permitida. Recuérdese que se supone que la superficie es la misma para cada una de las cargas puntuales. Además, se sabe que las fuerzas eléctricas obedecen al principio de superposición y que el campo eléctrico resultante es $\mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b + \cdots$ Análogamente, en el miembro derecho de la Ec. (22-7), la carga total *neta, q* encerrada por la superficie es $q = q_a + q_b + \cdots$. Entonces la Ec. (22-7) puede escribirse así:

$$\phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{22-3}$$

Se ha probado la ley de Gauss: el flujo total eléctrico ϕ_E que atraviesa *cualquier* superficie cerrada, es sencillamente igual a la carga *neta q encerrada* dentro de la superficie, y dividida entre ε_0 Existen aquí dos suposiciones cruciales en la prueba: (1) la fuerza eléctrica varía como $1/r^2$, y (2) las fuerzas eléctricas obedecen al principio de superposición.

Aplicada la ley de Gauss, en general a una distribución de cargas, involucra una integral de superficie que puede resultar difícil de calcular. Pero en distribuciones uniformes de cargas de gran simetría geométrica —una línea de carga o una superficie de carga, por ejemplo— es una materia sencilla, y casi trivial, el calcular la integral. La clave es la siguiente: puesto que tenemos la libertad de escoger una superficie gaussiana de cualquier forma, escogeremos una forma adecuada a la simetría de la distribución de carga.

Ejemplo 22-2

Por medio de la ley de Gauss, calcular el campo eléctrico alrededor de un alambre infinito uniformemente cargado.

En esta sencilla configuración geométrica se sabe que el campo eléctrico es radial y apuntando hacia afuera (para carga positiva), siendo perpendicular al alambre; de no ser así, esto implicaría que el espacio o la distribución de carga no sería uniforme, lo que es contrario a lo supuesto. Puesto que se conoce la dirección de **E**, se escogerá una superficie gaussiana tal, que sea sencillo encontrar el flujo eléctrico que la atraviesa; esta forma es la de un cilindro

circular recto de radio r y de largo L, cuyo eje coincida con el alambre, como se muestra en la Fig. 22-6. El flujo que atraviesa las bases del cilindro vale cero puesto que éstas están en el plano del campo eléctrico. El flujo que atraviesa la superficie cilíndrica, cuya área total es $2\pi rL$ es sencillamente $E(2\pi rL)$ porque **E** siempre es paralela a $d\mathbf{S}$ y por simetría la magnitud de **E** es la misma en todos los puntos de la superficie cilíndrica. Por consiguiente, el flujo *total* que atraviesa la superficie gaussiana es

$$\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(2\pi rL)$$

De la ley de Gauss: $$\phi_E = E(2\pi rL) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

Hemos empleado el hecho de que la carga total q encerrada por el cilindro es λL, donde λ es la densidad de carga, esto es, la carga por unidad de longitud. Despejando a E:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

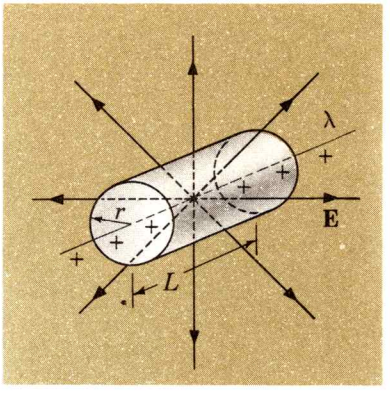


FIG. 22-6. Una superficie gaussiana cilíndrica, empleada para calcular el campo eléctrico de una carga lineal infinitamente larga.

Ejemplo 22-3

Calcular el campo eléctrico de una hoja plana infinita y con carga uniforme, empleando la ley de Gauss.

Fundándose en argumentos de simetría parecidos a los del ejemplo anterior, se sabe que el campo será perpendicular a la superficie en *ambos* lados. Nótese que la superficie se imagina como una hoja de carga infinitamente delgada, y *no* como un conductor. De nuevo escogeremos a la superficie gaussiana como un cilindro, pero esta vez con su eje perpendicular a la superficie, como se muestra en la Fig. 22-7. Esta vez las líneas eléctricas del campo son paralelas a la superficie cilíndrica, y ningún flujo atraviesa esta superficie. En las bases del cilindro, el campo eléctrico es perpendicular y saliente, teniendo el valor en cada base de EA, donde A es la superficie de cada base. La carga *total* encerrada por la superficie gaussiana es σA, donde σ es la densidad superficial de carga; esto es, la carga por unidad de área. Por consiguiente, al aplicar la ley de Gauss, se tiene:

$$\phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

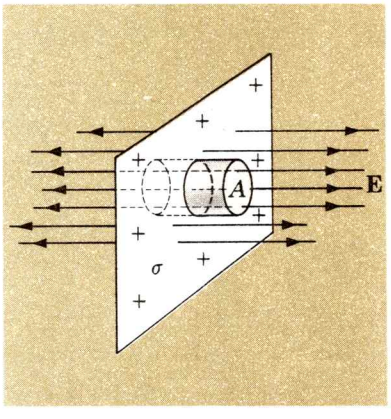


FIG. 22-7. Una superficie gaussiana cilíndrica empleada para calcular el campo eléctrico de una hoja con carga uniforme.

22—3 LINEAS DEL CAMPO ELECTRICO

En el Cap. 21 se ha afirmado que se puede hacer un mapa del campo eléctrico de cualquier distribución de carga, con líneas del campo eléctrico que se originan en las cargas positivas y

terminan en las negativas, siendo continuas entre ellas. Además, las líneas del campo eléctrico indican la dirección del campo eléctrico en cualquier punto por la tangente, y la magnitud del campo eléctrico por el número que atraviese una área perpendicular. La ley de Gauss prueba estas afirmaciones. En realidad, la ley de Gauss puede considerarse como sólo un enunciado matemático del concepto de las líneas del campo eléctrico.

El flujo eléctrico que atraviesa un elemento de superficie dS es $d\phi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$. Si esta superficie es perpendicular al campo eléctrico, entonces $E = d\phi_E/dS$; esto es, el campo eléctrico es el flujo por unidad de área perpendicular. Ahora bien, si el campo eléctrico se representa por líneas tales que un campo eléctrico de 1 N/C se represente por una línea eléctrica por unidad de área perpendicular, puede verse que el flujo eléctrico no es más que el número de líneas que pasa en sentido perpendicular por una superficie gaussiana.

Siempre es posible construir una superficie gaussiana tal, que las líneas eléctricas salgan o entren perpendiculares a la superficie; entonces el flujo total ϕ_E, no es sino el número neto de líneas del campo que atraviesa la superficie gaussiana. Si no hay carga encerrada, $q = 0$, y por tanto, $\phi_E = 0$, por la ley de Gauss; entonces el número neto de líneas que entran es igual a las que salen de la superficie gaussiana. Puesto que la superficie gaussiana cerrada puede hacerse tan pequeña como se quiera, en una región donde no hay cargas eléctricas, las líneas eléctricas son continuas. Si, por otro lado, la superficie gaussiana encierra a una carga neta, el flujo neto que la atraviesa no es cero y el número de líneas del campo, $\phi_E = q/\varepsilon_0$, es directamente proporcional a la carga que actúa como fuente del campo. Esto equivale a decir, que las líneas del campo eléctrico se originan y terminan en cargas, siendo el número de líneas directamente proporcional a la carga.

Si se dan las líneas del campo eléctrico en todos los puntos de cualquier superficie cerrada, de inmediato pueden decirse algunas cosas con relación a la carga que está en el interior: si el mismo número de líneas entra y sale, no hay carga neta en el interior; si son más las líneas que salen que las que entran a la superficie, la superficie encierra una carga neta positiva (e inversamente para las cargas negativas); véase la Fig. 22-8. No puede decirse nada con relación a la distribución de las cargas dentro de la superficie o cómo están

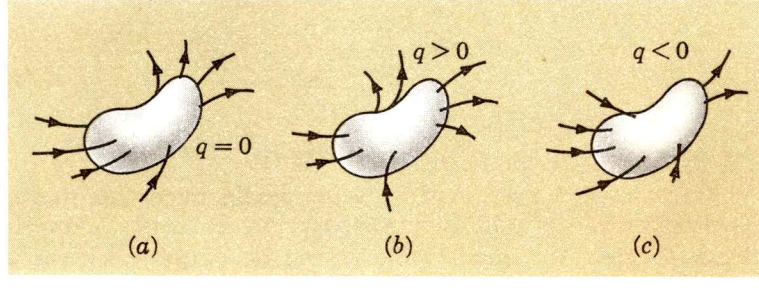


FIG. 22-8. Contando el número de líneas del campo eléctrico que salen o entran a una superficie cerrada, se puede deducir la carga eléctrica neta q que está dentro de la superficie: (*a*) $q = 0$, (b) $q > 0$, (c) $q < 0$.

localizadas las cargas fuera de la superficie; no se puede decir más que lo que vale y el signo de la carga neta encerrada.

22—4 DISTRIBUCIONES DE CARGA CON SIMETRIA ESFERICA

Encontraremos primero el campo eléctrico de una capa esférica de carga; puesto que la carga se supone que está de un modo uniforme dispersa en toda la superficie esférica, no habrá una dirección preferente en el espacio, y en consecuencia, el campo eléctrico será radial (hacia afuera para cargas positivas, hacia adentro para cargas negativas). Para encontrar el campo eléctrico fuera de la capa esférica, aplicaremos la ley de Gauss a la superficie esférica gaussiana que rodea a la capa cargada y que es concéntrica a ella, como se representa en la Fig. 22-9*a*†. Por simetría el campo eléctrico tiene una magnitud constante en cada punto de la superficie gaussiana, y el flujo eléctrico a través de dicha superficie es:

$$\phi_E = E(4\pi r^2)$$

Por la ley de Gauss se sabe que este flujo es q/ε_0, por lo que:

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (22\text{-}8)$$

donde q es la carga neta total de la capa esférica. El campo eléctrico es radial y de la Ec. (22-8), vale:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Esta ecuación es idéntica a la que se ha encontrado antes para el campo eléctrico a la distancia r de una *carga puntual,* de acuerdo con la Ec. (21-3). Así, el campo eléctrico *exterior* a una capa de carga de simetría esférica, es igual al producido por la misma carga total que estuviera en el centro de la capa esférica.

¿Cómo es el campo en el interior de la capa esférica? Es fácil encontrar la respuesta tomando como superficie gaussiana una superficie esférica concéntrica en el *interior* de la capa esférica de carga, como se ve en la Fig. 22-9*b*. Como ninguna carga está encerrada por esa superficie, el flujo eléctrico que la atraviesa valdrá cero. Pero si la capa es en verdad esféricamente simétrica, el campo eléctrico será radial y de la misma magnitud en todos los

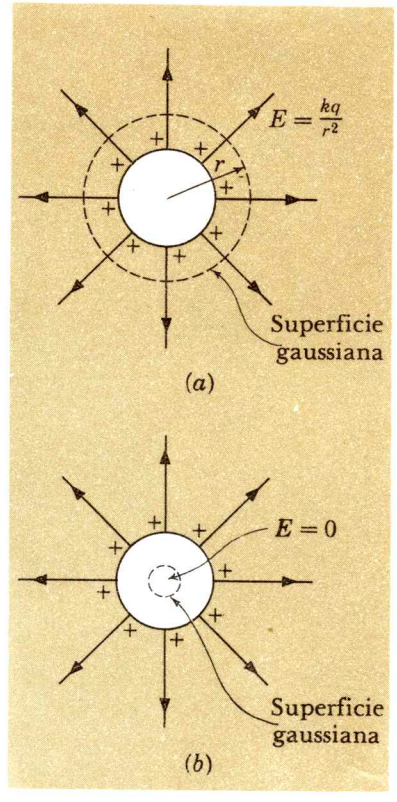


FIG. 22-9. Una vista de la sección transversal de una capa esférica de carga (círculo lleno) y de las superficies esféricas gaussianas (círculos de trazos) empleados para calcular el campo eléctrico (*a*) fuera y (*b*) dentro de la capa esférica de carga.

†Como la fuerza gravitacional entre masas puntuales sigue también la ley de cuadrado inverso y es formalmente análoga a la fuerza eléctrica de Coulomb, existe una correspondiente ley de Gauss aplicada a la gravedad. Los resultados encontrados aquí para la carga eléctrica, se aplican por igual a una distribución análoga de masas.

puntos de la superficie gaussiana. Aplicando la Ec. (22-8) resulta que $E(4\pi r^2) = 0$, lo cual implica que $E = 0$ en todos los puntos que estén en el interior de la capa esférica. El único campo con simetría esférica con la exigencia de un flujo neto igual a cero es el de *un campo igual a cero*. Por consiguiente, no hay campo eléctrico en el interior de la capa esférica de carga y no recibe una fuerza eléctrica cualquier carga de prueba colocada dentro de dicha capa. Una capa esférica de carga desde un punto de vista externo, en el aspecto eléctrico equivale a una carga puntual; desde un punto de vista interno, no existe eléctricamente.

Es sencillo encontrar el campo eléctrico de una esfera sólida y dieléctrica (*no* conductora) si se sabe el resultado para una capa delgada. Si la distribución de cargas en una esfera dieléctrica depende sólo de la distancia al centro (esto es, si las cargas tienen simetría esférica con relación al centro), basta entonces imaginar la esfera sólida como si estuviera formada de una serie de capas concéntricas. En el exterior, el campo eléctrico es igual al de una carga puntual en el centro de la esfera y cuya magnitud sea su carga neta. En el interior, a una distancia r del centro, el campo resultante en cualquier punto se debe únicamente a aquellas capas cuyo radio sea menor que r. En el centro, el campo eléctrico vale cero.

Un caso interesante es aquél en donde una esfera tiene una densidad de carga constante, siendo la carga ρ por unidad de volumen (en C/m^3) la misma en todos los puntos de la esfera. Llamando R al radio de la esfera, se sabe que a cualquier distancia donde $r > R$, el campo eléctrico es el de una carga puntual en el centro. ¿Cuándo vale el campo eléctrico en el interior cuando $r < R$? La única carga que importa es la carga que está *dentro* del radio r; la carga total comprendida dentro de r es $\rho(\frac{4}{3}\pi r^3)$, y el campo eléctrico de esta carga es como el de una carga puntual colocada en el centro. Por consiguiente.

$$E = \frac{kq}{r^2} = \frac{k\rho(\frac{4}{3}\pi r^3)}{r^2} = (\tfrac{4}{3}\pi k\rho)\, r$$

El campo resultante dentro de la esfera cargada es proporcional a la distancia r; si la carga tiene carga positiva, el campo es radial hacia afuera; si negativa, hacia dentro.

El campo eléctrico de una esfera de carga uniforme, está representado en la Fig. 22-10. Afuera de la superficie, $E \propto 1/r^2$; dentro de la superficie, $E \propto r$.

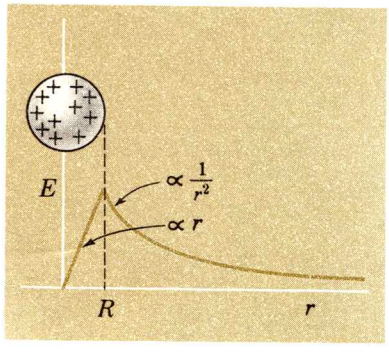


FIG. 22-10. El campo eléctrico representado como una función de la distancia al centro de una esfera dieléctrica con carga uniforme.

22—5 LA LEY DE GAUSS Y LOS CONDUCTORES

En lo que sigue hablaremos del campo eléctrico dentro de un conductor; aclaremos primero qué significa esto. Si el campo eléctrico se mide en un volumen que sea pequeño comparado con

la distancia entre las partículas en una escala atómica, no veremos sino cargas puntuales; por lo que el campo dentro de cualquier material, conductor o no conductor, cambia rápidamente conforme nos aproximemos o nos alejemos de estas cargas puntuales. Para nuestros propósitos no se necesita considerar tan pequeños volúmenes, y el campo eléctrico dentro de un material significará la fuerza promedio que actúa en la unidad de carga positiva, colocada en un volumen lo bastante grande para que incluya muchas partículas cargadas, pero bastante pequeño para que pueda hablarse del campo eléctrico en un "punto".

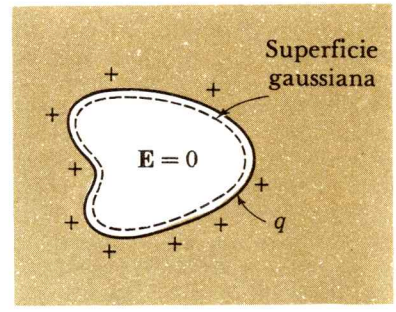


FIG. 22-11. Un conductor eléctrico con una superficie gaussiana que está justamente adentro de la superficie exterior del conductor.

Como ya se ha visto en la Sec. 21-4, el campo eléctrico dentro de cualquier conductor aislado y cargado, vale exactamente cero. Por medio de la ley de Gauss se puede deducir de inmediato una consecuencia importante de este hecho. Imaginemos una superficie gaussiana localizada justamente en el interior de la superficie exterior de un conductor cargado de forma arbitraria, como se representa en la Fig. 22-11. El conductor puede ser un trozo sólido de metal o uno que tenga cavidades interiores. Como el límite de la superficie gaussiana está en el interior del conductor, el campo eléctrico en cada punto de la superficie gaussiana vale cero; en consecuencia, el flujo eléctrico que atraviesa dicha superficie vale cero. Aplicando la ley de Gauss, si $\phi_E = 0$, entonces $q = 0$, y *no* habrá carga (neta) dentro de la superficie de un conductor cargado. Así, los átomos en el interior del conductor son neutros y cualquier exceso o deficiencia de electrones tienen lugar en una delgada capa de átomos de la superficie del conductor. Se ha visto antes que el campo eléctrico dentro de una capa con *simetría esférica* de carga vale cero. El resultado presente para *conductores* es más general: el campo interior vale cero para *cualquier* forma y para *cualquier* carga en la superficie exterior.

El campo eléctrico cerca de la superficie del conductor es siempre perpendicular a ella en cualquier punto, lo que siempre se cumple para cualquier conductor en equilibrio electrostático, pues si el campo eléctrico no fuera normal a la superficie tendría una componente tangente a la superficie: esta componente actuaría entonces en las cargas eléctricas libres que están en la superficie del conductor y la distribución de cargas cambiaría; puesto que es fija la distribución de cargas en un conductor en equilibrio, el campo eléctrico siempre es normal a la superficie.

La afirmación de que la carga eléctrica neta dentro de un conductor, sin que importen los campos eléctricos externos o de las cargas en la superficie, vale siempre cero, es una consecuencia de la ley de Gauss. Si esta afirmación se prueba en forma experimental, se probará la validez de la ley de Gauss, lo cual equivale a comprobar la ley de Coulomb y la variación con el cuadrado inverso de la interacción eléctrica entre cargas puntuales. Si la carga neta en el interior del conductor se encontrara aun ligeramente diferente de cero, el exponente de r en la ley de Coulomb diferiría

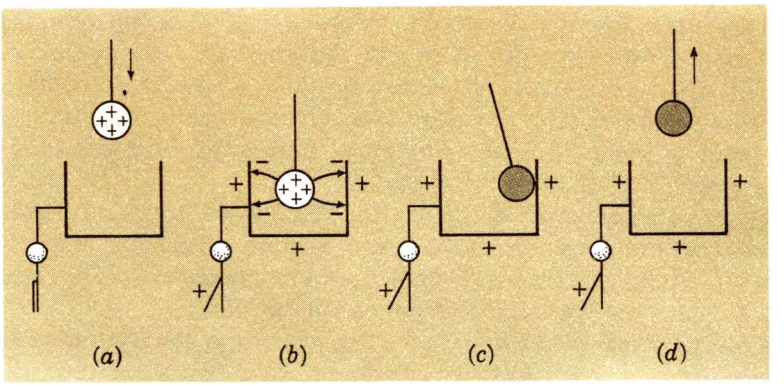


FIG. 22-12. Las etapas en la transmisión de carga desde un cuerpo cargado al exterior de un conductor hueco, cuyo estado de carga se indica por el electroscopio conectado. (*a*) El cuerpo cargado está afuera. (*b*) El cuerpo cargado está dentro del conductor, y se encuentran cargas iguales y opuestas en el interior y en el exterior del conductor. (*c*) Cuando el cuerpo toca al interior del conductor, se anula la carga en el interior de la superficie de éste, sin que cambie la carga exterior. (*d*) Se quita al cuerpo, ahora eléctricamente neutro.

de 2 en alguna cantidad muy pequeña. El intento experimental de encontrar una carga neta en el interior de una capa conductora, la cual es la prueba más sensible del exponente de la ley de Coulomb, se ha hecho por muchos físicos incluyendo a Benjamin Franklin, Michael Faraday y Henry Cavendish. Las pruebas más recientes y precisas, realizadas por Plimpton y Lawton en 1936, demostraron que en la relación $F = kq_1q_2/r^n$, el exponente n difiere de 2 no más de una parte en 10^9.

Una demostración de que la carga neta vale cero en el interior de un conductor es el famoso experimento de Faraday de la "cubeta de hielo", representado en la Fig. 22-12. El conductor es una cubeta, y la carga en su superficie exterior, indicada por la carga del electroscopio unido al cubo, es en un comienzo cero. Un cuerpo con carga positiva se introduce en el interior del conductor: cargas negativas aparecen en la superficie interior y cargas positivas de la misma magnitud de la superficie exterior de la cubeta. Puede decirse que el cuerpo cargado "induce" cargas en las superficies interior y exterior del conductor; entonces se toca con el cuerpo el interior del conductor, anulándose las cargas inducidas en la superficie interior (Fig. 22-12*c*). Por último, cuando se retira el cuerpo, el electroscopio indica la misma carga que la que indica en la Fig. 22-12*b*. La carga del cuerpo se encuentra que vale cero. El experimento demuestra que la carga que llevaba en un principio el cuerpo se ha transportado por completo al exterior del conductor.

Otro importante ejemplo del campo nulo dentro de un conductor está en los efectos de las cargas externas. Cualquier efecto eléctrico y estático externo al conductor no se percibe por las cargas que estén en su interior. Por consiguiente, un conductor cerrado (o con sólo pequeños agujeros) que comunique con el interior, actúa como un perfecto escudo. La importancia práctica de esto estriba en que los aparatos eléctricos colocados en el interior de una malla metálica (la que se comporta como una superficie conductora cerrada) están protegidos de cualquier influencia eléctrica externa.

Ejemplo 22-4

Encontrar el campo eléctrico entre dos conductores paralelos, con cargas opuestas, teniendo cada uno una densidad superficial de carga de magnitud σ, como se indica en la Fig. 22-13. (Esta es la configuración de un capacitor de capas paralelas, del cual se hablará en la Sec. 23-8.)

Considérese la situación representada en la Fig. 22-13. En cualquier punto que no esté próximo a las orillas de las placas, donde tiene lugar un efecto de "borde" en el campo eléctrico, el campo eléctrico será, por simetría, uniforme y perpendicular a las superficies cargadas.

Como superficie gaussiana escogeremos un cilindro pequeño cuyo eje sea paralelo a la normal a la superficie; una base del cilindro está dentro del conductor y la otra entre los dos conductores. El campo eléctrico $\mathbf{E}$ es constante tanto en magnitud como en dirección en toda la superficie escogida, cuya área vale A; por supuesto la densidad superficial de carga σ es constante en la superficie comprendida *dentro* del cilindro gaussiano.

La carga total encerrada por la superficie gaussiana es $q = \sigma A$; por tanto, aplicando la ley de Gauss se obtiene:

$$\phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

El flujo eléctrico es cero dentro del conductor, puesto que $\mathbf{E}$ es aquí cero. El flujo también vale cero a lo largo de la superficie curva del cilindro, puesto que las líneas eléctricas se encuentran en esta superficie. La única contribución a ϕ_E se tiene a través de la base exterior del cilindro, donde $\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = EA$. Por tanto, la relación anterior se convierte en

$$EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

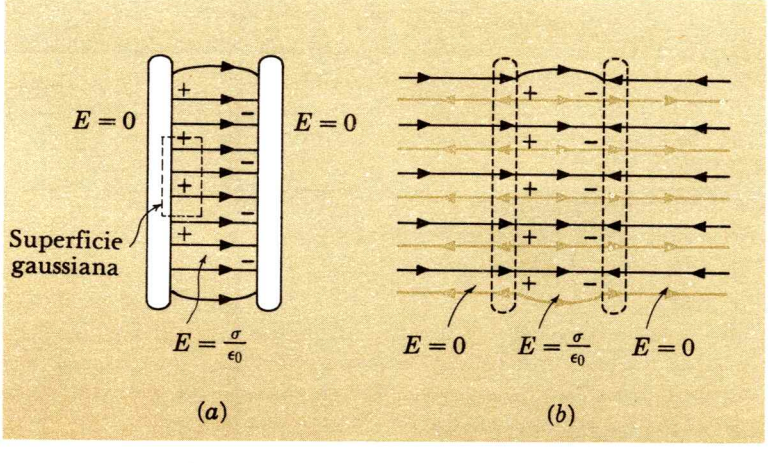


FIG. 22-13. (*a*) Dos conductores paralelos con cargas opuestas y una superficie gaussiana para evaluar el campo eléctrico entre las placas en función de la densidad superficial de carga. (*b*) Los campos eléctricos de dos hojas paralelas con cargas opuestas; las líneas de color representan el campo de las cargas positivas, las negras el campo de las negativas.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{22-9}$$

donde σ es la densidad de carga en *una* de las dos placas conductoras. Debe notarse que el campo eléctrico en la superficie de un conductor es el *doble* que el que se encontró cerca de la superficie de una hoja uniformemente cargada de espesor infinitesimal (Ej. 22-3). Para comprender que aquí no hay contradicción, considérese la Fig. 22-13*b*, donde el campo eléctrico se produce en ambos lados de dos hojas cargadas con signos opuestos. El campo de *una* hoja es $E = \sigma/2\varepsilon_0$. En la región entre las dos hojas los dos campos actúan hacia la derecha, dando como campo resultante $E = \sigma/2\varepsilon_0 - (-\sigma/2\varepsilon_0) = \sigma/\varepsilon_0$ de acuerdo con el resultado antes obtenido para un conductor. Además, a la izquierda de la hoja izquierda y a la derecha de la hoja derecha, el campo resultante vale cero, tal como se requiere para el interior de un conductor.

RESUMEN

El flujo eléctrico $d\phi_E$ que atraviesa hacia afuera un elemento superficial dirigido $d\mathbf{S}$ se define, como

$$d\phi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \tag{22-1}$$

De acuerdo con la ley de Gauss, que es una formulación alternativa de la ley de Coulomb, el flujo eléctrico total ϕ_E que atraviesa cualquier superficie cerrada, es proporcional a la carga neta q encerrada por la superficie:

$$\phi_E = \oint \mathbf{E} \quad d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{22-3}$$

La ley de Gauss justifica el uso de las líneas del campo eléctrico para representar su magnitud y dirección.

En cuanto a lo que concierne al campo eléctrico externo, una distribución de carga de simetría esférica es equivalente a una carga puntual, de la misma magnitud, colocada en su centro.

Cuando la ley de Gauss se aplica a los conductores, dicha ley implica que no se encontrará a una carga neta dentro de un conductor, estando todas ellas colocadas en la superficie exterior. La observación experimental de que en realidad la carga se encuentra en la superficie de un conductor confirma la ley de Gauss; esto es, demuestra que la fuerza eléctrica entre cargas puntuales es en forma estricta de cuadrado inverso. Una capa conductora cerrada, o pantalla, produce una perfecta protección eléctrica en su interior; el campo eléctrico adentro es siempre exactamente cero, por completo aparte de los campos eléctricos externos o de las cargas eléctricas en la superficie.

PROBLEMAS

22-1. El término "flujo" para la cantidad $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, implica que algo fluye a través de la superficie cerrada. Históricamente, el término "flujo" provino primero en relación con la hidrodinámica en donde el vector del campo importante no es el campo eléctrico **E**, sino la velocidad **v** de las partículas de un fluido. Demostrar que el flujo de un campo de velocidad $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ es, en efecto, igual al volumen del fluido que, por unidad de tiempo, pasa a través de la superficie cerrada.

22-2. Se ha dicho en el texto que la ley de Gauss se aplica a cualquier superficie cerrada arbitraria. Si se tiene una superficie con un hoyo que la atraviesa —por ejemplo, una rosca— ¿será esta superficie, una superficie gaussiana aceptable?

22-3. Por medio de la ley de Gauss demuéstrese que las líneas del campo eléctrico no se cruzan en un espacio libre de cargas. (*Sugerencia*: supóngase, en pro del argumento, que dos líneas del campo eléctrico se cruzan. Escójase una superficie gaussiana tal que el punto de intersección de las líneas del campo eléctrico se crucen en la superficie gaussiana.)

22-4. Supóngase que un campo eléctrico uniforme de 1.5 N/C, en dirección horizontal, se encuentra entre las placas paralelas, con cargas opuestas representadas en la Fig. 22-13. Calcular el flujo eléctrico que atraviesa una superficie plana limitada por un círculo de 2.0 cm de radio; dicha superficie está del todo sumergida en el campo eléctrico uniforme y haciendo un ángulo de 30° con respecto a la dirección del campo.

22-5. Considérese un cubo cuya arista tiene una longitud L. Una carga puntual Q se encuentra (*a*) en el centro del cubo, (*b*) dentro del cubo, pero muy cerca del centro de una carga, (*c*) fuera del cubo, pero muy cerca del centro de una carga. ¿Qué podrá decirse en cada caso con relación al flujo eléctrico que sale de cada cara del cubo?

22-6. Considérese el campo eléctrico debido a un protón (cuya carga vale $+ 1.6 \times 10^{-19}$ C) en el centro del átomo de hidrógeno. Calcular el flujo eléctrico que atraviesa una superficie gaussiana esférica de 0.53×10^{-8} m (tamaño del átomo de hidrógeno) debido al protón encerrado.

22-7. Supóngase que se representa arbitrariamente a un campo eléctrico de 1.0 N/C, dibujando una línea del campo eléctrico en cada centímetro cuadrado. ¿Cuántas líneas eléctricas se originarán en una carga $+ Q$?

22-8. Un cilindro sólido dieléctrico, de longitud infinita, de radio R, tiene una densidad cúbica de carga de ρ(C/m^3) Calcular el campo eléctrico como una función de la distancia r cuando (*a*) $r < R$ y (*b*) $r > R$.

22-9. Una partícula de masa m y carga $-q$ se mueve diametralmente, a través de una pequeña perforación, en una esfera de carga uniforme de radio R que contiene una densidad cúbica de carga ρ C/m^3). Encontrar la frecuencia del movimiento armónico simple que adquiere la partícula.

22-10. El núcleo del átomo de $^{20}_{10}$Ne tiene un diámetro de 7.60×10^{-15} m y está compuesto de 20 *nucleones:* 10 neutrones sin carga eléctrica y 10 protones, cada uno con una carga eléctrica $+ e$. A su vez, el núcleo está en el interior de dos capas concéntricas de electrones; la interior tiene 2.0×10^{-11} m de radio, y contiene 2 electrones; la exterior tiene 2.0×10^{-10} m de radio, y contiene los 8 electrones restantes. Encontrar el campo eléctrico de las siguientes distancias radiales del centro del núcleo: (*a*) $r = 1.0 \times 10^{-12}$ m; (*b*) $r = 1.0 \times 10^{-10}$ m y (*c*) $r = 2.0 \times 10^{-10}$ m. (Es apropiado suponer que todas las distribuciones de carga tienen simetría esférica. El presubíndice del símbolo químico da la carga eléctrica del núcleo en unidades de la carga electrónica e; el presuperíndice da el número total de protones y neutrones.)

22-11. Una carga neta de + 2.0 μC se agrega a una cáscara esférica, en un comienzo descargada, de 6.0 cm de radio. Calcular la magnitud del campo eléctrico (*a*) dentro de la cáscara; (*b*) justamente fuera de la superficie de la cáscara, y (*c*) 12.0 cm desde el centro de la cáscara.

22-12. Demostrar que la ley de Gauss puede escribirse como $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 1/\varepsilon_0 \int \rho \, dV$, donde ρ es la densidad local de la carga eléctrica y la integral de volumen del miembro derecho de la ecuación anterior se evalúa sobre el volumen encerrado por la superficie gaussiana.

22-13. Una hoja sólida de material eléctrico, de espesor t y de longitud y ancho infinitos, tiene una densidad de carga uniforme y positiva ρ (C/m^3). (*a*) Por medio de la ley de Gauss encontrar el campo eléctrico como una función de la distancia x al centro de la hoja, donde $-t/2 < x < t/2$. (*b*) Si se perfora un pequeño agujero a través de la hoja y una partícula de masa m y de carga $-q$ se suelta a partir del reposo en un lado de la hoja, ¿cuál será la frecuencia de su movimiento?

22-14. Una cáscara esférica y metálica, con un radio interior de 5.0 cm y un exterior de 10.0 cm, tiene una carga de -2.0 μC. Encontrar el campo eléctrico a las siguientes distancias del centro de la superficie esférica: (*a*) 3.0 cm, (*b*) 6.0 cm, (*c*) 12 cm y (*d*) 24 cm.

22-15. Dos tubos delgados, concéntricos, y dieléctricos, son de 4.0 y 6.0 cm de radio, y tienen a su vez las densidades lineales de carga de + 2.0 y de − 3.0 μC/m. Encontrar el campo eléctrico a las siguientes distancias del centro de los cilindros: (*a*) 3.0 cm, (*b*) 5.0 cm y (*c*) 7.0 cm.

22-16. Una carga se distribuye a través de una esfera sólida dielétrica de radio R de tal manera que la magnitud del campo eléctrico dentro de la esfera es constante. (*a*) ¿Cómo variará la densidad cúbica de carga ρ con la distancia r al centro de la esfera? (*b*) ¿Esta distribución de carga será físicamente posible?

22-17. Un electrón está sujeto a una fuerza eléctrica constante cuando se encuentra entre dos placas conductoras, paralelas y con cargas opuestas. Las placas, separadas 1.0 cm, tienen una densidad superficial de carga tal, que un electrón, al principio en reposo en la placa negativa, tarda 1.0×10^{-8} s en alcanzar a la placa positiva. ¿Cuál es la densidad superficial de carga en cada placa? La carga y la masa del electrón son, en este orden 1.6×10^{-19} C y 9.1×10^{-31}kg.

22-18. Los ejes de las X y de las Y tienen carga positiva uniforme cuya densidad lineal es λ. Considérese una superficie gaussiana de forma cúbica, de arista L y centrada en el origen. (*a*) ¿Cuánto flujo total atraviesa esta superficie? (*b*) Encontrar la fracción del flujo total que pasa por cada uno de las seis caras del cubo.

22-19. Un campo eléctrico uniforme existe entre dos placas conductoras paralelas y con cargas opuestas, siendo el valor de la densidad superficial de carga en cada placa igual a σ. Una tercera placa conductora se coloca entre las dos placas cargadas y paralela a ellas. Las cargas libres en la placa media, neutra, con rapidez se rearreglan por sí solas de tal manera que el campo eléctrico es cero en cualquier punto dentro de estas placas. Encontrar la densidad superficial de carga en ambos lados de la placa central (*a*) por medio de la ley de Gauss y (*b*) aplicando la relación $E = \sigma/2\varepsilon_0$ que da el campo eléctrico de una hoja de carga infinitesimalmente delgada.

22-20. Tres cáscaras esféricas conductoras y concéntricas tienen las cargas siguientes: $+3Q$ (la más pequeña), $-Q$, y $-3Q$ (la más grande). Encontrar las cargas de las superficies interna y externa en cada una de las tres cáscaras.

22-21. Una pequeña cáscara esférica conductora con carga neta igual a cero se coloca entre dos placas conductoras paralelas con densidades superficiales de carga de $+\sigma$ y $-\sigma$. (*a*) ¿Cuánto vale el campo eléctrico dentro de las cáscaras? (*b*) Bosquéjense las líneas del campo eléctrico en el interior y alrededor de la cáscara conductora. (*c*). ¿En qué parte de la superficie de la esfera conductora es la densidad superficial de carga mayor y dónde menor?

22-22. Una carga Q se introduce en el centro de un conductor esférico, hueco y descargado de radio R. (*a*) Bosquejar una gráfica del campo eléctrico como una función de la distancia al centro de la esfera. (*b*) Se coloca ahora una segunda carga, $-Q$, en el

exterior del conductor. ¿Qué parte del campo, en su caso es afectado? (*c*) La carga en el interior ¿recibe una fuerza producida por la carga en el exterior? (*d*) La carga exterior ¿experimenta una fuerza debida a la carga interior? (*e*) ¿Existe una violación a la tercera ley de Newton?

22-23. Considérese un cilindro dieléctrico hueco con radio interior a y exterior b; el cilindro se carga con una densidad de carga que varía con el radio: $\rho(r) = \rho_0 r^n$, donde ρ_0 es una constante y $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$(*a*) Demostrar que el campo eléctrico está dado por las siguientes ecuaciones:

$$r < a: E = 0;\ a \leq r \leq b: E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 r}\left[\frac{r^{n+2} - a^{n+2}}{n+2}\right]$$

$$b < r: E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 r}\left[\frac{b^{n+2} - a^{n+2}}{n+2}\right]$$

(*b*) ¿Cuáles son las dimensiones y las unidades de ρ_0?

Capítulo

23

POTENCIAL ELECTRICO, CAPACITANCIA Y DIELECTRICOS

En este capítulo se define la energía potencial y se emplea la ley de conservación de la energía. Se encuentra primero la energía potencial entre un par de cargas puntuales y entonces se extiende el concepto a un sistema interactuante de cargas puntuales. Se define el potencial eléctrico como una cantidad escalar cuya magnitud en cada punto del espacio que rodea a las cargas, permitirá resolver con facilidad aquellos problemas que incluyan cambios en la energía de una partícula cargada. Se derivan las relaciones generales entre potencial eléctrico y el campo eléctrico y se discute su representación gráfica por medio de superficies equipotenciales y líneas del campo eléctrico. Se considera el potencial eléctrico y su relación con cuerpos conductores.

A continuación se tratarán los capacitores, aparatos para almacenar cargas separadas, y la energía potencial eléctrica. Se derivarán las capacitancias para algunas geometrías sencillas y las reglas para combinar capacitores en serie y en paralelo. Se definirá la constante dieléctrica y, por último, se encontrará la energía de un capacitor cargado y la densidad de energía del campo eléctrico.

23—1 ENERGIA POTENCIAL DE DOS CARGAS PUNTUALES

Se pueden, por supuesto, resolver todos los problemas que involucran fuerzas eléctricas simplemente si se conoce la fuerza de Coulomb y se aplican las leyes de Newton, pero esto no es necesario ni deseable en todos los problemas. Debido a que la fuerza de Coulomb es una fuerza conservativa (Sec. 10-3), que depende solamente de la distancia de las cargas que interactúan, se puede asociar una energía potencial eléctrica a la interacción de Coulomb. Al introducir el concepto de energía potencial, se trata

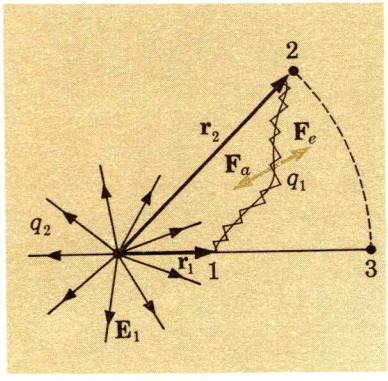


FIG. 23-1. La carga q_1 se mueve del punto 1 al punto 2, por lo que su distancia a la carga q_2 pasa de r_1 a r_2. La serie de pequeños segmentos radiales y circulares es equivalente a la trayectoria continua, y se puede imaginar que la carga q_1 pasa en sentido radial del punto 1 al punto 3 y entonces al punto 2, a lo largo del arco circular.

con una cantidad *escalar* más bien que con una cantidad vectorial, y se aplica el poderoso principio de la conservación de la energía. Ya se ha visto la utilidad del concepto de energía potencial al tratar con tales fuerzas conservativas como la gravitacional y la elástica de un cuerpo deformado.

Encontremos primero la energía potencial eléctrica U asociada con las dos cargas puntuales positivas q_1 y q_2 que interactúan. Imaginemos q_2 fija mientras que la carga q_1 se mueve del punto 1 al punto 2, pasando de la distancia r_1 a la r_2, respectivamente, como se indica en la Fig. 23-1. (Por supuesto, se puede hacerlo al revés: mantener a q_1 fija y mover a q_2.)

Recordando la expresión general para la diferencia de energía potencial $(U_f - U_i)$[(Ec. (10-4)] entre los estados inicial y final, se tiene que para la fuerza eléctrica conservativa $\mathbf{F}_e$:

$$U_f - U_i = -W_{i \to f}(\text{by } \mathbf{F}_e) = -\int_i^f \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{s} \qquad (23\text{-}1)$$

El cambio de energía potencial es, sencillamente, el negativo del trabajo $W_{i \to f}$ dado por la fuerza de interacción. Como las dos cargas se suponen del mismo signo, se repelen, y la fuerza eléctrica $\mathbf{F}_e$ que recibe la carga q_1 es radial hacia afuera.

Aunque la trayectoria representada en la figura es bastante general, la evaluación de la integral de la Ec. (23-1) es fácil. Se puede imaginar que la complicada trayectoria está reemplazada por una serie de pequeños segmentos que se aproximen mucho a la trayectoria verdadera, siendo estos segmentos de dirección radial hacia afuera o formando arcos circulares cuyo centro esté en la carga q_2. No se da trabajo a lo largo de los segmentos circulares, puesto que en ellos la fuerza $\mathbf{F}_e$ es perpendicular al desplazamiento $d\mathbf{s}$: sólo contribuyen los desplazamientos radiales. Esto es equivalente a decir que puede imaginarse a la carga q_1 moviéndose radialmente hacia afuera hasta el punto 3, a la misma distancia r_2 que el punto 2, y moviéndose entonces, sin cambio en la energía potencial, desde el punto 3 al punto 2 a lo largo del arco circular. Por consiguiente la Ec. (23-1) queda:

$$U_2 - U_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{kq_1q_2}{r^2}\, dr = kq_1q_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad (23\text{-}2)$$

Nótese que tomando la trayectoria del punto 1 al punto 3, los vectores $\mathbf{F}_e$ y $d\mathbf{r}$ tienen la *misma* dirección*

La Ec. (23-2) indica la *diferencia* de la energía potencial eléctrica entre dos diferentes distancias de las cargas puntuales; es decir, todo lo que puede saberse, puesto que es siempre arbitrario el punto donde se escoja el cero de la energía potencial. Es

*Debido a la semejanza entre las interacciones electrostáticas y gravitacionales, existe también una semejanza entre las diversas expresiones para la energía potencial entre cargas puntuales y las expresiones gravitacionales entre masas puntuales.

costumbre escoger como cero la energía potencial que corresponda a aquella configuración en donde la fuerza entre las partículas que interactúan valga cero. Así se tomará U = cero cuando las partículas estén infinitamente separadas; esto es:

$$U_2 = 0 \quad \text{cuando } r_2 = \infty$$

Entonces la Ec. (23-2) queda, quitando el subíndice:

$$U = \frac{kq_1q_2}{r} \tag{23-3}$$

Deberá tenerse en cuenta que la energía potencial eléctrica, excepto que se diga otra cosa, es siempre cero para una separación infinita entre las cargas.

La Ec. (23-3) es el fundamento de *todas* las consideraciones posteriores en este capítulo, por lo que es importante comprender sus implicaciones. Primero, se puede hablar de energía potencial eléctrica sólo porque la fuerza de Coulomb es conservativa; dicho de otro modo, el *trabajo dado* por esta fuerza cuando lleve una carga alrededor de cualquier *trayectoria cerrada sobre sí misma en un campo electrostático vale cero:*

$$\oint \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{10-5}$$

Al volver la carga a su punto de partida se restaura el sistema a su estado inicial sin que se haya dado trabajo neto. De modo equivalente, *el trabajo dado* al mover una carga con relación a otra *es independiente de la trayectoria y depende sólo de sus puntos extremos.*

Siempre que se pueda asociar una energía potencial con una interacción, como en el caso de la fuerza gravitacional, la fuerza elástica y, ahora la fuerza eléctrica, se aplica el *principio de la conservación de la energía.* Esto es, si el sistema está aislado de fuerzas productoras de trabajo externo, la energía total E, formada por las energías cinéticas de las partículas y la energía potencial entre las partículas, es constante. Para dos partículas a y b, se puede escribir:

$$E = K_a + K_b + U_{ab} = \text{constante} \tag{23-4}$$

donde U_{ab} es la energía potencial *del sistema* (no de una u otra de las partículas).

Puede verse de las dos Ecs. (23-2) y (23-3) que la energía potencial asociada con las dos cargas positivas es *positiva;* esto es como debe ser, puesto que las dos partículas se rechazan una a otra. Si las cargas positivas son traídas desde el infinito hasta reunirlas, la energía potencial *aumenta* (Véase Fig. 23-2*a*). Lo mismo se aplica cuando se tienen dos cargas negativas: U es de nuevo positiva. Por otra parte, si interactúan una carga positiva y una negativa, la fuerza es atractiva y la energía potencial es negativa (Véase Fig. 23-2*b*). Esto se infiere directamente de la Ec.

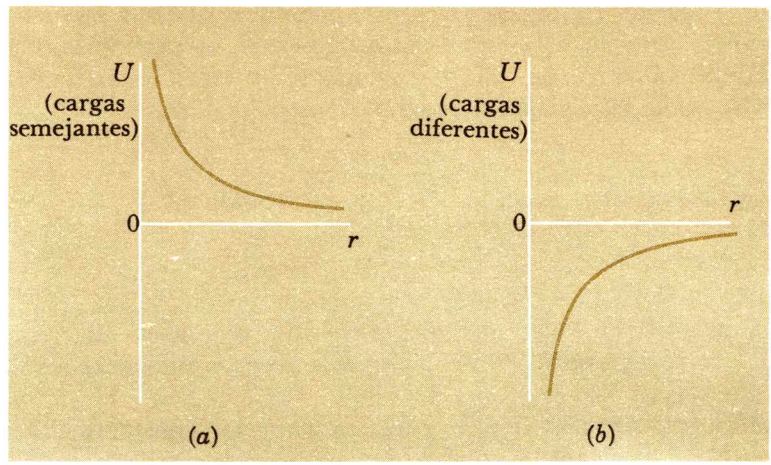


FIG. 23-2. La energía potencial eléctrica como una función de la distancia entre (*a*) dos cargas puntuales semejantes y (*b*) dos cargas puntuales diferentes.

(23-3), ya que si q_1 es + y q_2 es −, U será −. Esto se infiere también de un argumento físico sencillo. Supongamos dos cargas contrarias muy separadas en un comienzo en reposo; la energía total de este sistema aislado es al principio cero, y así permanecerá. Si las cargas son liberadas y se mueve una hacia la otra, ganarán energía cinética y, puesto que la energía total E permanece igual a cero, la energía potencial deberá volverse *negativa;* el asunto de los signos aparecerá a menudo en este capítulo. Se puede tratar siempre con este enredado asunto, asignando con escrupulosidad los signos apropiados a q y a U. Aún mejor, los argumentos físicos determinarán siempre si los signos se han puesto correctamente.

Ya se ha encontrado que la energía eléctrica de dos cargas puntuales separadas por la distancia r es kq_1q_2/r. Puede demostrarse que la energía eléctrica potencial total, U de un sistema de tres (o más) cargas que interactúan (Véase Fig. 23-3) vale sencillamente

$$U = U_{12} + U_{23} + U_{13} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} \qquad (23\text{-}5)$$

La energía potencial total U de un sistema es independiente de la forma en que el sistema se haya formado; se pueden traer las cargas a un tiempo, o en cualquier orden, o por cualquier trayectoria: la energía potencial es siempre la misma, ya que es una propiedad del sistema y no de cualquier carga, y depende sólo de las distancias que haya entre las partículas cargadas.

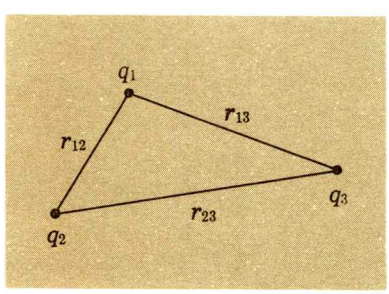


FIG. 23-3. Interacción entre tres cargas puntuales

Una palabra sobre las unidades de la energía potencial eléctrica; puesto que usamos nada más las unidades SI, U tendrá como unidad el joule (newton-metro), estando la carga eléctrica en coulombs. Una unidad de energía más conveniente en los sistemas de eV $= 1.6 \times 10^{-19}$ J (veremos brevemente cómo se obtiene esta definición). El electrón volt es una unidad de energía muy conveniente, porque dos electrones (o cualesquiera otras partículas

con carga e) cuando están separadas por distancias atómicas (10^{-10} m = 1 Å) tienen energías potenciales eléctricas del orden de unos cuantos electrón volt, como se puede verificar fácilmente con la Ec. (23-3).

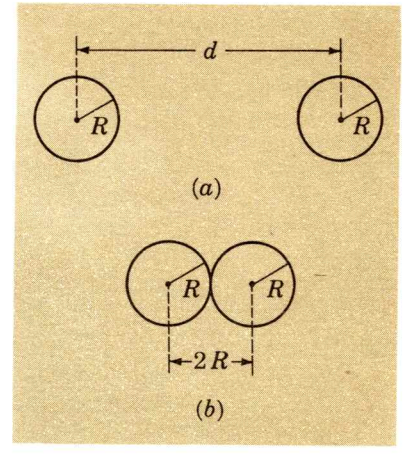


FIG. 23-4.

Ejemplo 23-1

Considérense dos esferas con cargas opuestas, con masas M y radios R, cada una con una carga eléctrica de magnitud Q. Al principio las esferas se encuentran a la distancia d medida entre los centros. Si las esferas se sueltan, partiendo del reposo se moverán acercándose una a otra debido a la fuerza de atracción de Coulomb. ¿Cuál será la velocidad de cada esfera en el instante en que choquen?. La Fig. 23-4*a* representa a las esferas en su posición inicial y la Fig. 23-4*b*, en el momento del impacto.

Como sólo se consideran fuerzas conservativas, es apropiado emplear el principio de la conservación de la energía: la energía total E es constante, siendo $E = U + K$. Igualando la energía total inicial (antes de soltar las esferas) con la energía final total (en el instante del impacto) se tiene:

$$\frac{kQ^2}{d} + 0 = \frac{kQ^2}{2R} + 2(\tfrac{1}{2}Mv^2)$$

donde d es la distancia inicial entre los centros, $2R$ es la separación final, y v es la velocidad de cada esfera en el instante del impacto.

Empleando un poco de álgebra se encuentra que:

$$v = \sqrt{\frac{kQ^2}{M}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2R}\right)}$$

Ejemplo 23-2

En el modelo planetario clásico, un electrón en el átomo de hidrógeno se mueve en un círculo de radio r, alrededor del protón. (*a*) ¿Cuál es la energía total del sistema? (*b*) ¿Cuál es la energía de enlace del sistema, si el radio de la órbita es de 0.53 Å? (véase la Fig. 23-5).

(*a*) Suponiendo infinita la masa del protón (con relación a la mucho menor masa del electrón), se tiene para la energía total:

$$E = U + K = \frac{kq_1q_2}{r} + \tfrac{1}{2}mv^2$$

Aquí, q_1 y q_2 son las cargas del protón y del electrón, m es la masa del electrón y v su velocidad. Poniendo $q_1 = +e$ y $q_2 = -e$ se tiene entonces:

$$E = -\frac{ke^2}{r} + \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (23\text{-}6)$$

Nótese que la energía potencial es negativa porque las dos partículas se atraen una a otra.

Se puede eliminar la velocidad v aplicando la segunda ley de Newton, teniendo en cuenta que la fuerza radial de Coulomb, de magnitud ke^2/r^2 obliga al electrón a recorrer un círculo a la

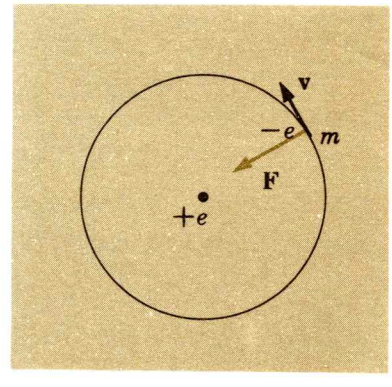


FIG. 23-5. Un electrón que gira alrededor de un protón, en el modelo clásico planetario del átomo de hidrógeno.

velocidad constante v:

$$\Sigma F_r = ma_r$$

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{\frac{1}{2}ke^2}{r} = \frac{1}{2}mv^2$$

Para una órbita *circular* la energía cinética es la mitad de la *magnitud* de la energía potencial. Sustituyendo este resultado en la Ec. (23-6) se tiene:

$$E = -\frac{ke^2}{r} + \frac{\frac{1}{2}ke^2}{r} = -\frac{\frac{1}{2}ke^2}{r} \tag{23-7}$$

La energía *total* E es negativa, y el electrón está *ligado* al núcleo.

(b) La energía de enlace E_b es la mínima energía necesaria para separar al electrón del protón, y llevar a las dos partículas al reposo y con una separación infinita. De la Ec. (23-7) se infiere que:

$$E_b = \frac{\frac{1}{2}ke^2}{r}$$

Tomando $r = 0.53$ Å $= 0.53 \times 10^{-10}$ m se tiene

$$E_b = \frac{\frac{1}{2}(9.0 \times 10^9 \text{ N-m}^2/\text{C}^2)(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2(1 \text{ eV}/1.6 \times 10^{-19} \text{ J})}{(0.53 \times 10^{-10} \text{ m})}$$

$$= 14 \text{ eV}$$

La energía de enlace de este sistema atómico es la *energía de ionización* del hidrógeno, puesto que es la energía necesaria para convertir al átomo neutro en un electrón y en un ion con carga positiva (protón).

23—2 DEFINICION DE POTENCIAL ELECTRICO

El concepto de energía potencial eléctrica lleva naturalmente al de *potencial eléctrico,* cantidad que es en extremo útil al resolver problemas que incluyan distribuciones de carga eléctricas.

Supongamos que se tiene un conjunto de cargas en posiciones *fijas* y que una carga adicional q_t, una carga de prueba, se trae desde el infinito, a velocidad constante, hasta el punto P; véase la

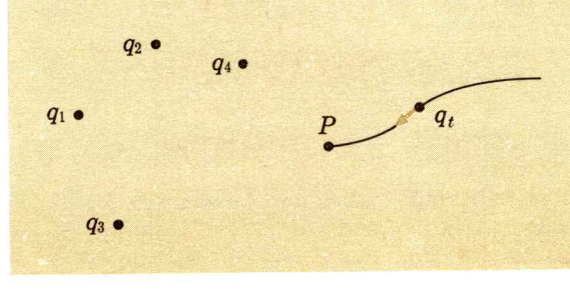


FIG. 23-6. Una carga de prueba q_t se trae desde el infinito hasta el punto P, colocado en la vecindad de otras cargas cuya posición se mantiene fija.

Fig. 23-6. Es fácil calcular el trabajo necesario: no es más que la energía potencial del sistema después de que q_t se ha llevado a su posición final P, menos la energía potencial de la misma carga cuando q_t estaba a una distancia infinita. Nótese que *no* se necesita especificar la trayectoria seguida por q_t. Supongamos que se lleva la carga q_t a gran distancia, y entonces se trae otra carga $2q_t$ a la misma posición P en donde se había colocado primero a q_t, de nuevo, se desea saber el trabajo total requerido. No hay necesidad de volver a hacer todo el cálculo; se comprende que en el segundo caso el trabajo será el doble que en el primero. Así, si se conoce el trabajo necesario para traer a la *unidad* de carga positiva desde el infinito hasta un lugar determinado, puede conocerse al mismo tiempo el trabajo necesario para traer cualquier otra carga. Nótese que el conjunto de cargas entre las que se introduce la carga adicional, debe ser tal, que dichas cargas permanezcan en sus posiciones; o de modo equivalente, se puede imaginar que la carga de prueba es lo bastante pequeña para que no afecte a la distribución de cargas.

El trabajo W necesario para traer a la unidad de carga positiva desde el infinito hasta un punto dado, se define como el *potencial eléctrico* V en dicho punto. En símbolos,

$$V = \frac{W}{q} \tag{23-8}$$

donde W es el trabajo dado por la fuerza *externa* y V es el correspondiente *incremento* de potencial. Se supone, por supuesto, que la energía potencial eléctrica de cualquier pareja de cargas vale cero cuando se encuentren infinitamente separadas. Dada una distribución fija de cargas se puede entonces asociar un potencial eléctrico, una magnitud escalar, con cada punto del espacio.

El potencial puede medirse en joules/coulomb, pero a esta relación se le ha dado un nombre especial, el de *volt* (*voltio*):

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ J/C}.$$

Este nombre se le dio en honor de A. Volta (1745-1827), quien inventó la primera batería rudimentaria. Las unidades relacionadas con el volt (abreviado V) son el microvolt ($1\ \mu\text{V} = 10^{-6}$ V), el milivolt ($1\ \text{mV} = 10^{-3}$ V), y el kilovolt ($1\ \text{kV} = 10^{3}$ V).

Si se necesita un trabajo de 10 J para traer la carga positiva de 1 C desde el infinito hasta el punto P_1, entonces el potencial en el punto P_1 es de + 10 V. Por la misma razón se sabe que al traer una carga de −4 C desde el infinito hasta P_1 se necesita, por la Ec. (23-8), un trabajo que vale

$$W = qV = (-4\text{ C})(+10\text{ V}) = -40\text{ J}$$

Más bien que suministrar trabajo para traer la carga negativa hasta P_1, *recibimos* el trabajo de 40 J. Se ve aquí la motivación para introducir el concepto de potencial eléctrico: si esta cantidad

se conoce o es fácil de calcular para una distribución dada de carga, se puede encontrar el trabajo dado al mover cualquier carga por cualquier trayectoria desde un punto (con un cierto potencial) a un segundo punto (posiblemente con otro potencial).

Así como con la energía potencial, sólo la diferencia de potencial es importante en los problemas físicos, por lo que escoger el punto donde el potencial sea cero, es por completo arbitrario. En las interacciones entre cargas puntuales, antes descritas, es conveniente escoger el potencial cero cuando se encuentran a una distancia infinita. Por otra parte, en problemas de circuitos es a menudo conveniente tomar de modo arbitrario como potencial cero el de la Tierra, la cual es un conductor razonablemente bueno; esto es conveniente, porque muchos cuerpos conductores (incluyéndonos nosotros) están, por lo general, en contacto eléctrico con la Tierra y tendrán entonces el potencial cero.

Como un ejemplo de la diferencia de potencial, consideremos la definición del electron-volt (eV). El electron-volt es una unidad de energía escogida de tal manera que sea igual al trabajo dado al mover una partícula con la carga elemental $e = 1.60 \times 10^{-19}$ a través de la diferencia de potencial de 1 V. Esto es, con $q = e$ y $V = 1$ V, la Ec. (23-8) da:

$$W = qV = (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1\ \text{V}) = 1.60 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1\ \text{eV}$$

Así, si un electrón es acelerado por una diferencia de potencial de $+100$ V, su energía potencial cambia con $qV = (-e)(+100\ \text{V}) = -100$ eV; es decir, la energía potencial eléctrica *disminuye* en 100 eV, lo que significa que su energía cinética *aumentará* 100 eV.

Un aparato común que mantiene en esencia una diferencia de potencial constante entre sus terminales, es una celda electroquímica, la cual cambia su energía potencial interna química en energía potencial electrostática en sus terminales. La batería de 12 V de los automóviles consiste de 6 celdas de plomo, cada una de las cuales mantiene unos 20 volts entre sus terminales; no es un accidente que la diferencia de potencial entre las terminales de una celda sea de unos pocos volts, sino que es una consecuencia de que la energía potencial eléctrica de los iones, separados por distancias atómicas, es también de unos pocos electrón-volts.

23—3 POTENCIAL ELECTRICO DE CARGAS PUNTUALES

La energía potencial U_1 de una carga q_1 y de una carga de prueba q_t a la distancia r_1 vale:

$$U_1 = \frac{kq_1q_t}{r_1} \qquad (23\text{-}3)$$

por lo que el potencial eléctrico V_1 debido a la carga q_1 en el punto donde está la carga de prueba será:

$$V_1 = \frac{U_1}{q_t} = \frac{kq_1}{r_2} \tag{23-9}$$

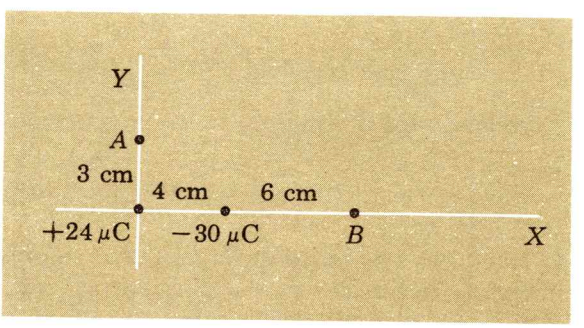
Si hay un cierto número de cargas puntuales $q_1, q_2, q_3, \ldots$, a las distancias respectivas $r_1, r_2, r_3, \ldots$ de la carga de prueba q_t, la energía potencial V no es más que la suma escalar de los potenciales debidos más que a cada carga por separado (los potenciales eléctricos se suman como las escalares)

$$V = V_1 + V_2 + \cdots = k\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \cdots\right)$$

o sea

$$V = k\Sigma \frac{q_i}{r_i} \tag{23-10}$$

La ecuación anterior da el potencial para *cualquier* distribución de carga como originada por un gran número de cargas puntuales. Los procedimientos para encontrar el potencial de una distribución continua de carga se tratan en la sección siguiente.



Ejemplo 23-3

Dos cargas de +24 y de −30 μC se colocan en (0, 0) y en (4.0 cm, 0), respectivamente, como se indica en la Fig. 23-7. (*a*) Encontrar el potencial eléctrico debido a estas cargas en los puntos *A* (0. 3.0 cm) y B (10.0 cm, 0); (*b*) ¿Cuál será el trabajo externo necesario para mover un electrón de *A* a *B*? (*c*) Calcular el trabajo necesario para mover el ion Zn^{2+} de *A* a *B*.

(*a*) Por medio de la Ec. (23-10) se encuentra que las potenciales en *A* y en *B* son:

$$V_A = 9.0 \times 10^9 \text{ N-m}^2/\text{C}^2 \left(\frac{+24 \times 10^{-6} \text{ C}}{3.0 \times 10^{-2} \text{ m}} + \frac{-30 \times 10^{-6} \text{ C}}{5.0 \times 10^{-2} \text{ m}}\right)$$

$$= 1.8 \times 10^6 \text{ V}$$

$$V_B = 9.0 \times 10^9 \text{ N-m}^2/\text{C}^2 \left(\frac{+24 \times 10^{-6} \text{ C}}{10.0 \times 10^{-2} \text{ m}} + \frac{-30 \times 10^{-6} \text{ C}}{6.0 \times 10^{-2} \text{ m}}\right)$$

$$= -2.3 \times 10^6 \text{ V}$$

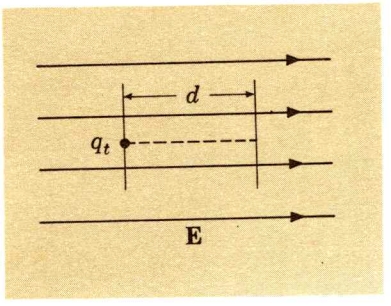


FIG. 23-8. Una carga de prueba q_t es movida a lo largo de las líneas de un campo eléctrico uniforme.

Por consiguiente, $V_{AB} = V_A - V_B = [(+1.8) - (-2.3)] \times 10^6 \text{ V} = 4.1 \times 10^6 \text{ V}$.

(*b*) El potencial "baja la cuesta" del punto *A* al punto *B*. Por tanto el cambio en la energía potencial cuando el electrón se mueve de *A* a *B* es, por la Ec. (23-8):

$$q(V_B - V_A) = (-e)(-4.1 \times 10^6 \text{ V}) = +4.1 \text{ MeV}$$

(un MeV es un millón de electrón-volts.) Para suministrar este incremento de energía potencial, deberá proporcionarse al electrón un trabajo externo de 4.1 MeV.

(*c*) Para llevar al ion con doble carga positiva Zn^{2+} de *A* a *B*, el trabajo necesario vale:

$$W_{A \to B} = q(V_B - V_A) = (+2e)(-4.1 \times 10^6 \text{ V}) = -8.2 \text{ MeV}$$

23--4 RELACIONES ENTRE *V* Y E

Dado el campo eléctrico **E** como una función de posición, para una distribución conocida de cargas, ¿cómo encontrar el correspondiente potencial eléctrico *V*, como una función de posición?

La energía potencial *U* se relaciona con la fuerza eléctrica conservativa $\mathbf{F}_e$ entre la carga q_t y la distribución de cargas por la ecuación:

$$U_2 - U_1 = -\int_1^2 \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{s} \qquad (23\text{-}1)$$

Dividiendo los dos miembros de la ecuación entre la carga q_t

$$\frac{U_2}{q_t} - \frac{U_1}{q_t} = -\int_1^2 \frac{\mathbf{F}_e}{q_t} \cdot d\mathbf{s}$$

El miembro izquierdo de la ecuación representa la diferencia de potencial eléctrico $V_2 - V_1$, mientras que el campo eléctrico $\mathbf{E} = \mathbf{F}_e/q_t$ aparece a la derecha. Por tanto, se tiene:

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \qquad (23\text{-}11)$$

La diferencia de potencial es el negativo de la integral de línea del campo eléctrico entre los puntos finales. Si se puede escoger $V = 0$ para un punto a una distancia infinita (digamos, el punto 1), y se designa al punto 2 como el punto *p*, la ecuación anterior queda:

$$V_p = -\int_\infty^p \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{s} \qquad (23\text{-}12)$$

Encontremos cómo se relaciona el potencial eléctrico con **E**, para la geometría más sencilla posible, que se tiene cuando el campo es uniforme. Imaginemos que una carga q_t se mueve en la dirección del campo uniforme una distancia *d*, como se indica en la Fig. 23-7. La diferencia de potencial *V* entre dos puntos, separados por una distancia *d*, se encuentra con (23-11):

$$V = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \qquad (23\text{-}11)$$

La integración anterior es sencilla porque **E** es constante y paralela a $d\mathbf{S}$; por tanto

$$V = -Ed \qquad (23\text{-}13)$$

En un campo uniforme, el valor de **E** es simplemente la diferencia de potencial V dividida entre el desplazamiento d en la dirección de las líneas del campo. Se ve, entonces, que el campo eléctrico puede expresarse tanto en volts sobre el metro como en newtons sobre coulomb. Nótese el signo menos de la ecuación anterior; este signo corresponde a que, al moverse *en la* dirección y sentido de las líneas de fuerza eléctrica, se recorren puntos cada vez de *menor* potencial.

Ejemplo 23-4

Encontrar el potencial eléctrico como una función de la distancia r, de un alambre cargado uniformemente y de longitud infinita.

En la Sec. 21-3, se encontró que el campo eléctrico es perpendicular al alambre y que su magnitud vale:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad (21\text{-}5)$$

donde λ es la densidad lineal de carga.

Se encuentra la diferencia de potencial entre los puntos r_1 y r_2 con (23-11):

$$V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Suponiendo que el alambre está cargado positivamente, el campo eléctrico **E** tiene el mismo sentido que $d\mathbf{r}$, y la relación anterior queda:

$$V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} \qquad (23\text{-}14)$$

Para esta configuración *no* se puede tomar $V = 0$ para $r = \infty$, porque entonces (23-14) daría un potencial infinito para cualquier r finita. (La razón física de esta dificultad matemática consiste en que un alambre *infinitamente* largo debe verse siempre de longitud infinita, aunque se observe desde una distancia también infinita.) Sin embargo, esto no importa, ya que siempre se trata con diferencias de potencial.

23—5 SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Por el concepto de potencial eléctrico, es posible asociar un número algebraico a cada punto del espacio que rodea a una distribución de cargas; por medio del concepto de campo eléctrico

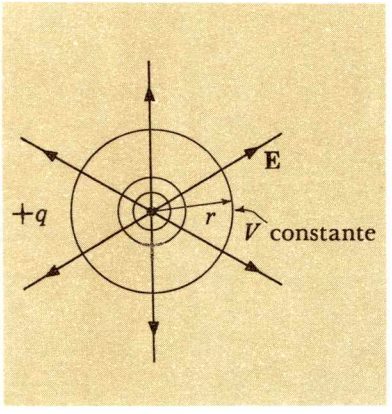


FIG. 23-9. Las líneas del campo eléctrico y las superficies equipotenciales de una carga puntual.

se puede asociar un vector (con tres componentes escalares) a cada punto del espacio. Se puede hacer un mapa del campo eléctrico con las líneas del campo eléctrico. Asimismo, se puede hacer un mapa de potencial eléctrico con las *superficies equipotenciales.*

Consideremos el caso sencillo de una única carga puntual q. El campo eléctrico es radial, y el potencial V en cualquier punto depende sólo de la distancia r a la carga ($V = kq/r$). Por tanto, para una distancia radial dada r, *todos* los puntos de la *esfera* de radio r tienen el *mismo* potencial. En realidad se puede imaginar que en la carga puntual está rodeada de superficies esféricas concéntricas, donde cada punto de cada esfera tiene el mismo potencial y donde cada superficie esférica equipotencial difiere de la siguiente en una cantidad constante (por supuesto en una figura bidimensional las superficies equipotenciales quedan representadas como líneas equipotenciales); véase la Fig. 23-9. Las líneas del campo eléctrico, radiales hacia afuera para una carga positiva, son perpendiculares a la superficie equipotencial.

Es fácil demostrar que para *cualquier* configuración de cargas las superficies equipotenciales siempre son normales a las correspondientes líneas del campo eléctrico. En pro del argumento, supongamos que **E** *no* es perpendicular a las superficies de V constante; entonces habría una componente de la *fuerza* eléctrica actuando a lo largo de la superficie equipotencial; pero, por definición, una carga puede moverse sobre una superficie equipotencial sin suministrarle trabajo; por consiguiente las líneas **E** deberán ser normales a las superficies de V constante. Además, el sentido de **E** siempre está dirigido hacia las superficies de *menor* potencial. Esto se ilustra en la Fig. 23-9, donde **E** es radial hacia afuera y perpendicular a las superficies equipotenciales esféricas y con sentido hacia los menores potenciales.

Ya se ha encontrado la relación general para encontrar V cuando se conoce **E** [Ec. (23-11)]. Encontraremos ahora la relación inversa, **E** en función de V. Sea el vector $d\mathbf{s}$ el que represente al pequeño desplazamiento cuando el movimiento se realiza *a lo largo de la dirección de* **E,** entre dos superficies equipotenciales contiguas cuyo potencial difiere en dV. Puesto que $d\mathbf{s}$ es paralela a **E,** la trayectoria que se ha formado incluye la *mayor* diferencia de potencial para un trayecto dado de longitud ds, y aplicando la Ec. (23-11) se obtiene:

$$dV = -E\,ds$$

$$E = -\frac{dV}{ds} \qquad (23\text{-}15)$$

El campo eléctrico es el negativo de la derivada espacial del potencial eléctrico *tomado en aquella dirección donde V cambia más rápidamente con la posición.* Es claro que en el caso de que sea **E** constante, se tiene $E = -V/d$, como se encontró antes.

Cuando el potencial eléctrico se da como una función de las

coordenadas espaciales $V(x, y, z)$, las componentes rectangulares del campo eléctrico valdrán:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{23-16}$$

Como una ilustración de la Ec. (23-15) se puede representar la relación entre V y $\mathbf{E}$ para una única carga puntual positiva (Véase la Fig. 23-9) con un diagrama en donde V se grafica contra r, como en la Fig. 23-10. Por la Ec. (23-15) el campo eléctrico es la pendiente negativa de la curva de potencial. Los valores constantes del potencial eléctrico son semejantes a los valores constantes de la energía potencial gravitacional para una loma real; el campo eléctrico se denomina la medición del *gradiente;* es decir, la *inclinación* de la cuesta.

Este modelo es útil para representar la interacción entre dos cargas puntuales. Si un cuerpo pequeño se hace rodar hacia arriba de la loma del potencial, su trayectoria, cuando se observa desde arriba, corresponde al camino de la carga dispersada que describe una hipérbola.

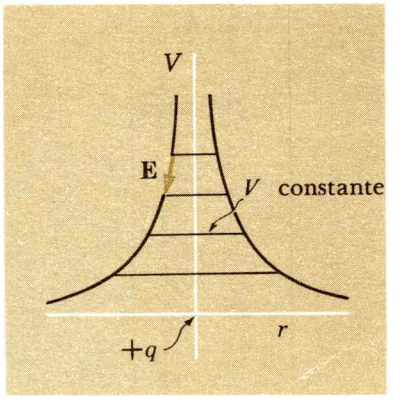


FIG. 23-10. Gráfica del potencial eléctrico V, cuyas ordenadas representan la distancia a una carga puntual positiva; el campo eléctrico E en cualquier punto es el gradiente negativo del potencial.

Ejemplo 23-5

Encontrar el potencial eléctrico como una función de r para una cáscara esférica y delgada de un dieléctrico con carga uniforme, cuyo radio es R.

Encontramos antes que una cáscara esférica cargada produce un campo eléctrico equivalente al de una carga puntual colocada en su centro, para todos los puntos *exteriores* a la cáscara, y que el campo eléctrico es *cero* para todos los puntos interiores. Se infiere que el potencial exterior a la cáscara es semejante al de una carga puntual, a saber, $V = kq/r$ donde q es la carga total de la cáscara. En el interior, $\mathbf{E} = 0$. Puesto que $E = -dV/dr$, de la Ec. (23-15), V será *constante* en todos los puntos dentro de la cáscara. Por tanto, el potencial en todos los puntos interiores será igual al potencial en la superficie, o sea $V = kq/R$; véase Fig. 23-11. Cualquier carga que se coloque dentro de la cáscara no estará sometida a una fuerza eléctrica y podrá moverse sin suministrarle trabajo.

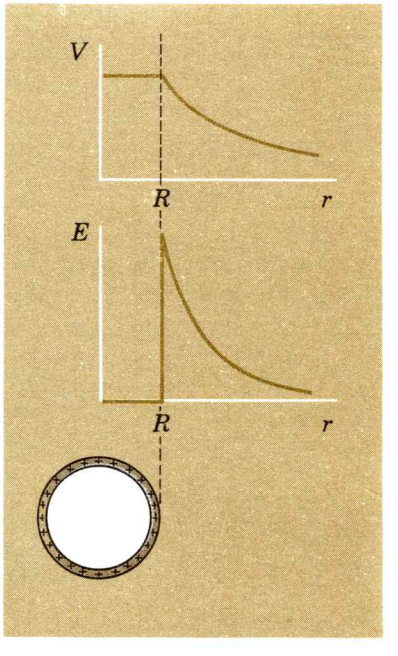


FIG. 23-11. El potencial eléctrico del campo eléctrico, como una función de la distancia r desde el centro de una cáscara esférica de radio R con carga uniforme.

23—6 EL POTENCIAL ELECTRICO Y LOS CONDUCTORES

Recordemos algunos importantes resultados (Sec. 22-5). Para todos los conductores eléctricos: (1) Aun si un conductor de forma arbitraria lleva una carga neta, *toda* ella reside en la superficie exterior del conductor; (2) el *campo eléctrico dentro* de cualquier conductor vale *cero;* y (3) en la superficie las *líneas del campo eléctrico* son siempre *perpendiculares* a la *superficie* exterior del conductor.

Como $\mathbf{E} = 0$ dentro de un conductor, se sabe que el *potencial eléctrico* en todos los puntos *dentro* de un conductor, cargado o

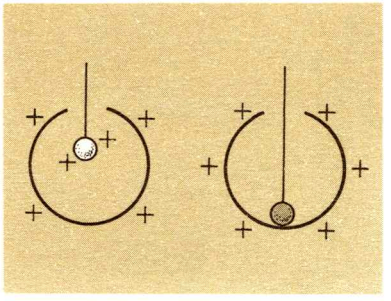


FIG. 23-12. Cualquier carga colocada en el interior de un conductor, pasa a la superficie exterior de dicho conductor.

descargado y en equilibrio electrostático, es *constante* si depender de la forma del conductor; así, un conductor tiene un volumen equipotencial, siendo el potencial eléctrico constante en todos los puntos dentro del conductor e igual al potencial eléctrico en la superficie.

Supongamos que dos o más cuerpos metálicos se conectan con un alambre conductor y que se ha llegado al equilibrio electrostático; no se tiene entonces un cierto número de conductores separados, sino en realidad un *solo* conductor. Esto significa que cualquier número de cuerpos conductores conectados entre sí con un alambre, cuando ya no se mueven las cargas libres, están al *mismo* potencial eléctrico, todos y cada uno de ellos.

Por ejemplo consideremos un casco hueco esférico y conductor inicialmente cargado, dentro del cual se introduce una esfera pequeña conductora y cargada, atada a un hilo aislador, como se representa en la Fig. 23-12. Con la esfera pequeña se toca el interior de la grande; ¿dónde queda después de esto la carga de la esfera pequeña? Puesto que los dos cuerpos se pusieron en contacto se tiene, en efecto, un *solo* conductor, por consiguiente, todos los puntos adentro del casco alcanzarán el mismo potencial, y todas las cargas netas se encontrarán en el *exterior* del casco, sin importar la carga que éste hubiera contenido al principio en el exterior.

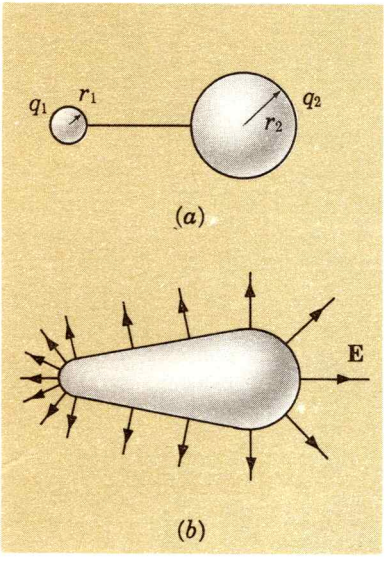


FIG. 23-13. (*a*) Dos esferas conectadas por un largo alambre conductor. (*b*) un conductor cargado. Nótese que el campo eléctrico es más intenso en los puntos de menor radio de curvatura.

Ejemplo 23-6

¿Cómo se distribuye la carga en la superficie de un conductor?

En una esfera la densidad superficial de carga es constante. Demostraremos que para una superficie no esférica la carga se concentra en aquellos puntos o regiones de un conductor donde el radio de curvatura sea menor (véase Fig. 23-13*b*). Consideremos primero la situación representada en la Fig. 23-13*a*, en donde dos esferas de radios r_1 y r_2 que llevan respectivamente las cargas q_1 q_2, están conectadas con un largo alambre conductor. Deben encontrarse las densidades de carga σ_1 y σ_2 en las dos esferas.

Como las esferas y el alambre forman un solo conductor, el potencial es el mismo en ambas esferas. Por consiguiente,

$$V_1 = \frac{kq_1}{r_1} = \frac{kq_2}{r_2} = V_2 \qquad (23\text{-}17)$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

La mayor parte de la carga está en la esfera *mayor*.
Por definición.

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi r_1^2} \qquad \text{y} \qquad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi r_2^2}$$

Por tanto

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1}{q_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

Por medio de la relación para q_1/q_2 antes encontrada se tiene:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

La *densidad de carga* es mayor en la esfera *pequeña*. Puesto que el campo eléctrico cerca de cualquier superficie conductora es proporcional a la densidad de carga $E = \sigma/\varepsilon_0$ (Sec. 21-4), el campo eléctrico es intenso en la superficie de la esfera pequeña, comparado con el campo en la superficie de la esfera grande.

Las dos esferas conectadas de la Fig. 23-13*a* pueden imaginarse, muy burdamente, como el único conductor de la forma indicada en la Fig. 23-13*b*. Por tanto, la carga se concentra sobre todo en el extremo agudo, siendo aquí mayor el campo eléctrico. Los campos eléctricos muy intensos cerca de las puntas aguzadas de los conductores cargados pueden acelerar a los pocos iones que siempre están presentes en el aire (por lo general un buen aislador) a tales energías que cuando los iones chocan con las moléculas neutras de aire, se producen más iones y se presenta una rotura eléctrica en el aire. En el aire en condiciones normales de temperatura y de presión, un campo eléctrico de unos 3×10^6 V/m producirán esta rotura eléctrica: el fenómeno se denomina la *descarga en corona*.

Ejemplo 23-7

En el generador electrostático de Van de Graaff, un importante tipo de acelerador de partículas, una banda aislada en movimiento y con carga eléctrica se coloca dentro de un gran casco esférico y conductor. La carga se quita de la banda por puntas conductoras conectadas a la esfera, como se muestra en la Fig. 23-14. El potencial de la esfera con relación a tierra puede alcanzar *millones* de volts, y este gran potencial puede emplearse para acelerar partículas cargadas hasta relativamente muy altas energías (Hasta más de 10 MeV por carga *e*). ¿Por qué una *esfera*? (*b*) ¿Por qué una *gran* esfera? (*c*) ¿Por qué la carga se introduce en el *interior* de la esfera?

(*a*) La esfera es aquella forma, que para un volumen dado tiene la superficie más lisa, por lo que la descarga en corona se minimiza al usar esa forma. (*b*) La descarga en corona eventualmente limita la carga que puede acumular la esfera. Supongamos que E_m representa el campo eléctrico en la superficie esférica para cuyo valor ocurre primero la descarga en corona. El campo eléctrico en la superficie de una esfera de radio R es $E = kq/R^2$, y el potencial en dicha superficie es $V = kq/R$. Por consiguiente, $E_m = V/R$. Para un gran potencial dado V, el menor campo eléctrico en la superficie se logra con una gran R, es decir, una gran esfera. Por ejemplo en el aire en condiciones normales, $E_m = 3 \times 10^6$ V/m. Para obtener un potencial V, de, digamos, 3×10^6 V, se necesita una esfera de radio $R = V/E_m = (3 \times 10^6 \text{ V})(3 \times 10^6 \text{ E V/m}) = 1$ m. En este caso la carga de la esfera será de más de 300 μC.

(*c*) La carga se pone en contacto con el interior de la esfera hueca, porque en este caso la carga *no* es rechazada por la carga que ya está en el exterior de la esfera; todas las cargas que llegan a ponerse en contacto con la superficie interior se van al exterior.

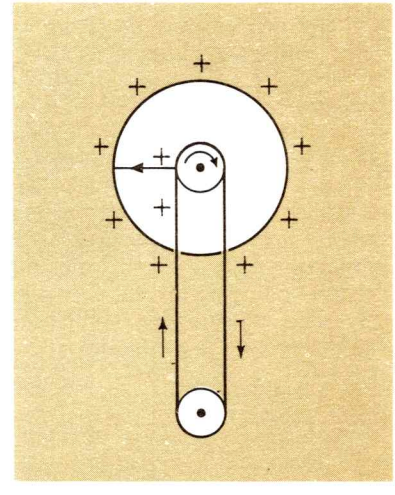


FIG. 23-14. Diagrama esquemático de un generador de Van de Graaff.

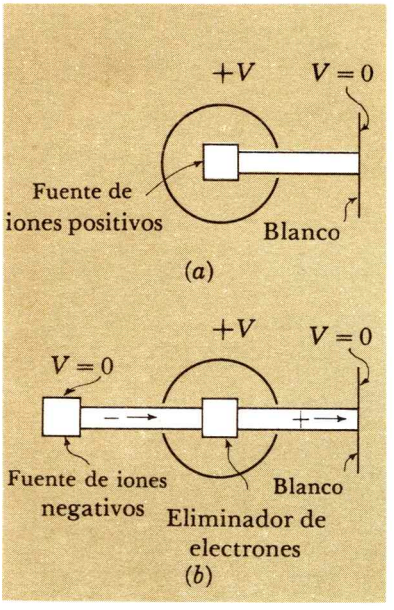


FIG. 23-15. (*a*) Un generador de Van de Graaff acelera iones positivos desde un alto potencial o potencial de tierra. (*b*) Un Van de Graaff en tándem acelera dos veces las partículas con un solo alto potencial, cambiando la carga de las partículas. Los iones negativos son acelerados primero desde el potencial de tierra hasta un gran potencial positivo; su carga se cambia de signo en el eliminador de electrones; entonces los iones positivos son acelerados otra vez desde el alto potencial al potencial de tierra.

El generador de Van de Graaff se emplea para acelerar partículas cargadas para que adquieran grandes energías cuando las partículas atraviesan una diferencia de potencial muy grande. La descarga en corona se suprime rodeando el casco esférico con un gas a alta presión; entonces el potencial de la esfera puede elevarse a un potencial hasta de 10 millones de V, con relación a tierra. Los protones u otras partículas con una sola carga, acelerada desde el reposo a través de esta diferencia de potencial, adquieren una energía cinética de 10 MeV. Estas partículas de gran energía pueden usarse entonces en experimentos nucleares en donde un haz de partículas se dirige hacia un blanco; véase la Fig. 23-15*a*.

La máxima energía de las partículas aceleradas por un generador electrostático de Van de Graaff puede *duplicarse* por medio de un procedimiento notablemente sencillo. Por ejemplo iones *negativos* de hidrógeno con una sola carga (H^-) son acelerados primero desde el potencial de tierra al potencial positivo de la esfera; entonces los dos electrones son eliminados de los iones de hidrógeno de alta energía para producir protones *positivos,* que son acelerados por segunda vez, ahora desde el gran potencial positivo al de tierra. Esta aparato se denomina un acelerador de Van de Graaff en serie o en tándem; véase la Fig. 23-15*b*.

23—7 DEFINICION DE CAPACITANCIA

Cargar un conductor requiere trabajo; por ejemplo, después de que el primer electrón se ha colocado en un casco conductor esférico, los demás electrones que se lleven al conductor serán rechazados. Entonces, después de que el conductor ha adquirido una carga total Q, puede pensarse, no únicamente en un dispositivo que almacena esta carga, sino también en uno que establezca un campo eléctrico a su alrededor; esto es, que tenga un potencial eléctrico V que represente el almacenaje de energía eléctrica potencial.

Ya se ha visto (Ej. 23-5) que, cuando un conductor esférico de radio R adquiere una carga Q su potencial eléctrico V (con respecto al potencial cero en el infinito) vale:

$$V = \frac{kQ}{R} \tag{23-18}$$

Para esta configuración geométrica sencilla, el potencial en el conductor es directamente proporcional a la carga e inversamente proporcional al radio del conductor. Este comportamiento es cierto para conductores de otras formas. La carga almacenada es siempre proporcional al potencial y también a una dimensión característica del conductor.

Por supuesto, si se coloca una carga negativa en un conductor, algún otro cuerpo adquirirá una carga positiva de igual magnitud. De esto se infiere que siempre se tratará con dos conductores (armaduras o placas) que llevan cargas iguales y opuestas, con una

diferencia de potencial entre ellas igual a V, como se indica en la Fig. 23-16. Puesto que todos los puntos en la superficie y en el interior de cualquier conductor, cargado o descargado, están al mismo potencial, V representa la diferencia de potencial entre *cualquier* punto de un conductor y cualquier punto del otro. Esta pareja de conductores con cargas opuestas se dice que constituyen un *capacitor* (o, antiguamente, condensador). La propiedad eléctrica que se asocia a un capacitor es la *capacitancia C*, que vale, por definición:

$$C = \frac{Q}{V} \tag{23-19}$$

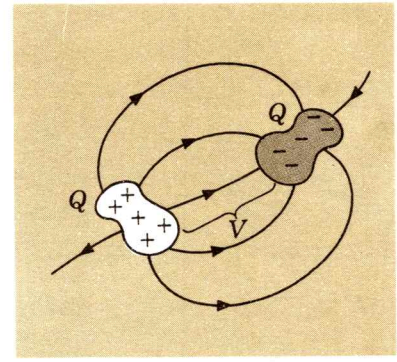


FIG. 23-16. La forma más general de un capacitor: dos conductores con cargas iguales y opuestas de magnitud Q y con una diferencia de potencial entre ellas igual a V.

La capacitancia es el valor de la carga (de *cualquiera* de los dos conductores con cargas opuestas) por unidad de diferencia de potencial entre los conductores. La capacitancia C de una configuración dada en los conductores es una constante, independiente de Q y de V. Así, la capacitancia de un capacitor es una medida cuantitativa de su capacidad para almacenar cargas separadas y para almacenar energía eléctrica potencial. Un condensador se simboliza en los diagramas de los circuitos eléctricos con ⊣⊢ o con ⊣(⊢

De la Ec. (23-19) puede verse que las unidades de la capacitancia son coulombs por volt. Un nombre especial, el *farad* o *faradio* (F) —en honor del famoso físico experimental en electromagnetismo, Michael Faraday— se ha dado a esta relación:

$$1\ \text{F} = 1\ \text{C/V}.$$

Como pronto se verá, la capacitancia de un farad es enorme; las unidades más comúnmente usadas para la capacitancia son el microfarad ($1\ \mu\text{F} = 10^{-6}$ F) y el micromicrofarad o picofarad ($1\ \mu\mu\text{F},\ \text{pF}, = 10^{-12}$ F).

23—8 LA CAPACITANCIA DE ALGUNAS CONFIGURACIONES SENCILLAS

Dos conductores cualesquiera con cargas opuestas forman un capacitor. Sin embargo un condensador práctico es pequeño, tiene las placas con cargas opuestas fácilmente aisladas una de otra arreglados de tal modo que los campos externos no perturben la distribución de cargas en las placas. Estas condiciones se llenan con los condensadores con placas paralelas o con conductores coaxiales cilíndricos; y la simetría de estas formas geométricas permite calcular con facilidad su capacitancia.

Capacitor de placas paralelas. Es un capacitor de dos placas paralelas, cada una con una superficie A y separadas una de otra

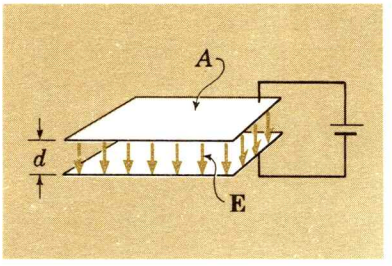


FIG. 23-17. Un capacitor de placas paralelas con área de placa A y distancia entre las placas d

por la distancia d, como se representa en la Fig. 23-17. La separación entre las placas d es pequeña comparada con el tamaño de las placas, por lo que el campo eléctrico **E** es uniforme y encerrado casi por completo en la región que existe entre las placas, siendo despreciable el efecto de orilla de las líneas eléctricas de fuerza. Las dos placas estarán separadas por un material aislante, no sólo para evitar que las cargas pasen de una a otra placa, sino también para mantener aparte a las placas cargadas a pesar de la fuerza atractiva entre ellas. El aislador puede ser un material dieléctrico emparedado entre las placas, en cuyo caso la capacitancia es acrecentada en relación a su valor cuando existe vacío entre las placas. En lo que sigue se supondrá que las placas están sumergidas en el vacío.

Se puede cargar un capacitor transportando electrones de una placa a la otra, venciendo las fuerzas eléctricas producidas por el campo eléctrico entre las placas. Alternativamente, se puede cargar un capacitor de manera muy sencilla conectando las dos placas del capacitor con alambres conductores a las terminales opuestas de una batería. Puesto que la diferencia de potencial entre las terminales de una batería es constante, las placas del capacitor adquieren la misma diferencia de potencial V que la de la batería. Es fácil encontrar la capacitancia C de un capacitor de placas paralelas. De la definición de C [Ec. (23-19)], se sabe cuánto vale la carga Q en términos de la diferencia de potencial V. El eslabón es el campo eléctrico **E**; como éste es uniforme en todo el espacio entre las placas, cuya separación es de d,

$$E = \frac{V}{d} \tag{23-13}$$

En el Ej. 22-4 se empleó la ley de Gauss para demostrar que el campo eléctrico cerca de la superficie de cualquier conductor se relaciona con la densidad superficial de cargas con la ecuación

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{23-20}$$

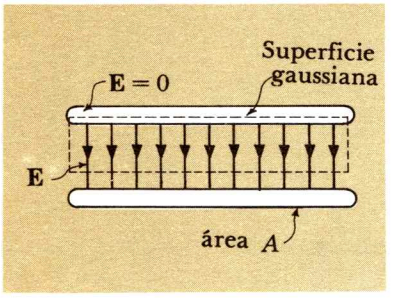


FIG. 23-18. La ley de Gauss aplicada a un capacitor de placas paralelas. La sección transversal de la superficie gaussiana está indicada con líneas de trazos.

Para un capacitor de placas paralelas (Véase Fig. 23-18), σ es constante en toda el área A de cada placa y se relaciona con la carga Q con la ecuación:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \tag{23-21}$$

Por medio de las Ecs. (23-13), (23-20) y (23-21), sustituidas en la Ec. (23-19), se obtiene:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{\varepsilon_0 Q}{\sigma d} = \frac{\varepsilon_0 A Q}{Q d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{23-22}$$

Como demuestra la ecuación anterior, la capacitancia es (1) proporcional al área de la placa e (2) inversamente proporcional a

la distancia entre las placas. Ambos resultados se comprenden basándose en argumentos físicos sencillos: (1) Cuanto mayor sea el área de la placa (para V y d dadas), tanto mayor será la cantidad de carga que pueden almacenar; (2) cuando Q y A son fijas (y por tanto E constante). Juntando las placas se reduce la distancia del espacio donde existe este campo y por tanto se reduce V.

Que el farad representa, en realidad, una capacitancia enorme, se infiere directamente de la Ec. (23-22). Supongamos que se tienen dos grandes placas, cada una con una área de 1.0 m², a la distancia de 1.0 mm $= 10^{-3}$ m. Entonces, $C = \varepsilon_0 A/d = (8.85 \times 10^{-12}$ C²/N-m²)(1.0 m²)/(10^{-3} m) $= 8.85 \times 10^{-9}$ F, o sea algo menos que $\frac{1}{1000}$ μF. Con esta separación entre las placas, éstas necesitarían una área de 10^8 m² para tener la capacitancia de 1 F.

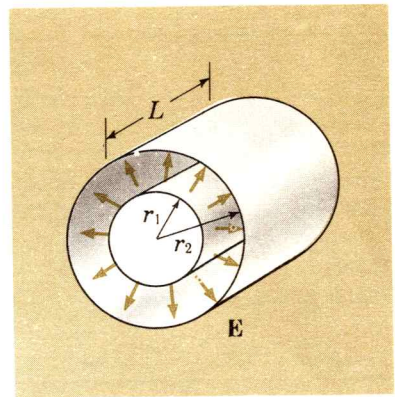


FIG. 23-19. Un capacitor cilíndrico coaxial.

Capacitor coaxial. Este capacitor consiste de dos conductores cilíndricos, concéntricos, de radios r_1 y r_2 como se representa en la Fig. 23-19; las dos superficies cilíndricas son superficies equipotenciales, entre las cuales existe una diferencia de potencial $V_1 - V_2$. Se recordará otro arreglo en donde las superficies equipotenciales eran cilindros coaxiales: el de un alambre cargado, de longitud infinita, con una densidad lineal de carga $\lambda = Q/L$, donde Q es el valor de la carga del conductor de longitud L. Se encontró antes que

$$V_1 - V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = Q \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 L}\right) \ln \frac{r_2}{r_1} \qquad (23\text{-}14)$$

Esta fórmula se aplica, ahora, al capacitor coaxial. Entonces la capacitancia estará dada por la siguiente ecuación:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln (r_2/r_1)} \qquad (23\text{-}23)$$

El radio r_2 es siempe el del conductor exterior, para que C (en la Ec. 23-23) sea positiva.

La capacitancia de un condensador coaxial puede también derivarse directamente de la ley de Gauss. Esta derivación se deja al lector como ejercicio.

Dieléctricos. Por definición, la *constante dieléctrica* k de un material aislador es la capacitancia C_d de un capacitor relleno con el dieléctrico, dividido entre la correspondiente capacitancia C cuando las placas del condensador se encuentran en el vacío:

$$\kappa = \frac{C_d}{C} \qquad (23\text{-}24)$$

Insertando un dieléctrico en un capacitor se incrementa la capacitancia*; es claro que κ es siempre mayor que 1.00. La Tabla

*Cuando un material aislador se introduce entre las placas de un capacitor con cargas fijadas en las dos placas, el campo eléctrico entre las placas, debido a sus cargas, origina

Material	*Constante dieléctrica* κ
Aire (una atm.)	1.00059
Aire (100 atm.)	1.0548
Vidrio pyrex	5.6
Cuarzo	3.8
Papel parafinado	2
Mica	5
Titanato de bario	1200

23-1 es una lista de las constantes dieléctricas a la temperatura ambiente para varios materiales comunes. Por definición, la constante dieléctrica del vacío es exactamente 1. Nótese que κ para el aire es muy próxima a 1.

La *permitividad eléctrica de un material aislador,* simbolizada por ε, se relaciona con kappa y ε_0 con la siguiente ecuación:

$$\varepsilon_0 = \kappa\varepsilon_0 \tag{23-25}$$

Cuando $\kappa = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, la permitividad del vacío.

Es fácil generalizar las fórmulas que dan la capacitancia para varias configuraciones, cuando hay material dieléctrico entre las placas: donde aparezca ε_0, reemplazarla con $\kappa\varepsilon_0 = \varepsilon$. Así, la capacitancia de un condensador de placas paralelas con relleno dieléctrico es, de acuerdo con la Ec. (23-22),

$$C = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon A}{d} \tag{23-26}$$

Los materiales dieléctricos cumplen útiles funciones en los capacitores reales. Aíslan las placas y aumentan la capacitancia por un factor κ Así, un común condensador "de papel" formado emparedando un papel delgado entre dos tiras metálicas y enrollando el conjunto, es en esencia un capacitor de placas paralelas de forma cilíndrica.

23—9 CIRCUITOS CON CAPACITOR

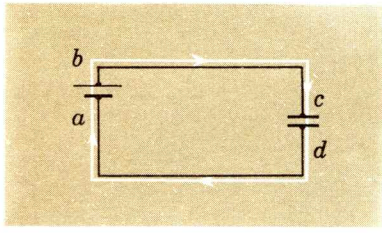


FIG. 23-20. Un circuito formado por una batería y un capacitor con una trayectoria cerrada *abcda*, alrededor de un circuito y pasando a lo largo de los alambres conductores.

Los circuitos eléctricos formados en su totalidad de capacitores, no son ni útiles ni muy interesantes; sin embargo, son dignos de atención, porque ilustran algunos conceptos fundamentales comunes a todos ellos; además, se pueden usar las reglas para combinar capacitores en serie y en paralelo para facilitar el cálculo de la capacitancia de capacitores rellenos entera o parcialmente con materiales dieléctricos.

Considérese primero el circuito sencillo representado en la Fig. 23—20. Recorriendo una trayectoria sencilla y cerrada alrededor del circuito (como se indica con una flecha blanca), la elevación de potencial a través de la batería es —por necesidad— de la misma magnitud que la caída de potencial a través del capacitor.

que las cargas eléctricas dentro del material aislador se redistribuyan de tal manera que aparecen cargas eléctricas de signos opuestos en las dos caras del material dieléctrico. Estas cargas dieléctricas a su vez producen un campo eléctrico que es opuesto y que anula parcialmente al campo eléctrico producido por las cargas en las dos placas conductoras. En consecuencia, el campo eléctrico neto **E** entre las dos placas se reduce, así como la diferencia de potencial asociada $V = Ed$, donde d es la distancia que separa a las placas. Por consiguiente, para un condensador cuya carga Q es fija, el efecto del dieléctrico es *incrementar* la diferencia de potencial V. Como por definición $C = Q/Ed$, el efecto total al introducir un material dieléctrico en un capacitor será un *aumento* de su capacitor con relación al valor correspondiente obtenido cuando hay vacío entre las placas del capacitor.

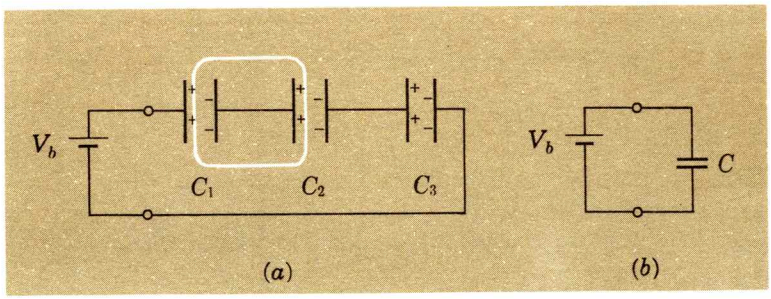


FIG. 23-21. (*a*) Capacitores en serie; la carga neta dentro del lazo blanco es cero. (*b*) El único capacitor equivalente.

Capacitores en serie. Supongamos que varios capacitores C_1, C_2 y C_3 están conectados en serie y conectados a las terminales de una batería como se representa en las Fig. 23-21*a*. Se desea encontrar el valor C del capacitor único que sea equivalente a este grupo de capacitores.

Se ve de la Fig. 23-21*a* que la carga *neta* del único conductor encerrado dentro del cuadro blanco debe permanecer igual a cero, puesto que esta sección se encuentra eléctricamente aislada de cualquier otra parte del circuito. La batería sirve sólo para separar las cargas en este conductor, apareciendo iguales cantidades de cargas positiva y negativa en las placas unidas por un conductor. Por tanto, todos los capacitores en serie tienen la *misma carga:*

$$Q_1 = Q_2 = Q_3$$

Escogiendo una trayectoria a lo largo de los alambres que conectan los capacitores se puede ver que

$$V_b = V_1 + V_2 + V_3 \tag{23-27}$$

donde V_1, V_2 y V_3 son las respectivas caídas de potencial a través de los capacitores. Por definición, $V_1 = Q_1/C_1$; y de modo semejante para los otros dos capacitores. Sustituyendo estas relaciones en la Ec. (23-27), se tiene:

$$V_b = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

donde Q representa $Q_1 = Q_2 = Q_3$. Ahora, si un solo capacitor equivalente C, como se representa en la Fig. 23-21*b*, se conectara a las terminales de la batería, su efecto en el resto del circuito será el mismo que el de los capacitores en serie; esto es, su diferencia de potencial, $V = Q/C$, será igual a V_b. Por tanto,

$$\frac{Q}{C} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \tag{23-28}$$

En general, para capacitores en serie el recíproco de la única capacitancia equivalente es la suma de los recíprocos de las

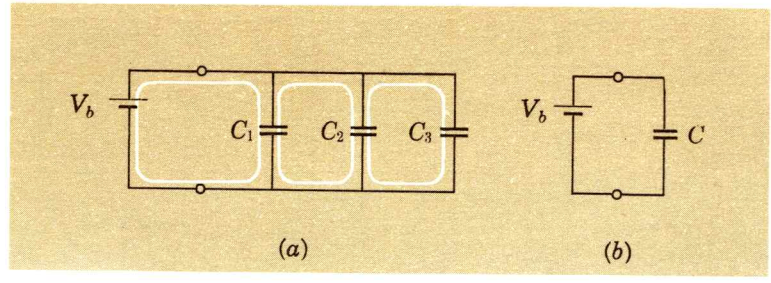


FIG. 23-22. (*a*) Capacitores en paralelo; la diferencia neta del potencial alrededor de cualquier cuadro blanco vale cero. (*b*) El condensador único equivalente.

capacitancias individuales. En consecuencia, la capacitancia equivalente es siempre menor que la más pequeña de la de los capacitores en serie. Por ejemplo, cuatro capacitores conectados en serie, cada uno de 20 μF tienen una capacitancia equivalente de 5 μF.

Capacitores en paralelo. El arreglo de un circuito con capacitores conectados en paralelo se representan en la Fig. 23-22*a*. ¿Qué capacitor único, como en la Fig. 23-22*b*, es equivalente a este grupo de capacitores? Las cargas y diferencias de potencial de C_1, C_2 y C_3 son designados de nuevo, respectivamente, con Q_1, Q_2, Q_3 y V_1, V_2, V_3. Tomando diferencias de potencial a lo largo de trayectorias blancas y cerradas en la figura, se establece que las diferencias de potencial a través de cada capacitor es la misma que a través de las terminales de la batería. *Los capacitores en paralelo tienen la misma diferencia de potencial;* esto es,

$$V_b = V_1 = V_2 = V_3$$

Puesto que los circuitos contienen sólo dos conductores unidos a las terminales de la batería (las placas superiores con sus reóforos y las placas inferiores con los suyos), la carga total Q de un solo capacitor equivalente a los que están en paralelo vale:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

o sea $$Q = C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 = V_b(C_1 + C_2 + C_3)$$

pero $$C = \frac{Q}{V_b}$$

Por tanto, $$C = C_1 + C_2 + C_3 \qquad (23\text{-}29)$$

En general, en capacitores en paralelo la capacitancia equivalente es la suma de sus capacitancias individuales. La capacitancia equivalente siempre excede á la de la mayor en paralelo.

Ejemplo 23-8

Un capacitor de 1.0 μF y uno de 3.0 μF están conectados en paralelo a una batería de 100 V. Se quita entonces la batería y los dos capacitores cargados se conectan como se representa en la Fig. 23-23*a*. Calcular la carga de cada capacitor (*a*) antes de cerrar el interruptor y (*b*) después de cerrarlo.

(*a*) Se ve inmediatamente que:

$$Q_1 = C_1V = (1.0 \times 10^{-6}\ \text{F})(100\ \text{V}) = 1.0 \times 10^{-4}\ \text{C}$$
$$Q_3 = C_3V = (3.0 \times 10^{-6}\ \text{F})(100\ \text{V}) = 3.0 \times 10^{-4}\ \text{C} \qquad (23\text{-}19)$$

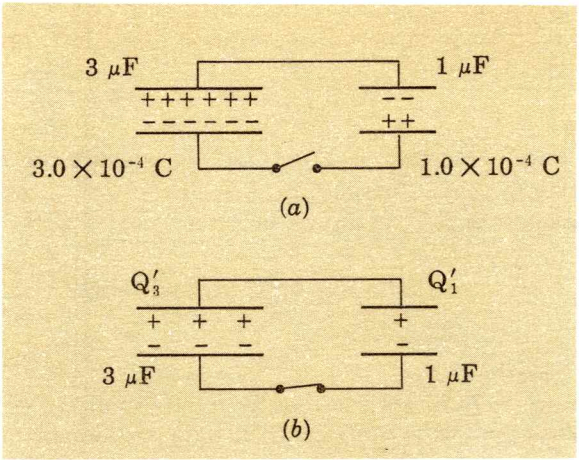


FIG. 23-23

Nótese que tomando las caídas de potencial alrededor del cuadro entero de la Fig. 23-23*a* se puede establecer que la diferencia de potencial entre las terminales del interruptor abierto es de 200 V.

(*b*) Después de que el interruptor ha sido cerrado, como se muestra en la Fig. 23-23*b*, hay una redistribución de cargas en las placas. La carga *neta* en las dos placas superiores será, por la ley de la conservación de la carga, $(3.0 \times 10^{-4}) + (-1.0 \times 10^{-4}) = +2.0 \times 10^{-4}$ C. Después de que se ha cerrado el interruptor, las diferencias de potencial a través de los dos capacitores es la misma:

$$\frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_3'}{C_3} \quad \text{or} \quad \frac{Q_1'}{1\ \mu\text{F}} = \frac{Q_3'}{3\ \mu\text{F}}$$

donde $$Q_1' + Q_3' = +2.0 \times 10^{-4}\ \text{C}$$

Q_1' y Q_3' representan las cargas en los respectivos capacitores después de cerrado el interruptor. Resolviendo las dos ecuaciones anteriores se encuentra:

$$Q_1' = 0.50 \times 10^{-4}\ \text{C} \qquad \text{y} \qquad Q_3' = 1.5 \times 10^{-4}\ \text{C}$$

Además, la diferencia común de potencial es ahora:

$$V_3' = V_1' = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{0.50 \times 10^{-4}\ \text{C}}{1.0 \times 10^{-6}\ \text{F}} = 50\ \text{V}$$

23—10 ENERGIA DE UN CAPACITOR CARGADO Y DE UN CAMPO ELECTRICO

Se necesita trabajo para cargar un capacitor, porque después de que la primera pequeña carga se coloca en cada placa, esta carga rechaza a las otras cargas del mismo signo que después se

agregan a la placa. Se desea encontrar el trabajo total U_e requerido para cargar el capacitor hasta la diferencia de potencial final V_f con una carga final de magnitud Q en cada placa. La diferencia de potencial entre las placas cambia desde cero hasta V_f conforme el capacitor se va cargando; en consecuencia se debe integrar desde la carga inicial cero hasta la carga final Q:

$$U_e = \int_0^Q V\,dq = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Se puede escribir U_e, la cual representa la energía potencial eléctrica de las cargas en las placas del capacitor, en formas equivalentes por medio de la ecuación $C = Q/V_f$:

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2}CV_f^2 = \tfrac{1}{2}QV_f \qquad (23\text{-}30)$$

Ejemplo 23-9

¿Cuál es la fuerza atractiva entre las dos placas de un capacitor de placas paralelas que tienen dos cargas opuestas?

La fuerza F se encuentra fácilmente recordando que el campo eléctrico de *una* placa, en el lugar donde está la otra, es $E = Q/2\varepsilon A$ [E c. (21-6)]. Como es constante en toda el área de la segunda placa, la fuerza atractiva en esta placa es

$$F = QE = \frac{Q^2}{2\varepsilon A}$$

Sustituyendo $Q = CV = (\varepsilon A/d)\ V$ en la ecuación anterior, se tiene:

$$F = \tfrac{1}{2}\varepsilon A \left(\frac{V}{d}\right)^2 \qquad (23\text{-}31)$$

La ecuación anterior proporciona un método para medir la diferencia de potencial en las placas paralelas, midiendo simplemente A, d y la fuerza externa necesaria para mantener a las placas con la separación d. Un aparato que mida la diferencia de potencial se denomina *electrómetro* y puede consistir nada más en una balanza común arreglada de tal manera que el peso de un lado se equilibre con la fuerza eléctrica de la placa superior del condensador, suspendida en el otro lado de la balanza.

Un condensador cargado tiene una energía potencial eléctrica porque se necesita trabajo para llevar las cargas a las placas. Se puede decir lo mismo de modo diferente: un capacitor cargado contiene energía porque se ha establecido un campo eléctrico en la región entre las placas. Esto es, en lugar de atribuir la energía potencial a las posiciones relativas de las cargas positiva y negativa, se puede como alternativa y de modo equivalente atribuir la energía al mismo campo eléctrico. Por medio de las Ecs. (23-26) y (23-13), para un capacitor de placas paralelas, se tiene:

$$U_e = \tfrac{1}{2}CV_f^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon A}{d}\right)(Ed)^2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2(Ad)$$

Despreciando el efecto de bordes, el campo uniforme está encerrado en el volumen Ad entre las placas. Por tanto, la energía eléctrica por unidad de volumen, la *densidad de energía eléctrica* u_e, es:

$$u_e = \frac{U_e}{Ad} = \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2 \qquad (23\text{-}32)$$

La densidad de energía es proporcional al *cuadrado* del campo eléctrico. Aunque derivada para el caso especial de un capacitor de placas paralelas, la Ec. (23-32) es por completo general y proporciona la densidad de energía eléctrica para *cualquier* campo eléctrico. Que se pueda asociar apropiadamente la energía con el campo eléctrico en sí, se justifica porque los campos de las ondas electromagnéticas se ha encontrado que existen en el espacio *sin* estar unidas a las cargas eléctricas.

RESUMEN

La energía potencial eléctrica U de dos cargas puntuales separadas la distancia r es

$$U = \frac{kq_1q_2}{r} \qquad (23\text{-}3)$$

Para más de dos cargas puntuales la energía potencial eléctrica total del sistema, que representa el trabajo total necesario para congregar las cargas en dicho sistema, es la suma de las energías potenciales entre las parejas de cargas puntuales.

El potencial eléctrico V, en cualquier punto P, es igual al trabajo total W que se necesita para llevar a la unidad de carga positiva desde el infinito hasta P, mientras las demás cargas permanecen en posiciones fijas:

$$V = \frac{W}{q} \qquad (23\text{-}8)$$

El potencial eléctrico y la diferencia de potencial eléctrico se miden en volts. El electrón volt ($1\ \text{eV} = 1.60 \times 10^{-19}\ \text{J}$) es la energía que adquiere la partícula de carga e cuando cae a través de la diferencia de potencial de 1 V.

El potencial eléctrico V originado en un conjunto de cargas puntuales está dado por:

$$V = k\sum \frac{q_i}{r_i} \qquad (23\text{-}10)$$

Conociendo el campo eléctrico **E** como una función de posición, se puede derivar la diferencia de potencial entre dos puntos, de acuerdo con la relación

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \qquad (23\text{-}11)$$

Inversamente, conociendo el potencial eléctrico como una función de posición, se puede derivar del campo eléctrico por medio de la relación

$$E = -\frac{dV}{ds} \qquad (23\text{-}15)$$

Donde el desplazamiento ds se toma a lo largo de la dirección en la cual V cambia con más rápidez con la posición. En un campo eléctrico *uniforme*

$$E = -\frac{V}{d} \qquad (23\text{-}13)$$

La capacitancia C vale

$$C = \frac{Q}{V} \qquad (23\text{-}19)$$

donde Q es el valor de la carga de cualquiera de los dos conductores con cargas opuestas y V es la diferencia de potencial entre ellos. La unidad de capacitancia es el farad o faradio.

La capacitancia de un capacitor de placas paralelas, donde el área de cada placa es A y la separación entre dichas placas vale d, es:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \qquad (23\text{-}26)$$

Los capacitores en serie tienen todos la misma carga; la capacitancia del capacitor equivalente es $1/C = \Sigma 1/C_i$. Los capacitores en paralelo tienen común, la diferencia de potencial; la capacitancia equivalente es $C = \Sigma C_i$.

La constante dieléctrica, k, de un material dieléctrico se define como:

$$\kappa = \frac{C_d}{C} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \qquad (23\text{-}24),\ (23\text{-}25)$$

donde C_d y C son las capacitancias respectivas de un capacitor relleno con el material dieléctrico y con el vacío entre las placas.

La energía de un capacitor cargado es

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}QV \qquad (23\text{-}30)$$

La densidad de energía de un campo eléctrico es:

$$u_e = \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2 \qquad (23\text{-}32)$$

PROBLEMAS

23-1. Inicialmente dos protones están fijos y a una distancia $d = 1.0 \times 10^{-10}$ m. Entonces las partículas se liberan de sus posiciones originales, quedando en libertad de moverse debido a la fuerza de Coulomb entre ellas. Despreciando la fuerza gravitacional, encontrar (*a*) la velocidad, y (*b*) la energía cinética de cada protón cuando están a la distancia de $10\ d = 1.0 \times 10^{-9}$ m.

23-2. Una partícula α (núcleo de helio con carga eléctrica $+ 2\ e$), moviéndose al comienzo con una energía cinética de 8.0 meV, se aproxima directamente a un núcleo de oro (carga, $+79\ e$), llegando por un momento al reposo antes de rebotar por su camino inicial. (*a*) Calcular el potencial eléctrico (en meV) del sistema partícula α — oro, cuando la partícula α está en reposo. (El núcleo de oro tiene una masa mucho mayor que la partícula α y puede suponerse que permanece en reposo.) (*b*) Encontrar la distancia mínima de separación entre la partícula α y el núcleo de oro. (*c*) Calcular la energía cinética inicial que debe tener la partícula α si se aproximara al núcleo de oro a la mitad de la distancia encontrada en el inciso (*b*).

23-3. Tres cargas puntuales positivas, cada una de magnitud Q, van a ser colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado L. Calcular el trabajo que debe darse (*a*) para colocar la primera carga en un vértice, (*b*) para agregar la tercera carga al tercer vértice (con la primera y segunda cargas ya fijas en su lugar). (*c*) encontrar el trabajo total necesario para congregar el sistema de las tres cargas. (*d*) ¿Cuál es la energía eléctrica potencial total?

23-4. (*a*) Calcular a qué distancia de una carga puntual de 1.0 C es el potencial de 1.0 V. (*b*) ¿Cuánto vale el campo eléctrico en este lugar?

23-5. Calcular la diferencia de potencial eléctrico que llevará al reposo a un ion de cobre Cu^{2+} (con carga eléctrica $+2e$) cuya energía cinética inicial es de 12 eV.

23-6. Determinar la energía liberada (en meV) en la fisión del núcleo $^{238}_{92}U$ cuando los fragmentos nucleares son $^{146}_{56}Ba$ y $^{90}_{36}Kr$, inicialmente separados por 1.4×10^{-14} m. El presubíndice del símbolo químico da la carga del núcleo en unidades de la carga electrónica e; el presuperíndice da el número total de protones y neutrones.

23-7. El potencial eléctrico en el punto A es de $+ 10$ V; en el punto B es de $+ 15$ V y en el punto C de -12 V. Calcular el trabajo (dando su signo y su valor en eV) que debe darse para mover el ion He^{2+} (un núcleo de helio, con carga $+2e$.) a velocidad constante: (*a*) de A a B a C; (*b*) de A a C a B; (*c*) de A a C a B a A y (*d*) de C a B a A.

23-8. Una carga de $2.0 \times 10^{-2}\ \mu C$ se encuentra en $x = 0$; una carga de $1.0 \times 10^{-2}\ \mu C$ se encuentra en $x = 10$ cm. Encontrar la mínima velocidad con que debe proyectarse un electrón hacia la derecha desde $x = 2.0$ cm para que alcance el punto $x = 8.0$ cm.

23-9. Tanto un electrón como un protón son acelerados desde el reposo por la misma diferencia de potencial eléctrica. La masa del protón es 1836 veces mayor que la del electrón. Calcular la relación de electrón a protón en (*a*) sus energías cinéticas, (*b*) sus ímpetus y (*c*) sus velocidades.

23-10. Tres partículas de masas iguales y con cargas $+ Q$, $+ Q$ y $-2Q$ se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero de lado L. (*a*) Calcular el trabajo que debe suministrarse para separar por completo a las tres partículas una de otra. (*b*) Si las tres partículas se mantienen fijas en los vértices del triángulo, calcular el trabajo que debe darse para traer a una carga $- q$ desde el infinito hasta el centro del triángulo.

23-11. (*a*) Construir la gráfica de energía potencial entre una carga puntual q y dos cargas puntuales fijas, cada una de valor q, como una función de la posición a lo largo de la línea que une a las dos cargas fijas. (*b*) Demostrar que para pequeños desplazamientos del punto central, la energía potencial entre la carga q y las dos cargas fijas es parabólica. (*c*) ¿La carga q se encuentra en equilibrio estable o inestable, con respecto a pequeños desplazamientos en cualquier dirección?

23-12. Considérese la siguiente configuración de cargas eléctricas: $+ 10\ \mu C$ en $x = - 10$ cm, $y = 0$; $- 3.0\ \mu C$ en $x = 0$; $y = + 6.0$ cm; y $-5.0\ \mu C$ en $x = + 10$ cm, $y = 0$. Bosquejar las líneas equipotenciales en el plano $X\ Y$ que correspondan a (*a*) $V = + 3.0$ MV, (*b*) $V = - 3.0$ MV y (*c*) $V = 0$.

23-13. El potencial retardador de un haz de electrones se encuentra que es de 100 V. ¿Cuál es la velocidad inicial de los electrones?

23-14. En un acelerador en tándem de Van de Graaff, un ion negativo de hidrógeno se acelera desde el reposo, por una diferencia de potencial de + 10 MV. Entonces los dos electrones son quitados del ion, y el protón que queda es acelerado por una diferencia de potencial de — 10 MV. Calcular (*a*) la energía cinética final, en MeV, y (*b*) la velocidad del protón. La masa del protón es de 1.7×10^{-27} kg.

23-15. Calcular la energía potencial electrostática, en eV, entre dos protones separados por (*a*) una distancia atómica de 1.0×10^{-10} m; (*b*) una distancia nuclear de 1.0×10^{-15} m.

23-16. Un contador geiger consiste de dos conductores cilíndricos coaxiales, aislados uno de otro. Se supone que el conductor exterior es un cilíndro metálico de 1.0 cm de radio y que el conductor interior es un delgado alambre de 0.01 cm de radio. Un voltaje de 800 V se aplica entre los dos conductores. (*a*) ¿Cuánto vale el campo eléctrico en la superficie del alambre? (*b*) ¿Cuánto vale el campo eléctrico en la superficie interior del cilindro metálico? (*c*) Encontrar la densidad lineal de carga que contiene el alambre.

23-17. Un dispositivo empleado para reducir la contaminación del aire es el precipitador electrostático, que consiste en un delgado alambre con carga negativa, colocado a lo largo de un alto conducto vertical, cilíndrico, con carga positiva. Se supone que los diámetros del ducto y del alambre son, respectivamente, de 30 y de 0.20 cm; entre los dos se aplica una diferencia de potencial de 100,000 V. (*a*) Encontrar el campo eléctrico en la región cercana al alambre. Este campo es lo bastante intenso para producir una descarga en corona cerca del alambre, empujando hacia afuera a los electrones. La mayoría de estos electrones se adhieren por sí mismos a las partículas de desperdicio que se mueven hacia arriba del ducto; estas partículas, que quedan entonces negativamente cargadas, se mueven hacia el ducto y se colecta en sus paredes. (*b*) Conforme el flujo de gas se mueve hacia arriba por el precipitador y las partículas contaminantes son removidas por la pared del ducto, debe proporcionarse energía para mantener el proceso en marcha. ¿Por qué?

23-18. Calcular el trabajo necesario para cargar con la carga total Q a una esfera conductora de radio R.

23-19. Considérese el generador electrostático del Ej. 23-7. Si el radio de la esfera hueca es de 50 cm y se carga a un potencial de 1.0 MV con relación a tierra: (*a*) Encontrar el trabajo que debe darse contra el campo eléctrico de la esfera para llevar a una pequeña carga Δq desde la porción inferior de la banda de la Fig. 25-14 hasta el interior de la esfera, suponiendo que la esfera tiene entonces la carga total q. (*b*) ¿Cuánto trabajo debe darse para cargar la esfera hasta un potencial de 1.0 MV? (*c*) ¿Cuánto vale la masa total de electrones transportados desde la esfera a tierra, al cargar la esfera?

23-20. Dos cargas q y $-q$ están fijas a la distancia $2a$, esta pareja de cargas se denomina un *dipolo eléctrico* con un *momento dipolar* $p = q(2a)$. Véase Fig. P23-20. (El dipolo eléctrico está tratado también en los Probs. 21-26 y 23-21.) Demostrar que, para distancias muy grandes comparadas con la distancia entre las cargas, el potencial eléctrico debido al dipolo, vale $V = (kp/r^2)\cos\theta$, donde k es la constante de la fuerza de Coulomb, p es el momento dipolar, r la distancia al punto central del dipolo y θ el ángulo medido con relación al eje del dipolo, cuyo sentido se considera que va de $-q$ a $+q$. (*Sugerencia:* en el límite, a grandes distancias, las líneas trazadas desde cualquier carga al punto del campo, son casi paralelas a la línea trazada desde el centro del dipolo a dicho punto del campo).

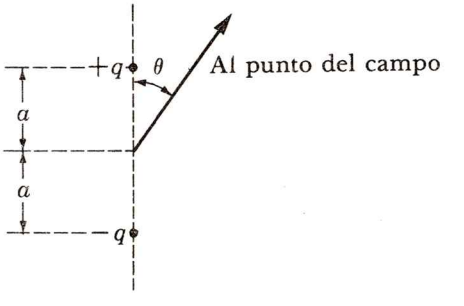


FIG. P23-20

23-21. Las cargas q y $-q$ se encuentran fijas en el eje de las X con coordenadas $(A, 0)$ y $(-a, 0)$, respectivamente. Veáse Fig. P 23-21. (*a*) demostrar que el potencial eléctrico V de los puntos que están en el eje de las X están dados por las siguientes fórmulas:

$$x > a: \qquad V = \frac{kp}{a}\left[\frac{1}{\rho^2 - 1}\right]$$

$$-a < x < a: \qquad V = \frac{kp}{a}\left[\frac{\rho}{1 - \rho^2}\right]$$

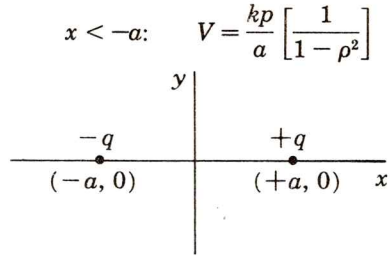


FIG. P23-21

donde x = x/a y $p = q\,(2a)$. (La cantidad p se llama el momento dipolar.) (*b*) Bosquejar V como una función de x cuando $-\infty < x < +\infty$.

23-22. Un modelo eléctrico sencillo de la Tierra y su atmósfera consiste en considerarlo como un capacitor esférico: el planeta sólido es el conductor interior con un radio de 6.4×10^6 m; la región conductora atmosférica, que se encuentra más o menos a 50 km arriba de la superficie de la Tierra, es la cáscara conductora exterior. (*a*) Encontrar la capacitancia de este sistema. (*b*) Si el potencial eléctrico de la capa conductora atmosférica es de 400 kV con respecto a la superficie sólida de la Tierra, encontrar la densidad superficial de carga, σ, de la superficie de la Tierra.

23-23. (*a*) Demostrar que la capacitancia de dos conductores esféricos concétricos, de radios r y $r + d$, en el vacío, es $C = r\,(r + d)/kd$. (*b*) Demostrar que esta ecuación se reduce a la capacitancia de un capacitor de placas paralelas cuando $d << r$.

23-24. En un cable coaxial sus conductores interior y exterior son, respectivamente, de 1.0 y de 2.0 mm de radio. La región entre los conductores está rellena con un dieléctrico de vidrio cuya constante dieléctrica es de 5.0 y cuya rigidez dieléctrica es de 10 MV/m. (*a*) Calcular la capacitancia por metro de este cable. (*b*) ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que puede aplicarse entre los dos conductores?

23-25. (*a*) Demostrar que la capacitancia de una esfera aislada de radio r, sumergida en un dieléctrico, vale $C = 4\pi\varepsilon r = \kappa r/k$, donde ε, κ, y k, son, respectivamente, la permitividad del dieléctrico, la constante dieléctrica, y la constante de la fuerza de Coulomb. (*Sugerencia*: considérese que la otra placa del condensador está en el infinito.) (*b*) Teniendo esto en cuenta calcular la capacitancia de la Tierra; el radio de la Tierra es de 6.4×10^6 m.

23-26. Encontrar el área mínima de un condensador de placas paralelas de 1000 picofaradios, nominalmente de 1.0×10^4 volts, si el dieléctrico es de parafina ($k = 2.0$). El papel de parafina se romperá en forma permanente si el gradiente de potencial a través de él, excede 4.0×10^7 V/m.

23-27. Encontrar la capacitancia de un condensador de placas paralelas si está relleno de dos placas dieléctricas de igual espesor, como se indica en la Fig. P23-27.

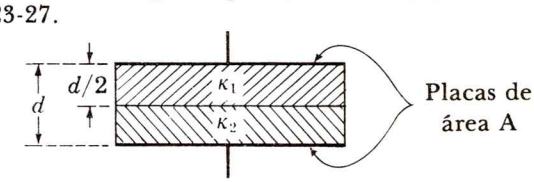


FIG. P23-27

23-28. Demostrar que en un condensador de placas paralelas, relleno con un dieléctrico con constante dieléctrica k, la densidad superficial de carga σ_κ en la superficie dieléctrica, adyacente a la terminal positiva, vale $\sigma_\kappa = -(\kappa - 1)\sigma$, donde σ es la densidad superficial de carga en la placa positiva del condensador.

23-29. Se tienen cuatro condensadores de 12 pF cada uno. (*a*) ¿Cómo deben conectarse los condensadores para que tengan la mínima capacitancia equivalente? (*b*) ¿Cuánto vale esta capacitancia?

23-30. Un condensador de 20 μF se conecta a las terminales de una batería de 12 V. (*a*) ¿Cuánto vale la carga eléctrica en las placas de cada condensador? (*b*) ¿Cuál es la energía del condensador cargado?

23-31. Se tiene un número ilimitado de condensadores de 5.0 μF; cada uno de ellos se perfora si la diferencia de potencial aplicada excede a 500 V. Empleando el número mínimo de estos condensadores, encontrar el arreglo que proporcione (*a*) Un condensador de 5.0 μF que resista un potencial aplicado hasta de 1000 V, (*b*) Un condensador de 2.0 μF que soporte un voltaje aplicado hasta de 1000 V.

23-32. Dos condensadores, uno de 1.0 μF y el otro de 2.0 μF, se cargan al principio conectándolos a una batería de 10 V. Entonces los dos condensadores se conectan juntos. Calcular la energía eléctrica total almacenada en cada condensador, si los condensadores se conectan de tal manera que (*a*) las placas de

carga igual se conecten juntas y (*b*) se conecten juntas las placas las placas de cargas opuestas. (*c*) Explicar por qué se pierde energía en la parte (*a*).

23-33. Se tienen tres capacitores, cada uno de 10.0 pF, y una batería de 1.50 V. (*a*) Dígase cómo conectar los capacitores en un circuito para obtener la mayor energía posible almacenada en ellos y (*b*) ¿cuánto vale esta máxima energía posible?

23-34. Una esfera conductora de radio R contiene una carga eléctrica conductora Q. (*a*) Calcular la densidad de la energía eléctrica en un punto que esté justamente afuera de la esfera conductora. (*b*) Encontrar cómo varía la densidad de energía eléctrica con respecto a la distancia r medida desde el centro de la esfera, suponiendo r mayor que R.

23-35. (*a*) Demostrar que la fuerza de atracción entre las placas de un condensador de placas paralelas (en el vacío) vale $F = Q^2/2\varepsilon_0 A$, donde Q es la carga del capacitor, ε_0 es la permitividad del espacio libre y A es el área de la placa. (*b*) Explicar por qué esta fuerza *no* vale $QE = Q^2/\varepsilon_0 A$, donde E es la magnitud del campo eléctrico en la región entre las placas. (*Nota*: En este resultado se funda el electrómetro absoluto de Kelvin, en el cual la carga Q se determina midiendo F.)

Capítulo

24

CORRIENTE ELECTRICA Y RESISTENCIA

Este capítulo trata de las corrientes eléctricas originadas por las cargas eléctricas en movimiento. Se define la corriente eléctrica y se relaciona con las propiedades de los portadores de las cargas eléctricas. Las leyes fundamentales de la conservación de la carga eléctrica y de la energía se aplican a los principios eléctricos y se derivan de la relación general que da la potencia eléctrica entregada por una fuente de energía a una carga. Por último, se da un tratamiento muy breve y cualitativo de las características que determinan la resistividad de cualquier material.

24—1 CORRIENTE ELECTRICA

El movimiento de las cargas eléctricas constituye una *corriente eléctrica*. Por definición, la corriente i que atraviesa una superficie dada es la carga neta total dQ que pasa por la superficie, dividida entre el tiempo transcurrido dt:

$$i = \frac{dQ}{dt} \tag{24-1}$$

La dirección de la denominada corriente convencional se considera que es la del movimiento de las cargas *positivas*. Así, los protones (carga $+e$) que se mueven a la derecha forman una corriente a la derecha, mientras que los electrones (carga $-e$) que se mueven a la derecha forman una corriente hacia la izquierda. Para obtener la corriente total i, se debe siempre tomar en cuenta a la carga *neta* que pasa por una superficie dada en la unidad de tiempo. Por ejemplo, si se mueven iones positivos hacia la derecha atravesando la superficie y a la vez se mueven iones negativos hacia la izquierda a través de la misma superficie, como en el caso de las corrientes en los líquidos, *ambos* tipos de iones contribuyen a una corriente eléctrica hacia la *derecha;* véase la Fig. 24-1.

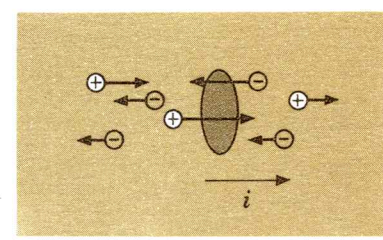


FIG. 24-1. Tanto las cargas positivas que se mueven a la derecha, como las negativas a la izquierda, contribuyen a la carga convencional i hacia la derecha.

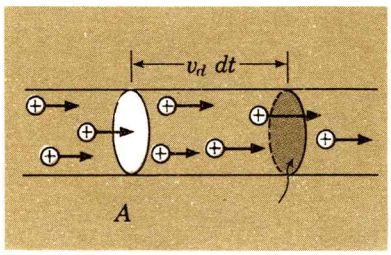


FIG. 24-2. Cargas que se mueven a la velocidad de "arrastre" v_d dentro de un cilindro de área transversal A, durante el tiempo dt.

En el sistema internacional (SI) la unidad de corriente es el *ampere* o *amperio* (A) llamado así en honor de André M. Ampère (1775-1836), quien hizo significativas contribuciones al conocimiento de la relación entre una corriente eléctrica y el campo magnético asociado con él. Un A corresponde a la carga neta de 1 C, que atraviesa una superficie dada durante 1 s. Mientras el coulomb es una unidad de carga muy grande para las normas del laboratorio, en cambio son típicas corrientes de laboratorio de algunos amperes. Las unidades relacionadas son el miliampere ($1\ \text{mA} = 10^{-3}\ \text{A}$) y el microampere ($1\ \mu\text{A} = 10^{-6}\ \text{A}$).

Una corriente directa (cd) implica que la carga neta positiva se mueve sólo en una dirección, pero *no* por fuerza con una intensidad constante. Por otro lado en una corriente alterna (ca) la corriente cambia cada cierto tiempo de dirección.

¿Cómo se relaciona la corriente i con las propiedades de los portadores de carga? Supongamos que una corriente consiste de n portadores idénticos de carga por unidad de volumen, "arrastrados" a la velocidad v_d en una sola dirección, siendo q la carga positiva de cada portador (véase Fig. 24-2). Entonces, en el tiempo dt cada portador de carga recorre una distancia $v_d\ dt$ y todos los portadores de carga que están dentro del volumen cilíndrico de longitud $v_d\ dt$, y una área transversal A han atravesado una base del cilindro. Por la misma razón, un número igual de portadores de carga han entrado a la columna cilíndrica atravesando la otra base. La carga total dQ que atraviesa el área A en el tiempo dt, es la carga por unidad de volumen nQ multiplicada por el volumen del cilindro $Av_d\ dt$:

$$dQ = nqAv_d\ dt$$

En consecuencia, la corriente i, formada por estos portadores de carga vale:

$$i = \frac{dQ}{dt} = nqAv_d \tag{24-2}$$

Si varias especies de portadores de carga, que difieren en n, q, o v_d, contribuyen a la corriente, se puede generalizar la relación anterior escribiendo:

$$i = A\Sigma n_\alpha q_\alpha v_{d\alpha} \tag{24-3}$$

Debe recalcarse que *no* es necesario suponer que cada portador de carga se mueve a velocidad constante. En realidad las partículas cargadas pueden tener un movimiento muy complicado, como les pasa a los electrones libres en los conductores ordinarios. La velocidad de arrastre v_d es el desplazamiento promedio por unidad de tiempo, tomado a lo largo de la dirección de la corriente.

El aparato usado más comúnmente para medir la corriente es el *amperímetro* que funciona por la torca producida por un imán en una bobina de alambre que lleva la corriente (Sec. 26-6). Un aparato para medir la corriente aún más sencillo (pero por lo

general no muy práctico) se basa en el fenómeno de la electrólisis: se mide la corriente midiendo la masa depositada en un electrodo sumergido en un líquido conductor (un electrólito).

Ejemplo 24-1

Un alambre de cobre, con una sección transversal de 1.0 mm ^{2} lleva una corriente de 1.0 A. Encontrar la velocidad promedio de arrastre de los electrones de conducción.

En el cobre, como en otros conductores metálicos típicos, hay aproximadamente, un electrón libre (de conducción) por átomo. Se puede encontrar la densidad n de portadores de carga calculando el número de átomos por unidad de volumen con el número N_0 de Avogadro (El número de átomos en un kg-mol,) la masa atómica w (el número de kilogramos en un kg-mol) y la densidad ρ_m (el número de kilogramos en la unidad de volumen). Es evidente que

$$n = \frac{\text{portadores de carga}}{\text{volumen}} = \left(\frac{1\text{ portador de carga}}{\text{átomo}}\right)\left(\frac{\text{átomo}}{\text{volumen}}\right)$$

$$= \left(\frac{1\text{ portador de carga}}{\text{átomo}}\right)\left(\frac{\text{átomos}}{\text{kg-mol}}\right)\left(\frac{\text{kg-mol}}{\text{kilogramo}}\right)\left(\frac{\text{kilogramo}}{\text{volumen}}\right)$$

o sea

$$n = (1)(N_0)\left(\frac{1}{w}\right)(\rho_m)$$

$$= \left(\frac{1\text{ portador decarga}}{\text{átomo}}\right)\left(\frac{6.0 \times 10^{26}\text{ átomos}}{\text{kg-mol}}\right)\left(\frac{1\text{ kg-mol}}{64\text{ kg}}\right)(9.0 \times 10^3\text{ kg/m}^3)$$

$$= 8.4 \times 10^{28}\text{ portadores de carga/m}^3$$

De la Ec. (24.2):

$$v_d = \frac{i}{nqA} = \frac{(1.0\text{ A})}{(8.4 \times 10^{28}\text{ m}^{-3})(1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(1.0 \times 10^{-6}\text{ m}^2)}$$

$$= 7.4 \times 10^{-5}\text{ m/s} = 0.074\text{ mm/s}$$

Los electrones libres se mueven en el conductor con una velocidad de arrastre promedio que es en realidad menor que 0.1 mm/s; una velocidad muy pequeña. Sin embargo, *no* debe inferirse que cuando la corriente se establece en un extremo del alambre de cobre, se necesita unos 10 s para que la señal recorra 1 mm. La velocidad con que el campo eléctrico impulsa a los electrones libres se ha establecido que es próxima a la velocidad de la luz. Se debe distinguir aquí entre la rapidez de arrastre de las partículas cargadas y la rapidez con que se propaga la señal, tal como se distingue entre la rapidez (posiblemente muy baja) con la que se mueve el líquido dentro de un tubo y la rapidez mucho mayor con la que se propaga un cambio de presión a lo largo del tubo. La velocidad de *arrastre* de los electrones de conducción es mucho menor que la velocidad térmica *aleatoria* de los electrones a cualquier temperatura finita.

24—2 LA CORRIENTE Y LA CONSERVACION DE LA ENERGIA

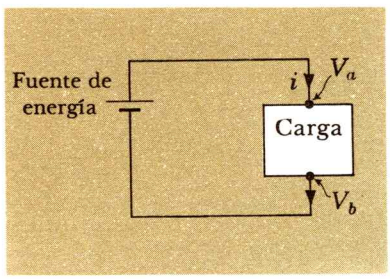


FIG. 24-3. Una fuente que suministra energía a una carga.

Aquí se tratará una relación fundamental que concierne a la transmisión de la energía eléctrica al aparato por el que fluye la carga. El arreglo es por completo general: se tiene alguna fuente de energía, como una batería o un generador eléctrico, el cual mantiene una diferencia de potencial $V_{ab} = V_a - V_b$ entre las terminales de un dispositivo, o "carga", a través del cual pasa una corriente i. La fuente proporciona energía eléctrica a la carga; véase Fig. 24-3. No se necesita especificar en detalle a la carga (excepto que no debe contener fuentes de energía). Por ejemplo puede ser un conductor sencillo, un motor eléctrico o un transistor. Todo lo que importa es que exista una corriente i dentro del dispositivo y que una diferencia de potencial V_{ab} de algún modo se produzca entre sus terminales. Debe imaginarse que V_a es mayor que V_b, por lo que la corriente convencional "entra" en a y "sale" en b (los electrones, entonces, "trepan" el potencial al pasar de b a a).

Si una carga positiva dQ atraviesa la carga, el trabajo dW dado a esta carga por las fuerzas eléctricas asociadas con la diferencia de potencial V_{ab} será:

$$dW = (dQ)V_{ab} \tag{24-4}$$

Puesto que $i = dQ/dt$,

$$dW = iV_{ab}\,dt \tag{24-5}$$

La potencia instantánea P, la rapidez con que se suministra trabajo, valdrá:

$$P = \frac{dW}{dt} = iV_{ab} \tag{24-6}$$

La potencia instantánea que recibe la carga no es sino el producto de la corriente y la diferencia de potencial.

Las Ecs. (24-4) y (24-5) son válidas si la corriente y la diferencia de potencial son constantes, o bien, si varían con el tiempo. Cuando i y V_{ab} son constantes, P también lo es, y el trabajo total W llevado por las cargas que atraviesan el aparato en el tiempo t es:

$$W = iV_{ab}t \tag{24-7}$$

Por otra parte se tiene

$$W = \int P\,dt = \int iV\,dt$$

Si la corriente i está en amperes y la diferencia de potencial V está en volts, el potencial P tiene como unidades los vatios o watts: (A) (V) = (C/s) (J/C) = J/s = W.

Aclaremos el significado de la Ec. (24-6). La potencia entregada P es sencillamente la rapidez con que se transfiere la

energía de la fuente de energía, a la carga cualesquiera que sean los detalles de la fuente o la carga. Si la carga no es sino un haz de partículas cargadas aceleradas por una diferencia de potencial, la potencia P será la rapidez con la que estas partículas adquieren energía cinética.

Un caso importante es aquél donde la carga es un conductor o una resistencia; en este caso la energía aparece como calor, o energía térmica, la cual eleva la temperatura del conductor o bien es radiada o conducida lejos. La potencia *no* depende sino del modo como estén relacionadas V e i. Esta relación puede, en realidad, ser bastante complicada, como en el caso de un tubo al vacío diodo, o bien, puede ser sencilla, como en el caso de un conductor sólido y homogéneo (caso tratado en la sección siguiente).

24—3 RESISTENCIA Y LEY DE OHM

Es instructivo representar en una gráfica la relación entre el voltaje y la corriente en varios elementos consumidores de corriente, esto es, cualquier aparato que lleve corriente en donde se disipe la energía eléctrica y aparezca energía térmica. En algunos elementos la gráfica V-i es complicada, como se ilustra en las Figs. 24-4 *a* y *b*.

La Fig. 24-4*a* es la relación entre el voltaje y la corriente entre los dos electrodos de un tubo al vacío o de un tubo cerrado que contiene gas. Otro ejemplo de relación complicada entre V e i es el de un aparato semiconductor, como los transistores, indicado en la Fig. 24-4*b*.

Una situación importante en donde la relación entre V e i de un elemento disipativo del circuito es sencilla, es aquella de un conductor eléctrico sólido (que incluya muchos malos conductores, o aisladores). Cuando una diferencia de potencial V se aplica entre dos puntos cualesquiera de un conductor de cualquier forma, existe una corriente i en el conductor, y se ha encontrado que entonces existe una relación lineal entre V e i; véase la Fig. 24-4*c*. En un conductor la relación entre V a i, definida como la resistencia eléctrica R, es una *constante* independiente de V o de i. Esta relación, encontrada por George S. Ohm (1787-1854), es válida para una gran variedad de materiales y para una enorme gama de corrientes y de diferencia de potencial y se denomina ley de Ohm.

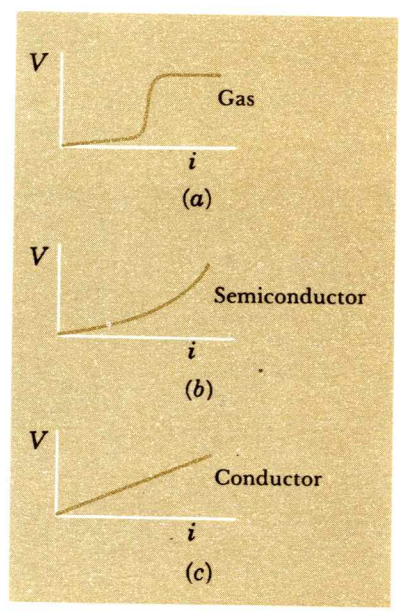


FIG. 24-4. Características del voltaje y la corriente en (*a*) un gas, (*b*) un aparato semiconductor y (*c*) un conductor que obedece a la ley de Ohm.

Ley de Ohm $$R = \frac{V}{i} = \text{una constante} \qquad (24\text{-}8)$$

La resistencia eléctrica puede definirse como la relación entre el voltaje y la corriente en cualquier elemento de un circuito disipati-

vo, por ejemplo, en cualquiera de las situaciones de la Fig. 24-4. La ley de Ohm es el hallazgo experimental de que esta relación es una constante para ciertos materiales, llevando a la relación lineal representada en la Fig. 24-4*c*.

La unidad del SI para la resistencia es el ohmio u ohm (abreviado con la letra griega Ω). Una resistencia tiene la resistencia de 1 Ω cuando pasa la corriente de 1 A, cuando la diferencia de potencial aplicada es de 1 V. Son unidades relacionadas el megohm (1 MΩ = 10^6 Ω) y el microhom (1 μΩ = 10^{-6} Ω) ; en un diagrama de circuitos una resistencia se representa con el símbolo ∿∿∿, y una resistencia variable o reóstato se representa con ∿∿∿, o con ∿∿∿. Un elemento de un circuito disipativo cuya resistencia *no* sea independiente de V (o, por tanto, de i) se denomina una resistencia no óhmica o no lineal (su gráfica Vi no es una línea recta que pase por el origen).

Es notable que la ley de Ohm sea válida en una enorme gama de corrientes y de diferencias de potencial (abarcando una gama de 10^{10} para muchos materiales); siendo aún más notable, al menos a primera vista, que sea válida en todos los casos. Si se mantiene una diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor, existirá un campo eléctrico diferente de cero dentro del conductor. Es este campo aplicado, superpuesto a los campos eléctricos locales y fluctuantes de las partículas cargadas en el interior del conductor, el que impulsa a los portadores de carga a través del conductor, manteniéndose así la corriente eléctrica. Si la diferencia de potencial aplicada es constante, también lo será el campo eléctrico aplicado en cada punto del conductor y entonces una fuerza eléctrica neta actúa en los electrones libres que forman la corriente. Pero si un electrón recibe una fuerza constante, se moverá con una *aceleración* constante y no con una velocidad constante; éste es el movimiento de un electrón en un tubo al vacío sometido a la influencia de un campo eléctrico. Sin embargo, ya se ha visto que los electrones de conducción en un conductor tienen una velocidad de arrastre *constante*. En realidad, no hay contradicción, cuando se toma en cuenta que los electrones de conducción sufren frecuentes colisiones con los átomos del conductor. En estas colisiones la energía cinética adquirida por el electrón del campo eléctrico externo, se pierde en la red cristalina del conductor, y la potencia *entregada al conductor se disipa* como energía térmica.

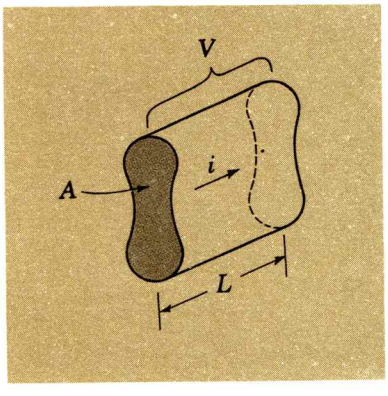


FIG. 24-5. Se mantiene la diferencia de potencial V entre los extremos de un conductor cilíndrico de longitud L y una sección transversal A, por donde pasa una corriente i.

Cuando un elemento de un circuito obedece a la ley de Ohm y $V = iR$, entonces la potencia suministrada a una resistencia y disipada por ella puede escribirse:

$$P = iV = i^2R = \frac{V^2}{R} \tag{24-9}$$

Que la energía térmica que aparece en una resistencia (la llamada pérdida i^2R sea, en efecto, exactamente igual a la energía eléctrica

suministrada, se estableció primero por el experimento histórico de James Joule, y el fenómeno o efecto recibe el nombre de calentamiento de Joule. La energía térmica (en joules) está dada por $W = i^2Rt = (V^2/R)t = iVt$, donde t es el tiempo transcurrido. La ley de Ohm es válida para un conductor de cualquier forma y con los reóforos unidos a dos puntos cualesquiera. Supongamos que una diferencia de potencial se establece entre los extremos de un conductor cilíndrico de longitud L y con una área A de su sección transversal, como se ve en la Fig. 24-5. Los experimentos demuestran en forma bastante razonable que para un material dado, la resistencia de esta sencilla configuración geométrica, sigue una proporcionalidad a la longitud e inversa al área de la sección transversal. Se puede, entonces escribir la resistencia como:

$$R = \rho \frac{L}{A} \tag{24-10}$$

donde ρ, llamada *resistividad,* es una propiedad del material que forma al conductor, pero no depende de su forma física. Las unidades de resistividad son el ohm-metro (Ω-m) o el ohm-centí-

Tabla 24-1

Material	*Resistencia a la temperatura ambiente (Ω-m)*
Plata	1.47×10^{-8}
Cobre	1.72×10^{-8}
Aluminio	2.83×10^{-8}
Tungsteno	5.51×10^{-8}
Hierro	10×10^{-8}
Manganina (Cu 84%, Mn, 12%, Ni 4%)	44×10^{-8}
Constantano (Cu 60%, Ni 40%)	44.1×10^{-8}
Nicromo	100×10^{-8}
Grafito	8.0×10^{-6}
Carbón	3.5×10^{-5}
Germanio	0.43
Silicio	2.6×10^{3}
Roca (granito)	$10^{5}-10^{7}$
Madera (de arce)	4×10^{11}
Mica	9×10^{13}
Cuarzo (fundido)	5×10^{16}

metro (Ω-cm). La Tabla 24-1 es una lista de las resistividades de algunos materiales comunes, tanto buenos como malos conductores. Nótese la gran amplitud en las resistividades: el mejor conductor es mejor que el peor por un factor de unos 10^{24}. De la Ec.

(24-10) es aparente que la resistencia de un cubo de 1 m de arista, cuyas caras opuestas se mantienen a diferentes potenciales, es numéricamente igual a la resistencia del material en ohm-metro.

El recíproco de la resistividad ρ se llama *conductividad* σ:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \tag{24-11}$$

De manera semejante, el recíproco de la resistencia (en ohms) es la conductancia (en mhos o siemens).

Por lo general la resistividad de un conductor aumenta al elevarse la temperatura. Sin embargo, algunos materiales —en particular en materiales semiconductores, como el carbón— muestran un comportamiento inverso: su resistividad cae conforme se eleva la temperatura, es decir, tienen un coeficiente de temperatura negativo. Estos materiales tienen mayor resistividad que los conductores metálicos, sobre todo porque tienen muy pocos electrones de conducción. Cuando la temperatura se eleva, el número de electrones libres de un semiconductor aumenta y también la conductividad, de tal manera que sobrepasan la disminución de conductividad debida al aumento de vibración térmica.

Ciertos elementos muestran una variación notable de su resistividad eléctrica con la temperatura: por abajo de cierta temperatura crítica, la resistividad cae hasta cero; no a una resistividad muy pequeña, ¡sino exactamente a cero! Estos materiales se llaman apropiadamente *superconductores*. El elemento plomo presenta superconductividad por abajo de 7.175 K. Se espera, que, puesto que un superconductor no presenta resistencia al flujo de la carga eléctrica y no disipa energía, una corriente eléctrica establecida en un aro superconductor deberá persistir en forma indefinida: al llevar a cabo el experimento se ha encontrado que esto es precisamente lo que sucede. Corrientes de varios centenares de amperes inducidos en un anillo superconductor de plomo se ha observado que persisten sin disminución medida ¡por varios años!; aunque raro, el fenómeno de la superconductividad se explica ahora en términos de la teoría cuántica.

RESUMEN

La corriente eléctrica i, que atraviesa cualquier superficie, vale:

$$i = \frac{dQ}{dt} \tag{24-1}$$

donde dQ es la carga total neta que atraviesa la superficie en el tiempo dt. Por convención, el sentido de la corriente es el sentido en que se mueven las cargas positivas. La corriente se mide en amperios o amperes.

La rapidez con que una fuente de energía suministra energía eléctrica a una carga vale:

$$P = iV \qquad (24\text{-}6)$$

donde V es la diferencia de potencial a través de la carga, e i es la corriente que la atraviesa.

La resistencia R de un elemento de un circuito se define con la ecuación:

$$R = \frac{V}{i} \qquad (24\text{-}8)$$

La ley de Ohm es el hallazgo experimental de que para muchos materiales conductores la resistencia, como se ha definido, es independiente de V o de i.

La resistencia R se relaciona con la longitud L y el área transversal A de un conductor cilíndrico, con la ecuación:

$$R = \rho \frac{L}{A} \qquad (24\text{-}10)$$

donde la resistividad ρ es una constante, característica del material conductor; la resistividad depende de la pureza química y física de un material y de su temperatura.

PROBLEMAS

24-1. Un haz de protones de 10.0 eV consiste de 4.0×10^6 protones/cm^3 y se mueve a la izquierda, mientras que un haz de electrones de 10.0 eV consiste de 4.0×10^6 electrones cm^3 que se mueven a la derecha. El área de cada haz es de 2.0 mm^2. ¿Cuál es la dirección y magnitud de la corriente resultante?

24-2. Calcular la corriente por área tranversal en una barra de cobre que lleva 50 A, si el área de la sección recta es de 20 mm^2.

24-3. Un haz de protones de 2.0 MeV consiste de 2.5×10^{11} protones/m^3 que se mueven a la derecha; el área del haz es de 2.0 mm^2. (*a*) Encontrar la corriente y la potencia del haz de protones (*b*) Calcular cuántos años necesita este haz para depositar un g de hidrógeno. La masa de un protón es, aproximadamente, 1.7×10^{-27} kg.

24-4. Un disco circular dieléctrico tiene una densidad superficial uniforme de 1.0 μC/m^2. Si el disco tiene un radio de 10 cm, calcular a qué velocidad angular debe girar el disco alrededor de un diámetro fijo en el espacio, para producir una corriente de 5.0×10^{-8} A.

24-5. Supóngase que un electrón es una carga concentrada de -1.6×10^{-19} C, que se mueve en una órbita circular de 0.5 Å alrededor de un protón fijo, debido a la fuerza atractiva de Coulomb. (*a*) ¿Cuánto vale la corriente promedio debida al movimiento del electrón en su órbita? (*b*) Construir un esquema de la corriente instantánea de la parte (*a*) como una función de tiempo.

24-6. Un sincrotrón de electrones, máquina para acelerar electrones a muy altas energías, produce un

haz intermitente de electrones, teniendo cada electrón una energía de 10 GeV (1.0×10^{10} eV). Cada ráfaga o "pulso" de electrones dura 10^{-6} s, y tiene lugar con la rapidez de 60 pulsos/s con una intensidad del haz de 1.0 X 10 electrones/pulso. Encontrar los valores promedios y ápice (durante el pulso) de (*a*) la corriente de electrones y (*b*) la potencia suministrada al blanco de los electrones.

24-7. Un resistor de 50-Ω está clasificado como de 0.50 W. Calcular la máxima corriente y el máximo voltaje que pueden aplicarse al resistor.

24-8. Un calentador eléctrico eleva 40°C la temperatura de 1.0 kg de agua cuando está encendido durante 10 min. Si la corriente que atraviesa el resistor es de 10 A ¿cuánto vale su resistencia?

24-9. Una batería de 12 V contiene una carga inicial de 120 A-h (A-h = ampere-ahora, una unidad de carga eléctrica). Suponiendo por sencillez que la diferencia de potencial entre sus terminales permanece constante a 12 V hasta que la batería se descarga totalmente, encontrar por cuántas horas suministrará la batería 60 W.

24-10. Una bobina de alambre disipa energía con la rapidez de 5.0 W cuando se le aplica una diferencia de potencial de 200 V. Una segunda bobina, construida con el mismo alambre, disipa 15 W cuando se le aplica la misma diferencia de potencial. Calcular la relación entre la longitud del alambre de la segunda bobina y la de la primera.

24-11. El filamento de un tubo al vacío emite 5.0 x 10^{18} electrones/s. Todos los electrones emitidos se conectan en una placa, cuyo potencial está 100 V por arriba del filamento. Encontrar (*a*) la corriente en la placa, (*b*) la potencia disipada en la placa. Si el potencial de la placa se eleva ahora hasta 200 V, encontrar (*c*) la corriente de placa y (*d*) la potencia disipada ahora en la placa.

24-12. En una lámpara incandescente de 100 W, diseñada para usarse a 120 V, el filamento se mantiene a unos 2820°C. (*a*) ¿Cuál es la resistencia del filamento? (*b*) A la temperatura ambiente (20°C) la resistencia de la lámpara es de 10 Ω. Encontrar $\Delta R/\Delta T$, el cambio promedio de la resistencia del filamento por K, en este intervalo de temperatura. (esta dependencia de la resistencia con la temperatura es típica de los metales).

24-13. Calcular (*a*) la caída de voltaje por unidad de longitud (en V/m) y (*b*) la pérdida de potencia por unidad de longitud (en W/m) en un alambre de aluminio del No. 12 cuando una carga de 1500 W se conecta a un circuito de 120 V. A 20°C (68°F); el alambre del No, 12 es de 2.503 mm de diámetro, siendo la resistividad del aluminio de 2.828×10^{-8} Ω- m.

24-14. De acuerdo con la práctica normal el alambre de cobre del No. 14 de clasificación, está aprobado para un servicio de 15 amperes en las instalaciones caseras. La resistividad del cobre recocido es de 1.724×10^{-8} Ω-m teniendo el No. 14 un diámetro de 1.628 mm a 20°C (68°F). (*a*) Calcular la disipación de potencia por unidad de longitud (en W/m) si este alambre se usa con la corriente normal. (*b*) Calcular la disipación de potencia por unidad de longitud si se usa un alambre de cobre del No. 18 (con un diámetro de 1.024 mm). Supongamos que la temperatura se mantiene constantemente a 20°C.

24-15. Calcular la longitud que se necesita de alambre de nicromo del No. 40 para construir un resistor de 10 000 Ω con una aproximación de ± 1.0%; a 20°C (68°C) la resistividad del nicromo es de 150 $\times 10^{-8}$ Ω- m. El diámetro del alambre del No. 40 es de 0.07987 mm.

24-16. Una resistencia diseñada para que sea resistente a la corrosión durante largos periodos de tiempo, consiste de una película de un metal noble que se deposita al vacío sobre un núcleo de cerámica. Calcular el espesor de la película de platino que se necesita para construir una resistencia en un cilindro de cerámica de 5.00 mm de diámetro y 5.00 cm de longitud. A 20°C (68°F), la resistividad del platino es de 10.47×10^{-8} Ω-m.

24-17. En años recientes la disponibilidad y costo del cobre ha sugerido una revaluación de los méritos relativos del cobre y del aluminio, relativos a la transmisión de energía eléctrica. Para aclarar algunos de los factores involucrados, conviene hacer cálculos como los siguientes. (*a*) Calcular cuántos kg de aluminio se necesitan para hacer un conductor con la

misma resistencia eléctrica por km que 100 kg de cobre. (*b*) Calcular la relación de costo de los dos metales, si el cobre cuesta 2.5 veces más que el mismo peso de aluminio. Las densidades del cobre y del aluminio valen, respectivamente, 8.89 g/cm^3 y 2.70 g/cm^3 Las resistividades correspondientes están enlistadas en la Tabla 24-1.

24-18. Un delgado alambre de plata de 0.20 mm de diámetro lleva una corriente de 2.0 A. (*a*) Calcular la corriente por unidad de área transversal. (*b*) Encontrar la caída de potencial en 1.0 m de longitud del alambre. (*c*) ¿Cuál es la velocidad de arrastre en los electrones en el conductor? Supóngase que la plata tiene un electrón libre por átomo, una densidad de 10 g/cm y una masa atómica de 108 kg/kg-mol.

24-19. Un parelelepípedo sólido rectangular tiene aristas de longitudes *1; 1* y 10 *1*. Cuando se aplica una diferencia de potencial constante entre los lados paralelos separados por 10 *1*, y después entre los lados opuestos separados *1*, calcular la relación entre (*a*) las resistencias, (*b*) las corrientes y (*c*) la potencia disipada.

24-20. Encontrar qué diferencia de potencial se debe aplicar a las caras opuestas de un cubo de madera de arce de 1 cm de arista para producir una corriente de 1.0 μA

24-21. Dos resistores están hechos del mismo material y tienen idénticas resistencias. El resistor *A* tiene una pequeña sección transversal, y el resistor *B* tiene una gran sección transversal. Si ambos resistores se conectan a idénticas baterías ¿cuál de las dos resistencias tendrá una menor elevación de temperatura?

24-22. Un pedazo de carbón tiene la forma de un cilindro circular recto de 2.0 mm de diámetro y de longitud *L*. Cuando se aplican 10 V a las bases del cilindro, pasa una corriente de 2.0 A. ¿Cuánto vale la longitud *L*?

24-23. Calcular la velocidad térmica media de los electrones de un conductor a la temperatura ambiente, suponiendo que los electrones siguen la ley clásica de la teoría cinética y comparar el resultado con la velocidad de 10^6 m/s, encontrada a partir de la mecánica cuántica.

24-24. (*a*) Suponiendo que la ley de Ohm es válida para todas las velocidades de arrastre, calcular la máxima densidad de corriente *j* (corriente por unidad de área transversal) de los electrones en un conductor de cobre, a la temperatura ambiente, si la velocidad de los electrones no puede sobrepasar a la velocidad de la luz (3.0×10^8 m/s). (*b*) Evidentemente, la ley de Ohm no se aplica cuando las velocidades se aproximan a la velocidad térmica media de 10^6 m/s, puesto que la conductividad σ no permanece constante. Demostrar como se desvía la curva *Vi* de la recta de la Fig. 24-4*c*.

24-25. (*a*) Combinando las Ecs. (24-8), (24-10) y (24-11), demostrar que la ley de Ohm puede escribirse así:

$$j = \sigma E$$

donde $j = i/A$, $\sigma = 1/\rho$, y E son, respectivamente, la densidad de corriente, la conductividad y el campo eléctrico dentro del conductor. (Esta ecuación puede generalizarse como la formulación *vectorial* de la ley de Ohm: $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, la cual es válida en los puntos interiores de un conductor óhmico.) (*b*) Calcular *j* y *E* en un alambre de cobre de 1.0 mm^2 de área transversal cuando lleve la corriente de 1.0 *A*. La resistividad del cobre es de 1.72×10^{-8} Ω-m a 20°C.

24-26. Demostrar que *P'*, la potencia disipada por unidad de volumen en un conductor, puede representarse en la forma $P' = \rho j^2$, donde *j* es la densidad local de corriente, como se definió en el Prob. 24-25. (*Sugerencia:* aplicar las Ecs. (24-9) y (24-10) a una resistencia cúbica de arista *L*, haciendo las sustituciones e identificaciones apropiadas.)

24-27. En una celda de la *pila de Daniell,* una barra de cobre está sumergida en una solución acuosa de sulfato de cobre ($CuSO_4$) y en una cámara adyacente, pero separada, una barra de zinc está sumergida en una solución acuosa de sulfato de zinc ($ZnSO_4$). Las dos soluciones están separadas por una barrera que es impermeable a los iones sulfato (SO_4^{2-}) pero que permite pasar a los iones de cobre (Cu^{2+}) y a los iones de zinc (Zn^{2+}) Los iones sulfato se forman en las dos soluciones. Véase la Fig. P24-27. Cuando las celdas se usan como fuente de energía eléctrica, la barra de zinc (el *cátodo*) y la barra de cobre (el *ánodo*) se conectan entre sí con un circuito conductor, como por ejemplo un alambre de cobre. Básicamente el funcionamiento de la celda puede compendiarse así:

en el cátodo de zinc metálico los átomos entran en solución como iones de zinc (Zn^{2+}), cada uno de ellos

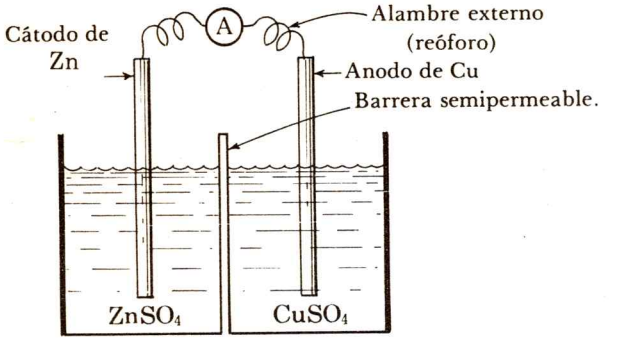


FIG. P24-27

con una carga neta de + 2 *e*, contribuyendo cada uno de ellos con dos electrones que quedan en el cátodo y que salen de él. Estos dos electrones fluyen por el circuito eléctrico externo y llegan al ánodo. En el ánodo, iones de Cu^{2+} formados por la disociación del $CuSO_4$ absorben los electrones para formar átomos neutrales de cobre metálico, que se depositan en el ánodo. El resultado neto de esta actividad es que dos electrones fluyen por el circuito externo por cada átomo de zinc que se disuelve en el ánodo y por cada átomo de cobre que se precipita en el átomo. (*a*) Encontrar la masa de cobre depositada en el ánodo y (*b*) la masa del zinc disuelta en el cátodo, cuando se ha operado la celda durante 10 horas con una corriente de 10 A. Los pesos atómicos del cobre y del zinc, son respectivamente, de 63.5 g/g mol y de 65.7 g/g mol.

24-28. La energía disipada en un resistor de resistencia R, durante el intervalo de tiempo dt, cuando pasa la corriente instantánea i, vale $i^2R\,dt$. Suponiendo que la corriente es alterna y sinusoidal, valiendo $i = I_0 \operatorname{sen} \omega t$, donde I_0 es la amplitud de la c.a; la frecuencia ν y el periodo T de la corriente son, respectivamente, $\nu = \omega/2\pi$ y $T = 2\pi/\omega$. Entonces la energía disipada en el resistor, calculada durante un periodo de oscilación, vale:

$$\int_0^T i^2R\,dt = R\int_0^T I_0^2 \operatorname{sen}^2 \omega t\,dt$$

(*a*) Demostrar que la energía disipada en la resistencia durante el periodo de un intervalo T es de $\frac{1}{2}I_0^2RT$. (*b*) Demostrar que la rapidez media con respecto al tiempo con que la energía se disipa en el resistor vale $\frac{1}{2}I_0^2R$. (*c*) Demostrar que la rapidez con que se disipa la energía puede también escribirse como I_{rcm}^2R, una forma análoga aplicable a la c.d., donde el valor de la corriente llamada *raíz cuadrática media*, o rcm, vale $I_{rcm} = I_0/\sqrt{2}$.

Capítulo 25

CIRCUITOS DE CD

Este capítulo trata de aquellos circuitos donde los elementos son baterías y resistores. Primero se define la fem de una batería en términos del trabajo dado por las fuerzas químicas. Después se desarrollan las reglas que se aplican a los resistores en serie o en paralelo. Entonces se tratan la reglas de Kirchhoff, los principios de la conservación de la energía y de la conservación de la carga, aplicados a los circuitos sencillos y múltiples. Por último, se discuten algunos circuitos de instrumentos de c.d: el amperímetro, el voltímetro, el puente de Wheatstone y el potenciómetro.

25—1 LA FEM DE UNA BATERIA

En todo lo que sigue se considerará la llamada corriente eléctrica convencional, en la cual el sentido de la corriente se toma como el del movimiento de las cargas positivas. Así, cuando se recorre un resistor en el sentido de la corriente se va de un potencial eléctrico mayor a uno menor. Análogamente, cuando la batería se está descargando, las cargas positivas se consideran que salen de la terminal positiva y que regresan por la terminal negativa de la batería. Por supuesto los que se mueven en realidad en un conductor ordinario son los electrones libres o de conducción. Como estos portadores de carga están negativamente cargados se mueven "trepando" el potencial, desde un potencial inferior a uno superior, y salen de la terminal negativa de la batería.

Considérese el circuito sencillo de c.d de la Fig. 25-1, en donde un resistor R está conectado a las terminales de una batería. La terminal positiva de la batería está indicada con a y la negativa con b. Ya sea que el interruptor esté abierto o cerrado, la batería

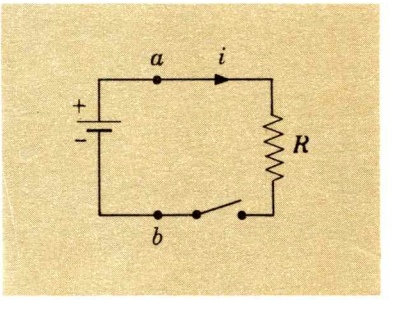


FIG. 25-1. Un circuito sencillo de cd.

contiene la diferencia de potencial $V_a - V_b = V_{ab}$ entre sus terminales; nótese que V_{ab} siempre es positiva.

Cuando se abre el interruptor la diferencia de potencial a través del resistor R vale cero. Casi de inmediato después de que se cierre el interruptor aparece la diferencia de potencial V_{ab} a través de R y la corriente en el circuito es $i = V_{ab}/R$. Se supone que la resistencia de los alambres de conexión, o reóforos, es despreciable comparada con R.

Se sabe que si la diferencia de potencial electrostático entre las terminales de la batería es V_{ab}, la potencia eléctrica P_{ab} suministrada por la batería a la carga del resistor R vale:

$$P_{ab} = iV_{ab} \tag{24-6}$$

El resistor R convierte de continuo la energía eléctrica suministrada en energía térmica con una rapidez:

$$P_R = i^2R \tag{24-9}$$

Cuando dos metales *diferentes* están sumergidos en un medio conductor, se ha encontrado que existe una diferencia de potencial entre ellos: ésta es la forma más rudimentaria de una celda electroquímica. Las reacciones químicas que son el origen de esta diferencia de potencial y los detalles de lo que pasa dentro de la batería están en el área de la electroquímica y no serán tratados aquí. Sin embargo, será suficiente decir que la diferencia de potencial se origina en las diferencias de las energías de enlace de los electrones con los átomos de diferentes tipos; en este sentido las fuerzas no eléctricas, o químicas, son en último análisis de origen eléctrico.

Se puede caracterizar una fuente de energía, que es capaz de impulsar a las cargas alrededor de un circuito contra las diferencias de potencial opuestas, como una *fem*. *Fem* es la abreviación de *f*uerza *e*lectro*m*otriz, un termino equivocado (ya que la fem *no* es una fuerza) a la que nos referiremos simplemente como la fem o, en forma simbólica, como $\mathscr{E}$. La $\mathscr{E}$ de una batería significa la energía por unidad de carga positiva ganada (o el trabajo por unidad de carga dado por las fuerzas *químicas* dentro de la batería) en la transmisión de una carga *dentro* de la batería desde la terminal negativa a la positiva:

$\mathscr{E}$ = trabajo por unidad de carga positiva dado por las *fuerzas químicas*

Puesto que la energía por unidad de carga, en joules por coulomb, es equivalente a volts, una fem, como la diferencia de potencial, se expresa también en volts.

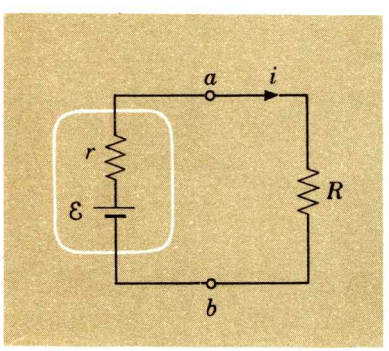


FIG. 25-2. Las líneas blancas representan lo que está dentro de la batería: una fem y una resistencia interna.

Siempre existe cierta disipación de la energía *dentro* de una batería real. Se puede tomar en cuenta esta pérdida de energía asignando a la batería una *resistencia interna r*, por lo que la

rapidez con que se pierde la energía dentro de la batería será i^2r. Así, una batería con una fem $\mathscr{E}$ y una resistencia interna r, conectada a una carga de resistencia R, se representa por el diagrama de circuito mostrado en la Fig. 25-2. Apliquemos la conservación de la energía a este circuito; puesto que la fem es, por definición, la energía ganada por unidad de carga pasando por la batería, la rapidez con que la energía potencial química (no eléctrica) se transforma en energía eléctrica, o en potencia asociada con la fem, es $\mathscr{E}i$. Parte de esta energía eléctrica se disipa como energía térmica dentro de la batería con la rapidez i^2r; la energía que queda es suministrada a la carga resistiva con la rapidez $iV_{ab} = i^2R$. Por consiguiente la conservación de la energía, aplicada alrededor de una trayectoria cerrada, dará

$$\mathscr{E}i = i^2r + i^2R = i(ir + iR)$$

$$\mathscr{E} = i(r + R) \tag{25-2}$$

La corriente i en cada elemento del circuito será entonces:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{r + R} \tag{25-3}$$

Como iR representan la diferencia de potencial V_{ab} a través de la carga del resistor y también a través de las terminales de la batería la Ec. (25-2) puede escribirse del modo siguiente:

$$V_{ab} = \mathscr{E} - ir \tag{25-4}$$

Así, la diferencia de potencial entre las terminales de la batería es igual a la fem de la batería, menos la caída de potencial a través de su resistencia interna. La diferencia de potencial V_{ab} entre las terminales de la batería será igual a la fem $\mathscr{E}$ si la corriente i es cero, lo que ocurre, como puede verse de la Ec. (25-2), únicamente cuando carga R es infinita; o dicho de otro modo, la diferencia de potencial que aparece entre las terminales de la batería en circuito abierto ($R = \infty$) es la fem de la batería.

La fem de un tipo particular de celda depende sólo de la constitución química de sus partes. Conforme envejece una batería o pierde su "carga" (estrictamente, por supuesto, una batería pierde sólo su energía potencial química interna), la resistencia interna aumenta, pero la fem permanece sin cambio. Como demuestran las Ecs. (25-3 y 25-4), cuando la batería se "descarga" V_{ab} tiende a cero conforme r crece, aun para una resistencia de carga R relativamente pequeña.

Una batería, o celda electroquímica, es un ejemplo de un aparato caracterizado por su fem, esto es, un aparato que puede convertir una energía no eléctrica en energía eléctrica. Hay otros arreglos en los cuales existe una fem: (1) Un termopar que consiste de dos alambres conductores de diferente material conectados juntos en un circuito, manteniendo las dos uniones a diferentes tempera-

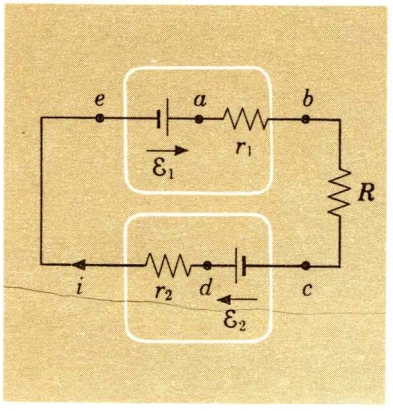


FIG. 25-3

turas; en este circuito existe una corriente eléctrica, impulsada por una fem *termoeléctrica*. (2) En una celda fotovoltaica, ejemplificada por un exposímetro fotográfico, la luz visible (energía radiante) incide en un material sensitivo y genera una corriente eléctrica. (3) En un generador eléctrico, la energía mecánica se transforma en energía eléctrica. (4) En la inducción electromagnética, se produce una fem por medio de un flujo magnético variable (se hablará mucho de esto en el Cap. 28).

En cada ejemplo una *fuerza no electrostática* es la reponsable para el transporte de cargas, en contra de la opuesta diferencia eléctrica de potencial. Es apropiado hablar de una batería como el "asiento" de una fem: evidentemente, la corriente se define cuando la batería se quita del circuito, y se sabe que el origen de la fem es la reacción química que tiene lugar en su interior. Sin embargo, en otros casos no se puede por fuerza identificar un lugar en particular, o un aparato, como el "asiento" de la fem. Por consiguiente es útil hablar de la fem del circuito como debida a una fuerza particular no electrostática que convierte la energía no eléctrica en energía eléctrica o viceversa.

25—2 CIRCUITOS SENCILLOS DE CD

Se desea encontrar la relación general entre las fems en un circuito y la diferencia de potencial. Como un ejemplo específico, considérese el circuito de la Fig. 25-3, que contiene dos baterías con fems $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ y de tres resistores r_1, r_2, y R conectados en serie (r_1 y r_2 son, respectivamente las resistencias internas de $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$). Las flechas asociadas con las dos baterías, apuntando en ambos casos de la terminal negativa a la positiva, indican la dirección del campo eléctrico asociado con las fuerzas no electrostáticas; estas flechas dan, por así decirlo, el "sentido" de la fem. El "sentido" de la corriente i es, en realidad, precisamente la misma en cada punto del circuito, de acuerdo con la ley de la conservación de la carga eléctrica. Esto implica que la carga eléctrica no se acumula o se enrarece en ningún punto del circuito.

Considérese cómo se aplica el principio de la conservación de la energía a la Fig. 25-3. Procediendo en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del circuito, nada más se iguala la energía total liberada *por* las fuentes de energía con la energía total suministrada *a* los elementos del circuito (aquí, resistores). La potencia suministrada *por* las baterías vale:

$$\mathscr{E}_1 i + \mathscr{E}_2 i = i\Sigma\mathscr{E} \qquad (25\text{-}5)$$

Los dos términos del miembro izquierdo se toman como positivos, puesto que los "sentidos" de $\mathscr{E}$ y de i son los mismos para ambas baterías. La potencia total suministrada *a* los elementos del circuito vale

$$iV_{ab} + iV_{bc} + iV_{de} = i\Sigma V \qquad (25\text{-}6)$$

Nótese en especial que ΣV incluye sólo las diferencias de potencial a través de los elementos del circuito y *no* las diferencias de potencial de las baterías.

Igualando las dos ecuaciones anteriores se tiene

$$\Sigma\mathscr{E} = \Sigma V \qquad (25\text{-}7)$$

Esta es la relación fundamental para resolver circuitos sencillos. Debe tenerse cuidado con respecto a los signos al aplicar esta relación. Debe recalcarse que $\Sigma\mathscr{E}$ es la suma *algebraica* de las fems que hay en el circuito; esto es, cada fem se toma como positiva si la batería es atravesada de la terminal negativa a la positiva; por otro lado la fem deberá tomarse como negativa y si se atraviesa en otro sentido (véase la Fig. 25-4*a* y *b*). Análogamente, ΣV es la suma *algebraica* de las *caídas* de potencial a través de los elementos del circuito. Cada V se toma como positiva si se atraviesa el elemento del circuito de un potencial mayor a uno menor *en* el sentido de la corriente convencional; cada V se toma como negativa si se atraviesa el elemento del circuito en sentido opuesto al de la corriente; véase la Fig. 25-4*c* y *d*. Se *excluyen* las diferencias de potencial a través de las terminales de la batería.

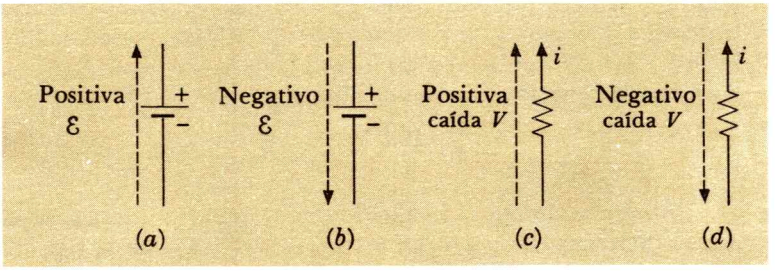


FIG. 25-4. Convenciones de signos para las fems y las caídas de potencial. Las flechas de trazos indican el sentido con el cual es atravesado el elemento del circuito. (*a*) La fem se toma como *positiva* si la batería se recorre de la terminal *negativa* a la *positiva*. (*b*) La fem es *negativa* si se recorre de la terminal *positiva* a la *negativa*. (*c*) La *caída* de potencial es *positiva*, si el resistor es atravesado en el *mismo* sentido que la corriente. (*d*) La *caída* de potencial es *negativa* si el resistor es atravesado en el sentido *opuesto* al de la corriente.

La diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera *a* y *b* en un circuito pueden relacionarse con las caídas de potencial y las fems (incrementos de potencial) entre los dos puntos, empleando la Ec. (25-7) a lo largo de cualquier trayectoria desde *a* hasta *b*:

$$V_{ab} = V_a - V_b = \Sigma V - \Sigma\mathscr{E} \qquad (25\text{-}8)$$

Los signos de las caídas de potencial de las fems están indicados en la Fig. 25-4. Si se procede alrededor de un circuito cerrado, $V_{aa} = 0$ y la Ec. (25-8) se convierte en la Ec. (25-7).

Ejemplo 25-1

Se conectan dos baterías en oposición, como se indica en la Fig. 25-5; las fems y las resistencias internas son, respectivamente, de 18.0 V y de 2.0 Ω, 6.0 V y 1.0 Ω, (*a*) ¿Cuánto vale la corriente en el

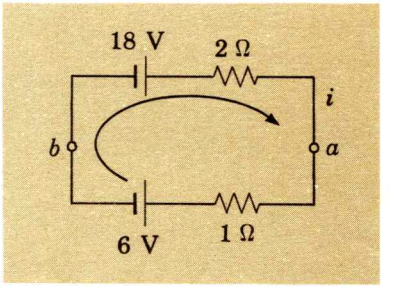


FIG. 25-5

circuito? (*b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de las terminales de la batería? (*c*) ¿Con qué rapidez la batería que se está descargando carga a la batería que se carga? (*d*) ¿Con qué rapidez se disipa la energía como calor en la batería de 6.0 V?

(*a*) Se decide recorrer el circuito de la Fig. 25-5 *en el sentido de las manecillas del reloj.* Además, se toma este mismo sentido como el de la corriente i, sabiendo que la corriente, en realidad, tendrá ese sentido; puesto que será controlada por la fem de la batería mayor, la de 18.0 V. Pero *no* es necesario hacerlo así; se puede escoger en forma arbitraria el sentido de la corriente, y de no ser correcta, la corriente aparecerá como *negativa* en la solución; esto es, la corriente mostrará en realidad que existe en sentido opuesto al escogido.

Cuando el recorrido del circuito y el sentido de la corriente se toman como se indica en la Fig. 25-5, se tiene

$$\Sigma\mathscr{E} = \Sigma V \tag{25-7}$$

$$18\text{ V} - 6\text{ V} = 2i + 1i$$

Nótese que a la fem de la batería de 6 V deberá asignársele el signo menos en vista de que se pasa por esta batería de la terminal positiva a la negativa (véase Fig. 25-4*b*). Las caídas de potencial a través de los resistores, $2i$ y $1i$ son ambas positivas, en vista de que se recorre cada resistor en el mismo sentido de la corriente. Despejando a i de la ecuación anterior se obtiene:

$$i = \frac{12.0\text{ V}}{3.0\ \Omega} = 4.0\text{ A}$$

(*b*) Ignorando por el momento a la resistencia interna, se sabe que la diferencia de potencial a través del asiento de la fem de la batería, es justamente igual en magnitud a la fem de la batería; así, la *elevación* de potencial yendo de la terminal negativa a la positiva en la batería de 18 V es de 18 V. A través de la resistencia interna de 2 Ω hay una caída de potencial:

$$V = iR = (4.0\text{ A})(2.0\ \Omega) = 8.0\text{ V}$$

Esta diferencia de potencial de 8 V tiene lugar internamente en la batería de 18 V. Por consiguiente entre las terminales de la batería de 18 V existe una diferencia de potencial de 18.0 V − 8.0 V = 10.0 V. También se puede llegar a este resultado aplicando la Ec. (25-8). Si se procede desde a hasta b a lo largo del camino superior, se tiene:

$$V_{ab} = -\Sigma\mathscr{E} + \Sigma V = -(-18\text{ V}) + (-4.0\text{ A})(2.0\ \Omega) = 10.0\text{ V} \tag{25-8}$$

Nótese que tanto $\mathscr{E}$ como iR son negativos. Si existe una diferencia de potencial de 10.0 V entre las terminales de la batería de 18 V, esta misma diferencia de potencial aparece también entre las terminales de la batería de 6.0 V. Se confirma este resultado empleando la Ec. (25-8) a lo largo de la trayectoria inferior desde a hasta b:

$$V_{ab} = \Sigma V - \Sigma\mathscr{E} = (4.0\text{ A})(1.0\ \Omega) - (-6\text{ V}) = 10\text{ V}$$

(*c*) La rapidez con que cualquier fuente de fem suministra energía está dada por $\mathscr{E}i$. Si $\mathscr{E}i$ es positiva —esto es, si tanto la fem como la corriente tienen el mismo sentido— la energía química de la batería se suministra *a* otros elementos del circuito. Por otro lado, si $\mathscr{E}$ e i tienen signos opuestos, como en el caso de la batería de 6 V, la energía es suministrada a ella por otras fuentes. Así, la batería de 18 V suministra energía (esto es, pierde energía potencial química) con la rapidez:

$$\mathscr{E}i = (18.0\text{ V})(4.0\text{ A}) = 72\text{ W}$$

La batería de 6 V recibe energía (esto es, gana energía potencial química) con la rapidez $\mathscr{E}i = (6.0\text{ V})(4.0\text{ A}) = 24\text{ W}$. La batería con mayor fem se descarga con la rapidez de 72 W, mientras que la batería pequeña está siendo cargada con la rapidez de 24 W. ¿Qué sucede con la diferencia con 72 W − 24 W = 48 W?: se disipa en los dos resistores.

(*d*) La rapidez con que se disipa la energía dentro de la batería de 6 V es:

$$P = i^2R = (4.0\text{ A})^2(1.0\ \Omega) = 16\text{ W} \qquad (24\text{-}9)$$

y la rapidez con que se desarrolla la energía térmica dentro de la batería de 12 V vale $P = i^2R = (4.0\text{ A})^2(2.0\ \Omega) = 32$ W. La potencia total disipada en los resistores, 16 W + 32 W = 48 W, es justamente la diferencia entre la potencia suministrada por la batería que se descarga (72 W) y la potencia suministrada a la batería que se carga (24 W).

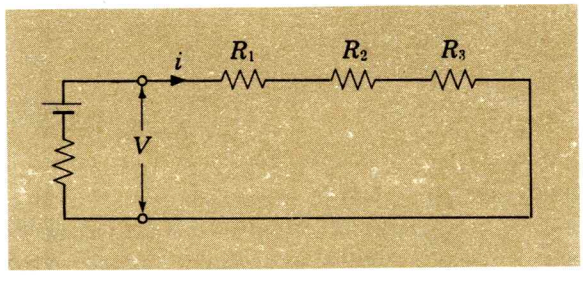


FIG. 25-6. Resistores en serie

25—3 RESISTORES EN SERIE Y EN PARALELO

¿Cuál es la resistencia equivalente de varios resistores conectados en serie? Por resistencia equivalente de varios resistores en serie, como los que se muestran en la Fig. 25-6, quiere decirse la resistencia de aquel único resistor, que cuando reemplace a los resistores separados, *no* cambie la corriente entregada por la fuente de energía.

Es evidente que la misma corriente i pasa por cada una de las resistencias; aplicando la Ec. (25-7) al circuito, se tiene:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$
$$= iR_1 + iR_2 + iR_3 = i(R_1 + R_2 + R_3) \qquad (25\text{-}9)$$

donde V_1, V_2 y V_3 son las caídas de potencial, respectivamente, a través de los resistores R_1, R_2 y R_3, siendo V la diferencia de potencial entre las terminales de la batería. La misma corriente i deberá existir en un circuito cuando el resistor equivalente R reemplace al grupo en serie:

$$V = iR \qquad (25\text{-}10)$$

Comparando las Ecs. (25-9) y (25-10), se tiene que en las resistencias en serie:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \qquad (25\text{-}11)$$

La resistencia equivalente es la suma de cada una de las resistencias en serie. *La misma corriente* existe en cada resistor de la serie; la caída de potencial a través de todo el grupo es la misma que a través de la resistencia equivalente.

¿Cuál es la resistencia equivalente de los resistores conectados en paralelo, como se representa en la Fig. 25-7? Designaremos la

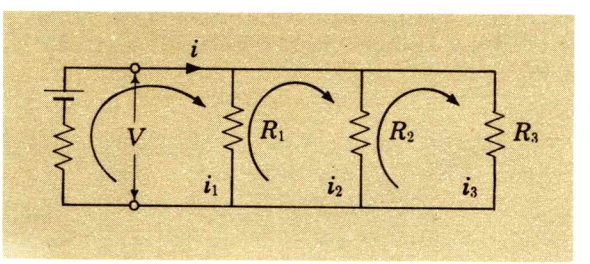


FIG. 25-7. Resistores en paralelo

caída de potencial a través de los resistores R_1, R_2 y R_3 como V_1, V_2 y V_3, respectivamente. La corriente que pasa por la batería es i y las corrientes que pasan por los resistores son i_1, i_2 e i_3. Debido a que se tiene más de un circuito en la Fig. 25-7, *no* se tiene la misma corriente en todos los elementos —o mallas— del circuito. De hecho, la corriente i de la batería se divide en tres corrientes a través de las tres resistencias:

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_1}{dt} + \frac{dQ_2}{dt} + \frac{dQ_3}{dt} \qquad (25\text{-}12)$$

Esto expresa sólo la ley de la conservación de la carga eléctrica; implica que, puesto que la carga no se acumula en ningún punto del circuito, la carga dQ de la batería en el tiempo dt aparecerá, al mismo tiempo, como las cargas dQ_1, dQ_2 y dQ_3 a través de los

resistores. Supongamos ahora que se aplica la Ec. (25-7) a la malla izquierda de la Fig. 25-7:

$$\Sigma\mathscr{E} = \Sigma V \qquad (25\text{-}7)$$

$$V = V_1 = i_1 R_1$$

Aplicando la misma relación a la segunda malla de la Fig. 25-7, se tiene

$$0 = -V_1 + V_2 \qquad \text{o} \qquad V_1 = V_2$$

Nótese que se usa un signo negativo para la "caída" del potencial V_1, puesto que este resistor se atraviesa en dirección opuesta a la de la corriente i_1. De modo similar se encuentra que $V_2 = V_3$. En suma:

$$V = V_1 = V_2 = V_3 \qquad (25\text{-}13)$$

La diferencia de potencial es la *misma* a través de cada uno de los elementos conectados en paralelo, habiéndose designado esta caída sencilla de potencial con V.

De la ley de Ohm, se sabe que

$$V = i_1 R_1 = i_2 R_2 = i_3 R_3 \qquad (25\text{-}14)$$

Sustituyendo la Ec. (25-14) en la Ec. (25-12), se tiene:

$$i = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} = V\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right]$$

Un resistor único R que reemplace a los resistores en paralelo obedecerá la relación:

$$i = \frac{V}{R}$$

Comparando estas dos últimas situaciones se obtiene por último,

Resistores en paralelo: $$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad (25\text{-}15)$$

El recíproco de la resistencia equivalente es igual a la suma de dos recíprocos de cada una de las resistencias conectadas en paralelo. La resistencia equivalente es siempre menor que la más pequeña de las resistencias en paralelo. Lo esencial de las conexiones en paralelo es esto: todos los elementos tienen la *misma diferencia de potencial.* Nótese también, que para dos resistores cualesquiera en paralelo, la relación de las corrientes está en relación inversa de las resistencias respectivas, como demuestra la Ec. (25-14). Así, con dos resistores en paralelo de 1.0 y 3.0-Ω el resistor de 1.0-Ω siempre lleva una corriente tres veces mayor que la del resistor de 3.0-Ω para lograr que la diferencia de potencial entre ambos resistores sea siempre la misma.

Ejemplo 25-2

Considérese el circuito de la Fig. 25-8. Considérese (*a*) la corriente en la batería. (*b*) La corriente en el resistor de 3.0-Ω. (*c*) La diferencia de potencial a través del resistor de 6.0-Ω y (*d*) la rapidez con que la energía térmica se disipa en el resistor de 8.0-Ω Nótese que en la Fig. 25-8, no se dan las corrientes entre paréntesis, sino que fueron calculadas.

Debe tenerse en cuenta que *cualquiera* de las preguntas que deban encontrarse, con relación a un circuito como el de la Fig. 25-8*a* (diferencias de potencial, disipación de potencia y otras parecidas) requieren que se encuentre primero la corriente que pasa cada resistor. Entonces es fácil encontrar las demás cantidades. Para calcular las corrientes que pasan por cada resistor, se debe primero reducir el conjunto de resistores, por medio de las reglas

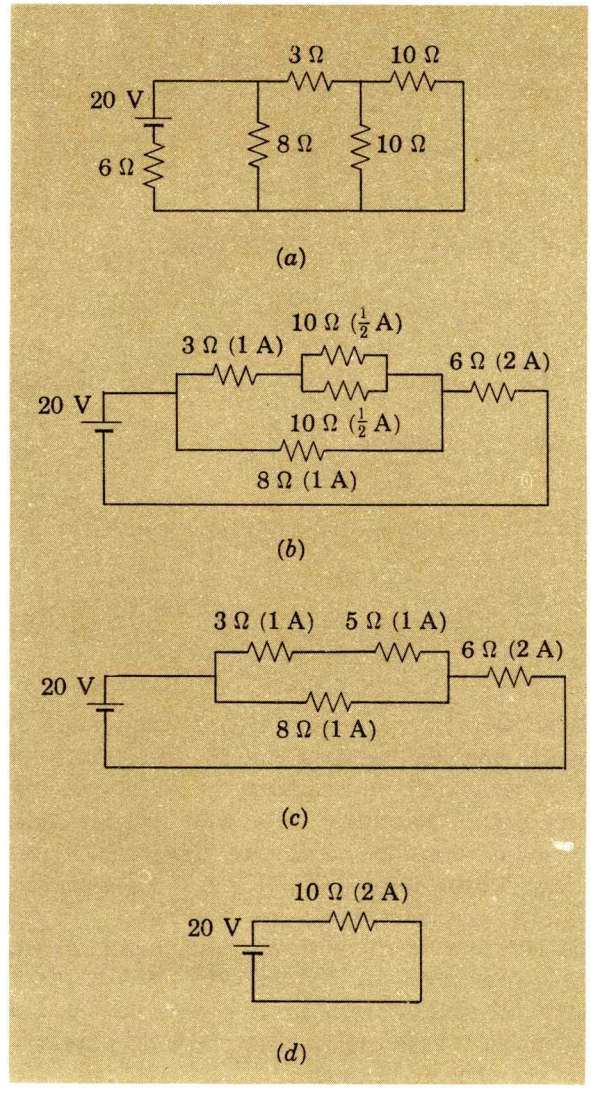


FIG. 25-8. Un circuito (*a*) y su evolución en progresivamente formas equivalentes más sencillas: (*b*) a (*d*). Las corrientes en los diversos resistores, entre paréntesis, se encuentran empezando con la parte (*d*) y regresando los cálculos hacia (*a*).

para combinar resistores en serie y en paralelo, hasta llegar a un resistor único equivalente conectado con la batería.

La Fig. 25-8*b*, a *d*, muestra la evolución del circuito de la Fig. 25-8*a*, a formas progresivamente más sencillas. (Los valores numéricos de las resistencias se han escogido de tal manera que los cálculos puedan llevarse a cabo de memoria.) Se ve que la corriente a través del resistor equivalente es de 2 A. Ahora deberá calcularse retrocediendo, pasando en forma sucesiva por las Figs. 25-8 *c*, *b* y *a*, para encontrar la corriente en cada resistor. Aquí se ha tomado en cuenta que la corriente a través de los resistores que estén en serie es la misma, y que la diferencia de potencial en todos los resistores que estén en paralelo es la misma. Por supuesto, conforme se encuentra la corriente que pasa por un resistor dado, se pueden de inmediato calcular la caída de potencial iR y la potencia disipada en él $i^2R = iV$. De esta manera se obtiene, por último:

a. Corriente que pasa por la batería = 2 A.
b. Corriente que pasa por la resistencia de 3-Ω = 1 A
c. Diferencia de potencial a través de la resistencia de 6-Ω = 12 V
d. Potencia disipada en la resistencia de 8-Ω = 8 W.

25—4 CIRCUITOS CON VARIAS MALLAS

Algunos circuitos que incluyen más de una malla, como el representado en la Fig. 25-8, pueden resolverse sencillamente aplicando las reglas para combinar resistencias en serie y en paralelo. En general, sin embargo, esto *no* es posible. Como un ejemplo específico, consideremos el circuito "relativamente sencillo", representado en la Fig. 25-9. Se tiene aquí un circuito con tres mallas: a la izquierda una malla interior, a la derecha otra malla interior, y una malla exterior dando toda la vuelta alrededor de un circuito. En este caso no hay manera de reducir este circuito múltiple en uno que incluya nada más una sola batería y un solo resistor.

Un método general para resolver problemas con circuitos de muchas mallas es el de aplicar las *reglas de Kirchhoff*. Estas dos reglas son sencillamente enunciados, en el lenguaje de los circuitos eléctricos, de las *leyes* fundamentales de *conservación* (1) de la *carga eléctrica*, y (2) de la *energía*.

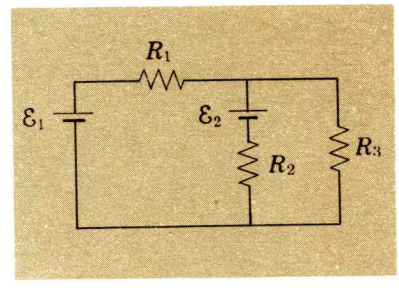


FIG. 25-9. Un circuito sencillo de varias mallas.

1. Consideremos un *nodo* o *unión*, es decir, un punto en el circuito donde se juntan tres o más alambres conductores, como se representa en la Fig. 25-10. Las corrientes en los diversos alambres se indican con i_1, i_2, i_3, y i_4, siendo el sentido de la corriente i_1 hacia la unión, y el de las demás corrientes de alejamiento de la unión. Ahora, de acuerdo con la ley de la conservación de la carga eléctrica, ninguna carga neta puede acumularse o enrarecerse en cualquier punto del circuito y ciertamente no en una unión. Por tanto, la carga neta que

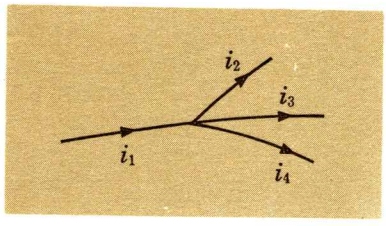


FIG. 25-10. Un nodo o unión en un circuito. La corriente total llegando a la unión vale cero.

fluye por unidad de tiempo en cualquier unión deberá ser igual al flujo de carga neta por unidad de tiempo fuera de la unión; esto es, la corriente neta que llega a la unión es igual a la corriente neta que sale de la unión. En la situación representada en la Fig. 25-10 esto implica que

$$i_1 = i_2 + i_3 + i_4 \quad \text{o} \quad i_1 - i_2 - i_3 - i_4 = 0$$

Se pueden interpretar los términos negativos que aparecen en la segunda relación anterior, como representando corrientes *negativas* que *entran* a la unión, las cuales son por supuesto, equivalentes a corrientes positivas que *salen* de la unión. Una formulación general de las condiciones para las corrientes en una unión será, entonces,

$$\Sigma i = 0 \tag{25-16}$$

donde las corrientes que llegan y salen de la unión se identifican, respectivamente, como corrientes positivas y negativas. La Ec. (25-16) es el *teorema de los nodos* o *de las uniones* y es la primera regla de Kirchhoff.

2. Recordemos la relación general derivada antes para un circuito de una sola malla:

$$\Sigma \mathscr{E} = \Sigma V \tag{25-7), (25-17}$$

La suma algebraica de las fems alrededor de una malla $\Sigma \mathscr{E}$, igual a la suma algebraica de las caídas de potencial ΣV (*incluyendo* las caídas de potencial a través de las resistencias internas de las baterías) alrededor de la malla. (Se *excluye*, sin embargo, las diferencias de potencial que aparecen a través de una fuente de fem). La Ec. (25-7) no es más que una expresión de la ley de la conservación de la energía: el primer miembro representa la energía suministrada a la unidad de carga, por las fuentes de energía en el circuito de la malla, y el segundo miembro representa la energía por unidad de carga suministrada a los elementos del circuito que se encuentran alrededor de la malla. La Ec. (25-17) la aplicaba Kirchhoff a cualquier circuito eléctrico en una malla; así, esta ecuación se denomina *ecuación de las mallas*, siendo la *segunda regla de Kirchhoff*.

Veamos cómo se aplican estas reglas al circuito de la Fig. 25-9, que se representa de nuevo en la Fig. 25-11, con las mismas convenciones empleadas antes. Las corrientes en los *tres ramales* i_1, i_2 e i_3 tienen sentidos designados en forma arbitraria; estas corrientes pueden considerarse como las incógnitas que deben encontrarse. De la Ec. (25-16) se tiene:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \tag{25-18}$$

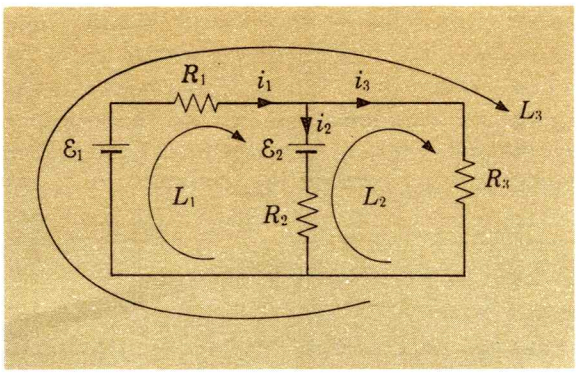


FIG. 25-11. Tres mallas (L_1, L_2 y L_3) para aplicar las reglas de Kirchhoff.

Esto da una ecuación para resolver las tres corriente desconocidas. Una aplicación apropiada de la Ec. (25-17) a cada una de las mallas de la Fig. 25-11, dará tres ecuaciones más, pero sólo se necesitan dos, pues es fácil darse cuenta que una de estas ecuaciones no es independiente de las otras dos. Un procedimiento sencillo para evitar redundancias de esta clase, consiste en escoger sólo aquellas mallas en las cuales siempre se vaya en el mismo sentido que la corriente. En el ejemplo indicado en la Fig. 25-11 deben escogerse las mallas L_1 y L_3 Con la Ec. (25-17), aplicada a la malla L_1, se obtiene:

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = R_1 i_1 + R_2 i_2 \qquad (25\text{-}19)$$

Aplicada a la malla L_3, se tiene

$$\mathcal{E}_1 = R_1 i_1 + R_3 i_3 \qquad (25\text{-}20)$$

Se tienen ahora tres ecuaciones —de la (25-18) a la (25-20)— y tres incógnitas: (i_1, i_2 e i_3). Usando estas tres ecuaciones para resolver las tres corrientes, se tiene:

$$i_1 = \frac{R_3(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + R_2\mathcal{E}_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \qquad (25\text{-}21a)$$

$$i_2 = \frac{R_3(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) - R_1\mathcal{E}_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \qquad (25\text{-}21b)$$

$$i_3 = \frac{R_2\mathcal{E}_1 + R_1\mathcal{E}_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \qquad (25\text{-}21c)$$

Mientras que la corriente i_3 es siempre positiva, i_1 e i_2 pueden ser positivas o negativas, dependiendo de los tamaños relativos de las fems y de las resistencias.

La solución de un circuito de múltiples mallas, aunque complicado, no consiste más que en aplicar las leyes de Kirchhoff y en resolver un cierto número de ecuaciones simultáneas lineales. Se puede invertir el proceso empleando circuitos eléctricos para resolver ecuaciones lineales, arreglando las fems y las resistencias en un

circuito para que correspondan a los parámetros de las ecuaciones lineales; encontrar las incógnitas consiste solamente en medir las corrientes en las diversas ramas del circuito. Esto es un ejemplo sencillo de una *computadora analógica,* en la cual se estudia el comportamiento físico de un sistema, que obedece a relaciones matemáticas bien conocidas, para resolver las incógnitas matemáticas.

25—5 INSTRUMENTOS PARA CIRCUITOS DE CD

Consideraremos aquí los hechos esenciales de cuatro instrumentos comúnmente usados en los circuitos de c.d.: el amperímetro, empleado para medir la corriente eléctrica; el voltímetro, para medir la diferencia de potencial eléctrico; el puente de Wheatstone, para comparar resistencias; y el potenciómetro, para comparar fems.

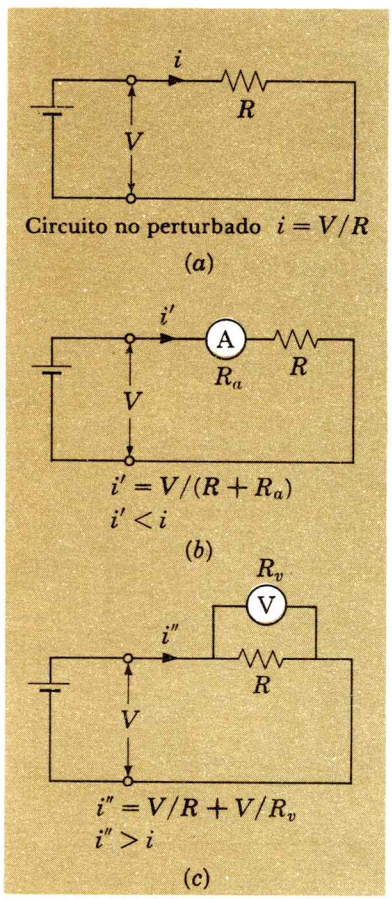


FIG. 25-12. Un circuito (*a*) no perturbado; (*b*) con un amperímetro en serie con el resistor; y (*c*) con un voltímetro en paralelo con el resistor.

Amperímetro y Voltímetro. Antes de tratar de los detalles constructivos de un amperímetro o de un voltímetro, es importante aclarar cómo se usan estos instrumentos para medir la corriente y la diferencia de potencial. La Fig. 25-12 *a* representa un circuito sencillo con una batería y un resistor por donde pasa una corriente i. Cuando un amperímetro (simbolizado con —Ⓐ—) se introduce en serie con el resistor para medir la corriente, como en la Fig. 25-12*b*, cambia de tal manera el circuito que la corriente medida i' es menor que i, la corriente original. Si la resistencia R_a del amperímetro es mucho menor que R, entonces $i' \approx i$. En la Fig. 25-12*c* un voltímetro (simbolizado con —Ⓥ—) se conecta en paralelo con el resistor: de nuevo se cambia el circuito. La corriente i'' que pasa por la batería es ahora mayor que i. Sólo si la resistencia del voltímetro es grande comparada con R se tendra que $i'' \approx i$.

Idealmente, ni la corriente ni la diferencia de potencial se alteran con la adición de amperímetros o de voltímetros al circuito; un amperímetro tiene una resistencia tan baja que la diferencia de potencial a su través es por lo general despreciable; y un voltímetro tiene tan gran resistencia que la corriente que lo atraviesa es por lo general despreciable.

Tanto los amperímetros como los voltímetros comunes tienen una aguja cuya posición angular registra la corriente o la diferencia de potencial. La aguja está unida a una bobina por la que pasa la corriente, y la bobina está sumergida en el campo magnético de un imán permanente. Este aparato se denomina *galvanómetro.* es un instrumento cuyos detalles se discutirán en la Sec. 22-6. Es suficiente decir aquí que un galvanómetro (simbolizado con —Ⓖ—) es capaz de registrar muy pequeñas corrientes. Por ejemplo en un galvanómetro típico la aguja se desviará por completo con una corriente de 1.0×10^{-6} A $= 1.0$ μA y tendrá una resistencia de 1,000 Ω (Se han construido galvanóme-

tros mucho más sensibles con una desviación total de la aguja correspondiente a una corriente tan pequeña como de 10^{-12} A). Cuando este galvanómetro se coloca en un circuito registrará un desviación completa cuando pase por él 1.0 μA Al mismo tiempo, existirá una diferencia de potencial entre sus terminales $V = iR = (1.0 \times 10^{-6}\ \text{A})(1.0 \times 10^{3}\ \Omega) = 1.0 \times 10^{-3}$ V = 1.0 mV. Si esta diferencia de potencial de 1.0 mV es pequeña comparada con las diferencias de potencial en otros elementos del circuito, la influencia del galvanómetro es despreciable.

Por sí mismo, un galvanómetro podrá emplearse como microamperímetro para medir corrientes hasta de 1 μA (siempre que la resistencia del galvanómetro sea mucho menor que la de los elementos del circuito con los que esté en serie) y como un milivoltímetro para medir diferencias de potencial hasta de 1 mV (siempre que su resistencia sea mucho mayor que la de los elementos del circuito con los cuales esté en paralelo).

Supongamos, sin embargo, que se desea construir un amperímetro que registre, en toda la escala, 1.0 A, por medio de este galvanómetro. Entonces coloca una resistencia muy pequeña R_p en paralelo con el galvanómetro, como se muestra en la Fig. 25-13;

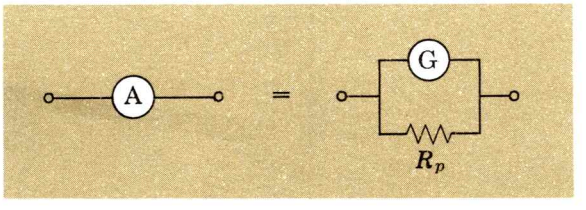


FIG. 25-13. Un amperímetro es un galvanómetro en paralelo con una pequeña resistencia.

dicho de otro modo, una derivación del galvanómetro con una pequeña resistencia R_p. ¿Cuánto vale esta resistencia? Puede suponerse que en esencia toda la corriente, 1.0 A, deberá pasar por la resistencia en derivación R_p, puesto que únicamente 1.0 μA deberá pasar por el galvanómetro mismo. Además, la diferencia de potencial, tanto a través del galvanómetro como de la derivación deberá ser de 1.0 mV con desviación total de la aguja. Se infiere que $R_p = V/i = (1.0 \times 10^{-3}\ \text{V})/(1.0\ \text{A}) = 1.0 \times 10^{-3}\ \Omega$.

El galvanómetro, con $R = 1000\ \Omega$ y una desviación total de 1.0 μA, o para 1.0 mV entre sus terminales es, en efecto, un voltímetro que registra 1.0 mV a escala total. Supongamos, sin embargo, que se desea emplear este mismo galvanómetro para construir un voltímetro que indique 10 V a escala completa. Esto se hace colocando una gran resistencia R_s en serie con el galvanómetro, como se indica en la Fig. 25-14. Puesto que el galvanómetro puede conectarse a una diferencia de potencial entre sus terminales de solamente 1.0×10^{-3} V la diferencia de potencial V a través del resistor R_s deberá ser en esencia de 10 V, mientras que

la corriente que pase por él sea de 1.0×10^{-6} A. Por tanto $R_s = V/i = (10\ \text{V})/(1.0 \times 10^{-6}\ \text{A}) = 1.0 \times 10^{7}\ \Omega = 10\ \text{M}\Omega$. Este voltímetro tiene así una resistencia interna tan grande que produce muy poca perturbación en el circuito excepto que haya elementos del circuito cuya resistencia sea comparable a 10 MΩ.

Es fácil construir amperímetros (o voltímetros) con varias gamas, si se tienen varios resistores en derivación (o en serie) en el medidor. Los Probs. 25-17 y 25-18 ilustran a los medidores de varias gamas o *multímetros*.

Una manera sencilla de medir una resistencia se representa en la Fig. 25-15*a*: se mide la corriente i que pasa por el dispositivo con un amperímetro y la diferencia de potencial V, entre sus terminales, con un voltímetro, y entonces se aplica la ley de Ohm, $R = V/i$. Sin embargo, estrictamente la medición de la corriente no es del todo correcta, puesto que el amperímetro de la Fig. 25-15*a* registra la corriente que pasa tanto por el resistor como por el voltímetro. Esto debe corregirse colocando el amperímetro dentro de las conexiones del voltímetro, como en la Fig. 25-15*b*. Entonces, el amperímetro indica la corriente que pasa sólo por R, pero ahora el voltímetro indica la diferencia de potencial, no sólo a través de R, sino a través de la resistencia y del amperímetro.

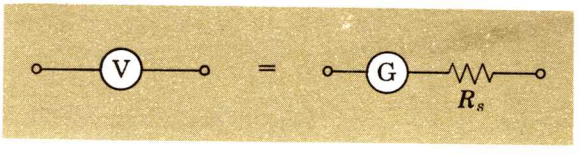


FIG. 25-14. Un voltímetro es un galvanómetro en serie con una gran resistencia.

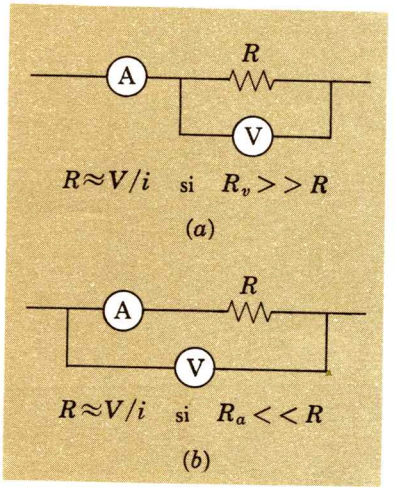


FIG. 25-15. Dos arreglos para medir la resistencia R con un amperímetro y un voltímetro:
(*a*) Voltímetro a través de R;
(*b*) Amperímetro en serie con R.

Puente de Wheatstone. Estas dificultades se eliminan cuando se mide la resistencia o, más apropiadamente, se compara una resistencia normal conocida R_s por medio del circuito con puente inventado por C. Wheatstone (1802-1875); véase Fig 25-16. El puente, en su forma más sencilla, consiste de cuatro resistores, una batería y un galvanómetro sensible. R_1, R_2 y R_s se conocen; R_x es la resistencia desconocida. Como en una balanza ordinaria, que indica masas iguales en sus dos platillos cuando el fiel no se desvía de la vertical, el puente de Wheatstone es un *instrumento nulo*. Con una resistencia desconocida dada R_x, los resistores R_1, R_2 y R_s se ajustan para que el galvanómetro no registre corriente. Puesto que los puntos b y c están entonces con el mismo potencial, la corriente i_1 que pasa por el resistor R_1 es la misma que la que pasa por R_2; de manera análoga, R_x y R_s llevan la corriente i_2. Las diferencias de potencial V_{ab} y V_{ac} son iguales, como también V_{bd} y V_{cd}; entonces se infiere que

$$V_{ab} = i_1 R_1 = V_{ac} = i_2 R_x$$
$$V_{bd} = i_1 R_2 = V_{cd} = i_2 R_s$$

Eliminando i_1 e i_2 de estas relaciones se tiene

$$\frac{R_x}{R_s} = \frac{R_1}{R_2} \qquad (25\text{-}22)$$

Cuando se ha "balanceado" el puente, se encuentra la resistencia desconocida R_x en función de la resistencia normal R_s y de la relación R_1/R_2, por medio de la Ec. (25-22).

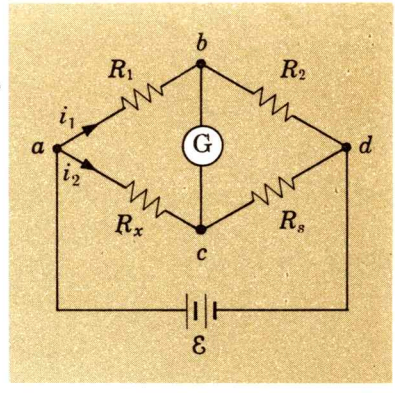


FIG. 25-16. El circuito del puente de Wheatstone.

Potenciómetro. Supóngase que se mide la fem de una batería. La fem *aproximada* se registra con un voltímetro conectado a las terminales de la batería. Esta lectura V es siempre un poco menor que la verdadera fem, puesto que la diferencia de potencial que aparece entre las terminales de la batería es la fem $\mathscr{E}$, *menos* la caída de potencial ir, a través de la resistencia interna r de la batería:

$$V = \mathscr{E} - ir \qquad (25\text{-}4)$$

Como todas las baterías tienen cierta resistencia interna, la fem $\mathscr{E}$ y la diferencia de potencial V son iguales sólo si *no* pasa corriente por la batería.

El circuito potenciométrico permite medir la fem de una batería con la condición de que, en realidad, valga cero la corriente que pasa por ella. Hablando en sentido estricto, el potenciómetro permite comparar una fem desconocida $\mathscr{E}_x$ con una fem, que se conoce con precisión, $\mathscr{E}_s$ de una *celda normal,* empleando un método nulo. El circuito está representado en la Fig. 25-17. Una denominada batería de trabajo con una fem $\mathscr{E}_w$, que no es preciso conocer pero que debe ser mayor que $\mathscr{E}_x$ (o que $\mathscr{E}_s$), mantiene una corriente constante i a través del resistor. El contacto deslizable (véase la Fig. 25-17, donde el reóforo que está a la izquierda del galvanómetro se conecta con el resistor) en el resistor se coloca de tal manera que sea cero la corriente a través de un galvanómetro sencillo. Entonces la caída de potencial a través del galvanómetro vale cero, lo mismo que la caída del potencial a través de la resistencia interna de la batería desconocida. Así, la caída total de potencial a través del ramal del circuito que contiene a la batería desconocida, será igual a la fem $\mathscr{E}_x$ de la batería. Pero también ésta es la caída de potencial iR_x a través del resistor desde el contacto móvil hasta el extremo derecho. En consecuencia $\mathscr{E}_x = iR_x$.

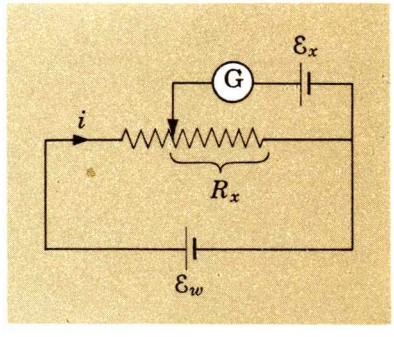


FIG. 25-17. Un circuito potenciométrico para comparar fems.

Ahora, la batería desconocida se reemplaza con la celda normal y el contacto móvil se ajusta para balance (corriente cero en el galvanómetro); entonces se tiene que $\mathscr{E}_s = iR_s$, donde R_s es la correspondiente resistencia desde el contacto móvil al extremo del resistor. Eliminando a i de estas relaciones se obtiene

$$\frac{\mathscr{E}_x}{\mathscr{E}_s} = \frac{R_x}{R_s} \qquad (25\text{-}23)$$

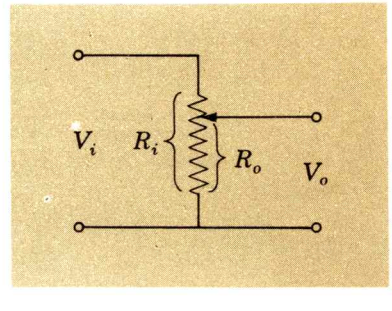


FIG. 25-18. Un "potenciómetro" empleado como divisor de voltaje.

De esta ecuación se advierte que comparar las fems con un circuito potenciométrico se reduce al comparar resistencias (o, si el resistor ajustado es un alambre de sección recta uniforme, en comparar longitudes).

El término *potenciómetro* se emplea en otro sentido en los circuitos eléctricos: el de un *divisor de voltaje* (Fig. 25-18). Un voltaje de entrada V_i se aplica a través de un resistor variable de resistencia total R_i, con un contacto central. El voltaje de salida es V_o, siendo R_o la resistencia entre el contacto y el extremo inferior del resistor. Es evidente que $V_o/V_i = R_o/R_i$.

RESUMEN

La fem $\mathscr{E}$ de una fuente de energía se define como el trabajo dado a la unidad de carga positiva por las fuerzas no electrostáticas en el circuito.

La resistencia equivalente R de resistores conectados en serie vale $R = \Sigma R_i$. La resistencia equivalente de resistores conectados en paralelo es $1/R = \Sigma 1/R_i$. Los resistores en serie llevan todos la misma corriente; los resistores en paralelo tienen todos la misma diferencia de potencial entre sus terminales.

Se encuentran las corrientes en cualquier ramal de una red o circuito de mallas múltiples aplicando las dos reglas de Kirchhoff:

1. El teorema de los nodos: la corriente total en cualquier nodo vale cero:

$$\Sigma i = 0 \qquad (25\text{-}16)$$

2. El teorema de las mallas: la suma algebraica de las fems alrededor de una malla es igual a la suma algebraica de las caídas de potencial entre las resistencias de la misma malla:

$$\Sigma \mathscr{E} = \Sigma V \qquad (25\text{-}17)$$

La primera y segunda reglas de Kirchhoff derivan del principio de la conservación de la carga y de la energía, aplicados a los circuitos eléctricos.

PROBLEMAS

25-1. Cuando una batería se conecta a un resistor, pasa por el circuito una corriente de 1.0 A. Cuando un resistor de 12-Ω se agrega en serie al circuito, la corriente desciende a 0.33 A. ¿Cuánto vale la fem de la batería?

25-2. Dos baterías de fems y de resistencias internas diferentes, se conectan en serie entre sí y con un resistor externo de carga; la corriente es de 4.0 A: Entonces la polaridad de una batería se invierte, y la corriente es ahora de 1.0 A. ¿Cuál es la relación entre las fems de las dos baterías?

25-3. Supóngase que un resistor de 10.0-Ω se conecta en serie a las terminales de una batería de 9.0 V (seis pilas secas en serie) la cual tiene una fem de 9.24 E y una resistencia interna de 0.5 Ω. (*a*) ¿Con qué rapidez se convierte la energía química en energía eléctrica? Encontrar (*b*) el voltaje entre las terminales de salida. (*c*) la potencia entregada al resistor de carga;

y (*d*) la rapidez con que se genera calor dentro de la batería. (Cuando está nueva, una pila seca tiene una fem de unos 1.55 V y una resistencia interna en la gama de 0.02 Ω a 0.03 Ω, dependiendo del uso propuesto.)

25-4. El acumulador de plomo es capaz de suministrar las grandes corrientes necesarias para hacer funcionar al motor eléctrico empleado para arrancar los motores de gasolina. Una medida normal de esta propiedad es el "cold-cranking-rating" (valuación con manivela fría) inventado por el Society of *A*utomotive *E*ngineers (SAE) (Sociedad de Ingenieros de Automóviles). Esta valuación fija la corriente a la que una batería dada de "12 volts" debe suministrar por 30 s a 0°F (−17.8°C), mientras se mantiene un voltaje mínimo en las terminales de 7.20 volts. (Esta batería consiste de 6 celdas de plomo en serie; cuando está cargada recientemente, la fem de cada celda es de 2.13 V.) Consideremos una cierta batería cuya valuación SAE -como se describió arriba- es de 450 A. (*a*) Encontrar la resistencia interna de esta batería y (*b*) la pérdida de energía (en J y en k cal) que recibe durante esta prueba. (*c*) ¿Qué fracción de esta energía se disipa en la *batería*?

25-5. Un generador eléctrico disipa internamente energía con la rapidez de 20 W, cuando la diferencia de potencial entre sus terminales es de 120 V y cuando pasa por ella una corriente de 2.0 A. ¿Cuánto vale la fem del generador?

25-6. Una fuente de energía, o generador, de fem x y de resistencia interna R se conecta a una carga de resistencia R. (*a*) Demostrar que la potencia P que suministra el generador a la carga vale $\mathscr{E}^2 R_L/(R_G + R_L)^2$. (*b*) Demostrar que la potencia suministrada por el generador a la carga es máxima cuando la resistencia de la carga se iguala con la del generador; esto es, demostrar que P_L es máxima cuando $R_L = R_G$.

25-7. En el circuito representado en la Fig. P25-7 la resistencia interna de la batería es despreciable comparada con las demás resistencias del circuito. (*a*) Encontrar el resistor equivalente que deje pasar la misma corriente por la batería. Calcular (*b*) la corriente en cada resistor y (*c*) la potencia total suministrada al circuito por la batería.

25-8. Tres resistores de 3.0, 4.0 y 6.0 Ω, se conectan en paralelo con una batería de 60 V. (*a*) Dibujar esquemáticamente un diagrama del circuito. Encontrar (*b*) la corriente que pasa por cada resistor y (*c*) la corriente total que pasa por la batería. (*d*) ¿Cuánto vale la resistencia equivalente a las tres en paralelo? (Se supone que la resistencia interna de la batería es despreciable.)

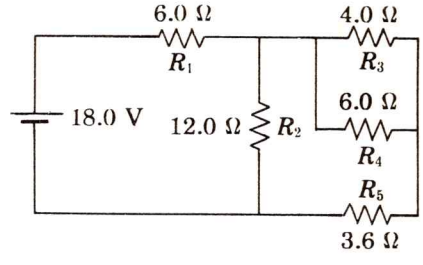


FIG. P25-7

25-9. Doce resistores de 1-Ω se encuentran en las aristas de un cubo y se conectan en los vértices. (*a*) Calcular la resistencia equivalente, medida entre dos vértices del cubo, diagonalmente opuestos. (*Sugerencia:* usar la simetría del arreglo para encontrar cómo se divide la corriente en las uniones.) (*b*) Encontrar la fracción de la corriente total que pasa por cada resistor.

25-10. Considérese el circuito representado en la Fig. P25-10, donde la resistencia interna de la batería vale 0.50 Ω. (*a*) Calcular la resistencia equivalente del circuito externo a la batería. Encontrar (*b*) la corriente suministrada por la batería y (*c*) la diferencia de potencia entre sus terminales. (*d*) ¿Cuánto vale la corriente que pasa por el resistor de 9.0 Ω? (*e*) Calcular también, la rapidez con que se forma calor en el resistor de 3.0 Ω.

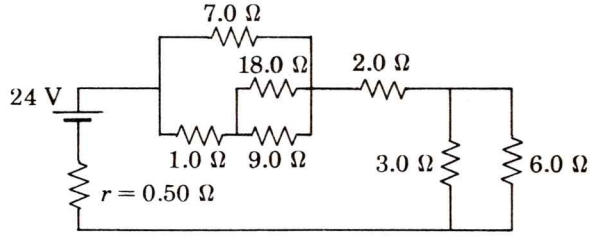


FIG. P25-10

25-11. Resolver las Ecs. de la (25-18) a la (25-20) para las intensidades de la corriente y demostrar que las soluciones están dadas por la Ec. (25-21).

25-12. Suponiendo los valores siguientes para los parámetros de la Fig. 25-11: $\mathscr{E}_1 = 6\,\text{V}$, $\mathscr{E}_2 = 12\,\text{V}$, y $R_3 = 2\,\Omega$. Calcular qué valores de R_1 y R_2 harán (*a*) que la corriente i_1 sea negativa, (*b*) que la corriente i_2 sea negativa.

25-13. Considérese el circuito representado en la Fig. P 25-13. (*a*) Encontrar la magnitud y sentido de las corrientes que pasan por las dos baterías y por el resistor de 1-Ω (*b*) Encontrar $V_{ab} = V_a - V_b$ procediendo a lo largo de tres caminos diferentes.

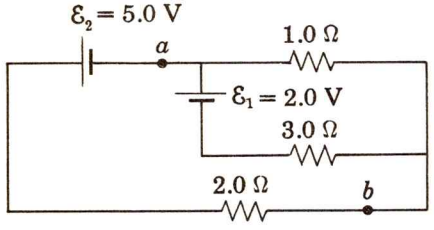


FIG. P25-13

25-14. Considérese el circuito representado en la Fig. P25-14. (*a*) Encuéntrese la magnitud y sentido de las corrientes en cada uno de los tres resistores. (*b*) ¿Cuánto vale la diferencia de potencial entre los puntos *A* y *B*?

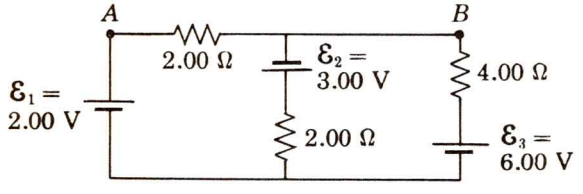


FIG. P25-14

25-15. Considérense los dos arreglos de la Fig. 25-15, usados para estimar una resistencia desconocida por la relación de las lecturas entre el voltímetro y el amperímetro. Si las resistencias del amperímetro y del voltímetro valen, respectivamente, 1.0 y 20 Ω, y la resistencia R = 10 Ω, ¿qué valores aproximados se obtienen con los arreglos (*a*) y (*b*) para la resistencia R?

25-16. Un amperímetro, que tiene una resistencia de 0.10 Ω y un voltímetro, que tiene una resistencia interna de 10,000 Ω se combinan para medir una resistencia desconocida R. Calcular para qué valores de R, la resistencia encontrada como V/i tendrá un error de menos de 1%, independientemente de como se conecten el amperímetro y el voltímetro con la resistencia R (Fig. 25-15).

25-17. El alambrado interno de un voltímetro de alcance múltiple, se indica en la Fig. P25-17. El galvanómetro sólo da una desviación total en su escala cuando pasa por él una corriente de 1.0 mA. La resistencia del galvanómetro es de 1000 Ω. Encontrar los valores de las resistencias de los resistores (*a*) R_a, (*b*) R_b, y (*c*) R_c.

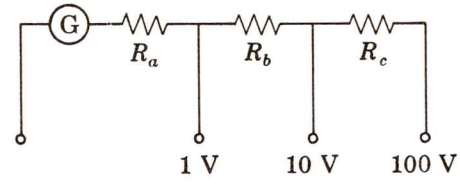


FIG. P25-17

25-18. El alambrado interno de un amperímetro de alcance múltiple, se indica en la Fig. P25-18. Cuando se usa cada una de las tres terminales, la lectura con desviación completa de la aguja del amperímetro es de 1.0 A, 10 A o 100 A. El galvanómetro da una desviación total cuando pasa por él una corriente de 1.0 mA, siendo su resistencia de 1000 Ω. Encontrar los valores de las tres resistencias (*a*) R_a, (*b*) R_b, (*c*) R_c.

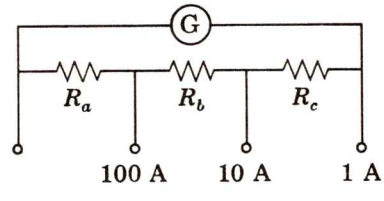


FIG. P25-18

25-19. (*a*) Con un galvanómetro con una resistencia de 1,000 Ω y que se desvía en toda la escala cuando pasa por él una corriente de 1.0 mA, encontrar la resistencia en derivación necesaria para construir un amperímetro que mida hasta 100 A. (*b*) Encontrar la longitud del alambre de cobre (diámetro, 1.0 mm; resistividad, 1.7×10^{-8} Ω-m) que tenga dicha resistencia.

25-20. Un amperímetro es un instrumento de baja resistencia conectado en serie, mientras que un voltímetro es un instrumento de alta resistencia conectado en paralelo. ¿Cuál de los dos instrumentos podrá dañarse cuando se conecten propiamente y por qué?

25-21. Aunque un instrumento de precisión para medir la resistencia es el puente de Wheatstone (Sec. 25-5), es muy útil tener un instrumento menos elaborado cuando no se necesita mucha precisión. El circuito representado en la Fig. P25-21 ilustra algunas de las ideas básicas involucradas al diseñar tal instrumento, denominado un *omhímetro* u óhmetro. La resistencia conocida R_x se conecta entre las terminales A-B completando el circuito, en donde la fem $\mathscr{E}$ de la batería producirá una corriente. Una parte de esta corriente pasa por el galvanómetro G y el valor de R_x se indica por la desviación del galvanómetro, medida sobre una escala apropiada. Cuando R_x es infinita (circuito abierto) la aguja del medidor no se desvía: este punto de la escala se marca $R = \infty$. Por el contrario, el medidor indica una desviación completa cuando las terminales A-B están en cortocircuito: este punto de la escala se marca con $R = 0$. Un procedimiento conveniente para el diseño detallado de un ohmímetro calculado para un tramo particular de valores de la resistencia, es como sigue: se escoge el valor de R_x que produzca una desviación de media escala (*hs*); sea R_{hs} este valor. Si las terminales A-B se cortocircuitan ($R_x = 0$), la corriente del medidor debe duplicarse (marcando toda la escala), lo que significa que la resistencia en serie con la fem $\mathscr{E}$ deberá reducirse a la mitad. Por tanto $R_e = R_{hs}$, donde R_e es la resistencia equivalente en serie de la red de resistencias dentro del instrumento. Conociendo R_e puede calcularse entonces la corriente suministrada por la fem $\mathscr{E}$; dadas las especificaciones de los movimientos del galvanómetro (su resistencia en serie R_m e i_{fs}, la corriente necesaria para una desviación total de la escala), se pueden calcular los valores de R_{sh} y de R_{se}. Habiendo seleccionado estos parámetros del circuito puede calcularse lo que queda de la escala de resistencias en la carátula del ohmímetro. Conforme la batería envejece, aumenta su resistencia interna; para compensar esto, R_{sh} se hace variable. (Al aumentar R_{sh} una fracción mayor de la corriente de la batería, se verá obligada a pasar por el medidor.) (*a*) Con estas explicaciones como guía, diseñar un ohmímetro que en el centro de la escala indique

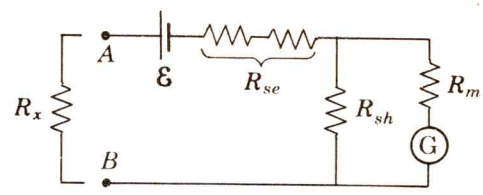


FIG. P25-21

$R_x = 1{,}000\ \Omega$ si $\mathscr{E} = 3.0$ V, la resistencia del galvanómetro $r_m = 10{,}000\ \Omega$, y la corriente del galvanómetro, para desviación completa de la escala, vale $i_{fs} = 100\ \mu$A (*b*) Calcular el valor de R_x que corresponda a una desviación de tres cuartas partes de la escala completa.

25-22. La Ec. (25-23), da la relación de fems en términos de la relación de resistencias, suponiendo que permanece constante la corriente i que pasa por el circuito inferior de la Fig. 25-17. Si la temperatura del resistor es mayor cuando la pila normal está equilibrada que cuando la pila desconocida está equilibrada, ¿será el valor de $\mathscr{E}_x$ determinado por la Ec. (25-23) mayor o menor que el verdadero valor? Supóngase que la resistencia aumenta con la temperatura.

25-23. El circuito del potenciómetro (Fig. 25-17), es fundamentalmente el mismo que el circuito múltiple de la Fig. 25-11. Derivar la ecuación 25-23 del potenciómetro de la Ec. (25-21).

25-24. Demostrar que si el circuito potenciométrico de la Fig. 25-17 no está equilibrado, la magnitud de la corriente que pasa por el galvanómetro vale:

$$i_g = \frac{\mathscr{E}_w - (1 + R_1/R_3)\mathscr{E}_x}{R_1 + (1 + R_1/R_3)R_2}$$

donde R_1 es la suma de las resistencias internas de la batería de trabajo y la parte de la resistencia del alambre, a la izquierda del contacto ajustable; R_2 es la suma de la resistencias internas de $\mathscr{E}_x$ y del galvanómetro; y $R_3 = R_x$, la parte de la resistencia del alambre que está a la derecha del contacto ajustable.

Capítulo

26

LA FUERZA MAGNETICA

Por lo general se asocia el magnetismo con el comportamiento de los imanes y de los materiales magnéticos; desde luego los imanes son un aspecto importante del magnetismo, pero el efecto magnético *fundamental* es el siguiente: una carga eléctrica en movimiento puede ejercer una fuerza sobre una segunda carga en movimiento, además de la fuerza eléctrica de Coulomb. Esta fuerza, que depende de la velocidad de las cargas y que se ejerce entre ellas, es la *fuerza magnética*.

Así como la fuerza eléctrica entre partículas cargadas puede considerarse que actúa por medio de un campo eléctrico —la carga q_a crea un campo eléctrico **E** en el lugar de la carga q_b y q_b, hallándose en este campo, recibe una fuerza eléctrica— así también la interacción magnética entre partículas cargadas puede describirse, como teniendo lugar por medio de un campo magnético. Desde este punto de vista la carga móvil q_a crea un *campo magnético* **B** en el lugar donde está la carga móvil q_b, y q_b, hallándose en este campo, recibe de él la denominada fuerza magnética. Esta fuerza es más complicada que la eléctrica, ya que depende de las velocidades de las dos cargas interactuantes y también de la magnitud y signo de las cargas y de la distancia entre ellas. Por esta razón es conveniente discutir en dos partes la interacción magnética: (1) la creación del campo magnético por una carga móvil y (2) el efecto del campo magnético sobre una segunda carga en movimiento. Este capítulo tratará de la segunda parte.

26—1 DEFINICION DEL CAMPO DE INDUCCION MAGNETICA

El término campo magnético evoca de inmediato en la imaginación a un imán atrayendo o rechazando a un segundo imán o causando la alineación de limadura de hierro o de brújulas. Este

concepto del campo magnético, aunque familiar y correcto en realidad, no es fundamental. Para definir apropiadamente el campo magnético, se debe investigar primero cómo se mueven las partículas cargadas en el campo, establecido, por ejemplo, por medio de imanes permanentes o, como se verá después, por medio de corrientes eléctricas. La producción del campo magnético no se tratará aquí, sino que será discutida en el Cap. 27; se supondrá sólo que puede mantenerse un campo magnético en la región donde se coloque un haz de partículas cargadas en movimiento. Se supondrá además que las partículas no reciben fuerzas eléctricas o gravitacionales.

Se pueden explorar las propiedades de la fuerza magnética y, por tanto del campo magnético, dirigiendo un haz de partículas cargadas en la región donde exista el campo magnético. Por ejemplo, puede usarse un osciloscopio pequeño, en donde un haz de electrones incide en una pantalla fosforescente y produce un punto brillante en su centro. La velocidad de las partículas se supone variable y conocida. Investigando la trayectoria de las partículas cargadas, se puede deducir la fuerza magnética que reciben. Todas las veces que actúa la fuerza magnética $\mathbf{F}_m$ se tienen los siguientes hechos experimentales:

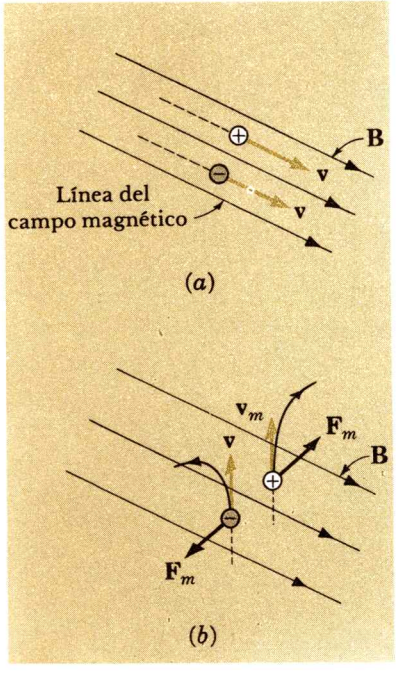


FIG. 26-1. (*a*) Cuando una partícula cargada se mueve en un campo magnético y *no* está sometida a una fuerza magnética, la línea de su velocidad es, por definición, una línea del campo magnético. (*b*) Cuando una partícula cargada se mueve perpendicularmente al campo magnético, resulta desviada por una fuerza magnética, que es perpendicular tanto a v como a B.

1. La fuerza magnética siempre es perpendicular a la velocidad **v** de la partícula:

$$\mathbf{F}_m \perp \mathbf{v}$$

2. Existe una orientación particular de la velocidad **v**, para la cual la fuerza $\mathbf{F}_m$ es cero. Véase la Fig. 26-1*a*. Esto es, existe una línea particular en el espacio a lo largo de la cual las partículas cargadas pueden moverse sin experimentar una fuerza magnética. *Por definición* una línea del cambio magnético es esa línea.*

$$F_m = 0 \quad \text{cuando} \quad \mathbf{v} \parallel \mathbf{B}$$

Persiste el problema de asignar un *sentido* a la dirección del campo magnético **B**.

3. La fuerza magnética es proporcional a la carga q de la partícula, tanto en magnitud como en signo:

$$F_m \propto q$$

Si se reemplazan las cargas magnéticas por positivas que se mueven con la misma dirección y sentido de $\mathbf{F}_m$ se invierte (véase Fig. 26-1*b*).

4. Para todas las direcciones de la velocidad **v**, la magnitud de xxi es directamente proporcional a la componente $v_\perp = v \operatorname{sen} \theta$ de la velocidad en ángulo recto con la línea del campo magnético:

$$F_m \propto v_\perp = v \operatorname{sen} \theta \qquad (26\text{-}1)$$

*La dirección del campo magnético así definido es, en realidad, también la línea con la que debe alinearse por sí mismo un imán permanente o una pequeña brújula.

donde θ es el ángulo entre la dirección de **v** y la dirección de **B**. así, la fuerza es cero cuando $\theta = 0$ (o 180°), siendo entonces los vectores **v** y **B** paralelos (o antiparalelos). Cuando las partículas se mueven, en sentido perpendicular al campo magnético ($\theta = 90°$), el campo magnético es máximo. Véase Fig. 26-1*b*.

Los hechos experimentales anteriores pueden expresarse sencillamente definiendo la magnitud del campo eléctrico **B** con la relación:

$$B = \frac{F_m}{qv_\perp} = \frac{F_m}{qv \operatorname{sen} \theta} \tag{26-2}$$

donde x es el ángulo entre **v** y **B**. Puesto que son medibles todas las cantidades del miembro derecho, puede determinarse la magnitud de **B**.

5. La fuerza magnética siempre es perpendicular al plano que contiene a la línea de velocidad y a la línea del campo magnético (Esto es, la línea que describe una partícula cuando no recibe fuerza magnética). La dirección, sentido y magnitud de $\mathbf{F}_m$ observada por experimentación, se relaciona adecuadamente con las de **v** y **B**, por medio de la siguiente relación vectorial:

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{26-3}$$

Aquí se ha *escogido* en forma arbitraria la dirección y el sentido del campo magnético con esta relación vectorial y con la convención de la regla de la mano *derecha* del producto vectorial o producto cruz; véase la Fig. 26-2.

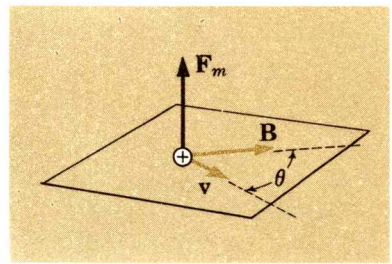


FIG. 26-2. La fuerza magnética $\mathbf{F}_m$ es perpendicular al plano de **v** y de **B**.

La fuerza eléctrica y el campo eléctrico son *muy diferentes* de la fuerza magnética y del campo magnético: la fuerza eléctrica actúa cualquiera que sea el estado de movimiento de la partícula cargada, y la dirección y sentido de la fuerza eléctrica sobre una carga positiva son las *mismas* que las del campo eléctrico.

La fuerza magnética, por otro lado, depende de la velocidad de la carga, y la fuerza es perpendicular tanto a **v** como a **B**.

La Ec. (26-3) implica que el campo magnético **B** es un vector pues, ciertamente, **B** tiene magnitud, dirección y sentido de acuerdo con la convención establecida.

El campo magnético, en realidad, es un vector en el siguiente sentido: dos o más campos magnéticos que actúan a la vez sobre una partícula cargada producen una fuerza magnética, dada por la Ec. (26-3), si por *B* se considera la *suma vectorial* de los campos separados: esto es un resultado experimental.

De la Ec. (26-2) resulta que las unidades apropiadas del campo de inducción magnética son newtons sobre amperio-metro (N/A-m), esto es:

$$\text{N/C-(m/s)} = \text{N/(C/s)-m} = \text{N/A-m}$$

Así, una carga de 1 C que se mueve a 1 m/s en sentido perpendicular a un campo magnético de 1 N/A-m, está sometida a una fuerza magnética de 1 N.

En el sistema internacional de unidades (SI) el campo magnético tiene como unidad el *weber*/m², o sencillamente el *tesla* (T). Por definición,

$$1\ \text{T} = 1\ \text{Wb/m}^2 = 1\ \text{N/A-m}$$

Un campo magnético de 1 Wb/m² es, en normas de laboratorio, un campo en cierto sentido muy grande; por tanto resulta útil a menudo especificar el campo magnético en *gauss*, donde

$$1\ \text{T} = 1\ \text{Wb/m}^2 = 10^4\ \text{G}$$

De hecho, el gauss es una unidad del campo magnético en el sistema cgs gaussiano de unidades; véase el Apéndice III. El campo magnético de la Tierra es de 0.5 G; un imán permanente típico pequeño, produce un campo de unos 100 G; grandes electroimanes pueden llegar a producir campos magnéticos hasta de más de 20 000 G, o 2 Wb/m². Campos magnéticos aún mayores pueden producirse solamente con procedimientos muy elaborados.

26—2 FLUJO MAGNETICO

Así como se representa un campo eléctrico con líneas del campo eléctrico, cuya dirección y densidad dan la dirección y magnitud del campo eléctrico, así también pueden representarse la dirección y magnitud de un campo magnético **B** por medio de líneas del campo magnético. Se debe hablar de líneas del *campo* magnético, más bien que de líneas magnéticas *de fuerza,* puesto que la fuerza magnética nunca es paralela a las líneas del campo magnético. El campo magnético es intenso donde las líneas magnéticas se juntan y débil donde se apartan. Un campo magnético constante, o uniforme, se representa con líneas rectas paralelas y uniformemente separadas.

Se tendrá ocasión de representar líneas magnéticas que entran o salen del plano del papel; en estos casos el símbolo · representa un campo magnético *que sale* del papel, y el símbolo ×, un campo magnético *que penetra* en el papel; véase Fig. 26-3. Estos símbolos recuerdan, respectivamente la punta de una flecha que sale del

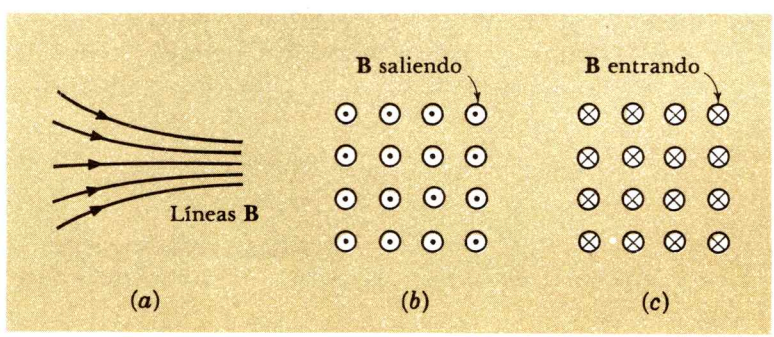


FIG. 26-3. (*a*) Líneas del campo magnético. Las líneas del campo en el (*b*) salen del papel y en (*c*) penetran en el papel.

papel, y las plumas de la cola de la flecha que apunta hacia adentro del papel:

El flujo eléctrico $d\phi_E$ en el elemento de superficie $d\mathbf{S}$, se definió, como

$$d\phi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \qquad (22\text{-}1)$$

En forma análoga, se define el *flujo magnético* $d\phi_B$ a través del elemento de superficie $d\mathbf{S}$, donde el campo magnético tiene el valor $\mathbf{B}$, del modo siguiente

$$d\phi_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = (\mathrm{B} \cos \theta)\, dS$$

Esto es, se toma la componente $B \cos \theta$ del campo magnético a lo largo de la normal a la superficie, al calcular el flujo a través de este elemento de superficie; véase Fig. 26-4.

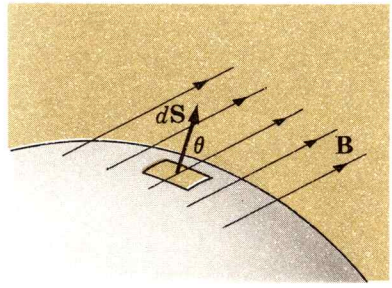


FIG. 26-4. El flujo magnético que atraviesa un elemento de superficie $d\mathbf{S}$.

El flujo magnético total ϕ_B, que atraviesa una superficie de área finita valdrá entonces

$$\phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \qquad (26\text{-}4)$$

donde la integración se lleva sobre el área de la superficie en la que se desea encontrar el flujo magnético total.

En el caso especial en donde el campo magnético $\mathbf{B}$ es uniforme en toda un área plana A orientada en dirección perpendicular a las líneas del campo magnético la Ec. (26-4) queda

$$\phi_B = BA$$

o

$$B = \frac{\phi_B}{A} \qquad (26\text{-}5)$$

El campo magnético B es, teniendo en cuenta la Ec. (26-5), la densidad del flujo magnético, esto es, el flujo magnético dividido entre el área perpendicular a través de la cual penetra. Así, $\mathbf{B}$ puede considerarse como el número de líneas magnéticas por unidad de área transversal, correspondiéndose al valor numérico de $\mathbf{B}$. En el (SI) la unidad de flujo magnético, que mide el número *total* de líneas magnéticas que cruzan una cierta área transversal, es el weber. Es claro, entonces, que la correspondiente unidad para el campo magnético $\mathbf{B}$ (densidad de flujo magnético) es el weber/m^2.

Ejemplo 26-1

La radiación cósmica consiste de partículas con carga positiva de energía muy grande (sobre todo protones), que "llueven" sobre la Tierra llegando de todas direcciones del espacio exterior. ¿Cómo afecta el campo magnético de la Tierra a los protones que se aproximan hacia (*a*) los polos norte o sur, y (*b*) hacia el ecuador?

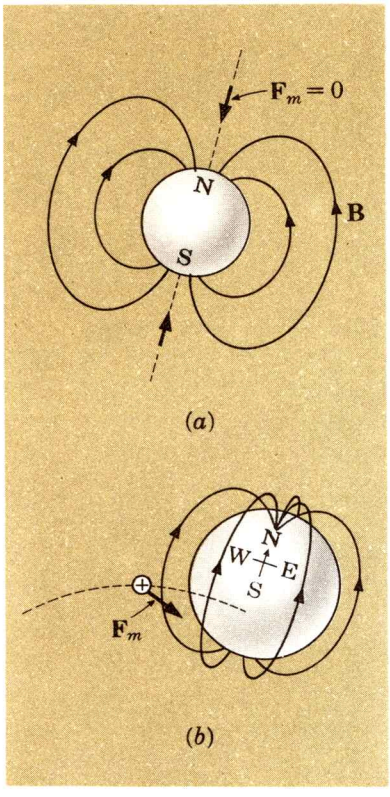


FIG. 26-5. (*a*) Campo magnético de la Tierra; las partículas llegando a lo largo del eje magnético no se desvían. (*b*) Las partículas positivamente cargadas que llegan a la Tierra por el ecuador son desviadas hacia el oriente.

Las líneas del campo magnético de la Tierra se representan en la Fig. 26-5. Los protones que llegan a la Tierra por sus polos recorren a las líneas del campo magnético en su misma dirección y, en consecuencia, no son desviadas (Fig. 26-5*a*). Por otro lado, los protones que se aproximan a la Tierra por el ecuador cruzan las líneas del campo magnético, que van del sur al norte geográficos, en ángulos rectos. Por medio de la Ec. (26-3) se ve que las partículas reciben una fuerza magnética que las desvía hacia el oriente (Fig. 26-5*b*).

Las partículas incidentes de los rayos cósmicos tienen muy diversas energías; algunas tienen energías altas (arriba de 10^{15} MeV) y el campo magnético de la Tierra es débil (del orden de 1 G cerca de la superficie). No obstante, debido a que el campo magnético de la Tierra se extiende muy lejos en el espacio, es capaz de influir en el movimiento de estas partículas. Las partículas de poca energía que llegan al ecuador son desviadas tan fuertemente por el campo magnético de la Tierra que inclusive pueden no llegar a la atmósfera de la misma; en consecuencia, se encuentra que la intensidad de la radiación cósmica es mayor en los polos norte y sur que cerca del ecuador (el denominado efecto de latitud). Este efecto demuestra que las partículas incidentes estan eléctricamente cargadas. Además, los experimentos demuestran que aquellas partículas que llegan al ecuador lo hacen de preferencia desde el oeste (el denominado efecto este-oeste). Esto demuestra que las partículas primarias llevan una carga *positiva*.

26—3 EL MOVIMIENTO DE LAS PARTICULAS CARGADAS EN UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME

La relación fundamental de la fuerza magnética que recibe una carga en movimiento es

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (26\text{-}3)$$

Esta fuerza es diferente de las otras fuerzas fundamentales que se han tratado hasta aquí; esto es, la fuerza gravitacional y la fuerza eléctrica. Por una parte, la fuerza magnética es *dependiente de la velocidad*, lo que significa que no es posible asociar una energía potencial escalar con la interacción magnética; además, la fuerza magnética *no puede dar trabajo*. Una partícula cargada, al moverse por un campo magnético constante, *no* cambia su energía cinética, lo que es fácil de probar. El desplazamiento $d\mathbf{r}$ de una carga móvil, en cualquier pequeño lapso dt es $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$. Puesto que la fuerza $\mathbf{F}_m$ actúa siempre en ángulo recto a la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula, no hay componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento $\mathbf{v}dt$ de la partícula, y por tanto, $\mathbf{F}_m$ no suministra trabajo. Así, una partícula sometida a una fuerza magnética cambiará su velocidad, pero sin cambiar su valor: será desviada pero ni ganará ni perderá energía.

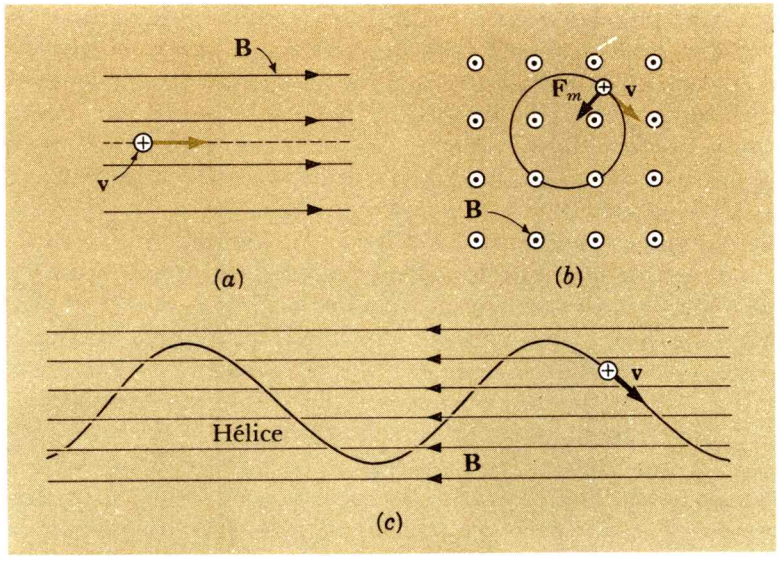


FIG. 26-6. Una partícula cargada moviéndose en un campo uniforme: (*a*) con **v** paralela a **B**, la trayectoria es una recta; (*b*) Con **v** perpendicular a **B**, la trayectoria es un círculo; (*c*) para otros ángulos entre **v** y **B**, la trayectoria es una hélice.

¿Cuál será la trayectoria más general de una partícula cargada en un campo magnético uniforme? Consideremos primero dos casos especiales, (1) **v** paralela (o antiparalela) a **B** y (2) **v** perpendicular a **B**.

1. Como demuestra la Ec., (26-3) —y como lo requiere la definición de la dirección y sentido del campo magnético— una partícula cargada que se mueve al principio en la dirección del campo magnético avanza en esta dirección sin cambiar el valor de su velocidad; véase la Fig. 26-6 *a*.
2. Cuando la *velocidad* de la partícula es *perpendicular* al *campo magnético,* se tiene la condición de un *movimiento circular uniforme.* La fuerza magnética apunta en cada instante hacia el centro de la trayectoria circular en la que se mueve la partícula cargada con un valor constante v en su velocidad. La partícula cargada rodea las líneas del campo magnético en un plano perpendicular a **B**; véase Fig. 26-6*b*.

Llamando $v_\perp$ a la velocidad cuando es perpendicular a **B**, se puede escribir la segunda ley de Newton así:

$$\mathbf{F}_r = m\mathbf{a}_r$$

donde la fuerza radial resultante $\mathbf{F}_r$ es la fuerza magnética $F_m = qv_\perp B$, y la aceleración radial (o centrípeta) es $a_r = v_\perp{}^2/r = \omega^2 r$. Por consiguiente,

$$qv_\perp B = \frac{mv_\perp{}^2}{r} = m\omega^2 r \qquad (26\text{-}6)$$

en esta ecuación r es el radio del círculo, y ω es la velocidad angular de la partícula cargada en órbita.

¿Cuál es la trayectoria de una partícula cargada cuya velocidad **v** *no* es perpendicular a **B**? Aquí, entonces, existe una componente de la velocidad $v_{||} = \cos\theta$ a lo largo de **B**, permaneciendo esta componente sin cambio de dirección ni de magnitud, y existe también la componente perpendicular a **B**, $v_{\perp} = v$ sen θ, siendo esta componente de magnitud constante, pero cuya dirección cambia de continuo. El movimiento resultante es una superposición de un movimiento con valor constante de la velocidad en línea recta y de un movimiento circular uniforme en un plano perpendicular a dicha recta: esto es, la partícula cargada se mueve con una trayectoria en *hélice* cuyo eje de simetría es la dirección del campo magnético. (Véase Fig. 26-6*c*).

Así, siempre que es proyectada una partícula con carga en un campo magnetico uniforme se mueve con un valor constante de la velocidad en una hélice enrollada alrededor de las líneas del campo magnético. Supongamos ahora que se tiene un cierto número de partículas cargadas de una sola clase, electrones por ejemplo, que difieren en su velocidad y energía inicial y que son inyectadas en un campo magnético constante: cada partícula se moverá en una trayectoria helicoidal (o en casos especiales, en una recta o en un círculo). Los electrones difieren de velocidad entre sí, pero cada uno mantiene constante el valor de su velocidad. Ahora bien, es un fenómeno extraordinario que *todos* estos electrones, a pesar de las diferencias en sus energías, velocidades y trayectorias, completan una vuelta en precisamente el *mismo tiempo*. Todas las partículas que giran tienen la misma frecuencia. Probaremos esto.

Se puede escribir la componente perpendicular de la velocidad $v_{\perp}$ como $v_{\perp} = \omega r$, donde ω es la velocidad angular y r es el radio de la hélice. Entonces la Ec. (26-6) puede escribirse:

$$q\omega rB = m\omega^2 r$$

$$\omega = \frac{q}{m} B$$

La frecuencia $f = \omega/2\pi$ valdrá, entonces,

$$f = \frac{q}{2\pi m} B \qquad (26\text{-}7)$$

La frecuencia característica dada por la ecuación anterior se denomina la *frecuencia del ciclotrón* (por razones que serán evidentes en la Sec. 39-7). La frecuencia del ciclotrón f es proporcional al campo magnético y a la relación entre la carga y la masa, q/m de las partículas, pero f *no* depende del valor v de la velocidad de la partícula, ni del radio r de la órbita.

Cuando una partícula cargada se mueve en un campo magnético no uniforme su trayectoria es, en general, bastante complicada. Sin embargo se puede aún reconocer la trayectoria en esencia helicoidal si el campo magnético no se separa demasiado de un campo constante. Por ejemplo, las partículas cargadas son atrapadas en los cinturones de Van Allen que rodean a la Tierra, como se indica en la Fig. 26-7. Las particulas giran alrededor de las líneas del campo magnético y en realidad se "reflejan" en aquellas regiones donde el campo magnético se vuelve más intenso, que es lo que sucede cerca de los polos norte y sur: esta es una ilustración de las curiosas posibilidades de un campo magnético no homogéneo que atrapa partículas cargadas en lo que en forma apropiada puede llamarse "un recipiente magnético"*

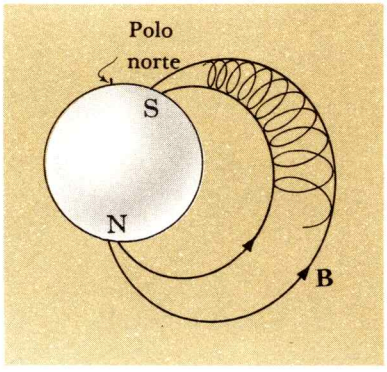


FIG. 26-7. Partículas cargadas atrapadas en el cinturón terrestre de Van Allen. Nótese que el polo sur magnético está cerca del polo norte geográfico.

Ejemplo 26-2

¿Cuál es la frecuencia del ciclotrón de los electrones en un campo magnético de 3 000 G = 0.30 Wb/m²?

Con la Ec., 26-7, se tiene

$$f = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.30\ \text{N/A-m})}{(2\pi)(9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg})} = 8.4 \times 10^{9}\ \text{Hz}$$

Esta frecuencia del ciclotrón de 8.4 GHz se encuentra en la región de microondas del espectro electromagnético. Cuando los electrones libres, contenidos en materiales sumergidos en un campo magnético externo de 3 000 G, se irradian con microondas de esta frecuencia (con longitudes de onda de unos cuantos centímetros), los electrones absorben energía en un efecto llamado *resonancia del ciclotrón.*

26—4 PARTICULAS CARGADAS EN CAMPOS UNIFORMES B y E.

Despreciando la fuerza gravitacional, la fuerza resultante **F** que recibe una partícula cargada es sencillamente la suma vectorial de la fuerza electrónica $\mathbf{F}_e$ y de la fuerza magnética $\mathbf{F}_m$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (26\text{-}8)$$

La ecuación anterior se denomina a menudo como la relación de la *fuerza de Lorentz,* en honor de H. A. Lorentz. (1853-1928), que hizo contribuciones muy importantes a la teoría del electromagnetismo. Si se conoce **E** y **B**, en cada punto del espacio, la carga de la partícula y su velocidad inicial, se puede usar la fórmula de Lorentz para predecir con todo detalle el movimiento futuro de una partícula cargada.

*Véase S. C. Brown, Plasma Physics, *The Physics Teacher* **2**, 103 (1946), sobre la reflexión magnética de partículas cargadas, y W. G. V. Rosser, The Van Allen Radiation Zone, *Contemporary Physics.* 5 198 (1963) y **6**, 255 (1964).

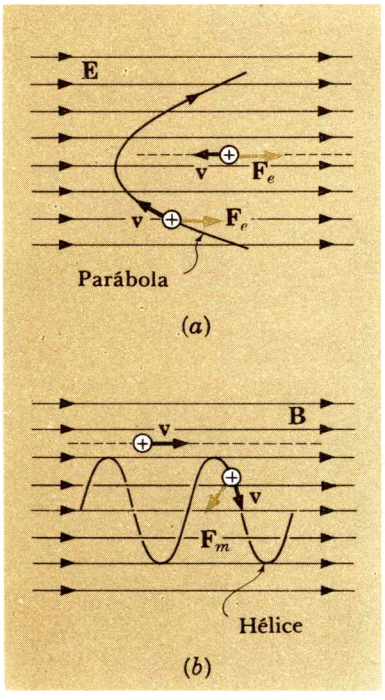


FIG. 26-8. (*a*) En un campo eléctrico uniforme la trayectoria de una partícula cargada es una parábola. (*b*) En un campo magnético uniforme la trayectoria de una partícula cargada es una hélice.

Aquí se considerarán sólo los casos especiales en los cuales tanto **E** como **B** son constantes. Se sabe que una partícula cargada que se mueve en un campo uniforme **E**, sigue una trayectoria parabólica cuyo eje de simetría se encuentra en la dirección de **E**. Cuando **v** es al principio paralela o antiparalela a **E**, la parábola se reduce a una línea recta; véase la Fig. 26-8*a*. Como se ha visto, cuando una partícula cargada se mueve en un campo constante **B**, sigue una trayectoria helicoidal cuyo eje de simetría se encuentra en la dirección de **B** (Fig. 26-8*b*). Cuando **v** es inicialmente paralela o antiparalela a **B**, la hélice se reduce a una recta.

Supóngase que se arregla un campo uniforme **E** y un campo uniforme **B**, de tal manera que la fuerza resultante sobre una partícula cargada sea siempre cero. Esto puede llevarse a cabo cuando la partícula se mueve en dirección perpendicular tanto a **E** como a **B**, las cuales son perpendiculares entre sí, como se representa en la Fig. 26-9. La fuerza eléctrica $\mathbf{F}_e$ y la magnética $\mathbf{F}_m$ son entonces perpendiculares entre sí y a la velocidad de la partícula, y opuestas una a otra $\mathbf{F}_e$ y $\mathbf{F}_m$ son de magnitud igual cuando

$$F_e = F_m$$
$$qE = qvB$$
$$v = \frac{E}{B} \qquad (26\text{-}9)$$

Si se ajustan las magnitudes relativas de **E** y de **B** para que una partícula cargada pase sin desviarse a través de la región de los dos campos cruzados resulta de la Ec. (26-9) que *cualquier otra partícula cargada con la misma velocidad inicial* pasará también sin desviarse, sin que importen las diferencias en la magnitud o signo de la carga, o en las masas de las partículas. Este dispositivo se denomina *selector de velocidad,* puesto que dejará pasar solamente a aquellas partículas cuyo valor de la velocidad satisfaga a la Ec. (26-9). Cuando un haz de partículas polienergéticas se proyecte dentro de un selector de velocidad, todas las partículas, salvo a aquellas que tengan la velocidad apropiada dada por la Ec. (26-9), fallarán en pasar sin desviación a través del selector.

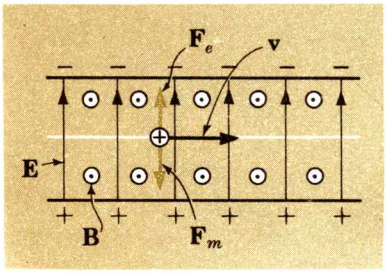


FIG. 26-9. Un selector de velocidad: una partícula cargada se mueve atravesando los campos cruzados **E** y **B**.

Consideremos en seguida un *selector de ímpetu.* Es fácil demostrar que un *campo magnético* uniforme proporciona un método directo para medir la magnitud del *ímpetu lineal* $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ de una partícula. Cuando una partícula cargada se mueve en una trayectoria circular de radio r en un campo magnético uniforme **B**, se tiene:

$$F_r = ma_r$$
$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$
$$p = mv = qrB \qquad (26\text{-}10)$$

El ímpetu líneal es directamente proporcional al radio de la trayectoria y a la magnitud del campo magnético. Si B y q se conocen y r se mide, el ímpetu p puede calcularse. Así, es fácil medir el ímpetu de una partícula cargada cuya estela de pequeñas burbujas (o gotitas) se fotografía en una cámara de burbujas (con una cámara de niebla), midiendo r y B (el producto rB se denomina a veces "rígidez magnética"); véase Fig. 36-14.

Finalmente consideremos un *selector de energía cinética*. Un campo eléctrico uniforme proporciona un método directo para medir la energía cinética de una partícula $K = \frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m$. Considérese el arreglo sencillo representado en la Fig. 26-10*a*, cuando un campo uniforme E se establece debido a una diferencia de potencial V entre dos placas conductoras, paralelas y con cargas opuestas, que se encuentran a la distancia d. De la Ec. (23-13) se tiene que $E = V/d$, así que midiendo la diferencia de potencial, que se encuentra con facilidad, se obtiene de inmediato la magnitud del campo uniforme. Una partícula acelerada desde el reposo por una diferencia de potencial V adquiere una energía cinética K, donde

$$K = qV = qEd \qquad (26\text{-}11)$$

En forma análoga, una partícula cargada, con una energía cinética inicial K, que se mueve en sentido opuesto y en sentido paralelo a las líneas del campo eléctrico, se lleva al reposo justamente junto de la segunda placa conductora (y en consecuencia no registra la presencia de una corriente eléctrica) cuando $K = qV$, donde V es ahora el potencial retardador; véase Fig. 26-10*b*. Por ejemplo, los electrones con una energía cinética inicial de 50 eV se llevan al reposo con un potencial retardador de 50 V. Aún más generalmente, cuando una partícula cargada se mueve en una diferencia de potencial V, como en la Fig. 26-10*c*, su energía cinética cambia en

$$\Delta K = qV$$

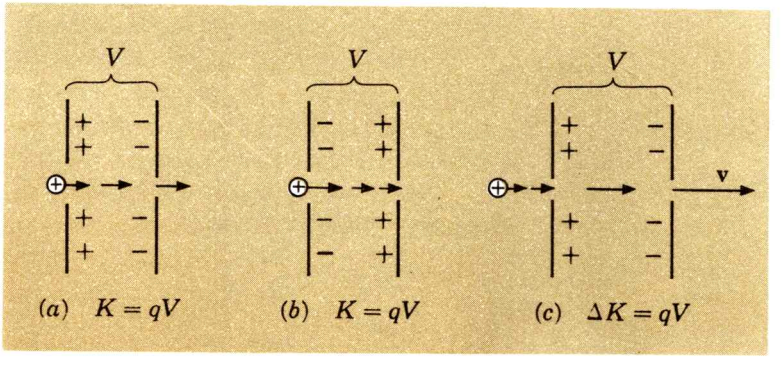


FIG. 26-10. Una partícula cargada que se mueve en (*a*) un potencial eléctrico acelerador, a partir del reposo; (*b*) un potencial retardador, hasta llegar al reposo; (*c*) un potencial que cambia la energía cinética.

La diferencia de potencial V puede aumentar o disminuir la energía cinética de la partícula, dependiendo de si el campo eléctrico es acelerador o retardador.

En suma, conociendo **B** se encuentra el ímpetu $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, y conociendo la diferencia de potencial V (o **E**), se puede encontrar la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$. Se ha visto también que un campo eléctrico y uno magnético cruzados, proporcionan un medio de medir la velocidad v de la partícula cargada [Ec. (26-9)]. Es claro, entonces, que existen varios modos de construir un *selector de masa:*

1. Medir v y $p = mv$; ésto es, usar un selector de velocidad y un selector de ímpetu como se indica en la Fig. 26-11*a*.
2. Medir p y $K = \frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m$; esto es, usar un selector de energía cinética con partículas inicialmente en reposo, y un selector de ímpetu, como se indica en la Fig. 26-11*b*.
3. Medir v y $K = \frac{1}{2}mv^2$; esto es, usar un selector de velocidad para producir un haz sin desviación, conectar entonces el campo magnético, dejando un selector de energía cinética, como se indica en la Fig. 26-11*c*.

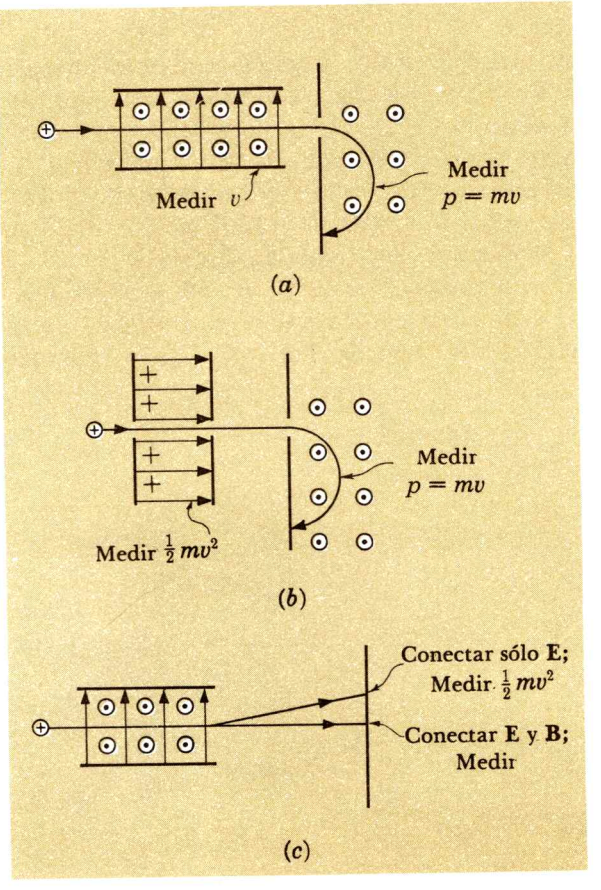


FIG. 26-11. Arreglos para medir la masa de una partícula cargada: (*a*) un selector de velocidad, seguido por un selector de ímpetu; (*b*) un campo eléctrico acelerador, seguido por un selector de ímpetu; y (*c*) un selector de velocidad seguido por un campo eléctrico desviador (el arreglo de Thomson para medir la relación q/m del electrón).

Por supuesto pueden inventarse otras combinaciones. El arreglo representado en la Fig. 26-11*c* fue empleado por J. J. Thomson en 1897, para medir la masa del electrón. En sentido estricto, cualquiera de estos procedimientos sirve para encontrar sólo la relación de la carga a la masa q/m, y no únicamente la masa; por consiguiente se debe tener una medida independiente de la carga de la partícula, como en el experimento de Millikan de la gota de aceite, para permitir el cálculo de la masa. Aunque el experimento de Thomson da q/m para un electrón, la masa del electrón no se conoció hasta después de haber medido $q = e$ en el experimento de Millikan (Sec. 21-5). Los arreglos experimentales descritos se emplean en los espectrómetros de masa para medir las masas atómicas con gran precisión. Es relativamente sencillo distinguir entre los isótopos de un elemento; en realidad, se pueden medir masas atómicas con una precisión de unas pocas unidades en 10^5.

Ejemplo 26-3

Una fotografía tomada en la cámara de burbujas muestra un protón que se mueve en un arco circular de 20 cm de radio en un plano perpendicular a un campo magnético de 0.30 T. ¿Cuál es la energía cinética del protón?

Por medio de la Ec., (26-10), se tiene

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{(qrB)^2}{2m}$$

$$= \frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C} \times 0.20\ \text{m} \times 0.30\ \text{N/A-m})^2}{2(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})}$$

$$= 1.0 \times 10^{-12}\ \text{J} = 17\ \text{MeV}$$

Aunque las relaciones clásicas de la energía cinética y del ímpetu lineal pueden aplicarse a energías cinéticas del protón de varios millones de electrón voltios, para mucho mayores energías deben emplearse relaciones relativísticas para K y p. Las fórmulas de la mecánica clásica sólo se aplican cuando la velocidad de la partícula es mucho menor que la de la luz, que es de 3×10^8 m/s, (véase Cap. 35). En el caso de los electrones, las relaciones relativísticas son necesarias a energías mucho menores; esto es, las relaciones clásicas dan errores serios en energías cinéticas del electrón mayores de unas pocas veces 10^4 eV.

26—5 FUERZA MAGNETICA QUE RECIBE UN CONDUCTOR CON CORRIENTE

Puesto que un campo magnético ejerce una fuerza sobre una carga en movimiento, deberá también ejercer una fuerza en las cargas móviles que están dentro de un conductor que lleva una

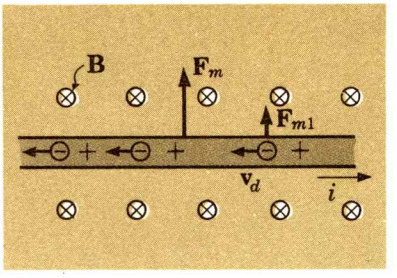


FIG. 26-12. La fuerza magnética que recibe un electrón de conducción en un conductor con corriente.

corriente. Considérese la Fig. 26-12 donde los electrones libres se mueven hacia la izquierda con la velocidad de arrastre v_d por un conductor con una pequeña área transversal A. La corriente convencional i tiene entonces su sentido hacia la derecha. El conductor está sometido en un campo magnético constante **B**, cuya dirección es perpendicular al papel y cuyo sentido se dirige hacia atrás. Aplicando la Ec. (26-3) es de esperar que cada electrón libre, sometido a la fuerza magnética $\mathbf{F}_m$, deberá moverse, dentro del conductor, con una órbita circular dextrógira. Sin embargo, los electrones que estén cerca de la superficie superior del conductor no pueden atravesarla debido a la fuerza atractiva que recibe de los iones fijos a la red cristalina del conductor. Así, los electrones que alcanzan la superficie superior reciben una fuerza eléctrica hacia abajo que equilibra la fuerza magnética y los electrones continúan moviéndose hacia la izquierda con la velocidad de arrastre v_d. El lado superior rápidamente queda con carga negativa, mientras que el lado inferior queda con carga positiva, produciéndose por tanto un campo eléctrico dentro del conductor con sentido hacia arriba: el llamado efecto Hall. Los electrones libres dentro del conductor no reciben entonces una fuerza neta, equilibrándose la fuerza magnética hacia arriba con la fuerza eléctrica hacia abajo, mientras los electrones se mueven hacia la izquierda. De esta manera la fuerza magnética se transmite a la red cristalina del conductor, y el conductor en conjunto queda sometido a una fuerza magnética hacia arriba, $\mathbf{F}_m$ cuya dirección es perpendicular tanto a las líneas del campo magnético como a la dirección de la corriente.

Nótese que en un conductor que lleva corriente *no* es necesario considerar una posible fuerza eléctrica que reciba el conductor de un campo eléctrico externo además de la fuerza magnética pues cualquier sección del conductor es eléctricamente neutra. Puede decirse entonces, que la fuerza magnética que recibe un conductor que lleva corriente, representa un puro efecto magnético, puesto que no existe la complicación de una fuerza eléctrica adicional.

Calculemos la magnitud de la fuerza magnética $\mathbf{F}_m$ que actúa en un conductor rectilíneo, de longitud L, de orientación perpendicular a un campo magnético externo **B**, cuando el conductor lleve una corriente i. La fuerza total $\mathbf{F}_m$, que actúa a lo largo de L, es sencillamente la fuerza magnética $\mathbf{F}_{m1}$ en *un* electrón, multiplicada por el número total de electrones libres contenidos en esa longitud; si el número de electrones de conducción en la unidad de volumen es n, entonces el número total dentro de la longitud L y con área transversal A, será nAL. Se tiene, entonces,

$$F_m = (nAL)F_{m1}$$

donde, por la Ec. (26-3),

$$F_{m1} = qv_dB$$

por tanto,

$$F_m = nALqv_dB$$

Ahora, la corriente i vale

$$i = nqv_dA \qquad (24\text{-}2)$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación anterior para F_m se tiene

$$F_m = iLB \qquad (26\text{-}12)$$

Así, la fuerza magnética que recibe un conductor de 1 m de largo, que lleva la corriente de 1 A, y sumergido en un campo perpendicular de 1 Wb/m^2, es de 1 N. En realidad, se puede emplear esta relación para medir un campo magnético, midiendo la fuerza magnética que recibe un conductor de longitud conocida que lleve una corriente conocida.

Es fácil generalizar (26-12) teniendo en cuenta que si el conductor con corriente forma un ángulo θ con respecto al campo magnético, la fuerza F_{m1} que recibe un electrón pasa a ser qv_dB sen θ, y (26-12) contiene un factor adicional, el sen θ. Entonces (26-12) se puede escribir en forma vectorial como sigue:

$$\mathbf{F}_m = i\mathbf{L} \times \mathbf{B} \qquad (26\text{-}13)$$

El vector **L** representa, en magnitud, la longitud del conductor; su sentido se escoge correspondiendo al sentido del flujo de las cargas positivas, o sea al sentido de la corriente convencional.

La Ec. (26-13) se aplica sólo en los conductores *rectilíneos*. Por supuesto, nunca puede tenerse un conductor rectilíneo de longitud infinita, porque siempre debe tener un regreso de alguna clase para completar el circuito eléctrico. Por consiguiente es conveniente tener una relación que dé la fuerza magnética $d\mathbf{F}_m$ aplicada a un segmento del conductor de longitud infinitesimal de longitud $d\mathbf{L}$. Aplicando (26-13) se tiene

$$d\mathbf{F}_m = i\, d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \qquad (26\text{-}14)$$

De nuevo la dirección y sentido de $d\mathbf{L}$ son las mismas de la corriente: véase la Fig. 26-13. Se puede encontrar la fuerza resultante que recibe un conductor de forma arbitraria integrando la fuerza magnética en los elementos de longitud que la componen y tomando en cuenta también que el campo magnético **B** puede no tener la misma magnitud y dirección en todos los puntos del conductor con corriente. En general esta integración es muy complicada, aunque puede ser en ciertos casos especiales muy sencillas, como se ilustran en los siguientes ejemplos.

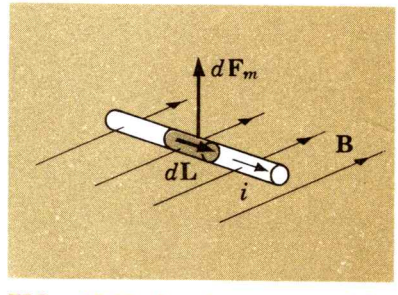


FIG. 26-13. La fuerza magnética $d\mathbf{F}_m$ que recibe un elemento de longitud diferencial $d\mathbf{L}$ de un conductor con corriente.

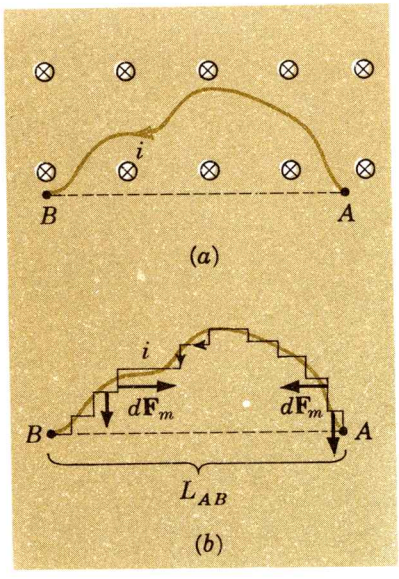


FIG. 26-14. (*a*) Un conductor que lleva corriente de forma arbitraria en dos dimensiones, en un campo magnético externo. (*b*) Conductor equivalente formado de tramos paralelos y perpendiculares a la línea que une los puntos extremos del conductor.

Ejemplo 26-4

Un conductor de forma arbitraria que conduce una corriente i va del punto A al punto B en dos dimensiones, como se indica en la Fig. 26-14*a*. Un campo magnético constante, de magnitud B, actúa en el plano del papel. ¿Cuál es la fuerza resultante en este tramo del conductor?

Se puede aproximar la forma continuamente variable de un conductor, con una serie de segmentos rectilíneos que se encuentran, respectivamente, paralelos y perpendiculares a la recta L_{AB} trazada del punto A al B. Las fuerzas magnéticas en estos segmentos tienen las direcciones indicadas en la Fig. 26-14*b*, de acuerdo con la Ec. (26-14). Puede verse que la componente total de la fuerza paralela a la línea L_{AB} es cero, pues cada fuerza hacia la derecha está equilibrada con una fuerza igual hacia la izquierda: esto deja sólo a las fuerzas magnéticas perpendiculares a L_{AB}. La fuerza resultante perpendicular a la línea L_{AB} es exactamente igual a la fuerza magnética que recibe un conductor rectilíneo colocado entre A y B. Por consiguiente, la fuerza magnética neta tiene una magnitud $F_m = iL_{AB}B$ y su dirección es perpendicular a la línea que une los puntos extremos. El conductor de forma arbitraria es equivalente a un alambre rectílineo que lleva la misma corriente y que esté colocado entre los puntos extremos.

Supongamos ahora que se forma una espira o vuelta de la corriente imaginando que los puntos A y B se ponen en contacto. De los argumentos anteriores, se obtiene que la fuerza magnética resultante que recibe la espira será *cero*. Un poco de meditación demuestra que esta conclusión se aplica a cualquiera que sea la forma de la espira, ya sea que esté o no en un plano, y que también es independiente de la orientación que tenga la espira con relación a las líneas del campo magnético. Sin embargo, *el campo magnético debe ser uniforme*. Aunque una espira cerrada de corriente no recibe una fuerza magnética resultante en un campo magnético uniforme, puede estar sometida a una torca resultante, como se verá en la sección siguiente.

26—6 TORCA MAGNETICA EN UNA ESPIRA DE CORRIENTE

Considérese la situación representada en la Fig. 26-15*a*: un cuadro rectangular, con lados W y L y que lleva una corriente i, se encuentra en un campo magnético uniforme. El ángulo entre las líneas magnéticas del campo y la normal al plano del cuadro es θ. Se desea encontrar la fuerza magnética que reciben cada uno de los cuatro lados del cuadro. (Por supuesto no es posible tener un cuadro de corriente desconectado de una fuente de corriente: deberá haber dos reóforos, uno que lleve la corriente y otro que la saque. Si estos dos reóforos se colocan juntos, pegados o enrollados entre sí, entonces la fuerza magnética resultante sobre los reóforos es cero, puesto que hay corrientes iguales en sentidos opuestos.)

Puede verse que aquí hay dos pares de fuerzas magnéticas iguales y opuestas que actúan en los cuatro lados del cuadro de

corriente, porque la *fuerza* resultante vale *cero*. Aunque las fuerzas que reciben los lados de longitud W son colineales, no lo son las dos fuerzas que reciben dos lados de longitud L; por consiguiente, este par de fuerzas iguales y opuestas aplican una torca al cuadro, tendiendo a alinear su normal con la dirección del campo magnético. Encontremos esta torca.

La Ec. (26-12) da la magnitud de cada una de las fuerzas que reciben los lados de largo L:

$$F_m = iLB$$

Se escoge como eje para calcular las torcas el lado inferior de longitud L: véase Fig. 26-15*b*. Entonces, en magnitud, se tiene:

$$\tau = r_\perp F = (W \operatorname{sen}\theta)(iLB)$$

Se puede escribir esta ecuación en forma más sencilla teniendo en cuenta que LW es el área A del cuadro de corriente:

$$\tau = iAB \operatorname{sen}\theta \qquad (26\text{-}15)$$

La dirección de la torca es perpendicular al papel, saliendo hacia el lector; esto es, la torca magnética que recibe el cuadro lo hace girar en sentido contrario a la de las manecillas del reloj. Se puede escribir (26-15) en forma vectorial como sigue:

$$\boldsymbol{\tau} = i\mathbf{S} \times \mathbf{B} \qquad (26\text{-}16)$$

En este caso la magnitud del vector S representa el área del cuadro. La dirección de S es perpendicular al plano del cuadro y con un sentido tal que puede usarse la regla de la mano derecha para relacionar los sentidos de la corriente y de la normal. * Véase Fig. 26-16.

Aunque se ha derivado la Ec. (26-16) para un cuadro rectangular de corriente, esta relación de la torca magnética en un cuadro plano de corriente de *cualquier* forma. Para comprenderlo imaginemos el alambre formado por pequeños segmentos rectos perpendiculares entre sí. Por supuesto, si un lazo consiste de N vueltas (enrolladas en el *mismo* sentido), en lugar de una sola vuelta, la torca dada por (26-16) se incrementa por el factor N.

La torca magnética que recibe una espira conductora con corriente es el principio físico básicamente empleado en el galvanómetro. La corriente que se mide pasa por una bobina de

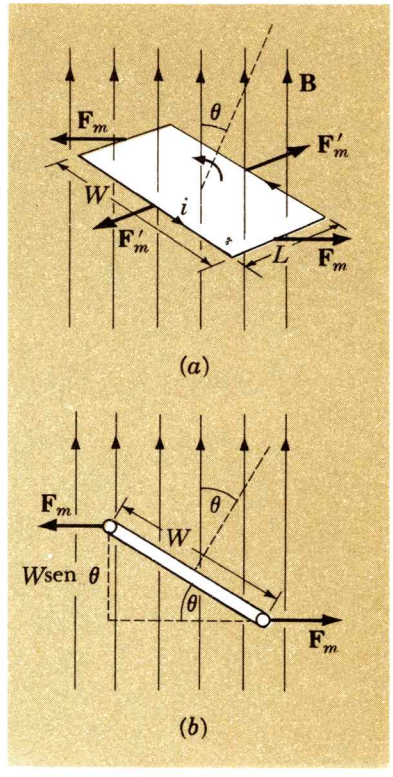


FIG. 26-15. (*a*) Fuerzas magnéticas que recibe un cuadro rectangular de un conductor con corriente en un campo magnético. (*b*) Vista lateral de la parte (*a*).

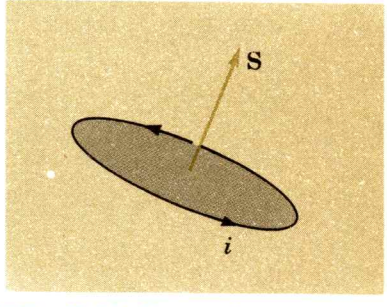


FIG. 26-16. Un cuadro que lleva corriente, y encierra un área S. El vector S es normal a la superficie y relacionado con el sentido de la corriente por medio de la regla de la mano derecha.

*La cantidad $i\mathbf{S}$ donde i es la corriente y S es el vector representativo del área, se denomina *el momento magnético* del lazo conductor. Puede demostrarse que la torca $\boldsymbol{\tau}$ que recibe el momento magnético del campo magnético puede escribirse $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$, donde $\boldsymbol{\mu} = i\mathbf{S}$, y la energía potencial U_B del momento magnético vale $U_B = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$.

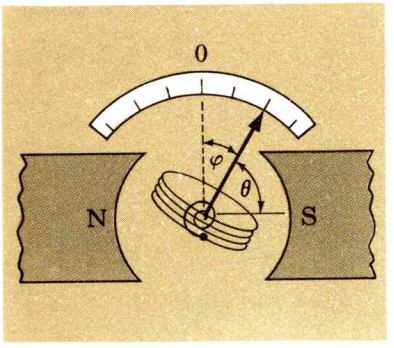


FIG. 26-17. Elementos de un galvanómetro.

muchas vueltas, colocadas en el campo magnético de un imán permanente; véase Fig. 26-17. La bobina está sujeta a un resorte en espiral que aplica una torca de recuperación a la bobina, si ésta es separada de su posición original; de acuerdo con la ley de Hooke (Sec. 9-4), la torca de recuperación τ_r es proporcional al desplazamiento angular, que será aquí denominado ϕ,

$$\tau_r = \kappa\phi$$

donde κ, la constante de la torca del resorte, es por lo común muy pequeña por lo que la bobina del galvanómetro es muy sensible a los desplazamientos angulares. Cuando pasa una corriente por una bobina de N vueltas, la magnitud de la torca magnética que recibe vale, por (26-15):

$$\tau_m = NiAB \operatorname{sen}\theta$$

El ángulo θ se hace igual a 90° cuando por la bobina no pasa corriente, estando en la posición de equilibrio, y $\phi = 0$ cuando $\theta = 90°$. Puesto que $\theta + \phi = 90°$, se tiene

$$\tau_m = NiAB \cos\phi$$

Igualando las dos torcas se tiene:

$$\kappa\phi = NiAB \cos\phi$$

Si el ángulo de desviación ϕ no es muy grande, $\cos\phi \approx 1$ y

$$i \propto \phi \qquad (26\text{-}17)$$

La desviación angular es proporcional a la corriente.

En realidad, las caras polares de los galvanómetros (véase Fig. 26-17) tienen una forma tal que el campo magnético **B** sea siempre perpendicular a las vueltas de la bobina, por lo que $\tau_m = NiAB$ y la Ec. (26-17) se aplica para cualquier ángulo ϕ.

RESUMEN

El efecto magnético fundamental consiste en que una carga eléctrica móvil crea, además del campo eléctrico, un campo magnético que actúa para producir una fuerza magnética sobre una segunda carga móvil.

La fuerza magnética que recibe una partícula de carga q y velocidad **v**, que se mueve en un campo magnético de inducción **B**, vale.

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (26\text{-}3)$$

En el sistema internacional de unidades (SI) el campo de inducción magnética se mide en newtons sobre ampere-metro, o webers sobre metro cuadrado, o tesla (N/A-m = Wb/m² = T). El flujo magnético ϕ_B se define del modo siguiente

$$\phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \qquad (26\text{-}4)$$

La fuerza magnética como siempre actúa en ángulo recto a la velocidad de la carga móvil, *no* proporciona trabajo. Una partícula de carga q y masa m describe una hélice en un campo magnético uniforme con la frecuencia del ciclotrón:

$$f = \frac{q}{2\pi m} B \qquad (26\text{-}7)$$

El ímpetu lineal p de una partícula cargada, que se mueve en un círculo de radio r y en ángulo recto a las líneas del campo de un campo magnético B, vale:

$$p = qrB \qquad (26\text{-}10)$$

La fuerza magnética $d\mathbf{F}_m$ en un elemento de longitud $d\mathbf{L}$, por el cual fluye una corriente i (a lo largo de la dirección de $d\mathbf{L}$) y que se encuentra sumergida en un campo magnético $\mathbf{B}$, es:

$$d\mathbf{F}_m = i\, d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \qquad (26\text{-}14)$$

La magnitud de la torca magnética que recibe una espira conductora de área A, que lleva una corriente i y sumergida en un campo magnético B, es:

$$\tau = iAB \operatorname{sen}\theta \qquad (26\text{-}15)$$

Donde θ es el ángulo entre la normal del plano de la espira y el campo magnético.

PROBLEMAS

26-1. Expresar la unidad del campo magnético, el tesla, en términos de las unidades fundamentales (kg, m, s y C).

26-2. (*a*) Encontrar la magnitud del campo magnético necesario para que un electrón de 10 KeV describa una órbita de 1.0 m de diámetro. (*b*) ¿Cuál será el periodo del electrón?) (La masa del electrón es de 9.1×10^{-31} kg.)

26-3. Una partícula cargada, que tiene una relación de carga a masa igual a la del electrón, se mueve en un círculo de 20 cm de radio en el mismo sentido que las manecillas del reloj, cuando un campo magnético constante de 5.0 G actúa hacia arriba y normal al plano de la trayectoria (*a*) esta partícula ¿es un electrón o es un positrón? (el positrón es un electrón con carga positiva). (*b*) ¿Cuánto vale su velocidad? (*c*) ¿Cuánto vale su energía cinética?

26-4. En el ecuador el campo magnético de la Tierra es horizontal, con sentido hacia el norte, y con una magnitud de 0.30 G. (*a*) ¿En qué dirección (este u oeste) deberá dispararse un protón para que circunde la Tierra a velocidad constante? (*b*) ¿Cuál es el ímpetu del protón? (*c*) ¿Cuánto vale su energía cinética? (*d*) ¿Es aquí significativa la fuerza gravitacional? (Supóngase -incorrectamente- que la ley de Newton de la mecánica es aplicable.)

26-5. El haz de electrones de un osciloscopio tiene una energía de 10 keV/electrón. Si el haz está orientado de tal manera que los electrones se muevan de este a oeste, y que el campo magnético terrestre tenga una componente horizontal de 0.20 G norte y una componente vertical de 0.55 G hacia abajo: (*a*) ¿Cuál es la trayectoria del haz de electrones? (*b*) ¿cuánto vale su radio de curvatura?

26-6. Un electrón y un protón se inyectan simultáneamente en un campo magnético uniforme de 0.50 Wb/m^2. La velocidad en la inyección es perpendicular al campo magnético. Suponiendo que la masa del protón es 1836 veces mayor que la masa del electrón ¿cuántas revoluciones dará el electrón para que alcance de nuevo al protón en el punto de la inyección?

26-7. En cierto lugar del hemisferio norte terrestre, la magnitud del campo magnético de la Tierra es de 0.40 G y el ángulo de inclinación, o sea el ángulo entre la dirección entre las líneas del campo y la horizontal (apuntando hacia el norte) es de 70°. Una brújula apunta hacia el norte en este lugar. Encontrar el flujo magnético que atraviesa un aro circular de 10-cm^2 de área cuando (*a*) el aro está en el plano horizontal; (*b*) está en el plano vertical este-oeste.

26-8. Encontrar el ángulo, con respecto a la dirección del campo magnético uniforme **B**, en que se debe proyectar una partícula cargada dentro de este campo, de tal manera que la distancia que se mueva a lo largo de las líneas del campo sea igual a la distancia con que se mueva a lo largo de un arco circular perpendicular al campo.

26-9. Un haz de partículas cargadas es lanzado a lo largo de las líneas de un campo magnético constante. Si las velocidades de las partículas coinciden exactamente con las líneas del campo las partículas, por supuesto, no se desvían. Supongamos ahora que las partículas son desviadas en forma muy ligera. Demostrar que el campo magnético actúa como una especie de lente, en el sentido de que las partículas son llevadas a la dirección deseada.

26-10. Un electrón y un protón, en el mismo campo magnético uniforme, trazan círculos del mismo radio. (*a*) ¿Cuál es la relación entre los ímpetus del electrón y del protón? (*b*) ¿Cuál es la relación entre las energías cinéticas del electrón y del protón? (El protón tiene una masa 1836 veces mayor que la del electrón).

26-11. Cierta partícula cargada recorre una órbita circular de radio R cuando es proyectada en un campo magnético uniforme, perpendicularmente a la dirección de las líneas magnéticas del campo. Calcular el radio de la trayectoria circular de la partícula si se inyecta con doble energía cinética.

26-12. Se inyectan protones en una cámara al vacío, en sentido perpendicular a un campo magnético uniforme, describiendo entonces órbitas circulares con un periodo de 1.0 μs y un radio de 1.0 m. Encontrar (*a*) La magnitud del campo magnético y (*b*) la energía cinética de los protones.

26-13. Supóngase que se desea sostener un tramo recto de alambre de cobre del No. 10 por medio de la interacción magnética entre una corriente pasando por el alambre y el campo magnético de la Tierra, en un punto de ésta donde $B = 0.32$ G, siendo **B** horizontal y apuntando al norte. La densidad lineal del alambre es de 0.468 g/cm. (*a*) Encontrar la orientación del alambre donde la fuerza magnética que reciba sea máxima. Encontrar la (*b*) dirección y (*c*) la magnitud de la corriente de *electrones* (en amperes) que deje flotando al alambre, esto es, donde la fuerza magnética hacia arriba equilibre a su peso.

26-14. Unos protones se mueven en un círculo de 10 cm de radio en un campo magnético uniforme con $B = 1.0$ T. Encontrar (*a*) su ímpetu, (*b*) su velocidad y (*c*) su energía cinética.

26-15. Un electrón con 10-eV entra en un campo magnético uniforme de 0.20 T, siendo el ángulo entre la velocidad inicial del electrón y la dirección del campo magnético de 45°. Calcular la energía cinética del electrón después de haber atravesado la distancia de 50 cm a través del campo magnético.

26-16. Una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme traza una hélice cuyo eje de simetría coincide con la dirección del campo

magnético. Supongamos que una partícula con carga positiva se mueve en un campo magnético cuya magnitud crece gradualmente con la distancia, de tal manera que la partícula se mueve hacia la región donde el campo magnético es mayor. La trayectoria de la partícula —casi la de una hélice— ¿crecerá o disminuirá de radio conforme entra la partícula en las regiones del campo magnético más intenso?

26-17. Considérese una partícula de carga q y de masa m, que se mueve con la velocidad constante v_0 y con una trayectoria helicoidal en un campo magnético uniforme **B**. El ángulo constante entre la velocidad $\mathbf{v}_0$ y **B** vale θ. Demostrar que el paso de la hélice (que es la distancia, medida a lo largo del eje, entre puntos correspondientes de vueltas sucesivas) vale $2\,(mv/qB)\cos\theta$.

26-18. Un electrón atrapado en uno de los cinturones de Van Allen (véase Fig. 26-7) se encuentra momentáneamente en una región donde el campo magnético de la Tierra es de 1.0×10^{-2} G. (*a*) Encontrar cuánto tarda el electrón en hacer una revolución en una órbita circular y perpendicular al campo magnético (*b*) ¿Cuánto vale el radio de la órbita del electrón si su velocidad orbital es de 10^5 m/s?.

26-19. Cuando unos protones, que se mueven hacia el norte, penetran en un campo magnético uniforme de 0.80 Wb/m^2 que apunta verticalmente hacia abajo, son desviados en círculos horizontales de 25 cm de radio. Encontrar la magnitud y dirección de un campo uniforme eléctrico, que aplicado en la misma región del campo magnético, permita que pasen los protones sin ser desviados.

26-20. Unas partículas cargadas de masa m y carga q se aceleran desde el reposo por una diferencia de potencial V. Entonces estas partículas llegan en sentido perpendicular a un campo magnético de densidad de flujo B moviéndose entonces en arcos circulares de radio r. Derivar una expresión para g/m en términos de las cantidades medibles V, B y r.

26-21. Un haz de iones, cada uno de carga q y masa m se mueven en arcos circulares de radio R, cuando atraviesan perpendicularmente un campo magnético uniforme de magnitud B. Encontrar la magnitud del campo eléctrico uniforme, que aplicado en dirección perpendicular al plano de la velocidad de las partículas y al campo **B**, obligará a los iones a moverse en línea recta.

26-22. Considérese el dispositivo para medir masas representado en la Fig. 26-11*a*, en donde el campo magnético, en el selector de velocidad, es B_1 y en el selector de ímpetu es B_2. Demostrar que la masa de la partícula está dada por $m = qB_1B_2R/E$ donde q es la carga de la partícula, E es el campo eléctrico en el selector de velocidad, y R es el radio de la trayectoria en el selector de ímpetu.

26-23. Demostrar que la energía cinética de una partícula cargada, que penetra en el selector de la Fig. 26-11*c*, es inversamente proporcional al desplazamiento transversal de la partícula.

26-24. Un haz de átomos de cloro monoionizados, está compuesto de una mezcla de dos isótopos de masas 35 y 37 u ($1\ \text{u} = 1.66 \times 1.0^{-27}$ kg), penetra en sentido perpendicular en un campo magnético uniforme de 0.50 T. Todos los iones llevan la misma velocidad, 2.0×10^5 m/s. Después de que cambian de dirección en 180°, los iones inciden en una placa fotográfica. (*a*) ¿Cuál será la distancia entre las dos regiones de la película en donde inciden los iones? (*b*) Si el haz también contiene algunos átomos de cloro doblemente ionizados, ¿en qué lugar caerán en la película?

26-25. Una barra conductora, con una masa de 100 g, se desliza sin fricción sobre dos barras fijas conductoras separadas por 50 cm y unidas a un plano inclinado en ángulo de 10°. Un campo magnético constante de 0.10 Wb/m^2 actúa verticalmente hacia arriba (véase la Fig. P26-25). ¿Qué corriente deberá pasar por el conductor móvil para que éste ascienda por el plano inclinado con velocidad constante?

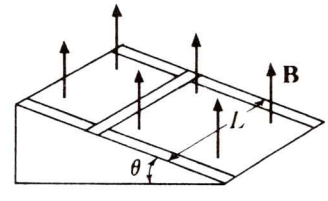


FIG. P26-25

26-26. (*a*) Encontrar la fuerza interna entre dos segmentos diferenciales vecinos de un aro circular plano, de 5.0 cm de radio que lleva una corriente de 100 A, cuando está sumergido en un campo magnético uniforme de 2.0 T perpendicular al plano del aro. (*b*) Esta fuerza, ¿es de tensión o de compresión?

26-27. Una bobina de 2.0 cm de diámetro tiene 300 vueltas. Calcular la máxima torca que recibe cuando, llevando una corriente de 10 mA, se encuentre sumergida en un campo magnético constante de 500 G.

26-28. Un haz colimado de partículas con carga q, masa m y velocidad v_0, inciden en una región de ancho W (medido a lo largo de v_0) en donde existe un campo magnético uniforme **B**, perpendicular a v_0. (Véase Fig. P26-28). (*a*) Demostrar que el haz emerge del campo magnético haciendo un ángulo con v_0 de $\theta = \text{sen}^{-1}(qBW/mv)$, habiéndose corrido lateralmente la distancia $D = (mv/qB)(1 - \sqrt{1 - (qBW/mv)^2})$. Nótese, que si el haz de energía incidente tiene un diámetro transversal finito, el haz emergente *no* tendrá una sección transversal *circular*. (*b*) La dimensión transversal del haz emergente, en el plano de la Fig. P26-28, ¿se contraerá o se dilatará con relación al haz incidente?

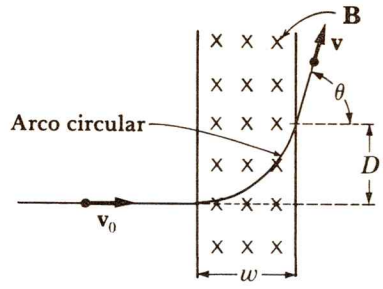


FIG. P26-28

Capítulo

27

LAS FUENTES DEL CAMPO MAGNETICO

En el capítulo anterior se trató una parte de la interacción magnética: La fuerza magnética que recibe una partícula cargada que se mueve en un campo magnético. Ahora se completará la discusión de la fuerza magnética, describiendo cómo se crea el campo magnético por medio de cargas eléctricas móviles o por corrientes eléctricas.

27—1 EL EXPERIMENTO DE OERSTED

Como ya se ha visto, la presencia de un campo magnético puede determinarse observando si una partícula cargada en movimiento recibe una fuerza magnética. Análogamente la existencia de una torca magnética sobre una brújula o sobre una espira de corriente, indicará la presencia de un campo magnético.

Las cargas eléctricas en movimiento crean un campo magnético. Esto fue demostrado primero en el experimento fundamental de H. C. Oersted (1777-1851) llevado a cabo en 1820. Oersted demostró que un conductor con corriente producirá torcas sobre los pequeños imanes que lo rodeen (véase Fig. 27-1). Las líneas magnéticas del campo consisten de espiras circulares que rodean al conductor y colocadas en planos perpendiculares a éste. Se ha encontrado que el sentido del campo magnético se relaciona con la corriente eléctrica por medio de una regla de la mano derecha: si el pulgar de la mano derecha apunta en la dirección de i, los demás dedos dan el sentido de las líneas **B**. Invirtiendo la corriente, se invierte el sentido del campo magnético en cada punto. Observando la frecuencia con que oscila un pequeño imán, cuando se separa de su posición de equilibrio, (alta frecuencia cuando B es grande, y baja, cuando es pequeño), se encuentra que la magnitud del campo magnético disminuye al aumentar la distancia del conductor.

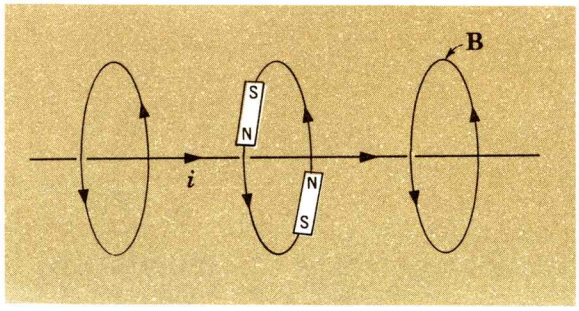


FIG. 27-1. El efecto Oersted: Un conductor con corriente engendra lazos de campo magnético.

Se encuentra también que la magnitud de **B**, en cada punto del espacio, es directamente proporcional a la corriente i.

27—2 LA LEY DE BIOT Y SAVART

Lo antedicho es la relación fundamental que describe al campo magnético producido por una carga eléctrica móvil o, en forma equivalente, por un pequeño elemento de un conductor con corriente: esta relación se llama la *Ley de Biot y Savart*. Como el campo magnético de una sola carga móvil, o de un pequeño elemento de corriente, es muy débil, se prueba la validez de la Ley de Biot y Savart indirectamente teniendo en cuenta que están de acuerdo con la observación todas las predicciones de los campos magnéticos que se hacen con dicha ley.

Considérese la Fig. 27-2 donde una carga positiva q se mueve con la velocidad **v**, y donde se desea encontrar el campo magnético en algún punto del espacio, digamos el punto P. El radio vector desde la carga móvil al punto P es **r**, y el ángulo entre los vectores **v** y **r** es ϕ. La dirección del campo magnético de inducción **B** en el punto P, penpendicular al plano que contiene a los vectores **v** y **r**, está dado por una regla de la mano derecha: para una carga positiva, si se imagina que el vector **v** gira a través del ángulo más pequeño, hasta alinearse con **r**, y este movimiento está indicado por lo dedos de la mano, entonces el pulgar apuntará en la dirección y sentido de **B**.

La magnitud de **B** en el punto P vale:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \operatorname{sen} \phi}{r^2} \qquad (27\text{-}1)$$

El campo magnético es proporcional a la carga y a su velocidad, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Puesto que B también varía con el sen ϕ, el campo vale cero a lo largo de la línea que contiene al vector velocidad.

La cantidad μ_0, denominada la *permeabilidad del espacio libre*, es una constante, y en el SI de unidades se le *asigna* el siguiente valor número:

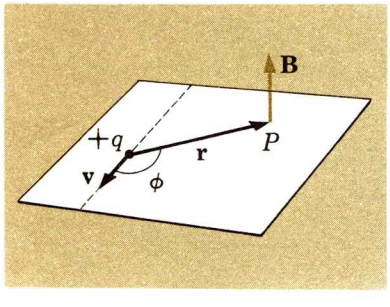


FIG. 27-2. Una partícula cargada y móvil, y su campo magnético **B** en el punto P.

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A-m} \qquad (27\text{-}2)$$

El lector podrá verificar que cuando μ_0 se da en webers sobre ampere-metro, la magnitud del campo B en la Ec. (27-1) tiene como unidades webers sobre metro cuadrado o su equivalente, newtons sobre ampere-metro. El factor 4π que aparece en la ley de Biot y Savart, no aparece después en la formulación matemática de la ley de Ampere, [Ec. (27-12)]. (Esta situación es semejante en la fuerza eléctrica: en el sistema racionalizado de unidades, 4π aparece en la ley de Coulomb, pero no en la de Gauss.)

Puede verse de (27-1) que el campo de inducción magnética a la distancia perpendicular de 1 m de una carga de 1 C, moviéndose a 1/s, vale $B = 10^{-7}$ Wb/m^2, o 10^{-3} G.

Se pueden incorporar las direcciones relativas de **B**, **r** y **v** en la ley de Biot y Savart escribiendo (27-1) en forma vectorial, utilizando el producto cruz o producto vectorial:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \qquad (27\text{-}3)$$

Nótese que la distancia r aparece ahora a la tercera potencia en el denominador para compensar el factor adicional r en el numerador.

Es fácil ver que las líneas magnéticas del campo, asociadas con una carga móvil, consisten en espiras circulares concéntricas con respecto a la carga móvil y colocadas en planos perpendiculares a la velocidad de la partícula, como se indica en la Fig. 27-3. Imaginemos que todas las cantidades están en el miembro derecho de la Ec. (27-3) son fijas, excepto la dirección de **r**. Entonces, haciendo girar el vector **r**, alrededor del vector **v**, mientras se mantiene fijo el ángulo ϕ entre ellos; el vector **B**, sin cambiar de magnitud, gira entonces en un círculo contenido en un plano perpendicular.

Aunque la relación de Biot y Savart puede expresarse de modo fundamental en términos del campo magnético producido por una carga móvil, principalmente se trata con conductores que llevan corriente al aplicar esta relación. Por consiguiente es deseable tener una expresión del campo magnético $d\mathbf{B}$ producido por un elemento infinitesimal de corriente dl, que lleva la corriente i. La dirección y sentido del elemento de longitud dl se escoge con la misma dirección y sentido de la corriente convencional, esto es, $d\mathbf{l}$ corresponde a la dirección y sentido en que se mueven las cargas positivas. Se ha encontrado antes que

$$q\mathbf{v} = i\, d\mathbf{l} \qquad (26\text{-}3), (26\text{-}14)$$

Por medio de esta identidad, sustituyéndola en la Ec. (27-3), se tiene la ley de Biot y Savart para un elemento de corriente:

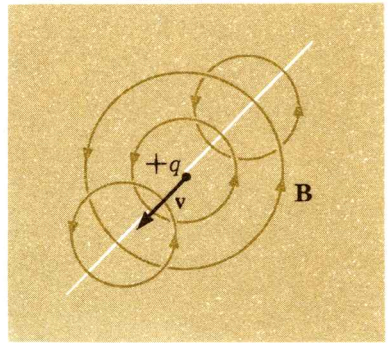


FIG. 27-3. Espiras de campo magnético, debidas a una partícula móvil cargada.

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \tag{27-4}$$

El campo $d\mathbf{B}$ está escrito ahora en forma diferencial; esto es necesario, puesto que todos los elementos de una espira de corriente contribuyen, en un punto dado, con sus respectivos campos diferenciales. El campo resultante $\mathbf{B}$ es la suma vectorial de estos campos infinitesimales (véase Fig. 27-4).

Ahora que ya se conoce el campo magnético creado por una carga eléctrica en movimiento [Ec. (27-3)] y también la fuerza magnética que se ejerce en una segunda carga móvil [Ec. (26-3)], se puede escribir completa la interacción magnética. Tomando q_a como la carga que crea al campo magnético $\mathbf{B}_a$, que actúa entonces sobre la carga móvil q_b, las Ecs. (27-3) y (26-3) dan
Interacción magnética entre dos cargas:

$$\mathbf{B}_a = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_a \mathbf{v}_a \times \mathbf{r}}{r^3} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}_b = q_b \mathbf{v}_b \times \mathbf{B}_a \tag{27-5}$$

El radio vector $\mathbf{r}$ se extiende desde q_a a q_b.

Las relaciones correspondientes para la fuerza eléctrica entre las dos cargas son las siguientes.
Interacción eléctrica entre dos cargas:

$$\mathbf{E}_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_a \mathbf{r}}{r^3} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}_b = q_b \mathbf{E}_a \tag{27-6}$$

Se sabe ahora que parte de la fuerza entre partículas cargadas no depende de sus velocidades (la fuerza eléctrica), y se sabe también la parte de la interacción entre partículas cargadas que depende de la velocidad (la fuerza magnética). Se puede estar inclinado a pensar que, por lo que concierne al electromagnetismo básico, ésta es toda la historia. ¡No es así! los campos eléctricos y magnéticos no sólo pueden ser creados por cargas eléctricas en

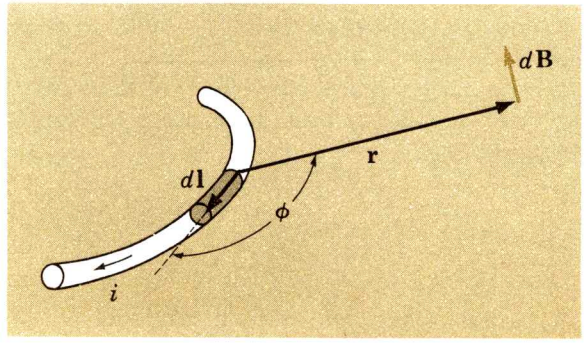


FIG. 27-4. Campo magnético producido por un elemento $d\mathbf{L}$ de un conductor con corriente.

reposo o en movimiento, sino que un campo eléctrico puede ser creado por un campo magnético variable (Cap. 28) y un campo magnético puede ser creado por un campo eléctrico variable. (Sec. 30-1). Además, se verá en el Cap. 30 que los campos eléctricos y magnéticos desprendidos de cargas eléctricas aceleradas pueden existir independientemente como ondas electromagnéticas.

27—3 EL CAMPO MAGNETICO DE ALGUNAS GEOMETRIAS SENCILLAS

La ley de Biot y Savart, Ec. (27-4), da el campo magnético producido por un elemento *infinitesimal* de corriente. Sin embargo no existe por sí mismo dicho elemento infinitesimal de corriente, sino que siempre forma parte de un circuito de corriente. En cosencuencia, para encontrar el campo magnético en cualquier punto debido a un conductor que lleva corriente, se deben sumar, o integrar las contribuciones de todos los elementos significativos de corriente.

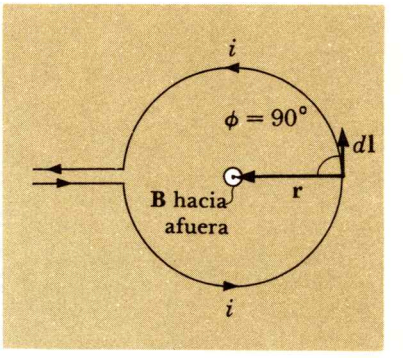


FIG. 27-5. El campo magnético en el centro de un conductor circular.

Centro de conductor circular. Consideraremos primero el campo magnético en el centro de una corriente plana y circular, de radio r, que lleve una corriente i.- (Véase la Fig. 27-5). Por supuesto deberá haber reóforos para llevar y para sacar la corriente, pero dichos reóforos se colocan juntos, cancelándose del todo sus efectos magnéticos, porque llevan corrientes iguales en sentidos opuestos. En el centro del círculo la dirección del campo magnético $d\mathbf{B}$, producido por el elemento dl de la circunferencia, es perpendicular al plano del papel y apunta hacia afuera de éste. En realidad, todos los elementos del lazo circular contribuyen al campo en el centro con la misma dirección y sentido, por lo que dichas contribuciones pueden sumarse algebraicamente. El ángulo ϕ entre $\mathbf{r}$ y $d\mathbf{l}$ es de 90°; en consecuencia (27-4) da la magnitud de **B:**

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\int dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i 2\pi r}{r^2}$$

El radio vector r es igual aquí en magnitud al radio de la circunferencia. La suma de los elementos de longitud alrededor de la circunferencia anterior es sencillamente la circunferencia $2\pi r$, por lo que el campo B en el centro de la circunferencia es:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi i}{r} \qquad (27\text{-}7)$$

La Fig. 27-6 representa las líneas del campo magnético en un plano transversal, y a través del eje, de la espira circular de corriente. Cerca de los alambres las líneas del campo son casi circulares, puesto que en estos lugares los elementos más lejanos de corriente son poco importantes. Las líneas del campo son simétri-

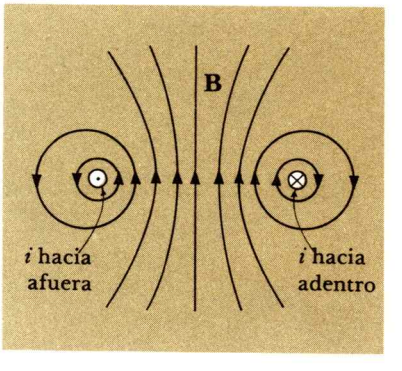


FIG. 27-6. Líneas del campo magnético en un plano transversal a un conductor circular.

cas con relación al eje de simetría del aro de alambre. Se puede, por supuesto, encontrar el sentido del campo magnético en el centro del aro aplicando la regla de la mano derecha a uno de sus elementos, colocando el pulgar derecho en la dirección de la corriente, y los demás dedos darán entonces el sentido de las líneas del campo magnético. Pero también se pueden relacionar las direcciones del campo y de la corriente como sigue: se colocan los dedos de la mano derecha indicando el sentido de la *corriente* alrededor del aro; entonces el pulgar derecho apunta en la dirección del *campo* magnético en el centro del aro.

Para dar idea de la magnitud del campo cerca de un aro circular, supongamos que fluye por él una corriente de 10 A y que el aro tiene un radio de 2π cm. Aplicando la Ec. (27-7), el campo en el centro vale:

$$B = \frac{(4\pi) \times 10^{-7}\ \text{Wb/A-m})\,(10\ \text{A})}{2(2\pi \times 10^{-2}\ \text{m})} = 10^{-4}\ \text{Wb/m}^2 = 1\ \text{G}$$

El campo en esta situación es un poco mayor que el campo magnético de la Tierra. Desde luego, si hubiera N aros circulares aproximadamente coincidentes, el campo en todos juntos deberá ser multiplicado por el factor N.

Conductor largo y rectilíneo. Encontraremos ahora el campo magnético producido por una corriente i que pasa por un conductor rectilíneo e infinitamente largo. Es claro que este conductor no puede construirse, puesto que siempre habrá reóforos de regreso; por consiguiente, los resultados que se encontrarán se aplican sólo si la distancia al alambre rectilíneo es pequeña comparada con la distancia donde el alambre rectilíneo cambia de dirección.

Nos concentraremos primero en el campo $d\mathbf{B}$ en el punto P, producido por el elemento rectilíneo de corriente $i d\mathbf{x}$, Fig. 27-7. Para el sentido indicado hacia arriba de la corriente, el campo en P, a la distancia perpendicular R del conductor, es perpendicular al papel y penetra hacia atrás. El ángulo entre el elemento de corriente y el radio vector $\mathbf{r}$ es ϕ. De (27-4) se tiene:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,dx\,\text{sen}\,\phi}{r^2} \qquad (27\text{-}8)$$

Cada elemento de corriente del conductor produce un campo en el punto P, perpendicular al papel y hacia atrás, por lo que integrando esta ecuación sobre la longitud entera del conductor se encuentra en campo total. Las cantidades x, r, y ϕ no son independientes; por tanto debe escribirse (27-8) en términos de una sola variable. La integración se vuelve más sencilla si se escoge el ángulo α, el complemento de ϕ, como la variable. De la

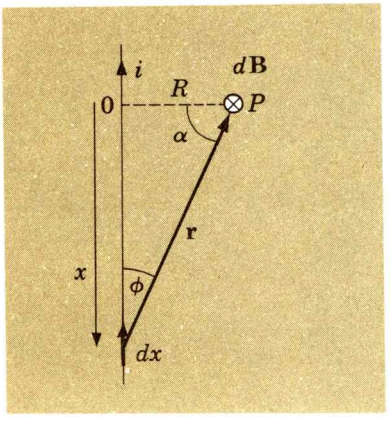


FIG. 27-7. Campo magnético de un conductor rectilíneo y muy largo.

geometría de la Fig. 27-7 puede verse que:

$$x = R \tan \alpha$$

Entonces $$dx = R \sec^2 \alpha \, d\alpha$$

También, $$r = R \sec \alpha$$

y $$\operatorname{sen} \phi = \cos \alpha$$

Substituyendo estas ecuaciones en la Ec. (27-8), se tiene

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i(R \sec^2 \alpha \, d\alpha)(\cos \alpha)}{(R \sec \alpha)^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R} \cos \alpha \, d\alpha$$

Para tomar en cuenta toda la longitud infinita del conductor, se integrará desde $\alpha = -90°$ a $90°$. Por tanto,

$$\int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha \, d\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2i}{R} \tag{27-9}$$

El campo magnético está formado por círculos que rodean al conductor en planos perpendiculares al alambre, cayendo la magnitud de campo de manera inversa a como crece la distancia al conductor, como fue probado primero, en 1820, por J. B. Biot (1774-1862) y F. Savart (1791-1841). Por medio de (27-9) es fácil demostrar que siendo i = 10 A y R = 2 cm, el campo B es justamente de 1 G.)

Es interesante comparar (27-9), que da el campo magnético de una corriente rectilínea y muy larga, con (21-5), que da el campo eléctrico de un alambre cargado infinitamente largo: $E = (1/4\pi\varepsilon_0)(2\lambda/r)$. Ambas ecuaciones son de forma semejante, lo que no resulta sorprendente. Tanto el campo eléctrico como el magnético caen de manera inversa a r, como una consecuencia de que tanto la interacción eléctrica como la magnética entre cargas *puntuales*, son relaciones de *cuadrado inverso*. La corriente i es una medida de la fuente del campo magnético y la densidad lineal de carga, λ, es una medida de la fuente del campo eléctrico. Las cantidades ε_0 y μ_0 son constantes de proporcionalidad, respectivamente, para la interacción eléctrica y para la magnética.

Ejemplo 27-1

Un alambre rectilíneo con una corriente i perpendicular y hacia atrás del papel, transporta una carga positiva cuya densidad de carga uniforme es λ. Calcular a qué velocidad debe dispararse una

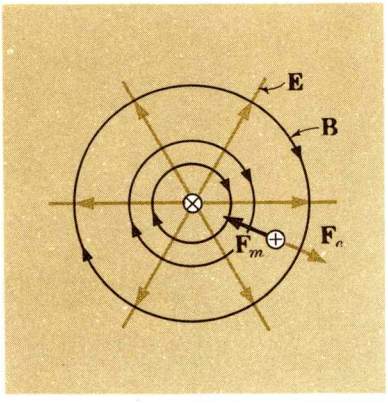


FIG. 27-8

partícula cargada, paralelamente al conductor y en el sentido de la corriente, para que su velocidad permanezca constante y en línea recta.

El campo eléctrico variable y las líneas concéntricas del campo magnético están representadas en la Fig. (27-8). Una partícula con carga positiva, que atraviese el papel hacia atrás con la velocidad v, está sometida a una fuerza eléctrica $F_e = qE$ con dirección radial hacia afuera y a una fuerza magnética $F_m = qvB$, radialmente hacia adentro. (Una partícula con carga *negativa* que se mueva también en la misma dirección queda sometida a fuerzas eléctricas y magnéticas con sentidos contrarios. Por otra parte, para una partícula cargada para cualquier signo, con movimiento que *sale* del papel, tanto la fuerza magnética como la eléctrica, tienen el *mismo* sentido).

Entonces, la partícula cargada no se desvía, cuando

$$F_e = F_m \quad \text{o} \quad qE = qvB$$

Por lo que

$$v = \frac{E}{B}$$

Nótese que esta relación es la misma que la obtenida para el selector de velocidad, Ec. (26-9). Los campos magnético y eléctrico valen:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \tag{27-9}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \tag{21-5}$$

En consecuencia, substituyendo estas dos ecuaciones en la anterior, se tiene

$$v = \frac{\lambda}{i(\varepsilon_0\mu_0)}$$

Nótese que se cancela la distancia R, de la partícula cargada al alambre.

Es fácil demostrar que la fuerza magnética es por lo general mucho menor que la eléctrica, suponiendo que una partícula cargada se mueve a 1.0 m/s paralelamente a un alambre que lleva una corriente de 1.0 A. Entonces, la relación para encontrar v, antes dada, demuestra que la densidad lineal de carga necesaria es de sólo 10^{-17} C/m = 10^{-5} pC/m.

27—4 LA FUERZA MAGNETICA ENTRE CONDUCTORES QUE LLEVAN CORRIENTE

Encontremos la fuerza magnética entre dos conductores rectos, paralelos y muy largos que se encuentran a la distancia d.

Supongamos primero que las corrientes i_a e i_b tienen el mismo sentido: véase Fig. 27-9. La corriente i_a produce líneas magnéticas circulares, donde el campo magnético en el lugar donde está el alambre b, está dado por la Ec. (27-9):

$$B_a = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i_a}{d} \tag{27-9}$$

La fuerza magnética $\mathbf{F}_b$ que recibe la corriente i_b del campo magnético $\mathbf{B}_a$ es, de (26-13), a la izquierda y con la magnitud:

$$F_b = i_b L B_a \tag{26-13}$$

donde L es la longitud del conductor b. Combinando estas ecuaciones se tiene:

$$F_b = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i_a i_b L}{d} \tag{27-10}$$

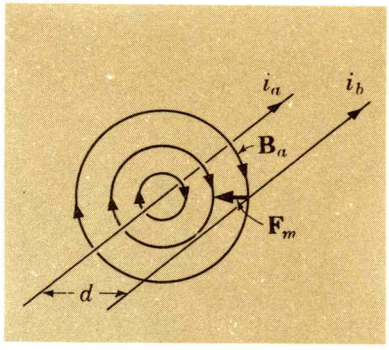


FIG. 27-9. La fuerza magnética que recibe un conductor a, de un conductor paralelo b.

Es fácil demostrar que la fuerza magnética que recibe el conductor a del campo magnético de i_b es de la misma magnitud que la de F_b, y que esta fuerza tiene sentido hacia la *derecha;* esto es, dos conductores que llevan corriente en el *mismo* sentido se *atraen* magnéticamente entre uno a otro. Por otro lado, si las dos corrientes tienen sentidos *opuestos,* los dos conductores se *rechazan,* como puede comprobarse aplicando la forma vectorial de la Ec. (26-13). Así, corrientes paralelas se atraen y antiparalelas se rechazan.

Se puede tomar a la atracción magnética como el *efecto magnético fundamental.* Puesto que los conductores son eléctricamente neutros, no hay fuerzas eléctricas que compliquen el fenómeno; además, no hay necesidad de emplear alambres de materiales magnéticos. La interacción magnética entre conductores rectilíneos fue estudiada primero en 1822 por A. M. Ampère (1775-1836), quien encontró que la fuerza varía en forma inversa con la distancia entre los conductores, de acuerdo con (27-10).

Como ejemplo, se encontrará la magnitud de la fuerza magnética con la Ec. (27-10), suponiendo dos conductores que llevan cada uno una corriente de exactamente 1 A. y separadas por 1 m. La fuerza magnética por unidad de longitud, F/L, que recibe cualquier conductor, vale:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i_a i_b}{d} = \frac{(10^{-7}\ \text{Wb/A-m})(2)(1\ \text{A})^2}{1\ \text{m}}$$
$$= 2 \times 10^{-7}\ \text{N/m}$$

Nótese que 1 Wb = 1 N-m/A. La fuerza por metro es *exactamente* 2×10^{-7} N.

Recuérdese que a la constante de permeabilidad μ_0 se le *asigna* el valor $4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A-m. En realidad, la relación que da la fuerza magnética entre dos conductores paralelos y rectilíneos sirve para *definir el amperio* o ampere, como la unidad de corriente eléctrica en el SI de unidades. Así se tiene la *definición* del ampere (y por tanto también del coulomb, el cual es un ampere-segundo): las corrientes iguales que llevan dos conductores rectilíneos y paralelos colocados a la distancia de 1 m en el vacío son, cada una de ellas, *por definición,* exactamente de 1 A cuando la fuerza magnética por unidad de longitud entre ellos vale 2×10^{-7} N/m. Estas cantidades pueden medirse con precisión: la fuerza magnética comparada con una balanza con una pesa normal, y las longitudes medidas con un metro normal. En la práctica, las llamadas balanzas de corriente, usadas para medir la fuerza magnética, emplean dos *espiras* planas circulares y concéntricas por donde pasa la corriente, en lugar de dos conductores rectilíneos, debido a las complicaciones que surgen porque los conductores rectos no son infinitos.

27—5 LEY DE GAUSS EN EL MAGNETISMO

Recordemos primero la ley de Gauss en electricidad:

$$\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (22\text{-}3)$$

El flujo total eléctrico ϕ_E que atraviesa cualquier superficie es proporcional a q, la carga neta encerrada en la superficie. La ley de Gauss implica que la fuerza de Coulomb entre cargas puntuales es de cuadrado inverso, que las líneas de fuerza eléctrica terminan en las cargas eléctricas, y que los campos eléctricos pueden ser superpuestos como vectores.

Una ley semejante puede escribirse para el flujo magnético ϕ_B:

$$\phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \qquad (26\text{-}4)$$

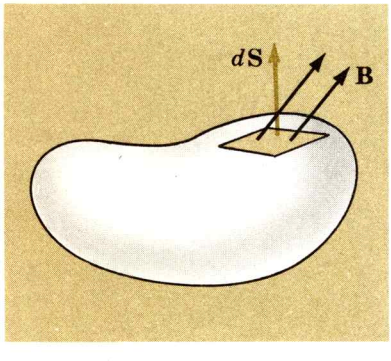


FIG. 27-10. Flujo magnético a través del elemento de superficie exterior $d\mathbf{S}$.

Puesto que la fuerza magnética entre cargas puntuales móviles es también de cuadrado inverso, se puede representar apropiadamente la densidad de flujo **B** de un campo magnético de inducción por líneas del campo magnético. Estas indican, por su tangente, la dirección del campo en cualquier punto del espacio y su "densidad", a través de una área perpendicular, poniéndola proporcional a la magnitud del campo **B**.

Se encuentra el flujo magnético total $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, a través de cualquier superficie cerrada, sumando las contribuciones $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ de todos los pequeños elementos de la superficie. Por convención, el vector $d\mathbf{S}$ se toma como positivo cuando apunta hacia el exterior de la superficie cerrada; véase Fig. 27-10. Entonces el flujo magnético es positivo cuando las líneas magnéticas "salen" de la superfi-

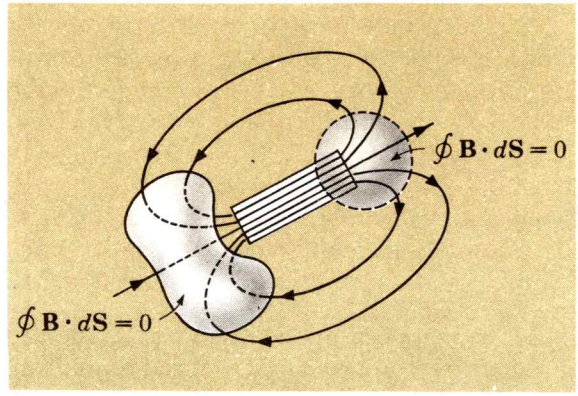


FIG. 27-11. Ley de Gauss del magnetismo: el flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada vale cero.

cie y negativas cuando "entran". Si el flujo total magnético en una superficie cerrada vale cero, esto implica que es igual el número de líneas que entran y que salen de dicha superficie, que es lo que se encuentra precisamente en cada caso. Todas las observaciones experimentales son compatibles con el enunciado:

$$\phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad (27\text{-}11)$$

Esta es la *ley de Gauss para el magnetismo*. En efecto, esta ley dice que las líneas del campo magnético siempre forman trayectorias cerradas; Si no fuera así, se podrían encontrar situaciones en donde el flujo magnético que sale de una superficie cerrada, no se igualara con el flujo magnético que entra. Es decir, si el flujo magnético no fuera siempre cero a través de una superficie cerrada, las líneas magnéticas terminarían en "cargas" magnéticas, o polos magnéticos, del mismo modo como las líneas eléctricas terminan en las cargas eléctricas.

Entonces, ¿cómo interpretar los imanes permanentes, donde se ve claramente, (con limaduras imantadas de hierro) a las líneas del campo saliendo de las que parecen ser polos magnéticos, situados en los extremos del imán, como se indica en la Fig. 27-11? Lo que sucede aquí es que las líneas del campo *pasan por el interior del imán, formándose nuevamente trayectorias cerradas.*

La ley de Gauss del magnetismo asegura que no existen en la naturaleza polos magnéticos aislados, o monopolos; los más sutiles experimentos lo confirman.

27—6 LEY DE AMPERE

La ley de Ampère es una alternativa para la ley de Biot-Savart para las corrientes eléctricas y los campos magnéticos que generan. En algunos aspectos es análoga a la ley de Gauss eléctrica, la cual es una alternativa para la ley de Coulomb. La ley de Ampère es especialmente útil para encontrar el campo magnético en aquellos casos de gran simetría geométrica.

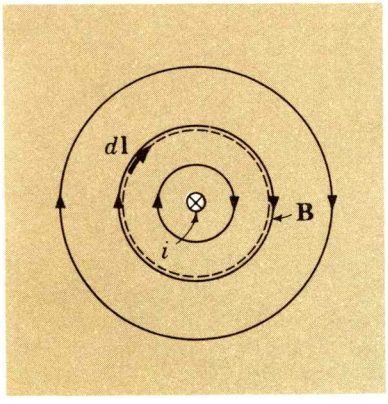


FIG. 27-12. Campo magnético de un conductor rectilíneo.

Consideremos primero la relación para el campo magnético producido por un conductor rectilíneo, infinitamente largo:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i}{r} \qquad (27\text{-}9)$$

Rearreglando:

$$B(2\pi r) = \mu_0 i$$

Donde se reconoce que el miembro izquierdo de la ecuación como el valor del campo B, en todos los puntos a la distancia r del conductor, multiplicado por $2\pi r$, la circunferencia a esa distancia; véase Fig. 27-12 Lo anterior puede escribirse:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \qquad (27\text{-}12)$$

donde la integral de línea del miembro izquierdo de la ecuación implica que se tome la componente de **B,** a lo largo de la trayectoria elemental $d\mathbf{l}$, alrededor de una trayectoria cerrada. Por supuesto, tomando una trayectoria circular alrededor de un conductor rectilíneo, la dirección de **B** siempre coincide con la de $d\mathbf{l}$, siempre que se recorra la trayectoria en el mismo sentido que la línea del campo magnético. La corriente i es la corriente encerrada por la trayectoria alrededor del conductor.

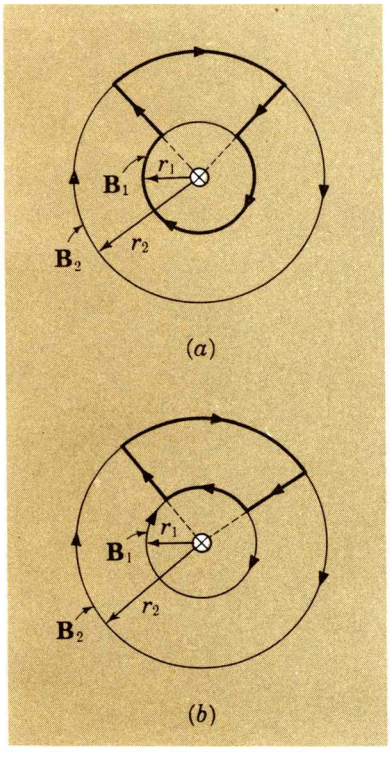


FIG. 27-13. (*a*) Cuando la trayectoria encierra a la corriente, la integral de línea $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ es $\mu_0 i$; (*b*) si no es así, la integral de línea vale cero.

Lo notable con respecto a (27-12), que es el enunciado formal de la *ley de Ampère,* es lo siguiente: se aplica a *cualquier* trayectoria *cerrada* y a cualquier configuración de los conductores eléctricos, cuando la corriente i se toma como la corriente *neta* pasando por cualquier área encerrada por la trayectoria, lo que probaremos en seguida.

Primero veremos un caso restringido, el campo de un conductor rectilíneo infinitamente largo y tomando una trayectoria en un plano perpendicular al conductor, como en la Fig. 27-13*a*. Aquí se tiene una trayectoria formada por arcos circulares que coinciden con las líneas del campo y en líneas radiales, perpendiculares a dichas líneas. El campo tiene una magnitud B_1 en el radio r_1 y B_2 en el r_2. De la Ec. (27-9) $B_1 r_1 = B_2 r_2$; esto es, el campo cae inversamente con la distancia al conductor. A lo largo de las líneas radiales no hay contribuciones a la integral de línea, ya que $\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}$ a lo largo de estos segmentos. Además, si la trayectoria se recorre en el mismo sentido que las líneas del campo magnético, es fácil ver que para arcos circulares, la disminución de B_1 a B_2 al pasar a las distancias r_1 y r_2, se compensa exactamente por el aumento de la longitud del arco para esta trayectoria, por lo que se tiene de nuevo:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \qquad (27\text{-}12)$$

Supongamos ahora que la trayectoria *no* encierra al conductor, como en la Fig. 27-13*b*.; de nuevo no hay contribución a la integral de línea de las trayectorias radiales. De nuevo, también, $B_1 r_1 = B_2 r_2$, por lo que las contribuciones a lo largo de los arcos circulares es de la misma magnitud, pero ahora los signos difieren. Si la trayectoria se recorre en el sentido del campo en el arco r_2, se recorre en sentido contrario en el r_1, e inversamente. En consecuencia, la integral de línea *total* vale ahora cero:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

lo que corresponde a una corriente cero "enhebrada" o "eslabonada" a la trayectoria escogida.

Es fácil tratar con trayectorias más complicadas, ya que se puede considerar a cualquier trayectoria de forma arbitraria, como reemplazada por un cierto número de arcos circulares y segmentos radiales (Fig. 27-14).

Como se encontró anteriormente (véase la Fig. 27-13) las secciones radiales no contribuyen a la integral de línea, y todas las secciones circulares que subtiendan el mismo ángulo contribuyen en la misma medida. Entonces, en cada caso, la integral de línea del campo de inducción magnético, es igual a las corrientes "eslabonadas" o con la trayectoria cuadrada y multiplicada por μ_0. Nótese, además que si se invierte el sentido de recorrido, aparece el factor -1 en el miembro izquierdo de (27-12), por lo que se comprende que cuando se invierte el sentido de las líneas magnéticas, se invierte también. Una trayectoria que *no* está en un plano perpendicular al conductor no introduce complicaciones, puesto que el campo magnético para un largo conductor rectilíneo queda encerrado por completo en planos perpendiculares; al recorrer la trayectoria paralelamente al conductor no contribuye a la integral de línea.

Supongamos ahora que se tienen dos o más conductores de longitud infinita, no por fuerza paralelos y sin llevar la misma corriente; esto no introduce nada nuevo. Los campos magnéticos se suman por medio de las reglas de adición vectorial, por tanto, si la ley de Ampère se aplica a un conductor, se aplica tambien a un conjunto de éstos. Sin embargo, debe considerarse à la corriente i como la corriente *neta* encerrada por la trayectoria escogida, poniendo signos *diferentes* a las corrientes que salen o que entran en una carga de la superficie limitada por la trayectoria. Para demostrar que la ley de Ampère se aplica a conductores de cualquier forma, y no sólo a conductores rectilíneos, se prueba que *cualquier* distribución de corriente, y el campo magnético asociado, puede reemplazarse por conductores rectilíneos equivalentes (la prueba es complicada, por lo que aquí será omitida)*

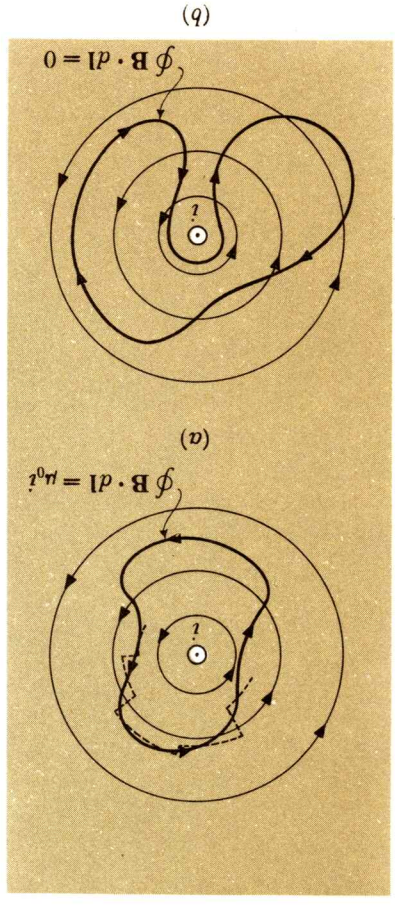


FIG. 27-14. La ley de Ampère aplicada a una forma cualquiera de la trayectoria (*a*) cuando rodea al conductor y (*b*) cuando no lo rodea.

*Para una prueba sencilla véase el corto artículo de F. Reines en *Am. J. Phys.* **39**, 838 (1971.)

En resumen, si se conoce la integral de línea del campo magnético en una trayectoria cerrada, se conoce la corriente neta eslabonada con la trayectoria. Si la integral de línea vale cero, no hay corriente neta incluida dentro de la trayectoria. Las corrientes que están *fuera* de la trayectoria no contribuyen a la integral de línea.

Aunque la ley de Ampère es por completo general, es fácil de aplicar en la práctica sólo cuando el campo magnético tiene una geometría que puede deducirse, basándose en la simetría: entonces se sabe qué trayectoria escoger. (Esto es una reminiscencia de la ley de Gauss eléctrica; si la geometría del campo eléctrico se conoce basándose en la simetría, se sabe cómo escoger a la más apropiada superficie gausiana.)

Conviene hacer ahora una observación final a la ley de Ampère: como está escrita en (27-12) resulta *incompleta*. En la Sec. 30-1 se tratará de cómo un campo eléctrico variable, así como una corriente encerrada, pueden contribuir a la integral de línea del campo magnético.

Ejemplo 27-2.
Un conductor coaxial está formado por un cilindro sólido interior, de radio r_1 que lleva una corriente I, y de un conductor exterior concéntrico, de radios interno y externo, r_2 y r_3 respectivamente, y que lleva una corriente I en sentido opuesto; ver Fig. 27-15*a*. Encontrar el campo magnético en los puntos siguientes (*a*) entre los dos conductores (*b*) afuera del conductor exterior, y (*c*) dentro del conductor interior.

(*a*) Fundándose en la simetría se puede asegurar que el campo magnético en cualquier punto, donde sea diferente de cero, está formado por círculos concéntricos con los conductores. Para la región entre ellos, conviene escoger una trayectoria circular de radio r para aplicar la ley de Ampère: sólo la corriente I *que queda dentro* contribuye al campo; la corriente en el conductor exterior, cualquiera que sea su magnitud y sentido, *no* tiene efecto en la región interior. Aplicando la ley de Ampère se tiene, entonces:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ cuando } r_1 < r < r_2$$

(*b*) En una trayectoria circular tomada *afuera* de los dos conductores, la corriente neta encerrada, $I - I$, vale cero. Por lo tanto el campo es cero en todos los puntos exteriores:

$$B = 0 \text{ cuando } r > r_3$$

(*c*) Se supone que la corriente I está distribuida de modo uniforme en la sección transversal del conductor interior. En una

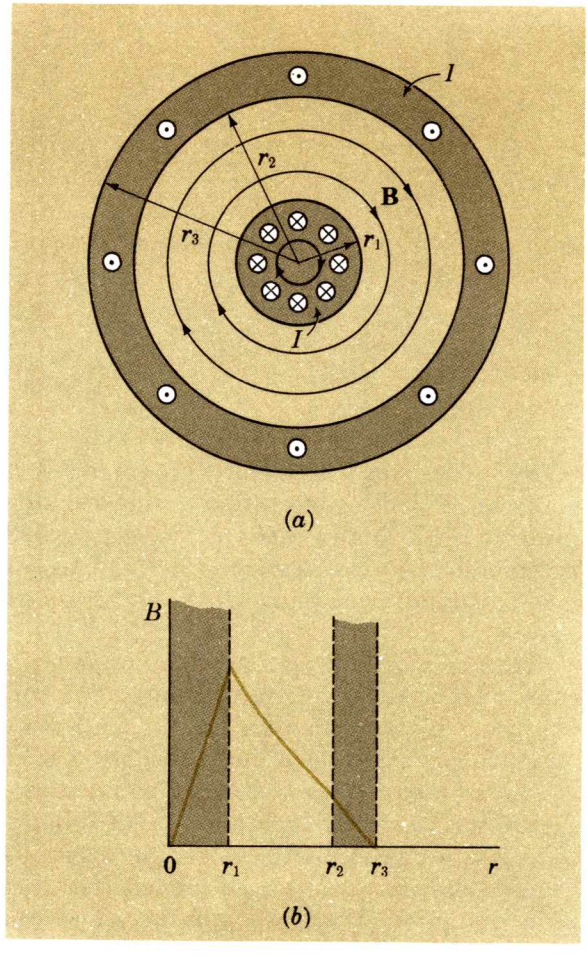


FIG. 27-15. (*a*) Un par de conductores coaxiales que llevan corrientes iguales, pero con sentido opuesto. (*b*) Magnitud de B como una función de r en la parte (*a*).

trayectoria circular de radio r dentro del conductor interior, la fracción de la corriente en el interior de la trayectoria es justamente la relación de las áreas circulares, $\pi r^2/\pi r_1^2$; esto es, dentro del radio r la corriente es $(r/r_1)^2 I$. Entonces la ley de Ampère da:

$$B(2\pi r) = \mu_0 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 I$$

$$B = \frac{\mu_0 r}{2\pi r_1^2} I \quad \text{para } 0 < r < r_1$$

La variación de B con r se muestra en la Fig. 27-15*b*.

27—7 EL SOLENOIDE

Un solenoide consiste de un enrollamiento apretado en hélice de un alambre conductor. Puede considerarse, en efecto, como

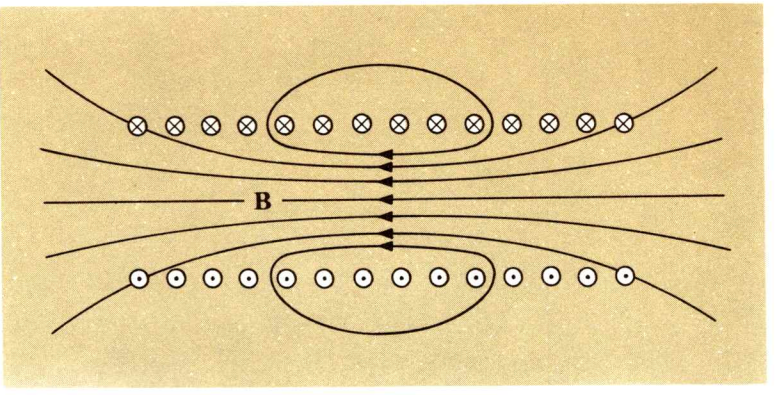


FIG. 27-16. Líneas del campo magnético en un solenoide largo.

una serie de aros conductores circulares colocados en un tubo cilíndrico. El campo magnético de un solenoide largo es en esencia uniforme cerca de su centro, como se representa en la Fig. 27-16. Por completo, la configuración del campo magnético externo de un solenoide largo es muy semejante al de un imán permanente largo.

Encontremos la magnitud del campo magnético en el centro de un solenoide de longitud infinita. Por supuesto, esto implica estrictamente un solenoide cuya longitud es mucho mayor que su diámetro. Cada aro lleva una corriente i_1 y el *número de vueltas por unidad de longitud* se designa con n. Consideremos, entonces, la trayectoria cerrada representada en la Fig. 27-17, a la cual se aplicará la ley de Ampère. El campo magnético justamente fuera del solenoide en A valdrá en esencia cero, puesto que afuera el mismo número de líneas se dispersan sobre un área infinita, por lo que aquí no hay contribución a la integral de línea a lo largo de la porción A. El campo interior en el punto B será paralelo al eje del solenoide; si no lo fuera, esto implicaría un solenoide de longitud no infinita. En consecuencia, el campo es perpendicular a la trayectoria de trazos a lo largo de las porciones transversales C y D; estas partes de la trayectoria cerrada no contribuyen a la integral de línea de **B**. La única contribución, entonces, proviene del segmento interior de longitud L; dentro de ella la corriente *total* encerrada es nLi_1. Por tanto, la ley de Ampère queda:

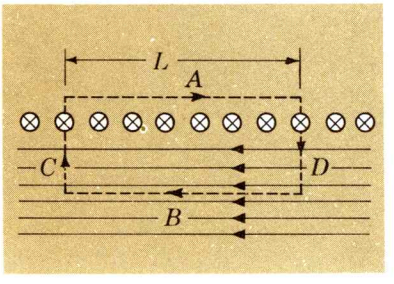


FIG. 27-17. Ley de Ampère aplicada a un solenoide.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

$$BL = \mu_0 n L i_1$$

$$B = \mu_0 n i_1 \qquad (27\text{-}13)$$

El campo magnético en cualquier punto cerca del centro de un solenoide largo es uniforme, independientemente de la longitud del eje, y dependiendo sólo del número de vueltas por unidad de longitud y de la corriente i_1 que pasa por cada vuelta.

RESUMEN

El campo magnético **B** generado por una carga q que se mueve a la velocidad **v**, está dada por la ley de Biot y Savart:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \qquad (27\text{-}3)$$

donde **r** es el radio vector trazado desde la carga al punto donde se mide **B**. La fuerza magnética dependiente de la velocidad entre dos cargas puntuales en movimiento varía inversamente como el cuadrado de la distancia entre ellas. A la permeabilidad del vacío, μ_0, se le asigna la magnitud $4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A-m.

Otra forma de la ley de Biot y Savart, aplicable al campo $d\mathbf{B}$, producido por un elemento de corriente $d\mathbf{l}$, es:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \qquad (27\text{-}4)$$

Aplicando la relación de Biot y Savart a un conductor rectilíneo de longitud infinita, se encuentra que el campo magnético disminuye inversamente con la distancia perpendicular al conductor. En forma análoga, la fuerza magnética entre dos conductores paralelos con corriente es inversamente proporcional a la distancia que los separa. El ampere se define en términos de la fuerza magnética con dicho arreglo.

El flujo magnético neto que atraviesa cualquier superficie cerrada es siempre cero:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad (27\text{-}11)$$

De acuerdo con la ley de Ampère, la integral de la línea del campo de inducción magnética a lo largo de cualquier camino cerrado, es proporcional a la corriente neta a través de cualquier área encerrada por la trayectoria:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \qquad (27\text{-}12)$$

PROBLEMAS

27-1. El haz de un acelerador de partículas consiste de protones de 20 MeV con una corriente de 1.0 μA. (*a*) Calcular la magnitud del campo magnético a 1.0 mm de distancia del haz, suponiendo que éste tiene una sección transversal infinitesimal. (*b*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico a la misma distancia de dicho haz?

27-2. Un protón de 5.0 MeV se mueve, a velocidad constante, a lo largo del sentido positivo del eje X. Encontrar la dirección y magnitud de los campos magnético y eléctrico en el punto $x = 1.0 \times 10^{-10}$ m, y $= 1.0 \times 10^{-10}$ m en el instante en que el protón pasa por el origen.

27-3. Un electrón y un protón se mueve paralelamente con el mismo sentido a la velocidad de 1.0×10^6 m/s. Ellos se encuentran entre sí a la distancia de 10^3 Å (*a*) ¿Cuánto vale la fuerza eléctrica entre las dos partículas? (*b*) ¿Cuánto la magnética?

27-4. En el ecuador el campo magnético de la Tierra es de 0.30 G, norte. Este campo se anula con el campo magnético en el centro de un aro conductor de 4.0 cm de radio. Encontrar (*a*) la orientación requerida por el aro y (*b*) la dirección y magnitud de la corriente que lleva.

27-5. La fuerza eléctrica es una fuerza *central*, que actúa a lo largo de la línea que conecta las dos partículas eléctricamente cargadas. Demostrar que la fuerza magnética entre dos partículas con carga eléctrica *no* es, en general, una fuerza central. (*Sugerencia:* considérese por ejemplo una partícula que se mueve hacia el norte y otra hacia el este).

27-6. Dos partículas con cargas idénticas se mueven paralelamente y en el mismo sentido a la velocidad v igual para las dos. (*a*) Demostrar que las partículas se rechazan con una fuerza eléctrica, pero se atraen con una fuerza magnética. (*b*) Demostrar que la relación de magnitudes entre las fuerzas eléctrica y magnética está dada por $(\varepsilon_0\mu_0)v^2$. (En la Sec. 30-3 se demuestra que la velocidad c de la luz es igual a $1/(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$; por tanto la relación anterior entre la fuerza magnética y la eléctrica vale $(v/c)^2$.

27-7. Dos alambres largos y rectilíneos, separados L, llevan cada uno la corriente i. Encontrar la magnitud del campo magnético en el punto P de la Fig. P27-7, cuando las corrientes tienen (*a*) el mismo sentido, (*b*) sentidos opuestos.

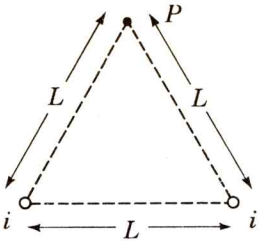


FIG. P27-7

27-8. Un conductor consiste de un arco circular de 60° y de dos reóforos conectados a este arco, radiales a partir del centro del arco y de una longitud efectiva infinita; véase Fig. P27-8. Encontrar el campo magnético en el centro del arco (*Sugerencia*: considerar por separado los campos de los reóforos rectos y del arco circular)

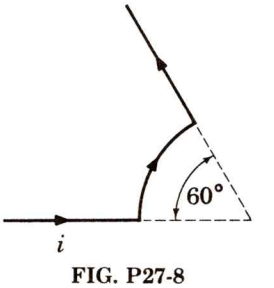


FIG. P27-8

27-9. Un conductor cuadrado de lado L se encuentra a la distancia R de un alambre rectilíneo infinita-

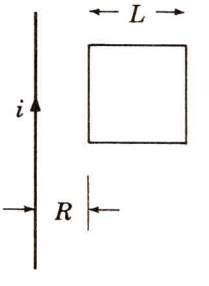


FIG. P27-9

mente largo que lleva una corriente i. El plano del cuadro contiene al alambre conductor y dos de los lados del cuadro son paralelos a dicho alambre. Véase la Fig. P27-9. Calcular el flujo magnético total que atraviesa el cuadro.

27-10. Considérese una bobina circular de N vueltas y de radio a que lleva una corriente i. Demostrar que la magnitud del campo magnético en un punto situado en el eje de la espira y a una distancia x del centro vale:

$$B = \frac{(\mu_0/4\pi)\,(2NiS/x^3)}{(1 + a^2/x^2)^{3/2}}$$

donde $S = \pi a^2$ es el área de la bobina. Nótese que a grandes distancias $a/x \to 0$. Así que entonces B varía inversamente al *cubo* de la distancia al centro de la bobina: $B = (\mu_0/4\pi)(2NiS/x^3)$. Este resultado es muy semejante al encontrado para el dipolo eléctrico (véase Prob. 21-26). Por esta razón, la cantidad $NiS = \mu_d$, el producto de la corriente en la espira y su área, se denomina el *momento del dipolo magnético.*

27-11. El campo *geomagnético* —el campo magnético de la Tierra — es en esencia el de un dipolo magnético (véase el Prob. 27-10). En la superficie de la Tierra y más allá, es apropiado emplear la relación que describe el campo bajo condiciones donde $a/x \to 0$. En el Polo Norte magnético la magnitud del campo terrestre *axial* es de 0.62 G. Encontrar el momento magnético que representa al campo geomagnético. (Debido a anomalías regionales y locales en la superficie terrestre, y dentro de ella la principal utilidad del modelo del dipolo magnético del campo geomagnético se encuentra en su descripción cuantitativa del campo en los puntos del espacio que se encuentran a menos de unos radios terrestres de la superficie. Los polos *geomagnéticos no* coinciden con los polos *geográficos:* el eje magnético terrestre está inclinado unos 11.5° con respecto al eje de rotación).

27-12. Por medio de la ecuación del campo magnético a lo largo del eje de una espira de corriente (véase Prob. 27-10), demostrar que la magnitud del campo magnético en un punto del eje de un solenoide de longitud *finita,* vale $B = (\mu_0/4\pi)(2\pi ni)(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$, donde n es el número de vueltas por unidad de longitud a lo largo del eje, y los ángulos θ_1 y θ_2 se indican en la Fig. P27-12. (*Sugerencia:* al realizar la integración necesaria, es conveniente cambiar variables de x a θ, usando la relación $a/x = \tan\theta$.)

27-13. Por medio de la Ec. (27-13), que da el campo en el eje de un solenoide de longitud infinita, encontrar el campo magnético *en un extremo* de un solenoide muy largo. (*Sugerencia:* conceptualmente, un solenoide de longitud infinita puede considerarse que puede dividirse en cualquier punto de su longitud en dos solenoides semiinfinitos los cuales se colocan juntos en dicho punto).

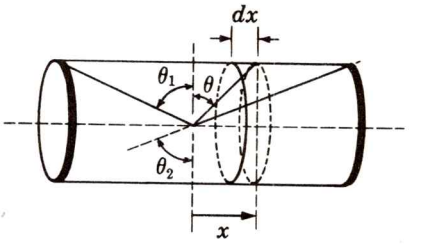


FIG. P27-12

27-14. Dos alambres conductores largos, cada uno de los cuales lleva una corriente i, son paralelos y están en un plano vertical cerca de la superficie terrestre. El alambre superior está bien sujeto mecánicamente, y se supone que los dos alambres permanecen en escencial rectilíneos. Encontrar la corriente i para que una sección del conductor inferior se sostenga contra su propio peso por medio de una fuerza magnética que apunte hacia arriba. La densidad lineal de los alambres es de 1.0 g/m y están a la distancia de 10 cm. Tómese $g = 9.8$ m/s².

27-15. Una partícula cargada se mueve a 1.0×10^6 m/s, en sentido paralelo a un largo alambre rectilíneo que lleva una corriente de 1.0 A. Si el alambre está también eléctricamente cargado, la partícula puede continuar moviéndose con velocidad constante, en sentido paralelo al alambre y a *cualquier* distancia de él. ¿Cuál será la densidad lineal de carga que se necesita?

27-16. Un cuadro conductor de 10 cm por lado, lleva una corriente de 2.0 A y está a 4.0 cm de distancia de un alambre rectilíneo, infinitamente largo, que lleva una corriente de 1.0 A, como se muestra en la Fig. P27-16. (*a*) Encontrar la fuerza magnética resultante que recibe el cuadro. (*b*) Encontrar la torca magnética resultante que recibe el cuadro.

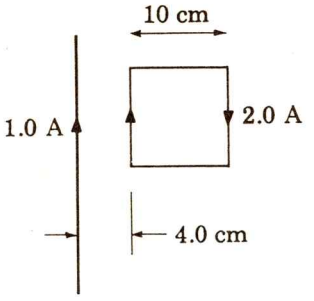


FIG. P27-16

27-17. Dos conductores rectilíneos y paralelos, de 50 cm de largo, llevan cada uno la corriente de 10 A en sentidos opuestos. Encontrar a qué distancia de los alambres la fuerza repulsiva entre ellos es de 1.0×10^{-4} N?

27-18. Un alambre de 1.00 mm de radio lleva una corriente de 100 A. Encontrar el campo magnético (*a*) en la superficie del alambre (*b*) en un punto a 0.50 mm del centro del alambre, y (*c*) a 2.00 mm del centro del alambre.

27-19. Un gran número, N, de alambres rectilíneos y largos se arreglan en forma simétrica en la superficie de un cilindro circular recto de radio R, siendo los alambres paralelos al eje del cilindro. Cada conductor lleva la misma corriente i; por medio de la ley de Ampère, describir el campo magnético dentro y fuera del cilindro.

27-20. Refiriéndonos al Ej. 27-2, demostrar que en la región $r_2 < r < r_3$ el campo magnético vale:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2}$$

27-21. Las dos relaciones básicas de la interacción magnética entre partículas eléctricamente cargadas:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \frac{(\mu_0/4\pi)(q\mathbf{v} \times \mathbf{r})}{r^3}$$

incluyen un producto cruz y, por tanto, la regla de la mano derecha para dicho producto. Supongamos que alguna persona usa de continuo una regla de la mano *izquierda* para el producto cruz, en lugar de la regla convencional de la mano derecha. ¿Serán acertados o equivocados los *movimientos* verdaderos de las partículas, predicho por las relaciones anteriores?

27-22. La magnitud del campo eléctrico en tres arreglos sencillos de la carga eléctrica, una carga puntual, una línea recta infinita de carga y un plano infinito uniformemente cargado, varía con la distancia a la fuente, respectivamente, como $1/r^2$, $1/r^1$, y $1/r^0$ (esto es, cuadrado inverso, inverso y constante). La fuerza magnética entre cargas eléctricas *puntuales* varía como $1/r^2$. Por analogía, (*a*) ¿Cuál será la variación de la magnitud del campo magnético con la distancia a un conductor rectilíneo de longitud infinita? (*b*) encontrar la variación esperada en la magnitud del campo magnético de una hoja infinita de corriente, esto es, una colección infinita de conductores de longitud infinita y colocados uno junto al otro en un plano.

27-23. Dos alambres paralelos y rectilíneos llevan corrientes de la misma magnitud. Encontrar la relación para la magnitud del campo magnético resultante en un punto P, colocado en el plano de los dos alambres y entre ellos. Especificar la posición de P por su distancia x a la línea media, que está a la distancia a de los dos alambres. Véase Fig. P27-23. (*a*) Demostrar que $B = 2\rho/(1-\rho^2)B_1$ cuando las corrientes son paralelas y (*b*) $B = 2/(1-\rho^2)B_1$ cuando las corrientes son antiparalelas. La relación adimensional ρ se define como $\rho = x/a$ y $B_1 = \mu_0/4\pi)2i/a$ es la magnitud del campo magnético producida por la corriente *en un alambre, sólo* cuando P está en la línea central y $x = 0$. (*c*) Cuando las corrientes son antiparalelas ¿Cuál será el ancho de la tira a cada lado de la línea media, donde B está dentro de 3.0% de su magnitud en la línea central?

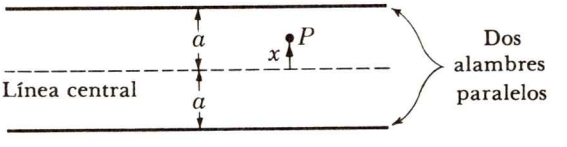


FIG. P27-23

27-24. Un cilindro sólido conductor de radio R lleva una corriente i. Calcular cómo debe variar la corriente por unidad de área con la distancia r al centro del conductor, si la magnitud del campo magnético dentro del conductor tiene el mismo valor en todos sus puntos.

27-25. "Una hoja conductora" se produce colocando juntos sobre una superficie plana a muchos alambres

rectilíneos y largos, cada uno de los cuales lleve una corriente i en el mismo sentido. Encontrar el campo magnético en cualquier punto cerca de la hoja conductora.

27-26. Con argumentos de simetría y la ley de Ampère, encontrar el campo magnético entre dos hojas infinitas conductoras, que llevan iguales corrientes, de magnitud i y con sentidos opuestos.

27-27. Un solenoide consiste de 200 vueltas de alambre enrollados alrededor de un cilindro de 2.0 cm de radio y 50 cm de largo. (*a*) Encontrar el campo magnético en el centro del solenoide, cuando por éste pasa una corriente de 2.0 A. (*b*) ¿Cuánto vale el campo magnético promedio en un extremo?

27-28. Un toroide es un solenoide doblado en forma de rosca. Demostrar que el campo magnético en cualquier punto dentro de las espiras de corriente, varía inversamente con la distancia al centro del toroide y que el campo es cero en cualquier otro punto.

27-29. Demostrar que el campo magnético debido a una corriente i en un tramo recto de alambre de longitud *finita,* está dado por $B = (\mu_0/4\pi)(i/R)$ (sen α_2 − sen α_1), donde los ángulos se indican en la Fig. P27-29. [*Sugerencia:* reexamine el análisis que lleva a la Ec. (27-9).]

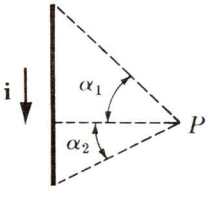


FIG. P27-29

27-30. Con la relación desarrollada en el Prob. 27-29, demostrar que el campo magnético en el centro de una bobina cuadrada del lado L y con N vueltas, cada una de las cuales conduce una corriente i, vale $B = (\mu_0/4\pi)8\sqrt{2}\,Ni/L$.

27-31. Dos bobinas circulares planas e idénticas, con N vueltas cada una, con ejes coincidentes, se colocan paralela una a otra a una distancia R, donde R es el radio de cada bobina. (Véase Fig. P27-31.) Cada bobina lleva una corriente i en el mismo sentido, por lo que el campo magnético resultante en la región central, entre las bobinas, resulta aumentada. (*a*) Con la relación para el campo axial de una corriente circular (véase Prob. 27-10) demostrar que la magnitud del campo axial en el centro m del eje, a una distancia $R/2$ de cada bobina, está dado por

$$B_m = \left(\frac{16\sqrt{5}}{25}\right)\beta = 1.431\beta$$

donde $\beta = (\mu_0/4\pi)\ (2NiS/a^3) = \frac{1}{2}\mu_0 Ni/a;\ S = \pi a^2$ es el área de cada bobina. (*b*) Demostrar que el campo combinado en el centro c de cada bobina es

$$B_c = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\beta = 1.354\beta$$

Por último, notar que $B_c/B_m = 1.354/1.431 = 94.58\%$. (Este arreglo fue primero utilizado por Helmholtz, por lo cual a este par de bobinas se le llama *bobinas de Helmholtz,* y son de gran importancia práctica para lograr un campo magnético uniforme en una apreciable región del espacio.)

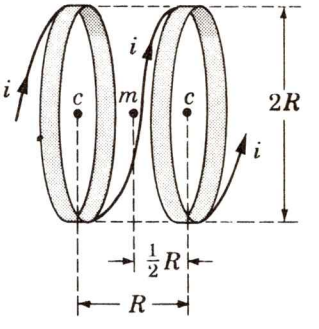


FIG. P27-31

27-32. En el modelo planetario de Bohr del átomo de hidrógeno, se supone que un electrón se mueve a 2.2×10^6 m/s, en una órbita circular de radio 5.3×10^{-11} m, con un protón en el centro. Encontrar (*a*) la corriente electrónica equivalente; (*b*) la magnitud y dirección del campo magnético producida por la corriente electrónica, en el lugar donde está el protón.

Capítulo
28

INDUCCION ELECTROMAGNETICA E INDUCTANCIA

Hasta este punto siempre se ha considerado a un campo eléctrico como originado en las cargas eléctricas. En este capítulo se tratarán los campo eléctricos que no se originan directamente de las cargas eléctricas, sino que se originan en un flujo magnético variable o cambiante. Este fenómeno se conoce como inducción electromagnética y su enunciado cuantitativo es la ley de Faraday, que fue quien la encontró.

Empezamos por considerar un ejemplo sencillo, la fem que se produce en una espira conductora que se mueve dentro de un campo magnético; después se encontrará la relación entre la fem inducida y el cambio en el flujo magnético. Se darán otros ejemplos de inducción electromagnética y se obtendrá la forma general de la ley de Faraday, la cual relaciona la rapidez del cambio del flujo magnético con el campo eléctrico no conservativo que genera.

Se define la autoinducción de un conductor y se calcula para una geometría sencilla; finalmente, se deriva la energía de un inductor que lleva corriente y la densidad de energía del campo magnético.

28—1 FEM DE MOVIMIENTO

Cuando una corriente eléctrica pasa por un conductor sumergido en un campo magnético, actúa sobre el conductor una fuerza magnética que lo mueve. ¿Tendrá lugar el fenómeno inverso? Esto es, si se aplica una fuerza a un conductor para moverlo a través de un campo magnético, ¿se generará una corriente eléctrica en el conductor? La respuesta es *sí*, como veremos. La Fig. 28-1 representa un conductor de longitud l en un campo magnético uniforme, con una densidad de flujo **B**, dirigida hacia adentro del papel. Supongamos que el conductor se mueve hacia la derecha con la velocidad **v**, siendo esta velocidad perpendicular tanto al conduc-

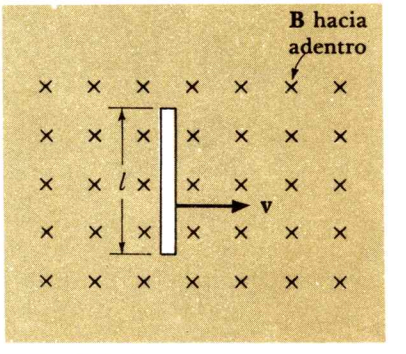


FIG. 28-1. Un conductor que se mueve a través de un campo magnético.

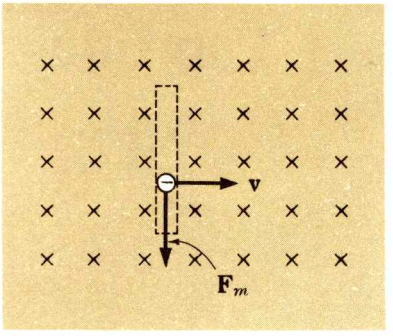


FIG. 28-2. La fuerza magnética F_m que recibe un electrón libre dentro de un conductor en movimiento.

tor como a las líneas del campo magnético. Al empujar al conductor hacia el lado derecho, también se empujan los electrones libres que contiene. Ahora, si una partícula con carga negativa se mueve hacia la derecha a través del campo magnético que penetra en el papel, queda sometida a una fuerza magnética $\mathbf{F}_m$, que actúa hacia abajo, como se indica en la Fig. 28-2.

Así, al mover el conductor hacia la derecha, se obliga a los electrones libres de su interior a moverse hacia el extremo inferior y dejar el extremo superior. (Por supuesto, fuerzas magnéticas comparables actúan también en las cargas positivas y en los electrones ligados, pero estas cargas están entrelazadas a la red cristalina del conductor y no se mueven ni hacia arriba ni hacia abajo.) El extremo inferior del conductor adquiere entonces una carga negativa neta, mientras que el extremo superior adquiere una carga positiva de la misma magnitud. Sin embargo, los electrones no pueden continuar moviéndose en forma indefinida hacia el extremo inferior, cuyos primeros electrones que llegan rechazan a los demás electrones libres, esto es, se crea un campo eléctrico dentro de la barra por la separación de cargas; conforme más cargas se acumulan en los extremos, más se incrementa el campo eléctrico hasta que la fuerza eléctrica que recibe un electrón libre dentro de la barra, se equilibra con la fuerza magnética que recibe dicho electrón, y ya no tendrá lugar ninguna posterior separación de cargas.

El campo eléctrico dentro de la barra origina una diferencia de potencial entre sus extremos; dicha diferencia de potencial existe solamente mientras el conductor se mueva a través del campo magnético. Si el conductor se lleva a reposo, ya no hay separación de cargas y la diferencia de potencial cae a cero. Cuando el conductor se mueva hacia la izquierda, la diferencia de potencial invierte su polaridad.

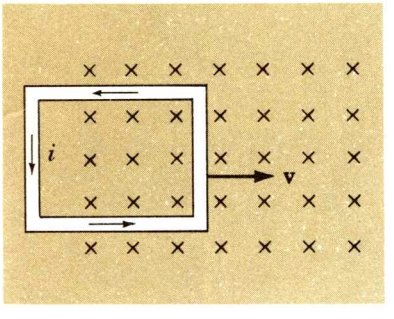


FIG. 28-3. Un cuadro conductor, uno de cuyos lados se mueve a través de un campo magnético transversal **B**.

Supongamos ahora que nuestro conductor es la porción derecha de un cuadro conductor, representado en la Fig. 28-3. Imaginemos (sin que sea realidad) que el campo magnético externo cae bruscamente a cero en sus límites izquierdo y derecho y que el extremo derecho del cuadro conductor está, al principio, fuera del campo magnético; entonces conforme el cuadro se mueve hacia la derecha, no hay separación de cargas en el extremo izquierdo del conductor, pero sí la hay en el extremo derecho. Además, ninguna fuerza magnética actúa sobre los electrones en los dos segmentos horizontales del cuadro.* Al moverse el cuadro hacia la derecha, el exceso de electrones en el extremo inferior del conductor puede recorrer en sentido dextrógiro el cuadro y regresar por el extremo superior; esto es, al mover el conductor a través del campo

*Estrictamente hablando, actúa una fuerza magnética para producir una diferencia de potencial a través del diámetro de alambre (el llamado efecto *Hall*)

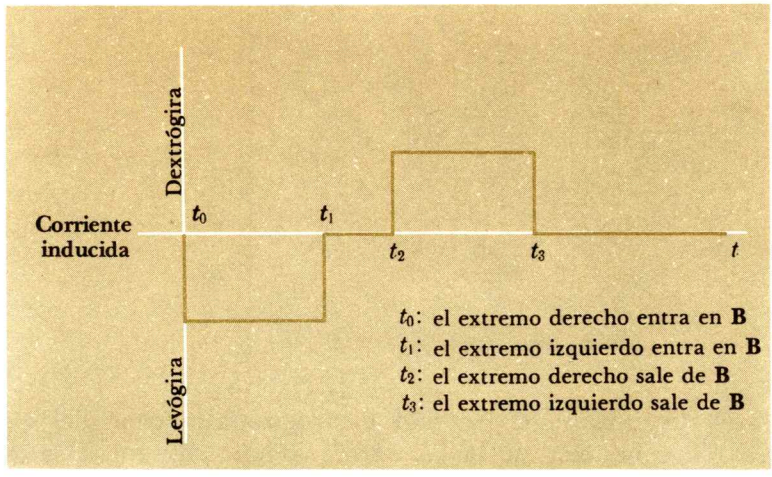


FIG. 28-4. La corriente inducida como una función del tiempo para el caso representado en la Fig. 28 3.

magnético (permaneciendo el extremo izquierdo fuera del campo magnético) se genera una corriente *i* levógira en el cuadro conductor. La corriente se impulsa, por supuesto, por la separación de cargas que se mantiene entre los extremos del conductor derecho, y esta separación de cargas tiene su origen en el trabajo dado por un agente externo para mantener constante a la velocidad **v**. La corriente inducida existe mientras el lado derecho atraviese el campo magnético, y cesa cuando el conductor esté en reposo; y la corriente circula alrededor del cuadro en sentido opuesto cuando se invierte la dirección del movimiento.

Cuando todo el cuadro se encuentra dentro de la región del campo magnético constante tiene lugar la separación de cargas tanto en el extremo derecho como en el izquierdo, y no hay corriente inducida. Si se continúa moviendo el conductor hasta que su extremo derecho emerja del campo magnético, mientras que el izquierdo está aún dentro del campo, la separación de cargas ocurre únicamente en el extremo izquierdo del conductor y se invierte ahora la dirección de la corriente inducida. (Véase Fig. 28-4) Se pueden sumarizar estos efectos diciendo que *se genera una corriente inducida en el cuadro cuando cambia el flujo magnético que pasa a través del cuadro,* y es este cambio en el flujo magnético lo que produce la llamada fem de movimiento: esto es un ejemplo del fenómeno general de la *inducción electromagnética.*

Analicemos ahora con más detalle la situación presentada en la Fig. 28-3, para encontrar cómo se relaciona la fem inducida con el flujo magnético cambiante (véase Fig. 28-5.) Se demostrará primero que una fuerza constante externa **F** debe aplicarse al conductor, para que éste se mueva a través del campo magnético con la velocidad constante **v**.

Como se describió antes, el exceso de electrones originalmente en el extremo inferior de la barra conductora de la Fig. 28-2 son

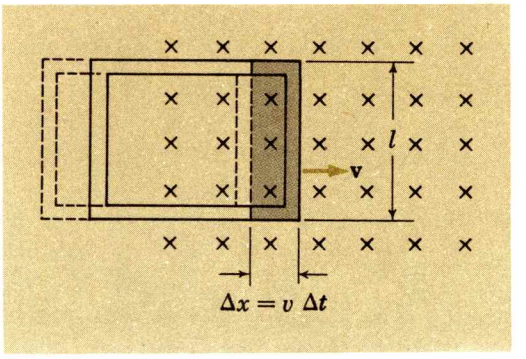


FIG. 28-5. El área del cuadro, por el cual pasan las líneas del campo magnético, aumenta con el tiempo.

libres de moverse en sentido dextrógiro alrededor del cuadro cerrado conductor de la Fig. 28-5, lo que disminuye la fuerza eléctrica hacia arriba sobre los electrones libres que permanecen en el segmento derecho de la Fig. 28-5. Sin embargo, la fuerza magnética hacia abajo que reciben los electrones sigue siendo la misma, suponiendo que el cuadro conductor se mueve hacia la derecha con la velocidad constante **v**. Por consiguiente, existe otra vez una fuerza neta hacia abajo sobre cada electrón obteniéndose una componente hacia abajo de su velocidad y una corriente inducida i.

Con una componente de la velocidad hacia abajo, los electrones se desviarán hacia la izquierda por el campo magnético hasta que alcancen el borde posterior del segmento conductor; aquí ellos experimentan una fuerza eléctrica hacia la derecha de la barra, que equilibra justamente a la fuerza magnética dirigida hacia la izquierda, por lo que los electrones permanecen en la barra. Entonces los electrones se mueven a una velocidad constante oblicua, con una componente v a la derecha y una componente v_d hacia abajo.

La separación de cargas entre las orillas posterior y frontal del conductor continúa hasta que la fuerza eléctrica (debida a la separación de cargas) que actúa a la derecha de cada uno de los electrones de conducción que quedan, equilibra justamente a la fuerza magnética que actúa hacia la izquierda. Después de esto, todos los electrones de conducción dentro del conductor se mueven con la misma velocidad oblicua v hacia la derecha, y v_d hacia abajo.

La fuerza magnética hacia la izquierda que recibe cada electrón se equilibra con una fuerza eléctrica hacia la derecha debida a la carga no balanceada en el conductor. Por la tercera ley de Newton, habrá una fuerza eléctrica hacia la izquierda sobre el conductor. La fuerza total que recibe el conductor, debida a todos los electrones en movimiento, puede expresarse en términos de la corriente i con la Ec. (26-12):

$$F = Bil \qquad \text{(26-12), (28-1)}$$

Si el conductor continúa moviéndose hacia la derecha a la velocidad constante **v**, una fuerza externa constante **F** dirigida hacia la derecha y de magnitud *Bil* debe aplicarse al conductor. Puesto que el conductor de la Fig. 28-5, recorre una distancia $\Delta x = v\,\Delta t$ en el tiempo Δt, el trabajo ΔW, dado por la fuerza externa en este tiempo es, por la Ec. (28-1),

$$\Delta W = F\,\Delta x = (Bil)\,(v\,\Delta t) \tag{28-2}$$

La corriente i es $\Delta q/\Delta t$, donde Δq es la carga neta transportada en el intervalo de tiempo Δt. Por tanto, con $\Delta q = i\,\Delta t$, (28-2) puede escribirse:

$$\Delta W = Blv\,\Delta q \tag{28-3}$$

El trabajo ΔW dado por la fuerza externa puede también interpretarse como el trabajo dado por una fem en las cargas circulantes alrededor del cuadro conductor. Puesto que la fem $\mathscr{E}$ es, en general, el trabajo dado a la unidad de carga por una fuente en un circuito,

$$\mathscr{E} = \frac{\Delta W}{\Delta q} \tag{25-1}$$

Se puede escribir (28-3) en la forma

$$\mathscr{E} = Blv \tag{28-4}$$

La fem $\mathscr{E}$ existe en tanto el conductor esté en movimiento y *sólo uno* de sus extremos esté en movimiento a través del campo magnético. Sin embargo, la Ec. (28-4) se aplica sólo cuando **v**, **B** y la dirección del alambre conductor sean mutuamente perpendiculares. Si un conductor de 1-m, se mueve a 1 m/s a través de un campo constante de 1 Wb/m^2, la fem inducida es de 1 V.

Para relacionar la fem con el cambio de flujo magnético encerrado en una espira conductora, recordaremos que el flujo magnético ϕ_B está dado en general, por

$$\phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{26-4}$$

Como demuestra la Fig. 28-5, cuando el cuadro avanza la distancia Δx, el área del cuadro que es atravesada por las líneas del campo magnético aumenta en $\Delta A = l\,\Delta x$. Así el cambio del flujo magnético que atraviesa el cuadro en el tiempo Δt es

$$\Delta\phi_B = B\,\Delta A = Bl\,\Delta x$$

Se puede escribir entonces a (28-4) así:

$$\mathscr{E} = Bl\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{B(l\,\Delta x)}{\Delta t}$$

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta \phi_B}{\Delta t} = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad (28\text{-}5)$$

La fem inducida en el cuadro conductor es igual a la rapidez con que cambia el flujo magnético que atraviesa el cuadro o espira [El significado del signo menos en la Ec. (28-5) se discutirá en la Sec. 28-3; está relacionado con el sentido de la fem.] Nótese que cuando el cuadro conductor entero está sumergido en el campo magnético y el flujo que atraviesa al cuadro no cambia, la Ec. (28-5) predice una fem de cero de acuerdo con nuestros primeros argumentos.

Aunque se ha llegado a la Ec. (28-5) considerando una situación bastante especial, esta relación es del todo general, y es la relación fundamental de la inducción electromagnética. Esta ecuación da la fem inducida con un flujo magnético variable en todas las situaciones posibles.

Un agente externo le suministra trabajo al cuadro conductor en una relación constante, conforme se mueve a través del campo magnético [véase (28-3)]; siendo constante la velocidad del cuadro conductor, ¿a dónde va esta energía? es fácil de demostrar que la potencia generada en el cuadro por el agente externo es exactamente igual a la potencia disipada como energía térmica en el cuadro por la corriente inducida.

La potencia P_a suministrada al cuadro por el agente es

$$P_a = Fv \qquad (9\text{-}13)$$

Por medio de (28-1) sustituida en (9-13), se tiene:

$$P_a = (Bil)v \qquad (28\text{-}6)$$

En términos de la fem $\mathscr{E}$ y de la resistencia R del cuadro, la corriente inducida i vale:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{Blv}{R} \qquad (28\text{-}7)$$

de (28-4). Por consiguiente, (28-6) puede escribirse:

$$P_a = i^2R \qquad (28\text{-}8)$$

Pero i^2R es la potencia P_d disipada como energía térmica en el conductor [véase Ec. (24-9)]. Por tanto, la potencia P_a suministrada al cuadro es igual a la potencia P_d disipada como energía térmica.

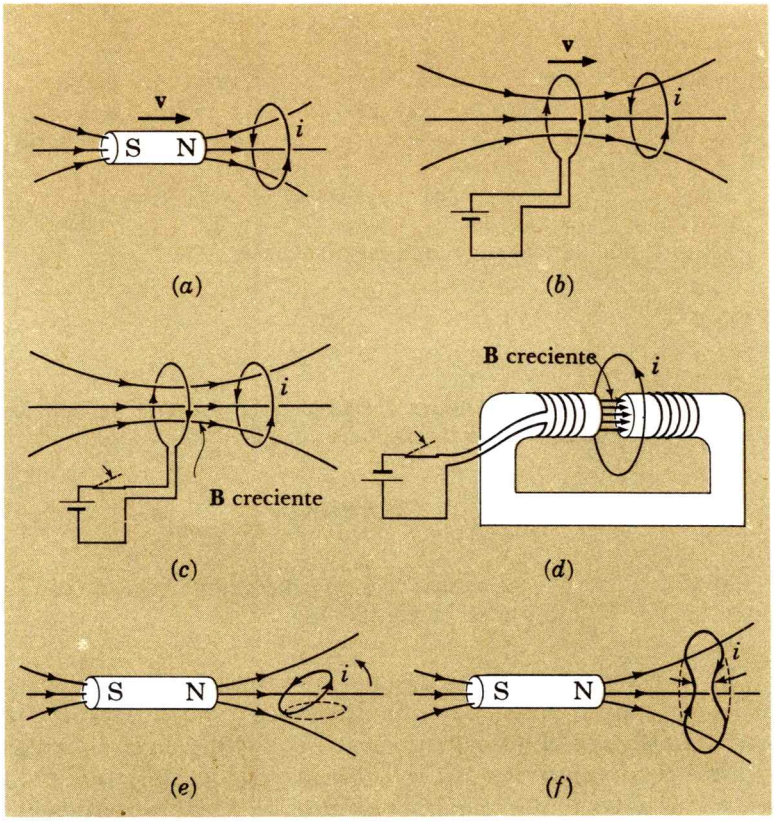


FIG. 28-6. Ejemplos de inducción electromagnética, con cada corriente inducida en la espira conductora por un flujo magnético variable que atraviesa la espira. Cuando un cuerpo se mueve y el otro está en reposo, se encuentra exactamente la misma corriente inducida si el segundo cuerpo se mueve en dirección opuesta, con el primer cuerpo en reposo, (*a*) Un imán se aproxima a la espira. (*b*) Una espira conductora que lleva corriente se aproxima a una segunda espira en reposo. (*c*) La corriente a través de la bobina izquierda (primaria) cambia cuando el interruptor se cierra, y una corriente se induce en la bobina secundaria (este es el fenómeno fundamental que se aplica en un transformador). (*d*) Al cerrar el interruptor en un electroimán cambia el campo entre los polos; nótese que se induce una corriente en la espira, aun cuando el campo magnético en la *misma espira* es esencialmente *cero*. (*e*) Una espira se hace girar en la región de un campo magnético. (*f*) Una espira se deforma; en este caso el flujo magnético cambia porque se reduce el área que atraviesa.

28—2 EJEMPLOS DE INDUCCION ELECTROMAGNETICA

Se ha visto un ejemplo sencillo de inducción electromagnética, pero hay muchos otros. La mayoría fueron investigados y descubiertos por Michael Faraday a partir de 1831 (e independientemente por Joseph Henry al mismo tiempo) y la Ec. (28-5) se conoce como la *ley de Faraday*.

Pueden verse varios ejemplos en la Fig. 28-6. En cada ejemplo se produce la fem inducida porque el flujo magnético que atraviesa una espira conductora cambia, y en cada caso se puede calcular la fem inducida con la ley de Faraday:

$$\mathscr{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad (28\text{-}5)$$

Ejemplo 28-1.
Una bobina de N vueltas, cada una de área A, se hace girar a la velocidad angular constante ω en un campo magnético uniforme de magnitud B. ¿Cuál es la fem inducida en la bobina?

Este arreglo es el de un generador eléctrico sencillo. El flujo magnético que atraviesa cada vuelta de la bobina es

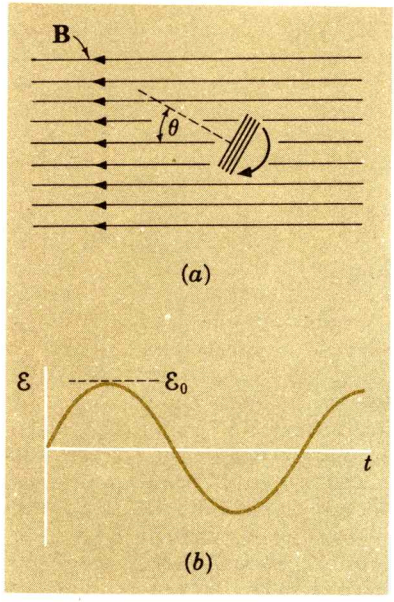


FIG. 28-7. (*a*) Una bobina que gira con velocidad angular constante en un campo magnético uniforme. (*b*) La fem resultante varía sinusoidalmente a través de los reóforos de la bobina giratoria, produciéndose una fem alterna.

$$\phi_B = AB \cos \theta$$

donde θ es el ángulo entre la normal al plano de la bobina y la dirección de **B**; véase la Fig. 28-7*a*. Si la bobina gira con la velocidad angular constante ω, entonces $\theta = \omega t$ y se podrá escribir

$$\phi_B = AB \cos \omega t$$

La fem inducida en *una* vuelta está dada por

$$\mathscr{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad (28\text{-}5)$$

Si se tienen N vueltas conductoras conectadas en serie, la fem total entre las terminales de la bobina se multiplica por N:

$$\mathscr{E} = -\frac{N d\phi_B}{dt} = \omega NAB \operatorname{sen} \omega t = \mathscr{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$$

La salida de la bobina es una fem alternativa que varía sinusoidalmente, como se indica en la Fig. 28-7*b*.

En el generador eléctrico que acaba de describirse la potencia mecánica suministrada por una fuente externa se transforma en potencia eléctrica. En forma inversa, se puede operar el arreglo de la Fig. 28-7 como un motor eléctrico si se proporciona a la bobina una corriente eléctrica sinusoidal. Habrá entonces una torca magnética en la bobina debida a la potencia eléctrica convertida en mecánica: un motor eléctrico es un generador eléctrico que funciona a la inversa.

28—3 LEY DE LENZ

Siempre hay *dos* sentidos posibles para la corriente eléctrica en cualquier espira conductora, pero cuando se induce una corriente debida a un flujo magnético variable, se tiene, por supuesto, en un solo sentido. ¿Cómo es esto? el fundamento para encontrar el sentido de la corriente inducida, o de la fem inducida, es la ley de Lenz llamada así en honor de H. F. E. Lenz (1804-1865).

Regresemos ahora a la situación indicada en la Fig. 28-3, donde una corriente se induce en un cuadro conductor empujado por un agente a través de un campo magnético. Se encontró, analizando la fuerza magnética que reciben los electrones dentro del conductor que la corriente era levógira cuando el cuadro se movía hacia la derecha y con sólo el extremo derecho del cuadro sumergido en el campo. En consecuencia, la fuerza magnética en el segmento conductor del extremo derecho, apunta hacia la izquierda; esto es, un agente externo tiene que aplicar una fuerza hacia la derecha para vencer a la fuerza magnética opuesta;

entonces, el trabajo dado por el agente aparece como energía térmica disipada por la resistencia del cuadro conductor.

Supongamos que fuera de otro modo; esto es, supongamos que la corriente fuera dextrógira en la Fig. 28-3. Entonces la fuerza magnética en el extremo derecho del conductor se dirigiría a la derecha, y un agente no necesitaría empujar al conductor en esa dirección; sólo dándole un pequeño empujón hacia la derecha, aquél se aceleraría, la corriente aumentaría, y el conductor se movería aún más rápido, ganando energía cinética, y todo esto mientras el conductor estaría incrementando la cantidad de energía térmica disipada. Es evidente que esto es imposible, porque se violaría el principio de la conservación de la energía. En este ejemplo, como en todos los demás de corrientes inducidas, *el sentido de la corriente es siempre de tal manera que evita una violación de la conservación de la energía:* ésta es una manera de enunciar a la ley de Lenz.

Hay otro modo equivalente de enunciarla, frecuentemente así: el sentido de la *corriente inducida es tal que siempre se opone al cambio* (*en el flujo magnético*) *que la produce.* Por ejemplo, en la Fig. 28-3 la fuerza magnética hacia la izquierda tiende a evitar que el conductor se mueva hacia la derecha; esto es, la fuerza magnética "trata" de mantener al flujo magnético a través del cuadro sin ningún cambio. Si el conductor se moviera a la izquierda en lugar de a la derecha, el sentido de la corriente inducida y el de la fuerza magnética retardadora, quedarán invertidas.

Otra situación que ilustra la ley de Lenz se representa en la Fig. 28-8*a;* en este caso una espira que lleva corriente, se mueve acercándose a una espira fija en la cual se induce entonces una corriente. El flujo magnético que atraviesa la espira fija hacia la derecha se incrementa con el tiempo hacia la *derecha*. En consecuencia la situación en la espira fija será como sigue: el campo magnético producido por la corriente inducida debe tener un sentido tal que anule (o tienda a anular) al campo magnético que produce un flujo que aumenta hacia la derecha y producido por la espira fija; esto es, la corriente inducida producirá un campo magnético hacia la *izquierda*. Entonces, es evidente que, de la regla de la mano derecha que relaciona la corriente con el campo magnético, resulta que la corriente en la espira fija deberá tener el sentido indicado en la Fig. 28-8*a*.

Hay otra manera de visualizar esto; puede imaginarse que cualquier espira con corriente sea equivalente a un imán, con líneas magnéticas salientes del polo norte y que regresen por el polo sur. Entonces, se ve en la Fig. 28-8*b* que los campos magnéticos asociados con las dos espiras se *repelen*; por supuesto, en realidad, es la fuerza magnética entre las dos espiras con corriente la que es responsable de la repulsión entre ellas. Ya se ha encontrado que las dos corrientes tienen sentidos opuestos, lo que está de acuerdo con el resultado general de que dos conductores

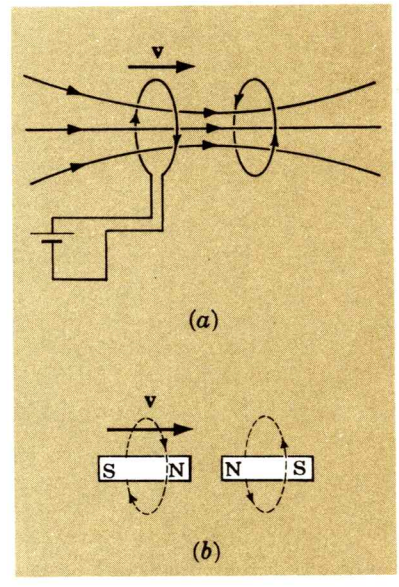


FIG. 28-8. Un ejemplo de la ley de Lenz. (*a*) La corriente que lleva al conductor que se mueve hacia la derecha induce una corriente en la segunda bobina pero en sentido opuesto. (*b*) Los imanes equivalen a las bobinas de la parte (*a*).

paralelos que llevan corriente, se *rechazan* cuando las corrientes tienen sentidos *opuestos*. (Sec. 27-4).

Para practicar la aplicación de la ley de Lenz, el lector confirmará que son correctas todas las direcciones de las corrientes inducidas indicadas en la Fig. 28-6.

El signo menos que aparece en el enunciado matemático de la ley de Faraday, $\mathscr{E} = -d\phi_B/dt$, es una representación simbólica de la ley de Lenz. Se tratarán las "direcciones" relativas de la fem inducida y del cambio del flujo magnético en la siguiente sección.

28—4 LA LEY DE FARADAY Y EL CAMPO ELECTRICO

Sabemos que un flujo magnético variable produce una corriente eléctrica inducida en una espira conductora; el flujo magnético variable crea un campo eléctrico que es el que impulsa a las cargas eléctricas alrededor de la espira conductora. ¿Un flujo magnético variable creará un campo eléctrico en el espacio, aun cuando no estén presentes las cargas eléctricas? La respuesta es *sí;* en realidad el efecto fundamental de la inducción electromagnética es ése: *un flujo magnético variable genera un campo eléctrico.*

Primero relacionemos una fem $\mathscr{E}$ a un campo eléctrico asociado **E**. Puesto que la fem es justamente el trabajo dado a una unidad de carga Q, para llevarla atravesando a todos los elementos de una espira cerrada, la definición más general de una fem puede escribirse

$$\frac{W}{Q} = \mathscr{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{28-9}$$

Si la fem se produce por un campo magnético variable, se puede combinar la ley de Faraday [Ec. (28-5)], con (28-9) para escribir la ley de la inducción electromagnética en la siguiente forma

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \tag{28-10}$$

Un flujo magnético variable genera un campo eléctrico.

Se debe distinguir con cuidado entre (1) un campo eléctrico originado directamente de las cargas eléctricas y (2) un campo eléctrico debido a un flujo magnético variable y dado por (28-10)

1. El campo eléctrico originado en las cargas eléctricas es un campo eléctrico *conservativo,* y la integral de línea $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ vale *cero;* esto es, si se transporta una carga eléctrica alrededor de una trayectoria cerrada en un campo eléctrico *conservativo, no hay trabajo neto*

dado a la carga. En consecuencia, se puede asociar un potencial eléctrico con un campo eléctrico conservativo. Las líneas del campo eléctrico se originan en las cargas positivas y terminan en las negativas, siendo continuas entre ellas.

2. El campo eléctrico originado por un flujo magnético variable es bastante diferente. Por supuesto, por definición, es aún la fuerza eléctrica por unidad de carga puntual positiva, pero el campo eléctrico es ahora *no conservativo,* y la integral de línea $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ *no* es cero. Más bien, esta integral de línea (la fem) depende de la rapidez con que cambia el flujo magnético ϕ_B a través de la trayectoria cerrada. *No se puede* asociar un potencial eléctrico escalar con el campo eléctrico no conservativo, el trabajo dado a la unidad de carga positiva que recorre la trayectoria cerrada *no* es cero, sino es igual, de hecho, a la fem alrededor de la espira. Además, puesto que las líneas del campo eléctrico *no* se originan ni terminan en cargas eléctricas, no obstante que deben ser continuas, las *líneas del campo eléctrico* de un flujo magnético variable *forman lazos cerrados.* El siguiente ejemplo demuestra que las líneas del campo eléctrico generadas por un campo magnético variable se encuentran en este caso.

Ejemplo 28-2

Un campo magnético uniforme, que penetre en el papel está encerrado en una región circular, como se representa en la Fig. 28-9. La magnitud del campo aumenta con el tiempo. Encontrar el campo eléctrico **E** inducido por este campo magnético variable.

Por simetría, se sabe que los lazos del campo eléctrico son círculos concéntricos que rodean al campo magnético. Para encontrar el sentido de las líneas eléctricas, imaginemos una espira circular conductora rodeando al campo magnético variable y determinemos el sentido de la corriente inducida (que será el sentido **E**) por la ley de Lenz. En el centro del lazo una corriente inducida levógira producirá a un campo magnético que sale del papel, cuyo campo se opone al aumento del flujo magnético del campo externo, como requiere la ley de Lenz. Por tanto el campo de la corriente inducida es levógira, como se indica.

Veamos ahora cómo la magnitud de **E** depende de la distancia r al centro del campo magnético. Se considerará primero a la región del espacio *fuera* del campo magnético ($r > R$). Evaluando la integral de línea de (28-10) alrededor del lazo circular de radio r, se tiene

$$E(2\pi r) = -\left(\frac{d\phi_B}{dt}\right)_r = -\left(\frac{d\phi_B}{dt}\right)_R$$

o

$$E = -\left(\frac{1}{2\pi r}\right)\left(\frac{d\phi_B}{dt}\right)_R \quad \text{para } r > R \tag{28-11}$$

donde $(d\phi_B/dt)_R$ representa el tiempo *total* de la rapidez del cambio de flujo dentro de la región de radio R (y también dentro de r

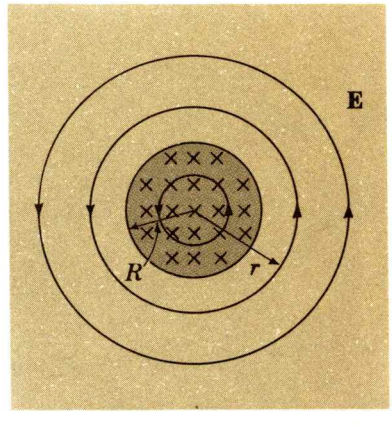


FIG. 28-9. Un campo magnético uniforme penetra en el papel en una región de radio R. El campo crece con el tiempo. Las líneas del campo eléctrico inducido son círculos levógiros.

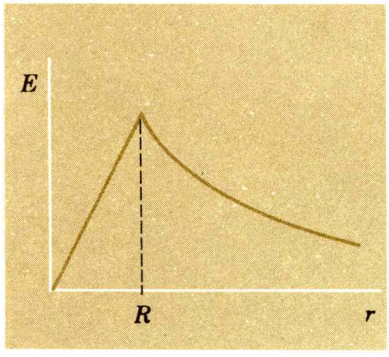


FIG. 28-10. El campo eléctrico E como una función de la distancia r, para la situación representada en la Fig. 28-9.

puesto que $B = 0$ cuando $r > R$). Debe tenerse presente el significado del signo menos en (28-11).

El campo eléctrico en cualquier punto *fuera* del campo magnético variable cae inversamente con la distancia r. Nótese una curiosa circunstancia: se tiene un campo eléctrico que *no vale cero* en una región del espacio en donde *no* hay campo magnético. No importa que el *campo* magnético cambie *donde* esté el lazo, sino lo que importa es que el *flujo* magnético total sea variable en cualquier región *dentro* del lazo. Si se coloca una carga eléctrica en este campo eléctrico, resulta acelerada.

Para encontrar el campo eléctrico cuando $r < R$, se debe tener en cuenta que sólo una fracción del *total* de la rapidez con que cambia el flujo dentro de R, $(d\phi_B/dt)_R$, penetra por el área transversal de radio r. En realidad esta fracción es $\pi r^2/\pi R^2$, suponiendo que el campo magnético es uniforme. Evaluando la integral de línea (28-10), se tiene

$$E(2\pi r) = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(\frac{d\phi_B}{dt}\right)_R$$

o

$$E = -\frac{r}{2\pi R^2}\left(\frac{d\phi_B}{dt}\right)_R \quad \text{para } r < R \tag{28-12}$$

Dentro de R, se encuentra que el campo eléctrico es directamente proporcional a r.

La magnitud del campo eléctrico circunferencial se indica en la Fig. 28-10 como una función de r. Esta gráfica es similar a la del campo eléctrico de una esfera con carga uniforme, Fig. 22-10, pero la situación es bastante diferente; aquí el campo eléctrico es tangencial; allá es radial. Para $r > R$ el campo aquí varía como $1/r$; allá varía como $1/r^2$, y lo que es más importante, aquí el campo eléctrico es no conservativo y se origina en un flujo magnético variable, allá el campo eléctrico es conservativo y se origina en las cargas en reposo.

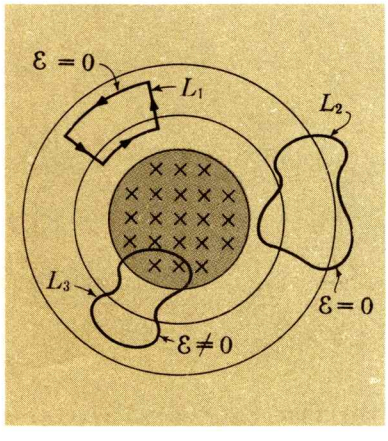


FIG. 28-11. Algunas trayectorias para calcular la fem inducida en una región donde el flujo magnético es variable.

Es instructivo considerar trayectorias cerradas diferentes de los círculos, como en la situación representada en la Fig. 28-9. En la trayectoria L_1 de la Fig. 28-11, que consiste de dos carcos circulares y de dos segmentos radiales, la integral de línea $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ es cero, puesto que $\mathbf{E}$ varía inversamente con r. Esto no significa que $\mathbf{E}$ sea cero en todos los puntos, alrededor de L_1. En términos más generales, la fem alrededor de esta trayectoria es cero porque el flujo magnético que la atraviesa no cambia. Análogamente no existe fem alrededor de la trayectoria L_2. Sin embargo, *existe* una fem alrededor de la trayectoria L_3 puesto que $d\phi_B/dt$ cambia al atravesar el área encerrada por esta trayectoria.

Conociendo cómo cambia el flujo magnético, siempre se puede encontrar el sentido del campo eléctrico inducido por medio de la

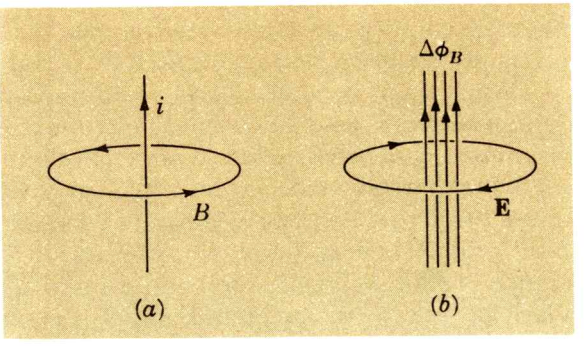


FIG. 28-12. (*a*) Relación entre la corriente eléctrica y las líneas cerradas del campo magnético que la rodean, de acuerdo con la regla de la mano derecha. (*b*) Relación entre el cambio del flujo magnético y las líneas cerradas del campo eléctrico que lo rodean.

ley de Lenz, o se puede también usar el signo menos que aparece en la ley de Faraday [Ec. (28-5)] con este propósito. Recordemos primero que se usa la regla de la mano derecha para relacionar la dirección y sentido de una corriente eléctrica y las líneas de campo magnético que la rodean véase Fig. 28-12*a*. En términos matemáticos, la relación entre B e i está dada por la ley de Ampère, de acuerdo con la Ec. (27-12), $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$; aquí *no* aparece un signo menos. Las "direcciones" relativas del campo eléctrico **E** y de la variación del flujo magnético $\Delta\phi_B$ se representan en la Fig. 28-12*b*. Aquí *no* se aplica la regla de la mano derecha; esto es, si el pulgar derecho indica la dirección y sentido en que el flujo magnético se *incremente,* los demás dedos de la mano derecha apuntan en sentido *opuesto* al de las líneas del campo eléctrico inducido: esto se indica formalmente con el signo menos de la ley de Faraday.

28—5 DEFINICION DE AUTOINDUCCION

Cuando varía la corriente que pasa por un conductor, se induce una fem en cualquier conductor próximo, pero además se induce una fem en el mismo conductor: éste es el fenómeno de autoinducción y la inductancia del inductor es una medida cuantitativa de dicho efecto.

Considérese el circuito sencillo de la Fig. 28-13; cuando se conecta una batería al conductor, la corriente del circuito crece desde cero hasta un valor final determinado por la fem de la batería y por la resistencia del circuito; al mismo tiempo cambia el flujo magnético que rodea al cuadro conductor. En consecuencia, por la ley de Faraday, habrá una fem inducida en el mismo cuadro, cuyo sentido, por la ley de Lenz, debe ser tal que se oponga al incremento del flujo magnético que lo atraviesa; esto es, la fem inducida se opone a la fem de la batería. Análogamente, si ya se ha establecido la corriente en el circuito y ahora se abre el interruptor, la corriente cae hasta cero y conforme disminuya la corriente, disminuye también el flujo magnético que atraviesa el circuito, por lo que de nuevo habrá una fem inducida, cuya dirección y sentido es ahora tal que tiende a mantener el flujo

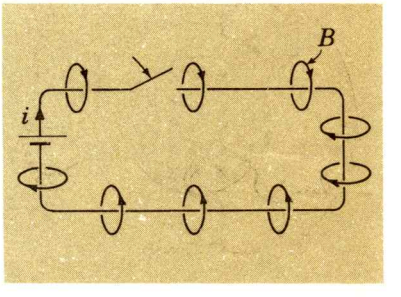


FIG. 28-13. La relación entre la corriente y el campo magnético asociados al cerrar el interruptor de un cuadro conductor, conectado a una batería.

magnético que atraviesa el cuadro, por lo que la fem inducida tendrá el mismo sentido que la fem de la batería.

Entonces, en general, cuando cambia la corriente y por tanto, cambia el flujo magnético en el circuito, una fem inducida (o contra fem) se genera en el circuito, cuyo sentido es siempre aquél que se opone al *cambio* del flujo magnético. Este efecto de autoinducción es de poca importancia cuando un circuito consiste sólo de una espira, pero, sin embargo, se vuelve significativo cuando el flujo magnético se concentra en una región del espacio relativamente pequeña, como en el caso cuando un alambre conductor se enrolla formando una bobina o un solenoide. En una bobina de N vueltas, el flujo magnético que atraviesa cada espira, es reforzado por un factor N, con relación al flujo debido a una sola espira. Además, la fem inducida es reforzada por otro factor N, ya que se induce una fem en cada una de la N vueltas. Así, el enrollar un conductor formando una bobina con N vueltas incrementa el efecto de autoinducción por el factor N^2.

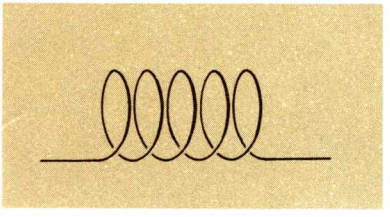


FIG. 28-14. Un inductor.

Cualquier dispositivo tal como una bobina, que presenta el efecto de autoinducción, se llama *inductor* (Véase Fig. 28-14); se representan en los diagramas de circuito con el símbolo ⏦. Un inductor se caracteriza por su autoinducción o, sencillamente, su *inductancia,* la cual se relacionará ahora con la rapidez con que cambia la corriente.

De acuerdo con la ley de Ampère [Ec. (27-12)], el campo magnético producido por cualquier elemento de corriente en cualquier punto del espacio, es directamente proporcional a la corriente i. Por tanto, el flujo magnético, que es proporcional al campo magnético, será también proporcional a i. Para una bobina de N vueltas se puede escribir

$$N\phi_B = Li \tag{28-13}$$

donde $N\phi_B$ es el flujo total y la constante de proporcionalidad L, la inductancia de la bobina, depende sólo de las dimensiones del conductor y del material que hay en el interior de la bobina.

De acuerdo con la ley de Faraday, la fem inducida $\mathscr{E}$ está dada por

$$\mathscr{E} = -\frac{d(N\phi_B)}{dt} \tag{28-5}$$

Sustituyendo (28-13) en (28-5) se tiene

$$\mathscr{E} = -L\frac{di}{dt} \tag{28-14}$$

o

$$L = -\frac{\mathscr{E}}{di/dt} \tag{28-15}$$

La inductancia se define ya sea con (28-13) o con la ecuación equivalente (28-15). Se usa la primera para calcular la inductancia de un arreglo particular de un conductor y la segunda para describir el comportamiento de un inductor de un circuito eléctrico.

De (28-15) puede verse que la inductancia tiene como unidades volts, sobre ampere sobre segundo, o sea V/(A/s) = V-s/A. A esta combinación de unidades se le da el nombre especial de *henry o henrio* (en honor de J. Henry):

$$1\ \text{H} = 1\ \text{V-s/A}$$

Así, si la corriente que pasa por un inductor cambia con la rapidez de 1 A/s y se produce una fem inducida de 1 V, la inductancia del inductor es de 1 H. Unidades relacionadas con el milihenry (1 mH = 10^{-3} H) y el microhenry (1 μH = 10^{-6} H). Las bobinas del laboratorio, de moderado tamaño y con núcleo de aire pueden tener inductancias del orden de varios milihenrys. Con núcleos de materiales magnéticos la inductancia puede elevarse hasta varios henrys.*

El calcular la inductancia de un conductor es, en general bastante complicado, porque se debe conocer el campo magnético en cada punto del espacio alrededor del conductor. Como cuando se calcula la capacitancia de un condensador, sólo en situaciones geométricamente sencillas es cuando es fácil calcular a la inductancia. De éstas, la más sencilla es la de un toroide, un solenoide largo pero finito (siendo mucho mayor su longitud que su diámetro) doblado en un círculo cuyos extremos se juntan para formar una rosca, como se representan en la Fig. (28-15). Entonces el campo magnético queda encerrado entre las vueltas del toroide; si el radio del toroide es grande comparado con el radio de una vuelta, el campo magnético dentro de la bobina es uniforme en valor.

Hemos encontrado que el campo magnético B en cualquier punto cerca del centro de un solenoide largo (y por tanto en cualquier punto interior del toroide) está dado por

$$B = \mu_0 ni \qquad \text{(27-13), (28-16)}$$

donde i es la corriente y n el número de vueltas por unidad de longitud, esto es, $n = N/l$, donde la longitud l es la circunferencia media del toroide.

De la definición de inductancia,

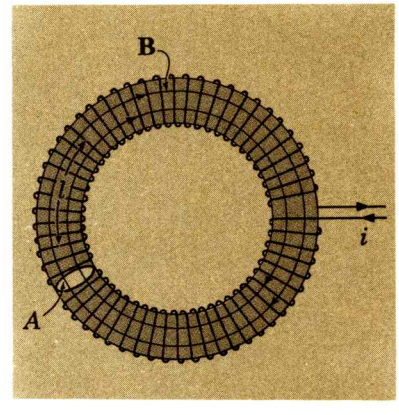


FIG. 28-15. Un toroide produce un campo magnético enteramente encerrado entre sus espiras.

*Véase R. T. Weidner y R. L. Sells, *Elementary Classical Physics,* 2a. Ed, Sec. 33-3, Allyn y Bacon, 1973.

$$L = \frac{N\phi_B}{i} = \frac{NBA}{i} \qquad (28\text{-}13), (28\text{-}17)$$

donde A es el área transversal de cualquier vuelta y B es el campo magnético dentro de cualquier vuelta.

Sustituyendo (28-16) en (28-17), se tiene

$$L = \mu_0 NnA$$

$$= \mu_0 \frac{N}{l} n(Al) = \mu_0 n^2 (Al)$$

$$L = \mu_0 n^2 V \qquad (28\text{-}18)$$

Donde V representa el volumen Al de una sección toroidal de longitud l.

Ejemplo 28-3

Encontrar la inductancia de un toroide de 2,000 vueltas, con un radio medio de 10.0 cm y con un área transversal de 2.0 cm^2.

El volumen total V, ocupado por el campo magnético, es el área transversal A, multiplicada por la circunferencia media del toroide $2\pi r$; esto es, $V = 2\pi rA$. Si N es el número total de vueltas entonces $N = 2\pi rn$. Empleando (28-18), se tiene

$$L = \mu_0 n^2 V = \mu_0 \left(\frac{N}{2\pi r}\right)^2 (2\pi rA) = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A-m})(2000)^2(2.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}{2\pi(0.10\ \text{m})} = 1.6\ \text{mH}$$

La inductancia de este inductor de tamaño moderado y lleno de aire es de sólo 1.6 mH; la inductancia puede aumentarse más de mil veces enrollando las vueltas de un toroide alrededor de un material fuertemente magnético, tal como el hierro.

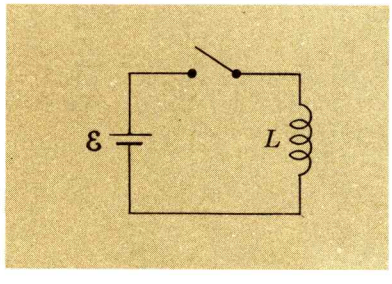


FIG. 28-16.

28—6 LA ENERGIA DE UN INDUCTOR Y DEL CAMPO MAGNETICO

Debido a que existe una contra fem en cualquier circuito cerrado cuando la corriente es variable, se necesita suministrar trabajo al inductor con objeto de establecer una corriente. Como no se disipa la energía en un inductor puro, se puede considerar que cualquier trabajo dado establece una corriente como una energía almacenada en el inductor. Encontremos esta energía.

Considérese el circuito de la Fig. 28-16 en el cual se conecta una batería a un circuito que contiene un inductor. Del teorema de la espira:

$$\mathscr{E} = L\frac{di}{dt} \tag{28-19}$$

Multiplicando esta ecuación por la corriente instantánea i, se tiene

$$\mathscr{E}i = Li\frac{di}{dt} \tag{28-20}$$

El término $\mathscr{E}i$ representa la velocidad con que se suministra energía al inductor; como ésta no se disipa, $Li\ (di/dt)$ será la rapidez con que se suministra la energía y con que se almacena en el inductor. Indicando a la potencia instantánea dentro del inductor con P_L y a la energía asociada con el inductor con U_L, se podrá escribir:

$$P_L = Li\frac{di}{dt}$$

y

$$U_L = \int_0^t P_L\,dt = \int_0^t Li\frac{di}{dt}\,dt = \int_0^i Li\,di = \tfrac{1}{2}Li^2 \tag{28-21}$$

La energía almacenada en un inductor que lleva una corriente i es proporcional a la inductancia y al cuadrado de la corriente. La energía magnética almacenada en un inductor de 1H que lleva la corriente de 1A es, de (28-21), de 0.5J. Como inductor, éste es relativamente grande.

Un inductor que lleva corriente almacena energía en su campo magnético; se desea calcular la densidad de energía u_B, o energía magnética por unidad de volumen, de un campo magnético con densidad de flujo B.

La energía U, almacenada en el campo de cualquier inductor que lleva la corriente i es

$$U = \tfrac{1}{2}Li^2$$

Imaginemos que el inductor es un toroide, porque sólo en este caso queda el campo magnético del todo encerrado en la región dentro de las espiras. La inductancia L está dada por (28-18) y la corriente i por (28-16). Entonces (28-21) queda

$$U = \tfrac{1}{2}(\mu_0 n^2 V)\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}V$$

Recuérdese que V es el volumen del inductor; por consiguiente, la densidad de energía magnética $u_B = U/V$ es

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{28-22}$$

La densidad de energía en el campo magnético es proporcional al *cuadrado* de la densidad del flujo magnético.

Aunque derivada para el caso especial de un toroide, (28-22) puede demostrarse que es una ecuación general. La relación encontrada para la densidad de energía magnética es análoga a la de la densidad de energía eléctrica, con B reemplazada por E y $1/\mu_0$ reemplazado por ε_0 [Ec. (23-32)].

RESUMEN

Un flujo magnético variable induce una fem donde, por ley de Faraday

$$\mathscr{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad (28\text{-}5)$$

De acuerdo con la ley de Lenz, el sentido de la fem inducida es tal que siempre evita una violación a la conservación de la energía; alternativamente, el sentido de la corriente inducida es tal que siempre se opone al cambio que la produce.

La integral de línea de un campo eléctrico $\mathbf{E}$ *no conservativo* inducido por un flujo magnético variable, está dado por

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad (28\text{-}10)$$

Las líneas del campo eléctrico, inducidas por un flujo magnético variable, forman lazos cerrados en el espacio.

Por la ley de Faraday, el cambio de corriente en un espira de un circuito, induce una fem en la misma espira. Por la ley de Lenz esta fem autoinducida $\mathscr{E}$ tiene siempre un sentido que se opone a la corriente y a la variación del flujo magnético. La autoinducción L (en henrys) se define:

$$L = \frac{N\phi_B}{i} \qquad (28\text{-}13)$$

o

$$\mathscr{E} = -L\frac{di}{dt} \qquad (28\text{-}14)$$

Cuando una corriente i atraviesa un inductor $\mathbf{L}$, la energía almacenada en el campo magnético es:

$$U_L = \tfrac{1}{2}Li^2 \qquad (28\text{-}21)$$

La energía magnética por unidad de volumen, o densidad de energía magnética, es

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (28\text{-}22)$$

PROBLEMAS

28-1. Una barra conductora de 1.0m se mueve en un campo magnético uniforme de 500 G dirigidas hacia adentro del papel; la barra se encuentra en el plano del papel y se mueve a la velocidad constante de 5.0 m/s a la derecha, haciendo la barra un ángulo de 30° con respecto a su velocidad. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la barra? (*b*) Suponiendo que el campo eléctrico inducido dentro del conductor es uniforme y que el conductor contiene 10^{29} electrones libres / m^3. ¿Qué fracción de los electrones estará en un extremo de la barra?

28-2. Una bobina circular de alambre flexible, con un radio inicial de 10 cm y de 200 vueltas, se coloca en un campo magnético uniforme de 0.50 Wb/m^2 y perpendicular al plano de la bobina. Encontrar la dirección y magnitud de la fem promedio cuando (*a*) La bobina se contrae hasta un área de 100 cm^2 en 0.10 s (*b*) La bobina se hace girar a 90°, alrededor de un eje perpendicular al campo magnético en el tiempo de 0.10 s.

28-3. Confirmar que la fem inducida se da en volts, cuando el flujo magnético está en webers.

28-4. Una bobina se encuentra en un plano horizontal en el Ecuador y se hace girar, con velocidad angular constante, alrededor de un eje orientado del este al oeste. (*a*) Encontrar la dirección de la normal al plano de la bobina, cuando la fem inducida es máxima. Supongamos que la bobina se hace girar alrededor de un eje norte-sur (*b*) ¿Cuál es ahora la orientación de la normal al plano cuando la fem es máxima?

28-5. Un extremo de un imán permanente se acerca, moviéndolo hacia abajo, a un aro conductor que está en un plano horizontal; entonces se induce en el aro una corriente dextrógira. El extremo del imán ¿Es un polo norte o un polo sur?

28-6. En el ecuador, el campo magnético terrestre es esencialmente horizontal y apunta al norte; tiene una magnitud de aproximadamente 0.30 G. Un satélite orbita la Tierra (cerca de la superficie) en el Ecuador y tiene una antena de 1.0m perpendicular a la superficie de la Tierra. Encontrar la diferencia de potencial entre los extremos de la antena medida por (*a*) un observador en la Tierra (*b*) y un astronauta en un satélite en órbita.

28-7. Un solenoide tiene 800 vueltas enrolladas uniformemente en un casco cilíndrico de 50 cm de largo y 1.0 cm de radio. Una bobina secundaria de 10 vueltas se coloca alrededor del centro del solenoide. (*a*) Cuando el solenoide se conecta a una batería, la corriente que pasa por él cambia inicialmente con la rapidez de 5.0 A/s. ¿Cuánto vale la fem inducida entre las terminales de la bobina secundaria durante este tiempo? (*b*) Si la batería se conectara a la bobina y la corriente que pasa por ella cambia primero con la rapidez de 5.0 A/s, describir cómo se debe proceder con objeto de encontrar la fem inducida en el solenoide.

28-8. Una bobina de alambre tiene un radio de 5.0 cm, 100 vueltas, y una resistencia total de 50 Ω. Encontrar con qué velocidad debe cambiar un campo magnético transversal que pase a través de la bobina, para producir en la bobina un calentamiento de Joule con la potencia de 1.0 mW.

28-9. Un generador eléctrico produce una fem alternativa sinusoidal con una amplitud de 150 V y una frecuencia de 60 Hz. La bobina del generador tiene una área de 3.0×10^{-3} m^2 y gira, en un campo magnético constante de 10 000 G. ¿Cuántas vueltas tiene la bobina del generador?

28-10. Un campo magnético de 1.0 Wb/m^2 actúa en dirección vertical hacia abajo. Una barra conductora de 0.50 de largo gira en sentido dextrógiro (mirando hacia abajo) en un plano horizontal, con un eje vertical en uno de los extremos y con la velocidad angular de 200 vueltas /s. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los dos extremos de la barra? (*b*) ¿Qué extremo de la barra, el fijo o el móvil, adquiere carga positiva?

28-11. Un cuadro conductor, paralelo al plano vertical, de 1.0 m de ancho y de 0.50 m de altura, se mueve hacia abajo dentro de un campo uniforme y horizontal de 0.50 Wb/m^2. La masa del cuadro es de 250 g, y su resistencia de 2.0 Ω. Cuando el lado inferior está en el campo, pero no el superior, existe una velocidad constante a la cual debe moverse. Encontrar esa velocidad.

28-12. Un cuadro conductor rectangular se encuentra en el plano que contiene un alambre infinitamente largo (Fig. P28-12). El cuadro tiene w ancho y d de

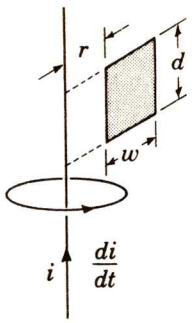


FIG. P28-12

largo, y su punto más próximo está a la distancia r del alambre. La corriente que lleva éste cambia con la rapidez di/dt. ¿Cuál es la fem inducida en el cuadro?

28-13. Una barra conductora de longitud L se mueve a la velocidad constante **v** en dirección perpendicular a su longitud y en una región del espacio sin campo magnético; entonces entra la barra en un campo magnético uniforme perpendicular a la velocidad y a la longitud de la barra; mientras ésta atraviesa el campo magnético uniforme, se observa que se mueve a sólo la mitad de su velocidad inicial. Explicar qué velocidad tendrá la barra cuando emerja del campo magnético y discútase cualquier transformación de energía que tenga lugar.

28-14. Un campo magnético es uniforme en una región cilíndrica del espacio de 0.20 m de radio, y cambia de magnitud a la velocidad de 50 G/s. Encontrar el campo eléctrico en un plano perpendicular a las líneas del campo magnético y a una distancia del centro del campo magnético de (*a*) 0.10 m, (*b*) 0.25 m y (*c*) 0.50 m.

28-15. Una barra conductora se desliza por el conductor fijo en forma de U (Fig. P 28-15) con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ hacia la derecha. Un campo magnético constante **B**, existe normalmente al papel.

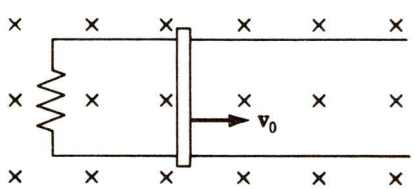


FIG. P28-15

La resistencia R del alambre en U puede suponerse constante, y la masa de la barra que se desliza es m. (*a*) Encontrar la fuerza magnética retardadora $\mathbf{F}_m$ sobre la barra en términos de **B**, L, R y **v**. (*b*) Demostrar que la velocidad disminuye como una función del tiempo de acuerdo con la ecuación $v = v_0 e^{-t/\tau}$, donde $\tau = mR/B^2L^2$. (*c*) Demostrar que la distancia total que recorre la barra hasta llegar al reposo es de τv_0. (*d*) Demostrar que la energía térmica total disipada es justamente igual a la energía cinética original de la barra, $\frac{1}{2}mv_0^2$.

28-16. Demostrar que el henry es equivalente a $kg\text{-}m^2/C^2$.

28-17. Cuando la corriente que pasa por una cierta bobina es de 1.0 A y la corriente cambia con la rapidez de 0.50 A/s, la diferencia de potencial entre las terminales de la bobina es de 6.0 V. Cuando la corriente que pasa por la bobina es de nuevo 1.0 A, pero cambia con la rapidez de 0.50 A/s en sentido opuesto, la diferencia de potencial entre las terminales de la bobina es de 4.0 V. ¿Cuánto valen (*a*) la inductancia y (*b*) la resistencia interna de la bobina?

28-18. Un aro circular de alambre tiene un radio de 1.0 cm. (*a*) Estimar la inductancia del alambre suponiendo que el campo magnético es uniforme en el área del aro. (*b*) ¿Cuánto valdrá la inductancia de una bobina del mismo radio, con 100 vueltas?

28-19. Demostrar que la inductancia por unidad de longitud, de dos conductores cilíndricos y concéntricos de radios r_1 y r_2 $(r_2 > r_1)$ que lleve iguales corrientes con sentidos opuestos, vale $L = (\mu_0/2\pi) \ln (r_2/r_1)$. Supóngase que el conductor interior es de radio tan pequeño que pueda suponerse apropiadamente que el campo magnético está del todo entre los dos conductores, siendo despreciable el campo encontrado dentro de la superficie del conductor interior.

28-20. Demostrar que la autoinducción equivalente de los inductores conectados en serie es $L = \Sigma L_i$ y para inductores en paralelo, $1/L = \Sigma 1/L_i$. Se supone que no hay acoplamiento magnético entre los conductores separados, esto es, que el campo magnético de un inductor no afecta al segundo. En términos formales se dice que no hay *inductancia mutua* entre ellos.

28-21. Un solenoide de 2.0 cm de radio y 100 cm de largo se enrolla apretada y uniformemente en 3 000 vueltas de alambre. Ignórense los efectos de orilla. (*a*)

¿Cuánto vale la inductancia del solenoide? (*b*) Encontrar la energía magnética total almacenada en el inductor si por éste pasa una corriente de 2.0 A.

28-22. Un largo conductor rectilíneo lleva una corriente i. Encontrar la densidad de energía del campo magnético a la distancia r del conductor.

28-23. Una bobina circular plana de N vueltas, cada una de radio r, lleva una corriente i. Encontrar la densidad de energía del campo magnético en el centro de la bobina.

28-24. Un solenoide recto y largo, con 30 vueltas/cm, lleva una corriente de 2.0 A. Encontrar la densidad de energía magnética (*a*) cerca del centro del solenoide y (*b*) en el extremo del solenoide, (recuérdese la Sec. 27-7).

Capítulo

29

OSCILACIONES ELECTRICAS. CIRCUITOS RC Y RL:

Primero se discute la forma más sencilla de un oscilador, un inductor conectado con un capacitor inicialmente cargado. Se deriva la frecuencia de las oscilaciones libres, y se indican algunas analogías entre las oscilaciones eléctricas y las mecánicas.

Entonces se deriva la constante de tiempo que caracteriza la disminución (o el crecimiento) de la carga del capacitor en un circuito RC.

Por último se calcula la constante de tiempo característica en la disminución (o crecimiento) de la corriente en el circuito RL.

29—1 OSCILACIONES ELECTRICAS LIBRES

Considérese el circuito de la Fig. 29-1, donde un capacitor C, que al principio lleva una carga de magnitud Q_m en cada placa, se conecta a un inductor L al cerrar un interruptor. Por sencillez, se supone que el circuito no presenta resistencia. Si los reóforos carecen de autoinducción, las cargas del capacitor serían neutralizadas de inmediato. Sin embargo, con el inductor presente, cualquier cambio de la corriente que pasa por el inductor, y en consecuencia también cualquier cambio en el flujo magnético que atraviesa la bobina, dará lugar a una fem autoinducida cuyo sentido siempre es tal que tiende a mantener una corriente constante.

En el instante que se cierra el interruptor, el capacitor empieza a descargarse y el inductor responde estableciendo una contra fem, que se opone a la descarga. Cuando la carga q ha llegado a cero en cualquiera de las placas, existe aún una corriente en el circuito, y esta corriente continúa existiendo por la influencia de la fem inducida que ahora se opone a la disminución de esta corriente; al continuar esta corriente, se cargan de nuevo las placas del capacitor en sentido inverso, disminuyendo entonces la corriente en magnitud, ya que las primeras cargas que llegan a las placas del

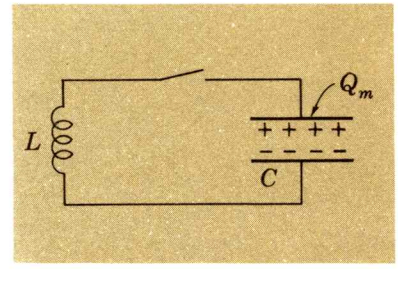


FIG. 29-1. Un oscilador eléctrico

capacitor rechazan a las cargas que llegan después. La corriente cae a cero, el capacitor está de nuevo del todo cargado, pero con polaridad opuesta: en este instante el oscilador eléctrico ha completado exactamente la mitad de un ciclo de oscilación. Después se repite este proceso pero en sentido opuesto; el capacitor pierde carga de nuevo, se crea una corriente, ahora en sentido opuesto, hasta que el capacitor ha alcanzado de nuevo su estado inicial de carga: ahora se ha completado una oscilación.

Las oscilaciones de la carga eléctrica y de la corriente eléctrica continúan, ya que no se disipa energía, puesto que se ha supuesto que no hay resistencia. En realidad, las oscilaciones eléctricas consisten en una alternación continua de la energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor cargado y en la energía almacenada en el campo magnético del inductor que lleva corriente. Los dos elementos del circuito juegan diferentes papeles: (1) El capacitor C almacena energía en su campo eléctrico cuando se carga, pero tiende a perder su carga y restaurarse a su estado de equilibrio de neutralidad eléctrica, y (2) El inductor L almacena energía magnética cuando lleva una corriente, y exhibe una inercia eléctrica en la cual su fem autoinducida tiende a mantener las cargas en movimiento. Estos resultados son cualitativos; consideraremos ahora analíticamente a las oscilaciones eléctricas.

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff (conservación de la energía) al circuito de la Fig. 29-1, se tiene

$$\Sigma\mathscr{E} = \Sigma V$$

$$-L\frac{di}{dt} = \frac{q}{C} \tag{29-1}$$

Aquí $-L(di/dt)$ es la fem del inductor [Ec. (28-14)], q/C la diferencia del potencial a través del condensador [Ec. (23-19)], y q la carga, en cualquier instante, en una placa del condensador. Por definición, $i = dq/dt$; sustituyendo esta ecuación en la (29-1), se tiene

$$-L\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q}{C}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \tag{29-2a}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \tag{29-2b}$$

donde

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \tag{29-3}$$

por definición. El subíndice 0 significa que no se pierde energía en este oscilador (debido a que su resistencia es cero). La Ec. (29-2*b*) es una ecuación diferencial lineal y de segundo orden cuya solución es:

$$q = Q_m \cos \omega_0 t \tag{29-4}$$

como puede verificarse fácilmente substituyendo (29-4) en (29-2*b*). Q_m es la carga máxima del capacitor y es también, en este problema, la carga inicial, puesto que $q = Q_m$ cuando $t = 0$. (Véase la Sec. 14-1 para el tratamiento de un problema análogo en el movimiento armónico simple.)

La carga varía sinusoidalmente con el tiempo como se indica en la Fig. 29-2, y la frecuencia angular ω_0 de las oscilaciones libres está dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{29-5}$$

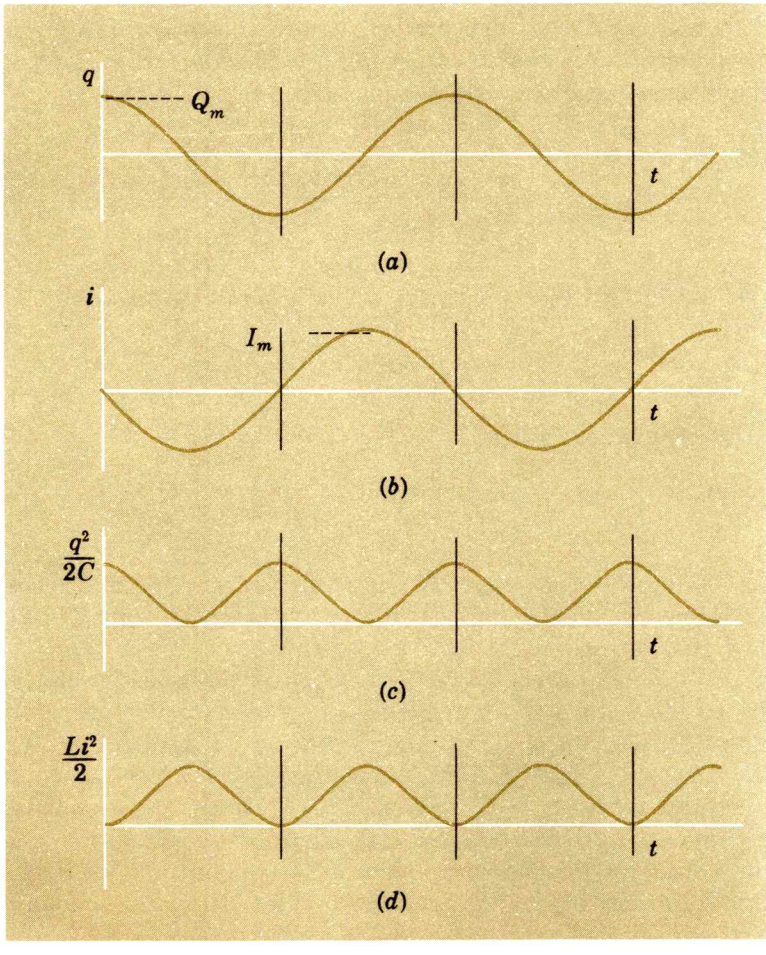


FIG. 29-2. Variaciones con el tiempo en un oscilador eléctrico de (*a*) la carga, (*b*) la corriente, (*c*) la energía del condensador y (*d*) la energía del inductor.

La frecuencia $f = \omega_0/2\pi$ y su recíproco, el periodo T, está dado por

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{29-6}$$

La corriente instantánea $i = dq/dt$ también oscila sinusoidalmente, como se confirma tomando la derivada con respecto al tiempo de (29-4),

$$i = -\omega_0 Q_m \operatorname{sen} \omega t = -I_m \operatorname{sen} \omega_0 t \tag{29-7}$$

donde $I_m = \omega_0 Q_m$ es el valor máximo de i.

Comparando (29-7) y (29-4) (y las Figs. 29-2*a* y *b*), se ve que la carga (que varía aquí como el coseno) y la corriente (que varía aquí como el seno) están 90° fuera de fase. Esto es, cuando el capacitor está totalmente cargado y la energía reside del todo en el campo eléctrico del capacitor, la corriente que pasa por el inductor y el campo magnético asociado con ella, valen cero, e inversamente.

La energía total del circuito U permanece constante; consiste de la energía del capacitor $U_C = q^2/2C$ y de la del inductor $U_L = Li^2/2$, como dadas, respectivamente, por (23-30) y (28-21):

$$U = U_C + U_L = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} = \frac{Q_m^2 \cos \omega_0 t^2}{2C} + \frac{L(I_m \operatorname{sen} \omega_0 t)^2}{2} \tag{29-8}$$

De (29-7), $I_m = \omega_0 Q_m$, y de (29-5), $\omega_0^2 = 1/LC$; por tanto,

$$LI_m^2 = L\omega_0^2 Q_m^2 = \frac{Q_m^2}{C}$$

y (29-8) queda

$$U = \frac{Q_m^2}{2C}(\cos^2 \omega_0 t + \operatorname{sen}^2 \omega_0 t) = \frac{Q_m^2}{2C} \tag{29-9}$$

Aunque las energías del capacitor y del inductor varían sinusoidalmente con el tiempo, como se indica en las Figs. (29-2*c* y *d*), su suma es constante a lo largo del tiempo.

Como demuestra (29-6), la frecuencia de las oscilaciones libres en un circuito LC, depende de L y de C. Por ejemplo, con $C = 1.0\ \mu$F y con $L = 1.0$ mH, se encuentra aplicando (29-6) que $f \approx 5.0 \times 10^3$ Hz $= 5.0$ kHz. La frecuencia crece conforme las magnitudes de L y C decrecen. Así, si se va a construir un oscilador eléctrico de muy alta frecuencia, el capacitor y el inductor deben ser pequeños, no sólo en las magnitudes de C y de L, sino también en las dimensiones reales de estos elementos del circuito.

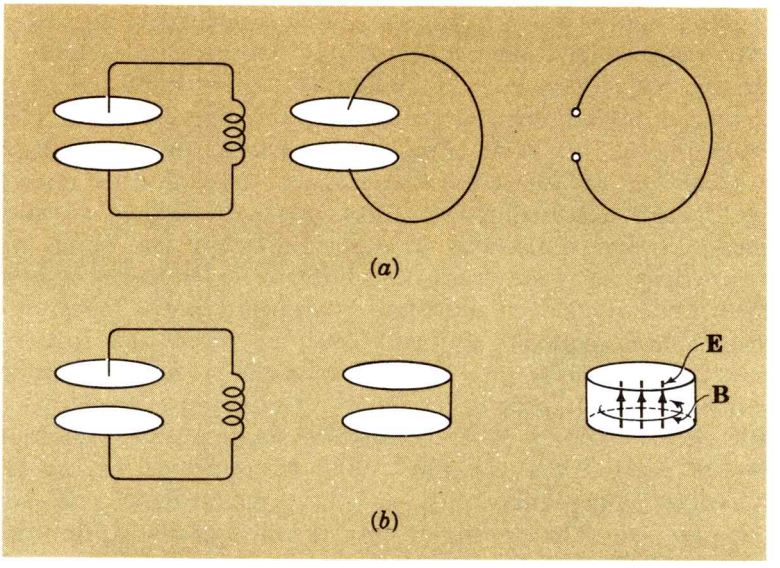


FIG. 29-3. Evolución de un oscilador eléctrico ordinario en (*a*) un oscilador de alta frecuencia formado por un solo aro conductor con una abertura y (*b*) un oscilador de cavidad de microondas que consiste en un conductor en forma de cilindro hueco circular y recto.

La Fig. 29-3, representa la evolución de un circuito ordinario de *LC,* con elementos evidentes de capacitancia e inductancia, en dos variedades de osciladores de alta frecuencia, para quienes estos parámetros del circuito se reconocen con menos facilidad. En la Fig. 29-3*a*, la inductancia se reduce primero en forma considerable reemplazando la bobina con un sencillo alambre conductor; entonces la capacitancia se reduce también considerablemente disminuyendo el área de las placas del capacitor. Aquí se tiene un solo aro conductor roto por una abertura en un punto. Esto es en realidad un oscilador eléctrico, y si el tamaño del aro es de 1 m, con una abertura de quizás 1 cm, oscila con una frecuencia de decenas de megahertz, una frecuencia que está en la región de radio frecuencia del espectro electromagnético.

Justamente osciladores de este tipo fueron de hecho empleados en los experimentos históricos de Heinrich Hertz (1857-1894), quien demostró primero la existencia de la radiación electromagnética en 1887. Hertz utilizó dos de tales osciladores, resonando ambos a la misma frecuencia; las oscilaciones se observaron como unas chispas en la abertura. La radiación electromagnética fue detectada observando que, cuando el segundo oscilador se alejaba con respecto al primero, la chispa persistía a través de la abertura, aunque este efecto *no* podía atribuirse a la acción directa de los campos eléctricos y magnéticos del primer oscilador sobre el segundo.

La Fig. 29-3*b* representa la evolución de un circuito sencillo *LC* en un tipo diferente de oscilador de alta frecuencia. Aquí la inductancia se reduce primero conectando las placas del capacitor con un solo alambre conductor; entonces la inductancia se reduce aún más conectando alambres adicionales en paralelo con el

primero. En realidad, se construye una superficie cilíndrica entera entre las dos placas del capacitor, formándose así un cilindro recto circular, cerrado y hueco, del material conductor. Superficialmente al menos este cilindro no parece un oscilador LC de la variedad ordinaria; es, de hecho una forma sencilla de un oscilador de *microondas*. Debido a sus dimensiones, del orden de unos pocos centímetros, las oscilaciones libres son de frecuencia de microondas, del orden de decenas de kilomegahertz (o sea, ondas electromagnéticas cuyas longitudes de onda son de unos pocos centímetros). El campo eléctrico oscilante, lo mismo que el campo magnético oscilante, quedan por completo encerrados dentro del cilindro. En este caso resulta más útil describir las oscilaciones eléctricas, no en términos de la corriente que pasa por el circuito o de las diferencias de potencial entre varios pares de puntos —aunque esto es aún posible y apropiado—, sino en términos de los campos eléctricos y magnéticos y de su configuración dentro del cilindro cerrado: esto es lo que mejor caracteriza al oscilador de microondas.

29—2 ANALOGIAS ELECTROMECANICAS

Recuérdese la ecuación diferencial que describe las oscilaciones mecánicas libres de un sistema formado de una masa m atada a un resorte con una constante de fuerza k:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \text{(14-4), (29-10)}$$

Esta ecuación es exactamente de la misma forma que la (29-2) para las oscilaciones eléctricas; en realidad, se puede transformar (29-2) en (29-10) haciendo las sustituciones indicadas en la Tabla 29-1.

La correspondencia es más que de la mera forma. Parecida a la masa m, que corresponde a la tendencia inercial de una partícula, de mantener constante su velocidad v, la inductancia

Tabla 29-1

Cantidad mecánica	*Símbolo*	*Cantidad eléctrica*	*Símbolo*
Desplazamiento	x	Carga	q
Velocidad	$v = dx/dt$	Corriente	$i = dq/dt$
Aceleración	$a = dv/dt = d^2x/dt^2$	Rapidez con que cambia la corriente	$di/dt = d^2q/dt^2$
Masa	m	Inductancia	L
Constante del resorte	k	Reciproco de la capacitancia	$1/C$

presenta una tendencia a mantener una corriente constante i de modo parecido; la constante de recuperación del resorte k corresponde a lo que podría llamarse la constante de recuperación del capacitor $1/C = V/q$. (Aunque tanto una bobina inductora y un resorte helicoidal se representan en un diagrama por el mismo símbolo, debe recalcarse que el capacitor es análogo a un resorte elástico, y la inductancia de la bobina, a la masa).

Además, la diferencia de potencial eléctrico q/C corresponde a la fuerza de recuperación elástica kx, y la fem inducida $L\ (di/dt)$ a la fuerza $m\ (dv/dt)$. Existe también un paralelismo con la fuerza mecánica disipativa $F = rv$, proporcional a la velocidad de la partícula; y la resistencia eléctrica R, a través de la cual la diferencia de potencial es Ri. En forma semejante, la energía potencial $\frac{1}{2}kx^2$ del resorte estirado y la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ de la partícula en movimiento corresponden, respectivamente, a la energía eléctrica $q^2/2C$ del capacitor cargado y a la energía magnética $Li^2/2$ del inductor. Véase la compilación de aún más analogías electromecánicas en la Tabla 29-2.

Existe una analogía completa, tanto en términos matemáticos como en comportamiento físico, entre los elementos de los "circuitos" mecánico y eléctrico. En realidad es útil a menudo analizar un sistema mecánico complicado construyendo su análogo eléctrico, con elementos ordinarios del circuito eléctrico; entonces la medición de cargas, corrientes, y diferencias de potencial dan los correspondientes desplazamientos de la partícula, velocidades y fuerzas.

En cualquier circuito real es inevitable que esté presente alguna resistencia, y como resultado la energía total del oscilador eléctrico disminuye en forma exponencial con el tiempo, y su frecuencia característica es algo menor que ω_0, su valor en el caso de que resistencia es cero. Este comportamiento es exactamente análogo al de un oscilador mecánico.

En un circuito LCR con estos tres elementos en serie, tiene lugar resonancia cuando la frecuencia de la fem impulsora es igual

Table 29–2

Cantidad mecánica	*Símbolo*	*Cantidad eléctrica*	*Símbolo*
Fuerza elástica de recuperación	kx	Diferencia de potencial	q/C
Fuerza	$m(dv/dt)$	Fem inducida	$L(di/dt)$
Fuerza disipativa	rv	Caída de potencial en una resistencia	Ri
Energía potencial de un resorte	$\frac{1}{2}kx^2$	Energía eléctrica de un capacitor cargado	$\frac{1}{2}(1/C)q^2$
Energía cinética	$\frac{1}{2}mv^2$	Energía magnética de un inductor	$\frac{1}{2}Li^2$

a la frecuencia natural; en la resonancia hay una respuesta acrecentada: la carga del capacitor y la corriente del circuito alcanzan sus máximos valores.

29—3 EL CIRCUITO *RC*

Analicemos ahora el sencillo circuito eléctrico de dos componentes que son una resistencia y un capacitor cargado en serie, como se representa en la Fig. 29-4. Un capacitor C que tiene una carga inicial de magnitud Q_0 en cada placa y una diferencia de potencial $V_0 = Q_0/C$ entre las placas, se descarga a través de un resistor R. Es fácil describir cualitativamente lo que sucede después del instante en que se cierra el interruptor. Los electrones libres se mueven en sentido dextrógiro alrededor del circuito hasta que el capacitor quede al final neutro. Una corriente, en un principio de magnitud $i_0 = V_0/R$, existe en el circuito, y esta corriente cae a cero conforme la carga Q y el potencial V del capacitor, también caen a cero. Simultáneamente, la energía potencial eléctrica asociada con las cargas opuestas que al principio residen en las placas del capacitor (o si se desea, asociadas con el campo eléctrico entre las placas del capacitor) se disipa como energía térmica mientras la carga atraviesa al resistor.

Veamos cómo la carga Q y la corriente i varían con el tiempo. Se sabe que el cambio neto de potencial alrededor de una trayectoria cerrada vale cero; esto es, yendo en sentido levógiro alrededor del circuito de la Fig. 29-4, la caída de potencial iR a través del resistor, más la *caída* de potencial $(-Q/C)$ a través del capacitor deberá ser igual a cero en cada instante:

$$iR - \frac{Q}{C} = 0$$

El signo negativo de la caída de potencial a través del capacitor indica que hay un incremento al cruzar al capacitor de la placa negativa a la positiva. Si se sustituye $i = -dQ/dt$, esta relación queda

$$R\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{C}$$

Esta ecuación se aplica en cualquier instante; rearreglando términos y recordando que R y C son independientes del tiempo, se tiene

$$\int_{Q_0}^{Q} \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$Q = Q_0 e^{-t/RC} \qquad (29\text{-}11)$$

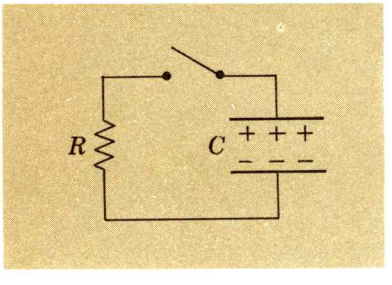


FIG. 29-4. Un circuito formado por un capacitor cargado y una resistencia.

La carga Q en cada placa del capacitor decrece exponencialmente con el tiempo, como se indica en la Fig. 29-5*a*. La rapidez de decaimiento se gobierna por la característica constante de tiempo τ del circuito RC:

$$\tau = RC \tag{29-12}$$

Como demuestra (29-11), cuando $t = RC$, entonces $Q = Q_0/e$; así, la constante RC es el tiempo transcurrido hasta que la carga o el potencial del capacitor es la fracción $1/e$, o 37% de su carga inicial. Por ejemplo, en un circuito que contiene un resistor de 1.0-MΩ y un capacitor de 1.0-μF la constante de tiempo es $RC = (1.0 \times 10^6\ \text{V/A})(1.0 \times 10^{-6}\ \text{C/V}) = 1.0\ \text{s}$.

¿Cómo varía la corriente i con el tiempo? Usando (29-11) para el valor de Q, se tiene

$$i = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

Como $Q_0/RC = V_0/R = i_0$, se puede escribir esta relación del modo siguiente:

$$i = i_0 e^{-t/RC} \tag{29-13}$$

La corriente, que vale 0 antes que se cierre el interruptor, se eleva abruptamente hasta i_0 en el instante $t = 0$, y entonces decae en forma exponencial en el tiempo con el característico decaimiento temporal RC, como se indica en la Fig. 29-5*b*.

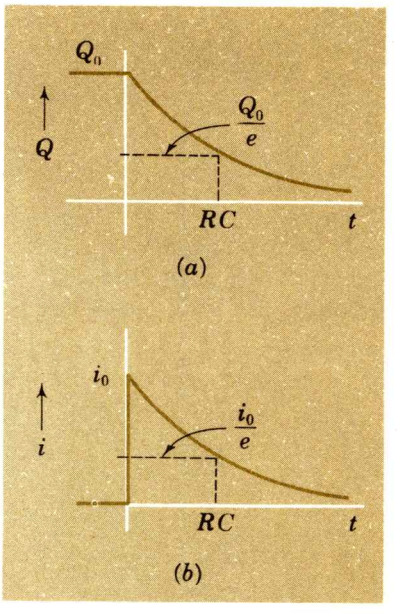


FIG. 29-5. Variaciones con el tiempo de (*a*) la carga del capacitor y (*b*) la corriente, en un circuito RC.

29—4 EL CIRCUITO LR

Consideremos ahora a un circuito con dos componentes, que son una resistencia R y una inductancia L como se muestra en la Fig. (29-6). Supongamos que una corriente constante $i = \mathscr{E}/R$ se ha establecido por la batería. Supongamos ahora que el interruptor de la Fig. 29-6*a* se cierra bruscamente, lo que desconecta la batería, que ya no suministrará su fem $\mathscr{E}$ para impulsar la corriente a través de la rama LR del circuito. La corriente en el circuito cerrado, sin embargo no cae a cero de modo instantáneo. Aunque la fem de la batería ya no impulsa cargas alrededor del circuito, la corriente variable que pasa por el inductor crea una fem que intenta reemplazar a la fem de la batería; esto es la fem del inductor tiene el mismo sentido que la fem inicial de la batería, en vista de que el inductor intenta sustentar la corriente.

Aplicando el teorema de las mallas (segunda regla de Kirchhoff de la conservación de energía) al circuito cerrado de la Fig. 29-6*b*, se tiene

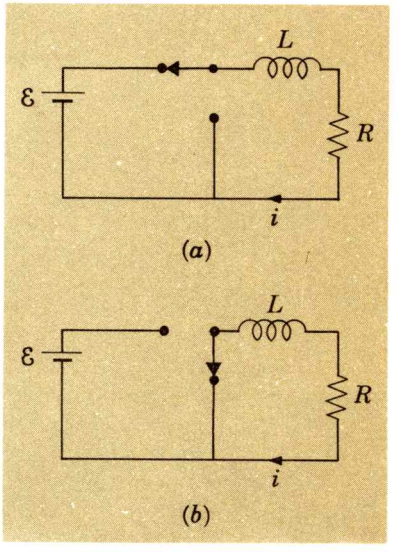


FIG. 29-6. Un circuito LR (*a*) en serie con la batería $\mathscr{E}$ con corriente estacionaria $i = \mathscr{E}/R$ y (*b*) con la batería $\mathscr{E}$ fuera del circuito, de modo que no impulse corriente a través de la rama LR del circuito.

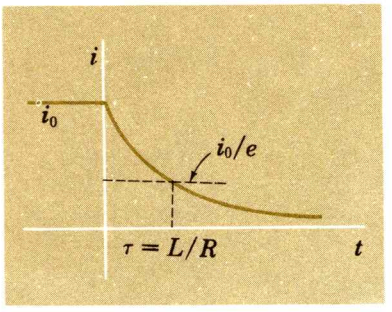


FIG. 29-7. El decaimiento exponencial de la corriente en el circuito de la Fig. 29-6*b*, con el transcurso del tiempo.

$$\Sigma\mathscr{E} = \Sigma V \tag{25-7}$$

$$-L\frac{di}{dt} = iR \tag{29-14}$$

Para encontrar cómo la corriente i varía con el tiempo t se separan variables en (29-14) y se integra la corriente desde su valor inicial i_0 en $t = 0$ hasta el valor i en el instante t = t:

$$\int_{i_0}^{i}\frac{di}{i} = -\frac{1}{L/R}\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{i}{i_0} = -\frac{t}{L/R}$$

$$i = i_0 e^{-t/(L/R)} \tag{29-15}$$

La corriente decae con el tiempo exponencialmente, como se indica en la Fig. 29-7. La constante característica de tiempo para el circuito LR es

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{29-16}$$

Como demuestra (29-15), después de transcurrido el tiempo $t = \tau = L/R$ la corriente es $i = i_0/e$ esto es, la constante de tiempo L/R es el tiempo transcurrido mientras la corriente cae hasta $1/e$, o 37%, de su valor inicial. Por ejemplo, si un circuito LR consiste de un inductor de 1.0 H y de un resistor de 1.0 Ω, la corriente cae hasta la fracción $1/e$ de su valor inicial en 1.0 s.

Cualquier inductor real tendrá una cierta resistencia finita, sencillamente porque el alambre conductor del que está hecho tiene una resistencia diferente de cero; en consecuencia, una inductancia pura no puede existir aislada de una resistencia y cualquier inductor debe tener su propio y característico tiempo de decaimiento.

La corriente que pasa por un inductor en cortocircuito, decae en forma exponencial con el tiempo. Es fácil de demostrar que inmediatamente después de que se ha aplicado una fem constante a un inductor, la corriente crece en forma exponencial. Considérese el circuito de la Fig. 29-8. Se desea encontrar cómo varía la corriente i con el tiempo a partir del instante en que se ha cerrado el interruptor y hasta que la corriente alcanza su máximo valor $i_m = \mathscr{E}/R$. Es claro que conforme pasa primero la corriente por el inductor y crece el flujo magnético que la atraviesa, se induce una fem la cual, por la ley de Lenz, se opone a la fem de la batería. Se aplica el teorema de las mallas como sigue:

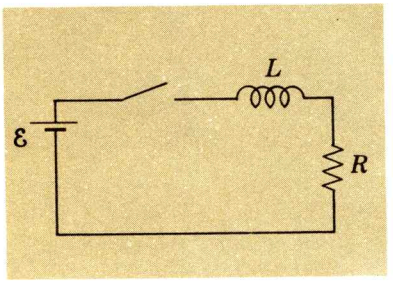


FIG. P29-8

$$\Sigma\mathscr{E} = \Sigma V$$

$$\mathscr{E} - L\frac{di}{dt} = iR \tag{29-17}$$

donde $\mathscr{E}$ es la fem constante de la batería. El término $-L(di/dt)$ aparece de nuevo en el lado izquierdo con una fem; reordenando se tiene

$$\mathscr{E} = L\frac{di}{dt} + iR \tag{29-18}$$

No es difícil resolver esta ecuación diferencial para i como una función de t. La solución es

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-t/(L/R)}\right) \tag{29-19}$$

que puede verificarse fácilmente sustituyendo i y di/dt de (29-19) en (29-18).

La corriente crece en forma exponencial con el tiempo con la misma característica constante de tiempo $\tau = L/R$ como el circuito de la Fig. 29-6. Después de que ha transcurrido el tiempo L/R, la corriente i difiere de su valor final $\mathscr{E}/R$ en $1/e$, o 37%.

Ejemplo 29-1

Se desconocen tanto la inductancia como la resistencia interna de una cierta bobina. Los experimentos demuestran que cuando se cortocircuita el inductor, la corriente decae a $1/e$ de su valor inicial en 0.67 ms. Cuando un resistor de 4.0-Ω se coloca en serie con el inductor, la corriente inicial del inductor cae hasta $1/e$ de su valor inicial, en 0.50 ms. ¿Cuál será la inductancia L y la resistencia interna R_i del inductor?

(De 29-16).

$$\tau = \frac{L}{R_i} = 0.67 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

y

$$\frac{L}{R_i + 4.0\ \Omega} = 0.50 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

Resolviendo estas ecuaciones, se tiene

$$L = 8.0\ \text{mH}$$

$$R_i = 12\ \Omega$$

RESUMEN

Cuando un capacitor en un principio cargado se conecta a un inductor sin resistencia, la carga y la corriente en el circuito oscilan sinusoidalmente con la frecuencia angular ω_0:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (29\text{-}5)$$

El inductor presenta inercia al cambio de la corriente que lo atraviesa, y el capacitor tiende a llevar su estado de carga a neutralidad eléctrica.

Cuando un capacitor cargado C se descarga a través de un resistor R, la carga del capacitor decrece exponencialmente con el tiempo, siendo RC la constante característica del tiempo de decaimiento,

La constante de tiempo para el crecimiento o el decaimiento exponencial de la corriente que pasa por un inductor en un circuito en serie LR es L/R.

PROBLEMAS

29-1. ¿Qué capacitancia se usará en una inductancia de 4.0 H para que el circuito resuene a 60 Hz?

29-2. El circuito resonante del circuito en un radio, tiene un inductor fijo en serie con un capacitor variable. Encontrar el factor que hace que cambie la capacitancia cuando el radio es sintonizado en toda la banda de radiodifusión, desde 500 kHz hasta 1.5 MHz.

29-3. Las dimensiones físicas de todos los componentes de un circuito eléctrico resonante, se reducen por un factor de 5 exactamente. ¿Por qué factor se incrementa la frecuencia de resonancia?

29-4. Un oscilador eléctrico, que consiste en un capacitor de placas paralelas y en un solenoide, resuena a la frecuencia f. La separación de las placas del capacitor se reduce por un factor 2, y el número de vueltas del solenoide se incrementa con un factor 2. ¿Cuál será la nueva frecuencia de resonancia del circuito?

29-5. Un oscilador eléctrico que consiste de un capacitor de 10-μF en serie con un inductor sin resistencia de 1.0-mH, tiene una máxima diferencia de potencial de 50 V entre las placas del capacitor. (*a*) Encontrar el valor máximo de la corriente en el circuito. (*b*) En un diagrama v-t representar separadamente el voltaje v_C a través del capacitor y el voltaje v_L a través del inductor, y demostrar que el voltaje resultante a través de la combinación siempre es cero. (*c*) ¿Cuál es la energía total del oscilador en cualquier instante?

29-6. Un capacitor de 0.10 μF tiene al principio una diferencia de potencial de 100 V entre sus terminales; entonces se conecta el capacitor a un inductor sin resistencia de 3.0 mH. (*a*) ¿Cuál es la energía total del oscilador eléctrico en cualquier instante? (*b*) ¿Cuál es la máxima corriente instantánea que pasa por el inductor?

29-7. La diferencia del potencial entre las placas de un capacitor de 0.10 μF se ha encontrado que por pérdidas cae a la mitad de su valor inicial en 1.5 s. ¿Cuál es la resistencia equivalente entre las placas del capacitor?

29-8. Demostrar que, cuando un capacitor cargado se descarga a través de un resistor, la energía total inicialmente almacenada en el capacitor, $Q^2/2C$, es

igual a la energía total disipada en el resistor, $\int_0^\infty i^2R\,dt$.

29-9. Un capacitor de placas paralelas se llena con cuarzo entre las placas; la constante dieléctrica y la resistividad eléctrica del cuarzo son, respectivamente de 3.8 y 5×10^{16} Ω-m. Si se carga este capacitor ¿Cuánto tardará en perder la mitad de la carga?

29-10. Demostrar que la constante de tiempo para un capacitor de placas paralelas que pierda carga (esté lleno con un dieléctrico ligeramente conductor) es independiente tanto del área de las placas como de su separación.

29-11. Un circuito *LR* se conecta a una batería, como se indica en la Fig. 29-8. (*a*) Demostrar que la proporción con que la corriente cambia inicialmente con el tiempo es $i_f/(L/R)$, donde i_f es el estado final estacionario de la corriente. (*b*) Encontrar la relación entre la caída de voltaje a través del inductor y la caída a través del resistor, cuando $i = i_f/2$.

29-12. Considérese el circuito representado en la Fig. P29-12. Suponiendo que el interruptor *S* ha estado abierto por un largo tiempo (*a*) ¿Cuánto valen las corrientes que pasan por R_1, R_2, y L? (*b*) Si ahora se cierra el interruptor en el instante $t = 0$, ¿Cuáles son las expresiones, como funciones del tiempo, para las corrientes que pasan por R_1, R_2 y L, aplicando las leyes de Kirchhoff? Comprobar las respuestas encontrando los valores de las corrientes cuando t se aproxima al infinito.

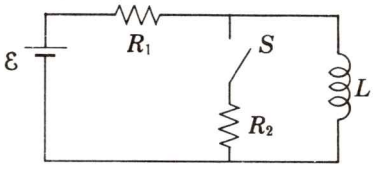


FIG. P29-12

29-13. Se ha encontrado que la constante de tiempo para el decaimiento de la corriente que pasa por una cierta bobina, se reduce a la mitad cuando se le conecta en serie un resistor de 10 -ohm. Además cuando una inductancia pura de 30 mH se conecta en serie con la bobina original y con el resistor, la constante del tiempo es la misma que la de la bobina sola. Encontrar (*a*) la inductancia y (*b*) la resistencia interna de la bobina.

29-14. La corriente inicial en un circuito en serie *LR* es de 1.0 A, cuando $L = 0.10$ mH y $R = 10\ \Omega$. Estimar el tiempo para que la corriente decaiga hasta un electrón/s.

29-15. Una corriente de 2.0 A pasa por un inductor de 30 mH. Encontrar la energía total disipada como energía térmica, cuando el inductor se conecta a una resistencia y se desconecta de cualquier otra cosa.

29-16. En el sencillo circuito en serie de la Fig. 29-8, supongase que $\mathscr{E} = 10$ V, $R = 2.0\ \Omega$, y $L = 4.0$ mH. Cuatro milisegundos después de que se cierre el interruptor, encontrar (*a*) la potencia suministrada por la batería, (*b*) la potencia disipada como energía térmica, (*c*) la potencia suministrada al campo magnético del inductor.

29-17. La resistencia interna de una bobina es de 40 Ω, y cuando se cortacircuita la corriente que pasa por la bobina, la corriente decae a la mitad de su valor en 0.80 ms. (*a*) ¿Cuál es la inductancia de la bobina? (*b*) Encontrar cuánto tarda la energía almacenada en la bobina en caer a la mitad de su valor.

29-18. Una bobina que tiene una inductancia de 4.0 mH y una resistencia de $10\ \Omega$ se conecta a una batería con una fem de 12 V y una resistencia interna de 2.0 Ω. Calcular después de cerrar el interruptor, el tiempo que tardará (*a*) la corriente para alcanzar el 99.9% de su valor estacionario y (*b*) para que la energía almacenada en el inductor sea el 99.9% de su valor estacionario.

Capítulo

30

ECUACIONES DE MAXWELL Y ONDAS ELECTROMAGNETICAS

Todo el electromagnetismo clásico puede compendiarse en cuatro ecuaciones fundamentales, que relacionan los campos eléctrico y magnético entre sí y con la carga eléctrica y la corriente. Estas ecuaciones, llamadas ecuaciones de Maxwell, ya se han discutido: la ley de Gauss de la electricidad, la ley de Gauss del magnetismo, la ley de Faraday y la Ley de Ampère. En este capítulo se reúnen en un solo lugar estas leyes fundamentales del electromagnetismo y entonces se emplean estas ecuaciones para derivar los más notables fenómenos de las ondas electromagnéticas.

En primer lugar se generaliza la ley de Ampère, al considerar la llamada corriente de desplazamiento, o flujo eléctrico *variable,* el cual puede generar un campo magnético en la misma forma que las cargas en movimiento. En segundo lugar, después de resumir las cuatro ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, se derivan expresiones para las siguientes propiedades de las ondas electromagnéticas que recorren el espacio libre: su velocidad, que se ha encontrado que es una constante universal; la densidad de energía y la intensidad de la radiación; la fuerza de la radiación y la presión producida por las ondas electromagnéticas que llegan a un material; y el ímpetu lineal de la radiación.

Se discute la generación de ondas electromagnéticas por las oscilaciones sinusoidales de la carga eléctrica. Se muestra el espectro electromagnético y se discuten brevemente sus diversas regiones se dan también diversos métodos para medir la velocidad de la luz.

30—1 LA LEY DE AMPERE Y LA CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO DE MAXWELL

De acuerdo con la ley de Ampère se crea un campo magnético por la corriente eléctrica i, la integral de línea del campo magnético alrededor de cualquier camino cerrado, siendo la corriente (multiplicada por la que cruza *cualquier superficie* limitada por

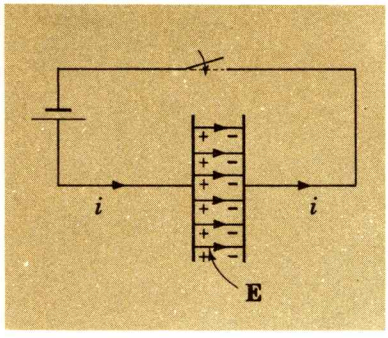


FIG. 30-1. Un capacitor de placas paralelas que se carga justamente después de que se cierra el interruptor. La corriente i aumenta con el tiempo.

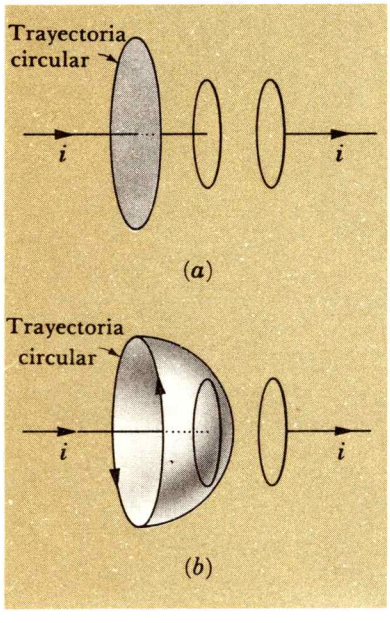


FIG. 30-2. El capacitor que se carga en la Fig. 30-1. La trayectoria para aplicar la ley de Ampère, rodea al alambre conductor. En inciso (*a*) esta trayectoria limita una superficie plana y en (*b*) la trayectoria limita a una superficie hemisférica.

dicho camino cerrado:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \qquad (27\text{-}12)$$

Como está escrita arriba, la ley de Ampère reconoce sólo una fuente del campo magnético: las cargas eléctricas en movimiento. Existe, sin embargo, un segundo origen del campo magnético: un campo eléctrico variable (o flujo eléctrico variable), llamado también corriente de desplazamiento.

Para ver cómo se origina la llamada corriente de desplazamiento consideremos la situación indicada en la Fig. 30-1. Supongamos que el interruptor del circuito acaba de cerrarse; al principio la corriente salta desde cero hasta algún valor máximo; muy pronto cae hasta cero de nuevo, después de que el capacitor ha quedado del todo cargado. Estamos interesados en el tiempo durante el cual cambia la corriente que pasa por el circuito. En realidad, modificando ligeramente este enunciado, estamos interesados en el tiempo en que cambia la corriente que pasa por el *alambre conductor,* puesto que una corriente real *no* existe en cualquier instante en la región entre las dos placas del capacitor, en vista de que ninguna partícula cargada atraviesa esta región.

Apliquemos ahora (27-12) a una trayectoria circular alrededor de la sección interior de la Fig. 30-1. La Fig. 30-2 lo ilustra para una trayectoria que limita a dos posibles superficies. Si se escoge el área plana cuya orilla es la trayectoria circular de la Fig. 30-2*a*, entonces hay aquí claramente una corriente real que penetra esta superficie y produce un campo magnético alrededor de la trayectoria cerrada; aunque sencilla, esta superficie plana no es la única que se puede escoger. La ley de Ampère relaciona a la corriente que atraviesa la superficie limitada por la trayectoria, *sin* especificar la naturaleza de dicha superficie; esto es se puede escoger una superficie de *cualquier* forma al aplicar la ley. En cada caso la corriente total que atraviesa la superficie determina el campo magnético cerca de la trayectoria. Si se escoge la superficie hemisférica que atraviesa la región entre las placas del capacitor que se carga de la Fig. 30-2*b*, no existe una corriente real atravesando la superficie hemisférica. Esto implica, por (27-12) que *no* hay un campo magnético alrededor de la trayectoria, en contradicción con el campo predicho por la superficie plana. Para explicar esta contradicción, en 1865, J. C. Maxwell (1831-1879) propuso una forma más general de la ley de Ampère suponiendo que, además de la corriente real, existe una corriente de desplazamiento dentro del capacitor. Su conjetura teórica basada en la simetría y en una ley de Ampère generalizada y autocompatible, fue después verificada por el experimento.

Para permitir las contribuciones de una corriente ficticia de desplazamiento i_d, así como de una corriente real i, la ley de Ampère deberá escribirse:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0(i + i_d) \qquad (30\text{-}1)$$

De tal modo que el campo magnético que rodea a la trayectoria será el mismo, independientemente de la superficie escogida; en la situación sencilla de la Fig. 30-2 se debe tener que

$$i \text{ (en el conductor)} = i_d \text{ (en el capacitor)} \qquad (30\text{-}2)$$

¿Qué sucede entre las placas del capacitor que se pueda relacionar con i_d? Si no hay cargas en movimiento ¿Qué es lo que genera el campo magnético? Debe suponerse entonces que i_d está relacionada con el flujo eléctrico ϕ_E entre las placas del capacitor. Por definición,

$$\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \qquad (22\text{-}2), (30\text{-}3)$$

La corriente instantánea $i = dq/dt$ da la rapidez con que las cargas pasan por cualquier punto del conductor; dq/dt es también la rapidez con que se acumulan las cargas en cada una de las placas del capacitor. Para un campo eléctrico uniforme **E** entre las placas del capacitor de placas paralelas, ya se sabe que

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \qquad (22\text{-}9)$$

o

$$q = \varepsilon_0 EA = \varepsilon_0 \phi_E \qquad (30\text{-}4)$$

Aquí se ha identificado a EA, por medio de (30-3), como el flujo eléctrico ϕ_E que atraviesa una área paralela a las placas del capacitor. Combinando (30-4) y (30-2) se tiene

$$i_d = i = \frac{dq}{dt}$$

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \qquad (30\text{-}5)$$

La corriente de desplazamiento i_d que atraviesa cualquier área escogida, es la rapidez con que cambia el flujo eléctrico que atraviesa dicha área, multiplicado por ε_0. Sustituyendo (30-5) en (30-1), se tiene

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \right) = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi_E}{dt} \qquad (30\text{-}6)$$

Esta es la forma generalizada de la ley de Ampère; esta ley implica que un campo magnético puede producirse con un flujo eléctrico

variable, aun en la ausencia de cargas eléctricas, esto es, en ausencia de una corriente real. En fin, **B** puede ser generada no sólo por una corriente real constante o variable, sino también por una corriente ficticia de desplazamiento que existe siempre que el flujo eléctrico esté *cambiando*. Aunque se ha derivado la forma generalizada de la ley de Ampère del caso muy especial de un capacitor de placas paralelas que se está cargando, esta relación es por completo general, aplicándose a *cualquier* flujo eléctrico variable.

Cuando no existe corriente real y el campo magnético se genera exclusivamente por un flujo eléctrico variable en el espacio, (30-6) se convierte en

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi_E}{dt} \qquad (30\text{-}7)$$

Esta relación tiene forma semejante a la ley de Faraday:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad (28\text{-}10), (30\text{-}8)$$

En primer lugar un flujo eléctrico variable produce un campo magnético; en segundo, un flujo magnético variable produce un campo eléctrico: esta simetría entre los campos eléctrico y magnético fue una razón por la que Maxwell hizo la hipótesis de la corriente de desplazamiento.

Una comparación de los campos magnéticos y eléctricos producidos por flujos variables eléctricos y magnéticos, se ilustra en la Fig. (30-3).

¿Cómo se prueba por experimentación la hipótesis de Maxwell relativa a la corriente de desplazamiento? El campo magnético inducido por un flujo eléctrico variable es relativamente pequeño, y, por tanto no es fácil de detectar en forma directa. La prueba crucial de la ley de Ampère generalizada se obtiene con la predicción teórica de Maxwell de que una perturbación electromagnética, excitada una vez en el espacio vacío, puede autogenerarse; esto es, una perturbación electromagnética puede encontrarse separada de las cargas eléctricas y propagarse por el espacio como una *onda electromagnética*. Una forma sencilla del argumento teórico se da en la Sec. (30-3). La observación directa de las ondas electromagnéticas (ondas cortas de radio) por Heinrich Hertz en 1887 verificó la predicción de Maxwell.

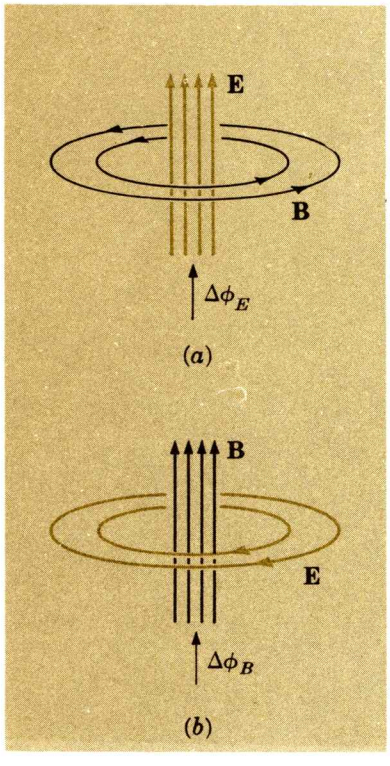


FIG. 30-3. (*a*) Líneas del campo que rodean una región en donde aumenta el flujo eléctrico. (*b*) Líneas del campo eléctrico que rodean una región en donde aumenta el flujo magnético. Nótense los sentidos diferentes de las líneas del campo.

30—2 ECUACIONES DE MAXWELL

Se han discutido las contribuciones de Maxwell a la teoría electromagnética por su hipótesis de la corriente de desplazamiento, pero Maxwell jugó un papel aún más significativo aportando

también una teoría unificada del campo electromagnético, en hasta ahora fenómenos separados eléctricos y magnéticos. Fue Faraday el que inventó el concepto del campo como un medio útil y práctico de representar los efectos eléctricos y magnéticos. Maxwell consideró más profundamente los campos eléctricos y magnéticos y desarrolló las expresiones matemáticas para sus propiedades e interrelaciones. Estas relaciones fundamentales, que dicen todo lo referente al electromagnetismo clásico, se denominan *ecuaciones de Maxwell.*

Antes de escribir las cuatro ecuaciones de Maxwell para el espacio libre, se debe comprender con claridad las definiciones del campo eléctrico **E** y del campo magnético **B.** De la llamada ecuación de Lorentz, la cual da la fuerza total que recibe una carga eléctrica de los campos eléctricos y magnéticos, se tiene:

$$\mathbf{F} = \mathbf{q}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (26\text{-}8)$$

Esta ecuación define a **E** y a **B;** $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, es la parte de la fuerza que depende de la velocidad de la carga y es la fuerza magnética; la parte que queda, $q\mathbf{E}$, es la fuerza eléctrica.

La Tabla (30-1) es una lista de las cuatro ecuaciones de Maxwell en el vacío e indica el nombre, y la evidencia primaria experimental para cada una.

30—3 LAS ONDAS ELECTROMAGNETICAS A PARTIR DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Como una aplicación importante de las ecuaciones de Maxwell derivaremos las propiedades fundamentales de las ondas electro-

Tabla 30-1

Nombre	*Ecuación*		*Evidencia experimental*
Ley de Gauss de la electricidad (Ley de Coulomb)	$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q$	(22-3)	La fuerza eléctrica es de cuadrado inverso; en el interior de un conductor cargado no hay carga neta en condiciones de estado estacionario.
Ley de Gauss del magnetismo	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	(27-11)	No existen polos magnéticos aislados.
Ley de Faraday	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\dfrac{d\phi_B}{dt}$	(28-10)	Fenómeno de inducción electromagnética.
Ley de Ampère	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{d\phi_E}{dt}$	(30-6)	Fuerza magnética entre corrientes; ondas electromagnéticas.

magnéticas en el espacio vacío, separadas de cualquier corriente o carga eléctrica; poniendo tanto a q como a i iguales a cero, las ecuaciones de Maxwell (Tabla 30-1) se reducen a las siguientes:

1. Las integrales de superficie de **E** y **B** sobre cualquier superficie cerrada son iguales a cero:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad (22\text{-}3)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad (27\text{-}11)$$

2. Un campo magnético variable (estrictamente, un flujo magnético variable) genera un campo eléctrico, de acuerdo con la *ley de Faraday:*

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad (30\text{-}8)$$

3. Un campo eléctrico variable (estrictamente, un flujo eléctrico variable) genera a un campo magnético, de acuerdo con la *ley generalizada de Ampère:*

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi_E}{dt} \qquad (30\text{-}7)$$

Supongamos que una pulsación magnética rectangular, con un campo magnético **B**, se mueve a lo largo de X a alguna cierta velocidad c, como se indica en la Fig. 30-4. Este campo se supone que se mueve a través del espacio vacío, lejos de cualquier carga eléctrica o de cualquier corriente; cómo es posible que un campo magnético pueda separarse de cargas y de corrientes se discutirá después.

El ancho de la pulsación a lo largo del eje X es L; a lo largo de los ejes Y y Z es de extensión infinita. En todos los puntos dentro

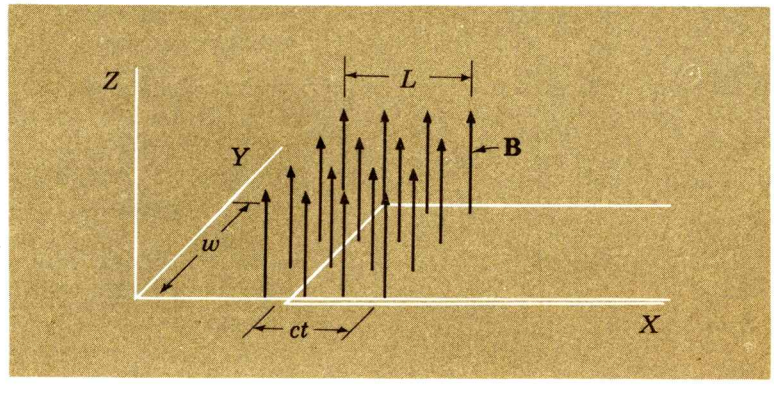


FIG. 30-4. Pulsación magnética en movimiento.

de la pulsación, el campo magnético tiene la dirección y sentido de $+Z$, con una magnitud B. Fuera de este intervalo B vale cero.

Para comprender las implicaciones de la ecuación de Maxwell en el espacio vacío, considérese un cuadro imaginario paralelo al plano XY. El ancho del cuadro a lo largo de la dirección Y es w, y la longitud de la dirección X es indefinida; las líneas blancas de la Fig. 30-4 indican dicho cuadro. Si el borde derecho de la pulsación magnética pasa por el extremo izquierdo del cuadro en el tiempo $t = 0$, deberá, después de que ha pasado un tiempo t, progresar una distancia ct dentro del cuadro. Puesto que está cambiando el flujo magnético a través del cuadro, existirá un çampo eléctrico inducido, que podrá evaluarse con la ecuación de Faraday Ec. (30-8).

El flujo que atraviesa el cuadro en el tiempo t es

$$\phi_B = BA = B(\omega ct) \tag{30-9}$$

Cuando $t = L/c$, el borde remolcado y posterior de la pulsación habrá entrado en el cuadro, y por tanto ϕ_B será constante. La rapidez con que cambia el flujo mientras el impulso atraviesa el extremo izquierdo del cuadro es

$$\frac{d\phi_B}{dt} = Bwc \tag{30-10}$$

Suponiendo que el campo eléctrico inducido tiene la dirección Y, la única contribución a la integral $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ tomada alrededor del cuadro en la Fig. 30-4, está a lo largo del lado izquierdo, donde la integral es $-$Ew. Así,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -Ew \tag{30-11}$$

Sustituyendo (30-10) y (30-11) en (30-8) se obtiene

$$Ew = Bwc$$

$$E = Bc \tag{30-12}$$

La Ec. (30-12) da la magnitud del campo eléctrico inducido en un cuadro imaginario en el espacio es decir, da la magnitud del campo eléctrico producido en el espacio vacío.

¿Cuál será la dirección de **E**? Se encontrará con la ley de Lenz. Conforme la pulsación magnética se mueve dentro del cuadro, el flujo magnético que atraviesa el cuadro aumenta en la dirección $+Z$. En consecuencia, una fem inducida y un campo eléctrico inducido se oponen al incremento del flujo magnético. A lo largo del lado izquierdo del cuadro, esto requiere que **E** esté en la dirección $+Y$ (penetrando en el papel en la Fig. 30-4). Al pasar la pulsación magnética por el extremo izquierdo del cuadro, deberá

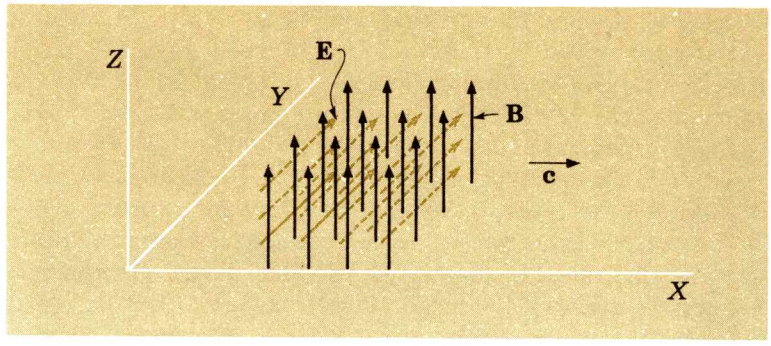


FIG. 30-5. El campo eléctrico que acompaña al campo magnético de la Fig. 30-4.

existir un campo eléctrico **E** en la dirección $+Y$, de magnitud Bc. En cualquier instante en que la pulsación *no* esté pasando por el extremo izquierdo del cuadro *no* habrá ningún campo eléctrico. Así, la pulsación original magnética transversal está acompañada por una pulsación eléctrica transversal, siendo los dos campos perpendiculares entre sí y a la dirección que se propagan; Véase la Fig. 30-5.

Repasemos lo que se ha dicho hasta ahora. Empezamos con una pulsación magnética móvil y se demostró, con la ley de Faraday, que una pulsación eléctrica debe acompañarla. Las magnitudes de **E** y de **B** están relacionadas por (30-12). Ahora haremos justamente lo contrario; empezaremos con una pulsación eléctrica y demostraremos que debe acompañarla una pulsación magnética.

De un modo similar al empleado para la pulsación magnética de la Fig. 30-4, consideremos una pulsación rectangular de un campo eléctrico **E**, como se indica en la Fig. 30-6. La dirección del campo es la del eje $+Y$ y se mueve a la velocidad c a lo largo del eje $+X$. Consideremos ahora un cuadro imaginario rectangular colocado en el plano XZ cuyo ancho en la dirección Z es l. Evaluaremos el campo magnético producido en dicho cuadro por el paso de la pulsación eléctrica con la ley de Ampère:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi_E}{dt} \qquad (30\text{-}7), (30\text{-}13)$$

La única contribución a la integral $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ está a lo largo del extremo izquierdo del cuadro, donde la dirección de **B**, se toma a lo largo del eje Z.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Bl \qquad (30\text{-}14)$$

El flujo eléctrico $\phi_E = EA$ que atraviesa el cuadro en el tiempo t es

$$\phi_E = EA = E(lct)$$

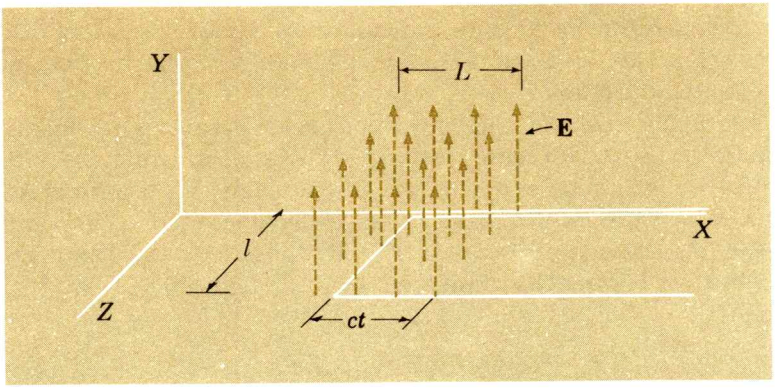


FIG. 30-6. Impulso eléctrico en movimiento.

Luego que $t = L/c$, el borde remolcado de la pulsación habrá pasado el extremo izquierdo del cuadro, y por tanto el flujo dentro del cuadro será constante. Mientras cambia el flujo,

$$\frac{d\phi_E}{dt} = Elc \tag{30-15}$$

Sustituyendo (30-14) y (30-15) en (30-13) se obtiene

$$Bl = \varepsilon_0\mu_0 Elc$$
$$B = \varepsilon_0\mu_0 Ec \tag{30-16}$$

La dirección de **B** en el extremo izquierdo del cuadro es saliendo del papel (en la dirección $+Z$). Esto tiene que ser así porque la corriente de desplazamiento (flujo eléctrico variable) está en la dirección $+Y$; el campo magnético acompañante que rodea esta corriente sigue la regla de la mano derecha por lo que una pulsación magnética transversal acompaña a la pulsación eléctrica. Cuando el campo eléctrico es cero también lo será el campo magnético; véase Fig. 30-7. Los campos combinados eléctrico y

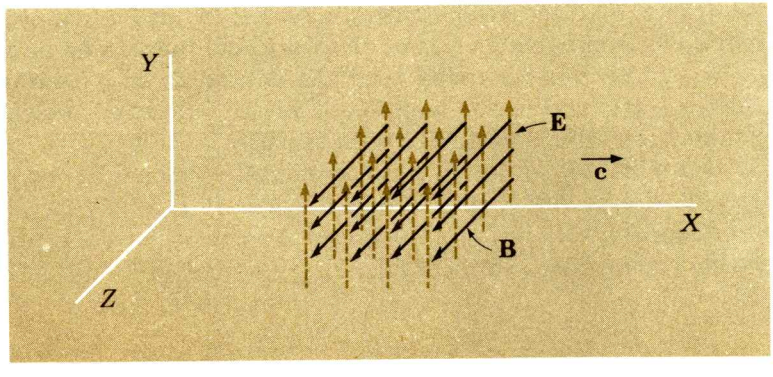


FIG. 30-7. Campo magnético que acompaña al campo eléctrico de la Fig. 30-6.

magnético son los mismos indicados en la Fig. 30-5. Las direcciones relativas de **E**, **B** y **c** son ¡exactamente las mismas que se encontraron antes!

Iniciándose con una pulsación magnética se encuentra una pulsación eléctrica concomitante; iniciándose con una pulsación eléctrica se encuentra una pulsación magnética acompañándola. La dirección de los campos es congruente con ellos mismos. Además, las magnitudes de **E** y **B** dadas por (30-12) y (30-16), deben ser compatibles entre sí. Sustituyendo (30-12) en (30-16) se tiene:

$$B = \varepsilon_0 \mu_0 B c^2$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \qquad (30\text{-}17)$$

Por haberlo escogido arbitrariamente (Sec. 27-2),

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A-m} = 12.57 \times 10^{-7}\ \text{N/A}^2 \qquad (27\text{-}2)$$

Como consecuencia de esto, se ha encontrado por experimentación que

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N-m}^2 \qquad (20\text{-}6)$$

Sustituyendo los valores de las constantes eléctricas y magnéticas, ε_0 y μ_0, en (30-17), se tiene

$$c = \frac{1}{\sqrt{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N-m}^2)\,(12.57 \times 10^{-7}\ \text{N/A}^2)}}$$

$$c = 3.00 \times 10^8\ \text{m/s}$$

Así, una perturbación electromagnética puede recorrer el espacio vacío, pero a la única velocidad $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, que es exactamente la velocidad medida con la que recorre la luz el espacio vacío; de hecho, la luz es justamente una forma de radiación electromagnética: este descubrimiento fue el mayor triunfo de la teoría electromagnética clásica. La velocidad medida de la luz está de acuerdo con la velocidad predicha basándose en los parámetros eléctrico y magnético ε_0 y μ_0. De aquí en adelante el símbolo c denotará la velocidad de la luz en el vacío.

Las Figs. 30-5 y 30-7 indican que las direcciones de los campos **E** y **B** deben ser perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación. ¿Cuáles son las magnitudes relativas de **E** y **B**? esto puede encontrarse por medio de los resultados de (30-17) y (30-16):

$$B = \frac{E}{c} \qquad (30\text{-}18)$$

En nuestra derivación, los campos eléctrico y magnético cambian con el tiempo, pero de un modo sencillo: los campos son "conectados y desconectados" bruscamente cuando pasan los bordes delanteros y traseros de la pulsación. Por supuesto, deben considerarse ondas en donde los campos eléctrico y magnético cambian de continuo con el tiempo, siendo estas ondas en particular sinusoidales. Ninguna cosa diferente se necesita dar, sin embargo, al trazar dichas ondas, en vista de que se ha demostrado que todas las veces que cambia la magnitud del campo eléctrico en el espacio, lo hace el campo magnético que lo acompaña. Además, por el principio de superposición, que se aplica sin restricción a las ondas electromagnéticas, es posible sumar o superponer, cualquier número de impulsos para aproximarse a una onda sinusoidal.

30—4 INTENSIDAD Y DENSIDAD DE ENERGIA ELECTROMAGNETICA; EL VECTOR DE POYNTING

Recordemos primero que la densidad u_E de un campo eléctrico de magnitud E vale

$$u_E = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad \text{(23-32), (30-19)}$$

y que la densidad de energía magnética u_B es

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \qquad \text{(28-22), (30-20)}$$

Por supuesto, si los campos **E** y **B** cambian con el tiempo, también cambiarán las densidades de energía u_E y u_B. Estas relaciones dan las densidades *instantáneas* de la energía en cualquier punto del espacio. Sustituyendo (30-18) en (30-20), se tiene

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E}{c}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{2\mu_0} E^2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Comparando ésta con (30-19), se encuentra que

$$u_B = u_E \qquad \text{(30-21)}$$

Las densidades de energía de los campos eléctricos y magnéticos de una onda electromagnética son *iguales;* esto es, en la energía que lleva una perturbación electromagnética participan por igual los campos eléctrico y magnético.

La densidad total de energía u, o energía por unidad de volumen de una onda electromagnética es

$$u = u_E + u_B = 2u_E = \varepsilon_0 E^2 \qquad \text{(30-22)}$$

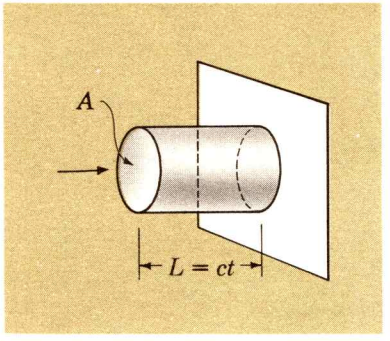


FIG. 30-8. Flujo de energía electromagnética a través del área A.

La densidad de energía es proporcionada *al cuadrado* del campo eléctrico (equivalentemente, se puede escribir $u = 2u_B = B^2/\mu_0$).

La intensidad I en cualquier onda se define como el flujo de energía por unidad de tiempo (la potencia P) que atraviesa a la unidad de área perpendicular a la dirección de propagación de la onda, esto es,

$$I = \frac{P}{A} \tag{30-23}$$

Donde A es el área transversal atravesada por el flujo de energía. Se desea encontrar una expresión para la intensidad l en términos de la densidad de energía u de una onda que lleva la velocidad c:

Considérese un cilindro: el área de su sección transversal es A y con una longitud L, a través del cual se propaga la radiación electromagnética en la dirección del eje del cilindro, como se representa en la Fig. 30-8 (se supone que el volumen del cilindro es lo bastante pequeño para que la densidad de energía u sea constante en todo él). La longitud puede escribirse como $L = ct$, donde c es la velocidad de la luz y t es el tiempo que necesita una onda para pasar de un extremo del cilindro al otro. Por tanto, en el tiempo t toda la energía originalmente contenida en el volumen del cilindro $AL = Act$, habrá pasado atravesando el área A. Se puede escribir entonces:

$$\text{Intensidad} = \frac{\text{energía}}{\text{área} \times \text{tiempo}} = \frac{(\text{energía/volumen}) \times (\text{volumen})}{\text{área} \times \text{tiempo}}$$

$$I = \frac{u \times Act}{At}$$

$$I = uc \tag{30-24}$$

No se ha usado la forma explícita de la densidad de energía u, por tanto (30-24) es una relación general aplicable a *cualquier* onda. Para una onda electromagnética, se tiene, usando (30-22),

$$I = \varepsilon_0 E^2 c \tag{30-25}$$

Se pueden escribir de modo diferente las relaciones de la intensidad sustituyendo (30-17) y (30-18) en (30-25):

$$I = \varepsilon_0 E^2 c = \varepsilon_0 E(Bc)\, c = \frac{\varepsilon_0 EB}{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{EB}{\mu_0}$$

Recuérdese que en una onda electromagnética, el campo eléctrico **E** y el campo magnético **B** son perpendiculares entre sí y a la dirección en que se propaga la onda o la energía, como se

indica en la Fig. 30-9. De hecho, la dirección del producto cruz $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ es la dirección en que la onda se propaga (el pulgar de la mano derecha apunta en la dirección en la que fluye la energía electromagnética, cuando se hace girar al vector **E** hacia el vector **B** un ángulo de 90°, en el sentido indicado por los demás dedos). Así, se puede asignar una *dirección* a la intensidad **I** y considerarla como un *vector* que apunta en la dirección del flujo de energía electromagnética. Se puede escribir la ecuación anterior en la forma vectorial:

$$\mathbf{I} = \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \tag{30-26}$$

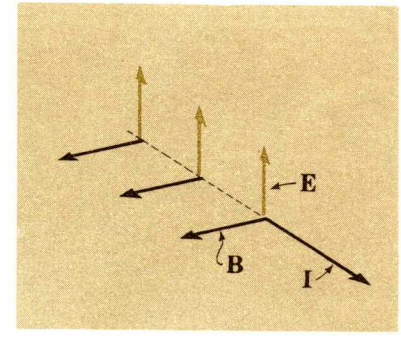


FIG. 30-9. Las direcciones relativas de **E**, **B** e **I** en una onda electromagnética.

El vector intensidad **I** se denomina *vector de Poynting*, llamado así en honor de J. H. Poynting (1852-1914). Si se desea encontrar el flujo de energía electromagnética en la unidad de tiempo, o sea la potencia P, a través de una superficie con un elemento $d\mathbf{S}$, basta con integrar $\mathbf{I} \cdot d\mathbf{S}$ en toda la superficie:

$$P = \int \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} \tag{30-27}$$

Ejemplo 30-1

La intensidad de la radiación solar en la superficie de la Tierra, es aproximadamente 1 000 W/m². (*a*) ¿Cuál es la densidad de la energía electromagnética de esta radiación en la superficie de la Tierra (*b*) ¿Cuáles son las magnitudes, para esta luz, de los campos eléctrico y magnético?

(*a*) de (30-24),

$$u = \frac{I}{c} = \frac{10^3 \text{ W/m}^2}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3.3 \times 10^{-6} \text{ J/m}^3$$

(*b*) Empleando (30-22) se tiene

$$E = \sqrt{\frac{u}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{3.3 \times 10^{-6} \text{ J/m}^3}{8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N-m}^2}}$$

$$= 6.1 \times 10^2 \text{ N/C} = 610 \text{ V/m}$$

y de (30-18)

$$B = \frac{E}{c} = \frac{6.1 \times 10^2 \text{ N/C}}{3.0 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

$$= 2.1 \times 10^{-6} \text{ Wb/m}^2 = 0.021 \text{ G}$$

La magnitud del campo magnético en una onda electromagnética es *mucho* menor (por un factor c) que el del campo eléctrico. Es tan pequeño el campo magnético que no puede detectarse con facilidad;

una onda electromagnética se detecta por la absorción del efecto mucho mayor del campo eléctrico.

Debe notarse que todas las relaciones derivadas en este ejercicio se aplican a un punto del espacio y a un instante de tiempo. Si los campos eléctrico y magnético variaran con el tiempo, como es el caso de la luz visible, entonces los valores de **E** y **B** calculados antes son estrictamente las raíces cuadráticas medias.* Sin embargo es significativo que *todas* las fórmulas anteriores se aplican sin considerar a la variación con el tiempo, o frecuencias, de la onda electromagnética; esto es, las magnitudes de **E** y de **B** para un haz de radio de 1.0 kW/m², son las mismas que para un haz luminoso de 1.0 kW/m²

30—5 FUERZA Y PRESION DE LA RADIACION: EL IMPETU LINEAL DE UNA ONDA ELECTROMAGNETICA

Una onda electromagnética lleva energía. Es fácil demostrar que una onda electromagnética tiene también *ímpetu lineal* en la dirección de propagación y que puede ejercer una fuerza, o *presión de radiación,* en el material con que choque. Las primeras medidas de la presión de la luz fueron realizadas por P. N. Lebedev (1866-1912) en 1901.

Supongamos primero que de la onda electromagnética que incide en un material, éste absorbe toda la energía que le llega sin reflejar ni transmitir ninguna. Esto implica que el campo eléctrico **E** deberá suministrar trabajo a una partícula cargada dentro del material, siendo la energía removida por unidad de tiempo en la onda electromagnética, exactamente igual a la potencia absorbida por el material. Nótese que se dice el trabajo dado por el campo *eléctrico.* La fuerza magnética, puesto que siempre actúa en ángulo recto con la velocidad de la partícula cargada, *no suministra trabajo.*

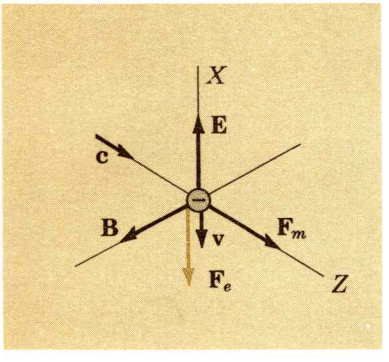


FIG. 30-10. La fuerza eléctrica F_e y la fuerza magnética F_m que recibe un electrón de una onda electromagnética.

Considérese la situación indicada en la Fig. 30-10, donde una onda electromagnética se mueve a lo largo del sentido positivo del eje *Z,* estando el campo eléctrico **E** en el sentido positivo del eje *X,* y el campo magnético **B** estando en el sentido positivo del eje *Y.* A nosotros nos interesan las fuerzas producidas por **E** y **B** en un electrón dentro del material. La fuerza eléctrica $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ en el electrón tiene una magnitud $F_e = eE$. Esta fuerza actúa en sentido opuesto al de **E** y acelera al electrón en una dirección perpendicular a la de la propagación de la onda.

¿Cuál es el efecto del campo magnético? Se ha supuesto que el electrón se mueve con la velocidad v en el sentido negativo del eje

*Véase R. T. Weidner y R. L. Sells, *Elementary Classical Physics,* 2a. Ed. Sec. 35-7, Allyn y Bacon, 1973.

†Para una interesante reseña de experimentos de la presión de la luz, incluyendo haces de laser, véase A. Ashkin, *Scientific American,* febrero, 1972, Pág. 62.

X. El campo **B** está en el sentido positivo del eje Y. En general, la dirección, sentido y magnitud de la fuerza magnética está dada por $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. En este caso, la magnitud de $\mathbf{F}_m$ es evB, con dirección en el sentido positivo del eje Z. La onda electromagnética produce una *fuerza* sobre el electrón (y como en consecuencia, también sobre el material al que está ligado el electrón) *¡a lo largo de la dirección del movimiento de la onda!* En fin, cuando una onda electromagnética toca a una carga, el campo **E** acelera a la carga en dirección transversal y le comunica trabajo, mientras que el campo **B**, al actuar sobre la carga móvil, produce una fuerza longitudinal.

Se desea encontrar la relación entre la fuerza de radiación, la presión y el ímpetu lineal del campo electromagnético, en términos de la intensidad I y de la potencia P de la onda. Se ha encontrado que la fuerza de radiaciòn F_r vale

$$F_r = evB$$

Puesto que las magnitudes de **E** y de **B** están relacionadas por $B = E/c$, esta ecuación puede escribirse:

$$F_r = \frac{v}{c} eE \qquad (30\text{-}28)$$

Pero eE es justamente la magnitud de la fuerza eléctrica, $\mathbf{F}_e$, la fuerza que suministra trabajo. En general, la rapidez de suministrar trabajo, o sea la potencia P, está dada por

$$P = Fv \qquad (9\text{-}13)$$

Donde F es la fuerza que da trabajo y v es la velocidad de la partícula que lo recibe. Entonces (30-28) puede escribirse:

$$F_r = \frac{v}{c} F_e$$

Absorción total:

$$F_r = \frac{P}{c} \qquad (30\text{-}29)$$

La fuerza de radiación de una onda electromagnética sobre un material que la *absorba por completo,* es simplemente la potencia de la onda dividida entre la velocidad de la luz.

Por supuesto, los electrones del material absorbente están en movimiento constante, aunque ligados al material; así, *no* están en reposo mientras reciben la acción de la onda electromagnética incidente. De todos modos, la simple derivación para la fuerza de radiación antes dada aún se aplica. Las fuerzas que provienen de los campos eléctrico y magnético de la onda electromagnética se suman a cualquier otra fuerza presente. Aunque los campos

eléctrico y magnético varían con el tiempo, la relación se mantiene en cada instante.

Hemos encontrado que una fuerza longitudinal P/c se ejerce por una onda electromagnética sobre un material que la absorba por completo. Se infiere que cuando un material *emita* radiación de potencia P en una cierta dirección, el emisor debe retroceder bajo la acción de una fuerza radiante de retroceso de magnitud P/c. Puede entenderse esto más fácilmente, notando que la emisión es, por así decirlo una absorción retrocediendo en el tiempo. Esto es, en la emisión las cargas que se aceleran dentro del material, *pierden* energía y crean una onda electromagnética que sale. Con la inversión del tiempo los sentidos del campo eléctrico **E**, de la fuerza eléctrica $\mathbf{F}_e$, y de la fuerza de radiación $\mathbf{F}_r$ permanecen *iguales;* pero el sentido de la *velocidad* **v** se invierte, así como también el sentido del campo *magnético* **B**. Así, al invertir el tiempo, esto es, con emisión en lugar de absorción, el sentido del vector de Poynting se invierte, y la energía fluye ahora alejándose del material en lugar de acercársele.

¿Cuál es la fuerza de radiación sobre un material que refleje toda la radiación que le llegue, sin absorber nada? Imaginemos que el proceso de radiación tiene lugar en dos etapas: absorción de la radiación incidente, seguida por una emisión en sentido opuesto. Puesto que una fuerza de radiación de magnitud P/c actúa sobre el material tanto en la absorción como en la emisión, la fuerza de radiación cuando la reflexión es completa vale:

Reflexión completa $$F_r = \frac{2P}{c} \qquad (30\text{-}30)$$

El hecho de que la fuerza de radiación en la reflexión completa sea el doble que en la absorción completa, tiene una analogía exacta en mecánica. Cuando una partícula con un ímpetu inicial $+mv$ choca y se encaja en un cuerpo, el ímpetu lineal se transfiere al cuerpo es $+mv$, pero cuando una partícula con ímpetu inicial $+mv$ es "reflejada" por el cuerpo, rebotando con la misma velocidad, el ímpetu final de la partícula es $-mv$, habiendo cambiado su ímpetu en $\Delta(mv) = -mv - (+mv) = -2mv$. Así, en la reflexión, el cuerpo golpeado adquiere un ímpetu $+2mv$, justamente el *doble* del ímpetu adquirido por absorción. En forma equivalente, la fuerza (promedio) del objeto golpeado es el doble en la reflexión que en la absorción.

La fuerza de radiación dada en (30-29) y en (30-30) se aplica a la radiación que incide *perpendicularmente* a la superficie absorbedora. En incidencia oblicua que hace un ángulo θ entre la dirección que se propaga la onda y la normal a la superficie, la fuerza de radiación normal a la superficie se obtiene multiplicando F_r por el factor cos θ. En la reflexión total; cuando $\theta \neq 0$, no hay fuerza tangencial.

Es conveniente escribir las relaciones que dan la *presión de radiación* p_r, la fuerza de radiación F_r por unidad de área transversal A, tanto para la absorción como para la reflexión. Puesto que la presión p es, por definición, F/A, se tiene para absorción completa,

$$p_r = \frac{F_r}{A} = \frac{P}{cA}$$

La intensidad I vale $I = P/A$. En consecuencia,

$$\text{Absorción completa:} \quad p_r = \frac{I}{c} \qquad (30\text{-}31)$$

$$\text{Reflexión completa:} \quad p_r = \frac{2I}{c}$$

Ejemplo 30-2

Un haz de radiación electromagnética de 3 W, ilumina y es completamente absorbido por un cuerpo negro. (*a*) ¿Qué fuerza de radiación recibe el absorbedor? (*b*) ¿Qué fuerza de retroceso recibe la fuente que emite el haz?

a) En absorción completa,

$$F_r = \frac{P}{c} = \frac{3 \text{ W}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 10^{-8} \text{ N}$$

que en realidad es una fuerza muy pequeña.

(*b*) La fuente que emite el haz de 3 W, ya sea una fuente luminosa o un transmisor de radio, deberá, siempre que las ondas emitidas salgan en una sola dirección, retroceder bajo la fuerza de 10^{-8} N. Así, una lámpara eléctrica de pilas, cuando emite luz, constituye una forma muy elemental de un cohete.

En cualquier fuente de potencia, o intensidad, moderada, la fuerza de radiación es extraordinariamente pequeña. Aun así puede medirse con un péndulo de torsión, el mismo instrumento empleado para medir la extraordinariamente pequeña fuerza gravitacional entre los cuerpos de tamaño de laboratorio en el experimento de Cavendish (Sec. 13-2). Los resultados encontrados están en acuerdo exacto con las predicciones de la teoría electromagnética. Además, en fenómenos estelares la fuerza de la radiación puede ser igual o mayor que la fuerza gravitacional, como se evidencia en una estrella que explota como una super nova.

Evidentemente, si la radiación electromagnética puede ejercer una fuerza y transferir ímpetu lineal al cuerpo con que choca, el ímpetu lineal debe estar asociado con el campo electromagnético mismo. Es fácil derivar la expresión para el ímpetu M de una onda

electromagnética (usamos el símbolo M para el ímpetu lineal, en lugar del símbolo convencional p para evitar confusión con la presión p y la potencia P). Por definición la fuerza F, y el ímpetu M están relacionadas por la siguiente ecuación:

$$F = \frac{dM}{dt}$$

Análogamente, la potencia P está relacionada con la energía por

$$P = \frac{d}{dt}\,(\text{energía})$$

De (30-29)

$$F_r = \frac{P}{c}$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{c} \times \frac{d}{dt}\,(\text{energía})$$

Usaremos la relación para la fuerza de radiación en *absorción*, puesto que se desea contar sólo *una vez* la transmisión de energía. Integrando:

$$M = \frac{\text{Energía electromagnética}}{c} \qquad (30\text{-}32)$$

La magnitud del ímpetu lineal de una onda electromagnética es la energía de la onda dividida entre c; la dirección y sentido del ímpetu es la misma en la que se propaga la energía, esto es, la misma dirección del vector de Poynting **I**.

Hemos visto que se puede atribuir energía e ímpetu lineal a una onda electromagnética. También se le puede atribuir ímpetu *angular* (en realidad, ímpetu de *espín* angular) a las ondas electromagnéticas circularmente polarizadas. Puede demostrarse que la magnitud del ímpetu angular electromagnético de una onda circularmente polarizada de frecuencia f es la energía de la onda dividida entre $2\pi f$ y que la dirección del vector del ímpetu angular es paralelo o antiparalelo a la dirección en que se propaga la onda*.

30—6 CARGAS ACELERADAS Y ONDAS ELECTROMAGNETICAS

En la derivación de la velocidad $(1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})$ de una onda electromagnética en la Sec. 30-3, se supuso que los campos

*Véase R. T. Weidner y R. L. Sells, *Elementary Classical Physics*, 2a. Ed., Sec. 40-6, Allyn y Bacon, 1973.

eléctricos y magnéticos existen en el espacio separados de cualquier carga. Se demostró entonces que esta perturbación electromagnética en el espacio era autogeneradora, esto es, que era una *onda* electromagnética. ¿Pero cómo se origina dicha onda? ¿Cómo pueden los campos eléctrico y magnético separarse de las cargas eléctricas que los producen? El tema de la generación de las ondas electromagnéticas puede, por supuesto tratarse aplicando las ecuaciones de Maxwell, lo que llevaría a un análisis complicado que se sale del ámbito de este libro. Aquí daremos argumentos cualitativos plausibles que demuestran cómo una carga eléctrica acelerada engendra una onda electromagnética.

Nótese que decimos una carga eléctrica *acelerada*. Si se observa una carga eléctrica desde un marco inercial en el cual esté en reposo, no se ve más que un campo eléctrico que radia hacia afuera de la carga. Por otro lado, si se observa la carga desde un marco inercial en donde la carga se mueva con velocidad constante, la carga eléctrica tiene, además del campo eléctrico, un campo magnético que la acompaña rodeándola; véase la Fig. 30-11. Cuando la carga eléctrica tiene una velocidad *constante*, cero o diferente de cero, los campos eléctrico y magnético permanecen unidos a la carga y se mueven con ella.

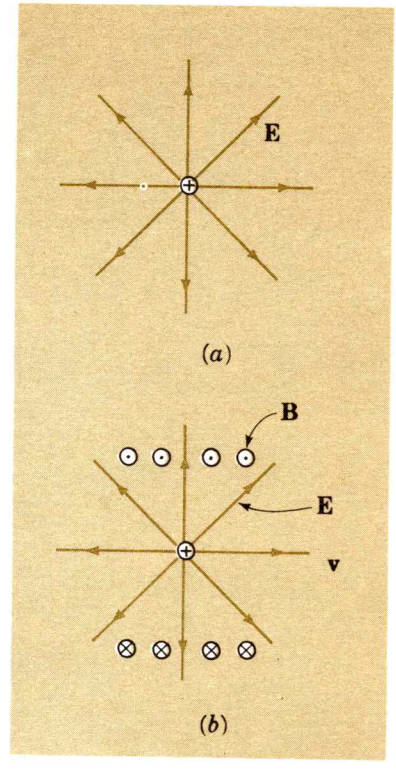


FIG. 30-11. Campos eléctricos y magnéticos que rodean a una carga (*a*) en reposo y (*b*) en movimiento con velocidad constante.

Consideremos ahora el comportamiento de las líneas del campo eléctrico de una única carga positiva que está acelerada por un corto tiempo. La Fig. 30-12 representa a la carga q que ha estado en reposo en el punto A durante un largo tiempo. Las líneas del campo eléctrico se extienden radialmente a partir de A, como se indica en la Fig. 30-12*a*. Una de tales líneas es la E_A. En algún instante, digamos cuando $t = 0$, la carga se acelera hacia arriba durante un corto tiempo δt, después del cual continúa con velocidad constante hacia arriba (se supone $v \ll c$). En el tiempo $t \gg \delta t$ llega al punto B de la figura. Como la carga se mueve con v constante, las líneas eléctricas *cerca de la carga* q se extienden hacia afuera de la carga en movimiento y se mueven hacia arriba con ella. Las líneas del campo están ubicadas en la Fig. 30-12*b* en el instante de tiempo cuando la carga está en el punto B. Cerca de la carga, las líneas del campo emanan radialmente y hacia afuera a partir de B. Una de tales líneas E_B se indica en la Fig. 30-12*b*. Pero las líneas del campo aún emanan del punto A como se indica por la línea E_A. Esto es así porque el efecto electromagnético producido por la carga acelerada se mueve aléjandose de la carga con la velocidad *finita* c. Nótese que la línea eléctrica E_A y la línea eléctrica cercana E_B son la *misma* línea del campo. Así, en el instante indicado en la Fig. 30-12*b*, una pequeña carga q_C en el punto C, no tiene por qué "conocer" que q se ha acelerado de A a B, porque qc aún experimenta la influencia del campo E_A. El pliegue en la línea eléctrica de fuerza, esto es, la componente transversal, se está moviendo hacia q_C con la velocidad de la luz y la alcanza en algún instante posterior. Por otra parte, una carga

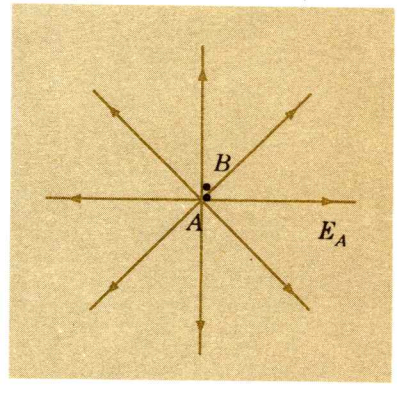


FIG. 30-12*a*. Líneas del campo eléctrico que rodean una carga eléctrica antes de que se desplace del punto A.

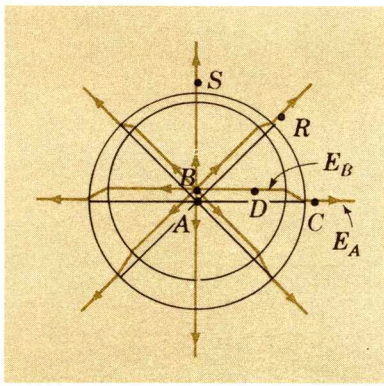


FIG. 30-12*b*. Líneas del campo eléctrico que rodean una carga eléctrica, después que se ha desplazado de *A* a *B*.

q_D en el punto D ya ha recibido una fuerza eléctrica transversal que proviene de la aceleración de q, y en el instante representado en la Fig. 30-12*b* se debe al campo E_B. Una carga q_R en R experimentará una fuerza eléctrica transversal menor que q_C, porque el pliegue de la línea eléctrica es menos pronunciado que en C. Finalmente, una carga q_S en S, la cual se encuentra a lo largo de la dirección de la aceleración (de A a B) de q, *no* recibe una fuerza transversal.

En un punto como en R, tanto antes como después del paso del pliegue transversal, una carga pequeña recibe sólo una fuerza de un campo eléctrico *radial*, cuya intensidad varía inversamente como el *cuadrado* de la distancia AR (o BR) de acuerdo con la ley de Coulomb. El campo eléctrico radial es un campo eléctrico *estático*, siempre unido a la carga acelerada; el campo eléctrico transversal es un campo eléctrico *radiado*, el cual se encuentra desunido de la carga que se mueve, separándose de ella. La magnitud del campo eléctrico transversal puede demostrarse que varía inversamente con la distancia AR. Por tanto, a grandes distancias de la carga q, la componente radial (que varía como $1/r^2$) es despreciable comparada con la componente transversal (que varía como $1/r$) mientras pasa ésta última componente. Aunque tanto el campo estático como el de radiación disminuyen con la distancia, el campo de radiación sobrepasa al estático a grandes distancias de la carga.

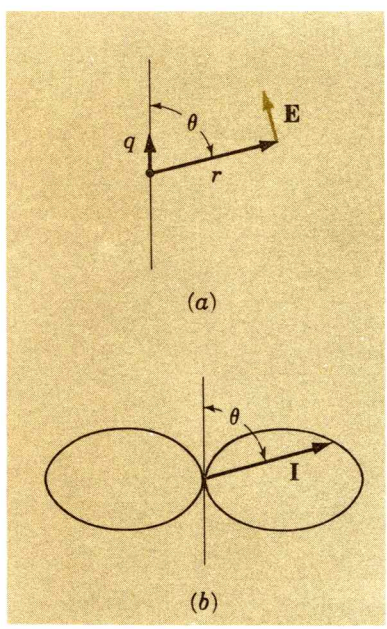


FIG. 30-13. (*a*) Campo eléctrico radiado por una carga acelerada. (*b*) Diseño de radiación de una carga acelerada, dando la variación de la intensidad I con el ángulo azimutal θ.

Puede demostrarse que el campo eléctrico transversal E, a la distancia r de una carga eléctrica g que tiene una aceleración a, está dado por

$$E \propto \frac{qa \operatorname{sen}\theta}{r} \tag{30-33}$$

donde θ es el ángulo azimutal, el ángulo entre la dirección de la aceleración de la carga y la del radio vector $\mathbf{r}$, véase la Fig. 35-13*a*.

Como la magnitud del campo eléctrico radiado varía como sen θ, la energía radiada es máxima en el plano ecuatorial (perpendicular a la dirección en que se acelera la carga) y nula en la dirección del eje polar. De acuerdo con (30-25) la intensidad I de un campo electromagnético es proporcional a E^2. Por tanto, de (30-33),

$$I \propto \frac{q^2a^2 \operatorname{sen}^2\theta}{r^2} \tag{30-34}$$

La intensidad radiada disminuye inversamente al cuadrado de la distancia r a la carga que se acelera, y varía con la dirección de acuerdo a $\operatorname{sen}^2\theta$.

La variación angular se representa en la Fig. 30-13*b*, que es un diagrama polar donde la intensidad I es una función del ángulo azimutal θ. La curva está dibujada de modo que la longitud del

vector **I**, para un ángulo dado θ, es proporcional a la intensidad de la radiación en esa dirección (de acuerdo con $\text{sen}^2\,\theta$). El diseño es simétrico con respecto a un eje coincidente con la dirección de la aceleración de la carga.

Hemos dedicado nuestra atención al campo magnético radiado por una carga eléctrica acelerada. Debido a que la carga está en movimiento, hay además un campo magnético asociado, perpendicular al campo eléctrico y que se mueve también mientras se aleja de la carga acelerada a la velocidad de la luz. Se sabe, por supuesto, que cualquier perturbación electromagnética transporta energía. La energía radiada proviene de que un agente externo tiene que dar trabajo a la carga para acelerarla. Esta energía adquirida *no* aparece, sin embargo, como energía residente en el campo *estático,* sino que abandona la carga y se mueve a través del espacio. Cuando se absorbe la radiación, el campo eléctrico de la onda electromagnética le suministra trabajo a las cargas del cuerpo absorbedor.

30—7 ONDAS ELECTROMAGNETICAS SINUSOIDALES

Se ha discutido una pulsación de la radiación electromagnética que proviene de una sola carga acelerada. Pasaremos ahora a la situación más útil e interesante en la cual se produce una onda continua electromagnética con una frecuencia y una longitud de onda bien definida. Una fuente común de radiación electromagnética sinusoidal, es un dipolo eléctrico oscilador, representado esquemáticamente por la Fig. 30-14*a*. Un voltaje aplicado que varía en forma sinusoidal produce una corriente alterna en los dos conductores rectilíneos (una antena). En un extremo del alambre la carga es alternativamente positiva y negativa; en el otro extremo, la carga también alterna, pero defasada 180°. Se puede concebir este comportamiento en función del movimiento de dos cargas eléctricas iguales, pero opuestas, sometidas a un movimiento armónico simple, en la dirección del eje de la antena y con la

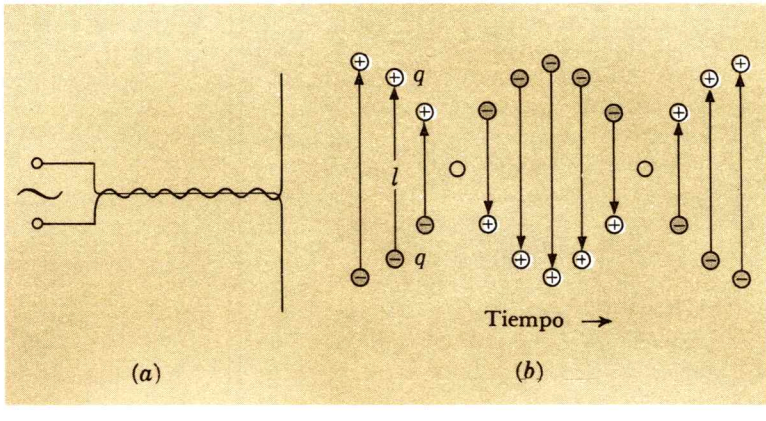


FIG. 30-14. (*a*) Dipolo eléctrico oscilador. (*b*) Cargas eléctricas equivalentes, oscilantes.

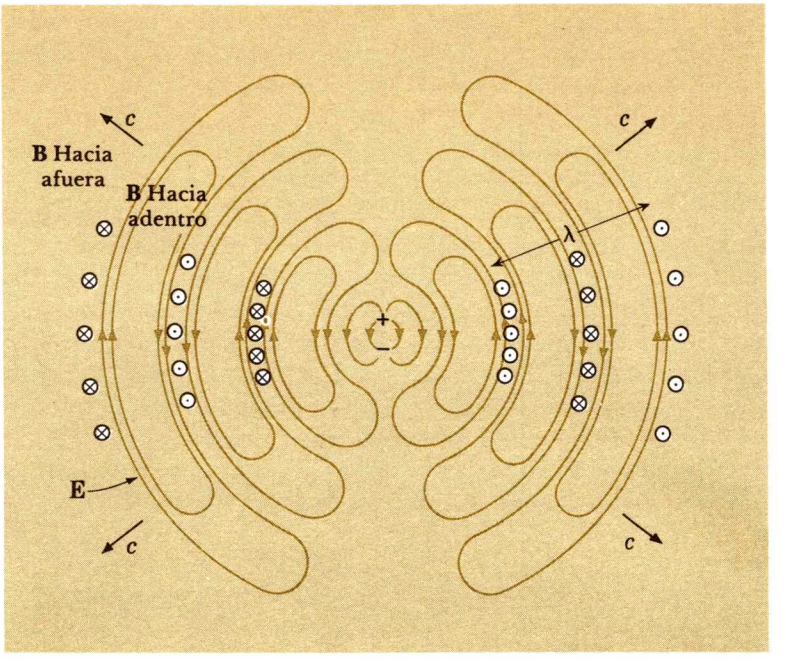


FIG. 30-15. Campos eléctrico y magnético generados por un dipolo eléctrico que varían sinusoidalmente.

misma frecuencia que la fuente de corriente alterna, como en la Fig. 30-14*b*. Este par de cargas oscilantes constituye un dipolo eléctrico oscilante. El diseño de intensidad de cada carga es el de la Fig. 30-13; por tanto el diseño de radiación de un dipolo eléctrico oscilante, es también el indicado en la Fig. 30-13.

La Fig. 30-15 es una representación de los campos eléctricos y magnéticos producidos por este dipolo eléctrico oscilador en un cierto instante. Se pueden ver varios rasgos distintivos en esta figura.

1. A corta distancia del dipolo las líneas eléctricas se extienden de la carga positiva a la negativa del dipolo. A gran distancia las líneas eléctricas se han desprendido del dipolo oscilante y forman líneas cerradas.
2. El campo eléctrico **E** y la inducción magnética **B** son perpendiculares entre sí y también a la dirección (hacia afuera) de propagación de la onda electromagnética radiada.
3. A gran distancia los frentes de onda o superficies de fase constante, son esféricos con centro en el dipolo.
4. La onda está *linealmente* polarizada; esto es, el campo eléctrico transversal en cualquier punto del espacio oscila a lo largo de una recta fija, llamándose a esta dirección la de polarización de la onda (trataremos más sobre este tema en el Cap. 33).
5. El diseño de radiación es simétrico con relación al eje del dipolo, en acuerdo con la Fig. 30-13*b*. (El diseño de radiación de la Fig. 30-13*b* sólo se aplica cuando la distancia r es grande comparada con la longitud de onda).

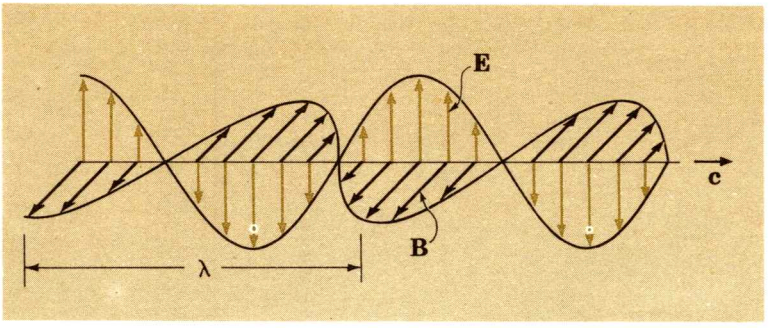


FIG. 30-16. Representación de los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética sinusoidal.

6. La longitud de onda λ de la onda electromagnética es la distancia entre dos frentes de onda adyacentes que estén en la misma fase. Al completar el oscilador un ciclo de oscilación, un frente de onda se aleja la distancia λ. La frecuencia f del oscilador es precisamente la frecuencia de la onda electromagnética. Por tanto, como para otros tipos de onda,

$$c = f\lambda \tag{30-35}$$

Consideremos ahora la onda electromagnética que varía en forma sinusoidal, a lo largo de cualquier línea radial a gran distancia del dipolo. Localmente la onda parecerá que es plana, esto es, una onda en la cual todos los puntos que estén en la misma fase forman un plano en el espacio o un *frente de onda* plano. La variación en el espacio de los campos eléctrico y magnético de esta onda sinusoidal electromagnética en cualquier instante, se representa en la Fig. 30-16. La *longitud* de las líneas que representan los campos eléctrico y magnético, indican su intensidad.

Ejemplo 30-3

Una onda de radio con una intensidad de 1.5×10^{-10} μW/m^2, incide en una antena de 1.0-m orientada en la dirección del campo eléctrico de la onda electromagnética. ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial instantáneo entre los extremos de la antena?

La Ec. (30-25) da la intensidad *instantánea* I de una onda electromagnética en función de E^2, el cuadrado de la magnitud *instantánea* del campo eléctrico. Suponiendo que la onda de radio varía sinusoidalmente con el tiempo, se tendrá que $E = E_0$ sen ωt, donde E_0 es la amplitud máxima del campo eléctrico. Se debe interpretar E^2 como significado el *tiempo promedio,* o $\overline{E^2}$. Para esta onda sinusoidal puede demostrarse* que $\overline{E^2} = \frac{1}{2}E_0^2$. Combinando esta ecuación con la (30-25) se encuentra:

*Véase R. T. Weidner y R. L. Sells, *Elementary Classical Physics,* 2a., Ed. Sec. 34-2, Allyn y Bacon, 1973.

$$I = \varepsilon_0 c\overline{E^2} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 \tag{30-36}$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\varepsilon_0 c}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(1.5 \times 10^{-16}\ \text{W/m}^2)}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N-m}^2)(3.0 \times 10^8\ \text{m/s})}}$$

$$= 3.4 \times 10^{-7}\ \text{V/m}$$

A través del conductor de 1-m la máxima diferencia de potencial es de sólo 0.34 μV.

30—8 EL ESPECTRO ELECTROMAGNETICO

Todas las ondas electromagnéticas, cualquiera que sea su frecuencia y longitud de onda, recorren el vacío a la velocidad de $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ y tienen las propiedades fundamentales que ya se han discutido. El espectro completo de la radiación electromagnética se indica en la Fig. 30-17, donde la frecuencia y la longitud de onda se representan en una escala logarítmica.

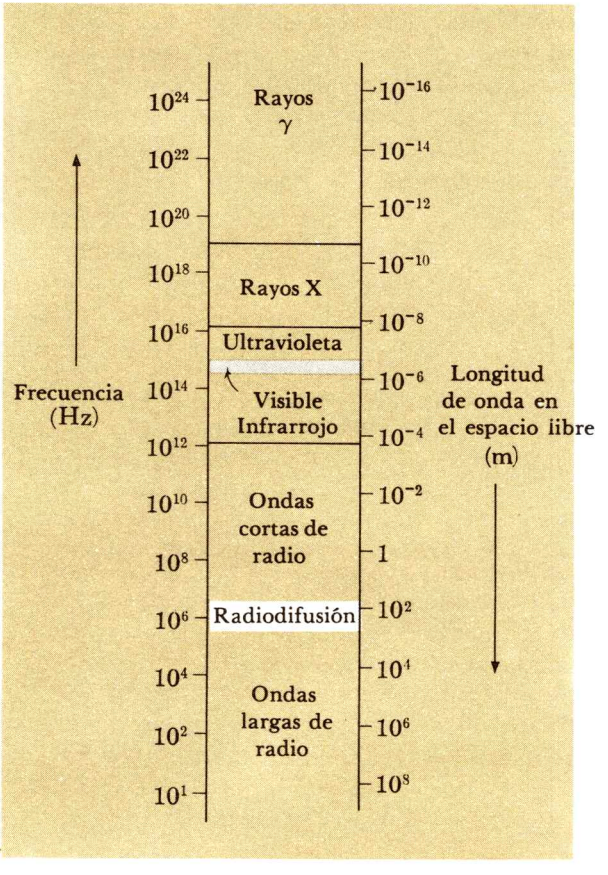


FIG. 30-17. Espectro electromagnético.

Cuando Hertz realizó sus experimentos en 1887, que confirmaron la teoría electromagnética de la luz de Maxwell, sólo se reconocían dos tipos de radiación, la luz visible y las ondas de radio. Ahora se sabe que existen otros tipos de radiación que difieren en longitud de onda y en frecuencia, así como en el origen de la radiación y en los efectos que originan en las sustancias donde inciden.

Las ondas de más baja frecuencia (y de mayor longitud de onda) son las ondas de radio; estas ondas se generan con corrientes eléctricas oscilantes. Las ondas de radio de corta longitud, o microondas, tienen longitudes de onda comparables a las de los sonidos audibles transmitidos por el aire. La radiación infrarroja se produce en los sólidos calentados o en las vibraciones y rotaciones moleculares en los gases y en los líquidos. La luz visible se produce por arreglos en los electrones exteriores de los átomos. La muy estrecha gama de longitudes de onda, de 4 000 Å (1 Å = 10^{-10} m) a 7 000 Å (de la luz violeta a la roja) a la cual es sensible el ojo humano, corresponde, en terminología musical, a un poco menos que una octava (un factor de 2 en la frecuencia), comparando con la enorme gama de frecuencia (20 a 20 000 Hz) a la que es sensible el oído humano. La radiación ultravioleta sigue inmediatamente al espectro visible. La longitud de onda de los rayos X es aproximadamente del tamaño de los átomos, y se originan en los arreglos de los electrones más interiores de los átomos. Los rayos gamma, γ, son las ondas electromagnéticas de la mayor frecuencia y de la menor longitud de onda, y se originan en arreglos de las partículas dentro del núcleo atómico.

Los límites entre las regiones adyacentes no están estrechamente definidos; por ejemplo, no se puede distinguir entre un rayo X de corta longitud de onda y un rayo γ de gran longitud de onda. Los diversos tipos de radiación electromagnética difieren en sus efectos sobre los materiales; por ejemplo, materiales que son opacos a la luz visible son transparentes a los rayos X.

En el Cap. 32, se discutirán los procedimientos para medir las longitudes de onda de la radiación electromagnética, en particular para radiación de relativamente corta longitud de onda, tal como la luz visible. Es suficiente decir aquí que una medida de la longitud de onda, por lo común incluye un arreglo en el cual algunas dimensiones características son del mismo orden de magnitud que la longitud de onda.

30—9 MEDICIONES DE LA VELOCIDAD DE LA LUZ

Los experimentos indican que nada se mueve mas rápido que la luz o que cualquier otra forma de radiación electromagnética. De hecho, la velocidad de la luz es tan grande que aparece infinita a un observador casual. Se necesita mucha perspicacia para resolver la cuestión de si la propagación de la luz *no* es instantánea y se ha desarrollado un gran ingenio y finura experimental para medir

con precisión la velocidad con que se propaga la luz. Se ha desarrollado una cierta variedad de métodos en los pasados 300 años para medir la constante fundamental c. Aunque difieren en muchos aspectos, todos los métodos tienen esto en común: ya sea medir el tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia muy grande para que el intervalo de tiempo tenga un tamaño razonable (o, con pequeñas distancias, se medirá el muy corto intervalo de tiempo con gran precisión), o bien se debe de alguna manera combinar la velocidad de la luz con otra velocidad muy grande en un efecto que depende de su combinación.

Método de Roemer. La primera medida aproximada de c fue realizada en 1666 por Ole Roemer (1644-1701), un astrónomo danés. La medida de Roemer se basó en observaciones del periodo orbital de Io, una de las lunas de Júpiter. (Recuérdese que el periodo orbital de cualquier satélite es esencialmente constante.)

Roemer observó una falta de periodicidad en la órbita de Io, y concluyó que las aparentes discrepancias se debían a cambios en el tiempo necesario para que la luz recorra (con velocidad constante) la distancia siempre variable entre la Tierra y el satélite. Los cambios de la distancia se deben sobre todo al movimiento orbital de la Tierra y —en menor extensión— al movimiento orbital de Júpiter. Si se combinan las medidas de Roemer con los valores modernos de las dimensiones de la órbita de la Tierra, se llega a un valor de c que está dentro de pocas unidades por ciento del valor aceptado.

Aberración Estelar. En este método, empleado primero por el astrónomo James Bradley (1692-1762) en 1725, la velocidad de la luz se combina vectorialmente con la velocidad orbital (3×10^4 m/s) de la Tierra alrededor del Sol.

Supongamos primero que se reciben gotas de lluvia, que caen verticalmente, en el fondo de un largo tubo: por supuesto, el tubo debe estar vertical. Sin embargo, si el tubo se mueve horizontalmente al mismo tiempo, se le debe inclinar en un ángulo θ, con relación a la vertical, para evitar que las gotas de lluvia choquen con los lados del tubo. Esta situación es semejante a la situación en que se encuentra un astrónomo cuando observa una estrella distante. Su tubo, un telescopio, recibe luz de una distante estrella "fija". Sin embargo, el telescopio está unido a la Tierra, que debido a su movimiento orbital alrededor del Sol, se mueve a la velocidad de 3×10^4 m/s con relación al Sol y a las estrellas fijas; véase la Fig. 30-18.

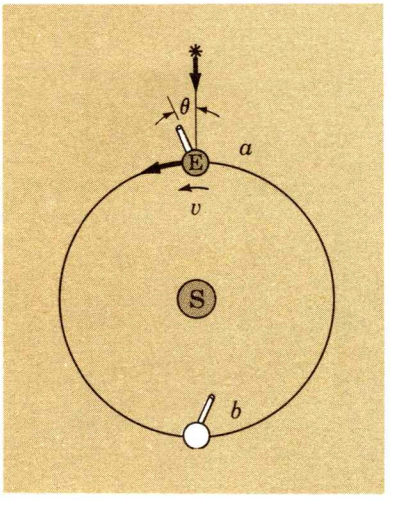


FIG. 30-18. Inclinación de un telescopio debido a la aberración estelar.

Cuando una estrella en el zenit es observada, el telescopio debe inclinarse un ángulo θ cuando la Tierra está en la posición a; véase Fig. 30-18. Seis meses después, cuando la Tierra se mueve en sentido opuesto con relación a las estrellas fijas, el telescopio debe

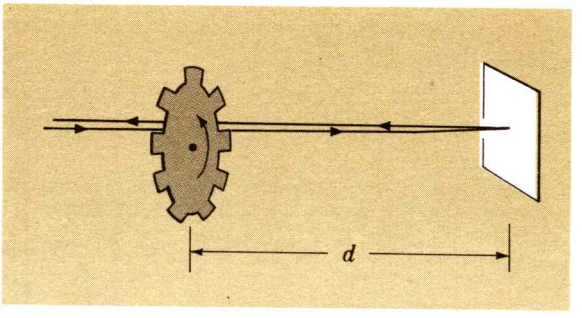


FIG. 30-19. Arreglo empleado por Fizeau para medir la velocidad de la luz.

inclinarse en sentido opuesto. El cambio 2θ en la orientación del telescopio puede medirse, y la velocidad de la luz c puede calcularse de la relación tan $\theta = v/c$. Este efecto se conoce como *aberración estelar*. El ángulo 2θ es de sólo 41 s de arco.

Método de Fizeau. El modo más directo de medir la velocidad de la luz es encontrar el tiempo en que recorre un viaje redondo, desde algún punto de partida a un espejo más o menos distante. Este método requiere *pulsaciones* de la luz en lugar de ondas continuas; se puede usar el mismo dispositivo que interrumpe a un haz continuo de luz en pulsaciones, para medir el tiempo *total* de recorrido t, de donde $c = 2d/t$, siendo d la distancia de la fuente luminosa al espejo. La Fig. 30-19 representa el sencillo dispositivo empleado por A. H. L. Fizeau (1819-1896) en 1849. Una rueda giratoria tiene aberturas regularmente espaciadas en su perímetro. Cuando la rueda está en reposo, la luz puede pasar a través de una abertura, llegar al espejo distante y regresar pasando a través de la *misma* abertura. Sin embargo, cuando la rueda está girando, la luz reflejada no entrará al telescopio a menos que el giro de la rueda haya llevado a la abertura *adyacente* a la misma posición que tenía la abertura por la que pasó primero la luz al salir de la fuente luminosa. Es entonces sencillo calcular el tiempo que dure el viaje redondo de la luz, de la velocidad medida de rotación y de la separación angular entre dos aberturas vecinas. En el experimento de Fizeau, $d \approx 9$ km, y así $t \approx 6 \times 10^{-5}$ s. Las técnicas actuales permiten medir intervalos de tiempo hasta una fracción de nanosegundo (10^{-9} s).

Método de Resonancia con Laser. La determinación más precisa de la velocidad de la luz se realizó en 1972 por un grupo de la National Bureau of Standars en Boulder, Colorado, midiendo la frecuencia f y la longitud de onda λ de una radiación particular resonante de un laser de helio-neón, calculando entonces la velocidad de la luz en el vacío con $c = f\lambda$. (El laser fue estabilizado en una línea específica de absorción en metano gaseoso).

La medida de f se relacionó con el reloj atómico de cesio y λ se midió en términos de la longitud de onda de la luz rojo-anaranjada del kriptón 86. (El reloj de cesio y la luz de kriptón son, respectivamente, las normas internacionales para medir la frecuencia y la longitud).

El valor de c obtenido con esta técnica es

$$c = 2.997924562 \times 10^8 \text{ m/s}$$

con una incertidumbre de sólo 1.1 m/s. o 4 partes en 10^9.

¿Por qué se necesita conocer la velocidad de la luz con tan alta precisión? Primero por supuesto, para confirmar la teoría electromagnética de la luz encontrando que el valor calculado de $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ basado en medidas eléctricas de ε_0, esté de acuerdo con el valor medido. Desde luego, hay otras razones. Si se conoce c con gran precisión, entonces se puede invertir el procedimiento; esto es, conociendo lo que tarda una pulsación luminosa en hacer un viaje redondo, se pueden medir grandes distancias terrestres y distancias astronómicas con precisión; así, la distancia a la Luna o a Júpiter puede medirse con precisión tomando el tiempo con radar de pulsaciones de radio. Además, la velocidad de la luz juega un papel dominante en la teoría de la relatividad y en la teoría cuántica de la estructura atómica y nuclear. Se pueden hacer comparaciones precisas entre la teoría y el experimento, sólo si c se conoce con precisión.

Como se demostrará en la teoría de la relatividad (Cap. 34) la velocidad de la luz en el vacío es la misma en todas las circunstancias y para todos los observadores. Aunque la velocidad es la misma, la longitud de onda y la frecuencia pueden diferir de acuerdo con el estado de movimiento de la fuente y del observador, de modo parecido como pasa con el sonido. De hecho, este es el efecto Doppler aplicado a la radiación electromagnética.

RESUMEN

Las cuatro ecuaciones de Maxwell, describen todo el electromagnetismo clásico. La Tabla 30-1 lista estas ecuaciones.

Las ecuaciones de Maxwell predicen correctamente las siguientes propiedades de las ondas electromagnéticas:

La radiación es producida por cargas aceleradas; para velocidades no relativísticas, la intensidad radiada varía como

$$I \propto \frac{q^2 a^2}{r^2} \operatorname{sen}^2 \theta \qquad (30\text{-}34)$$

Las ondas electromagnéticas recorren el vacío a la velocidad de la luz

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s} \qquad (30\text{-}17)$$

Los campos **E** y **B** son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de la energía electromagnética. Las magnitudes relativas de los campos **E** y **B** se relacionan por

$$B = \frac{E}{c} \qquad (30\text{-}12)$$

La densidad de energía u y la densidad del ímpetu lineal M/V, de una onda electromagnética valen:

$$u = \varepsilon_0 E^2 \qquad (30\text{-}22)$$

$$\frac{M}{V} = \frac{u}{c} \qquad (30\text{-}32)$$

donde E es el campo eléctrico instantáneo y V el volumen.

Tanto en dirección como en magnitud de la intensidad instantánea, la potencia electromagnética por unidad de área transversal, está dada por

$$\mathbf{I} = \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \qquad (30\text{-}26)$$

Una onda electromagnética, completamente absorbida, de potencia P de intensidad I, ejerce una fuerza de radiación F_r y una presión de radiación p_r en su absorbedor, dada por

$$F_r = \frac{P}{c} \qquad (30\text{-}29)$$

$$p_r = \frac{I}{c} \qquad (30\text{-}31)$$

Si hay reflexión completa, la fuerza y la presión se duplican.

PROBLEMAS

30-1. En un cierto instante el campo eléctrico en un haz de radiación electromagnética vale 3.0×10^{-3} V/m, apuntando hacia el este; el campo magnético está en un plano vertical y apunta hacia arriba. Encontrar (*a*) la magnitud del campo magnético y (*b*) la magnitud y dirección, en ese instante, del vector de Poynting.

30-2. Un condensador cargado de placas paralelas tiene, entre las placas, un campo eléctrico de 1.0×10^6 N/C. El condensador, con las placas horizontales y la superior con carga positiva, se mueve con velocidad constante hacia la derecha a 10^3 m/s. (*a*) Encontrar la magnitud y dirección del campo magnético inducido **B** que se mueve con el campo eléctrico.

(*b*) Encontrar la magnitud y dirección del campo eléctrico inducido **E'** debido al campo magnético móvil. (*c*) ¿Por qué estos campos no constituyen una onda electromagnética?

30-3. Considérese un condensador de placas paralelas con placas circulares de 1 cm de radio y separadas en el vacío por 1.0 mm (*a*) Encontrar la corriente de desplazamiento en el espacio entre las placas que induzca un campo magnético de 1.0 G a la distancia de 1.0 cm del eje de las placas circulares. Encontrar las correspondientes rapideces con que cambian (*b*) el flujo eléctrico y (*c*) el campo eléctrico entre las placas. (*d*) ¿Con qué rapidez cambian el potencial eléctrico entre las placas? (*e*) Finalmente, encontrar la rapidez con que cambia la carga del condensador.

30-4. La rcm del campo eléctrico en un haz de radiación electromagnética es de 1.0×10^6 V/m. Encontrar (*a*) la densidad de energía (*b*) la intensidad de la radiación, (*c*) la presión que ejerce este haz en un absorbedor perfecto, y (*d*) la rcm del campo magnético.

30-5. Un laser produce un haz luminoso con una sección transversal circular de 2.0 mm de diámetro. El laser emite luz monocromática con una longitud de onda de 6328 Å a la potencia de 2.0 mW. Encontrar las rcm de (*a*) el campo eléctrico y (*b*) el campo magnético de este haz.

30-6. Una fuente puntual de 100-W radia luz isotrópicamente en todas direcciones. A una distancia de 2.0 m de la fuente luminosa, encontrar la amplitud de (*a*) el campo eléctrico E y (*b*) el campo magnético B.

30-7. La intensidad de la radiación electromagnética enviada por el Sol es de 1,400 W/m^2 en la superficie de la Tierra. La Tierra se encuentra a 1.5×10^{11} m del Sol. Encontrar la energía electromagnética que hay dentro de una esfera de 1.5×10^{11} m, estando el Sol en el centro de la esfera.

30-8. Encontrar la presión que dirigida hacia dentro en la superficie del Sol, como resultado de la potencia total radiada de 3.8×10^{26} W.

30-9. Encontrar a qué distancia de una fuente puntual de radiación con la *luminosidad* del Sol (3.8×10^{26} W) será la presión de radiación de 1.0×10^{10} atm. (La luminosidad de una estrella es sencillamente la potencia total que radia).

30-10. (*a*) Si la intensidad de todas las radiaciones electromagnéticas que llega del Sol a la superficie de la Tierra es de 1 400 W/m^2. ¿Cuál será la fuerza que recibe la Tierra de la radiación solar, suponiendo absorción completa? (*b*) Comparar esta fuerza de radiación con la fuerza gravitacional entre el Sol y la Tierra.

30-11. Un haz de radiación electromagnética incide en un bloque de material translúcido que refleja el 25% de la radiación incidente y absorbe el resto. (*a*) Encontrar la presión de radiación que recibe el bloque si la rcm del campo magnético es $B = 0.10$ T. (*b*) ¿Cuál es la densidad de volumen del ímpetu del haz incidente?

30-12. En el laboratorio Lawrence Livermore de la Universidad de California se encuentra en camino una investigación sobre la posibilidad de la fusión inducida por laser. Estos estudios emplean laseres de alta potencia, de pulsación, fabricados con vidrio óptico "contaminado" con neodimio. Este laser comprime una energía total de 1.0×10^3 J en una pulsación que dura 1.0×10^{-10} s. Encontrar (*a*) el largo de la pulsación en m, (*b*) la densidad en volumen del ímpetu lineal, (*c*) la densidad de volumen de la energía, y (*d*) la presión de la radiación si el haz se enfoca en un blanco de 50 micrones de diámetro, la cual absorbe, sin reflexión, a la pulsación.

30-13. Los cálculos teóricos sugieren que puede ser posible emplear la presión de radiación de un arreglo de laseres con pulsaciones oscilatorias, para crear condiciones de temperatura y presión apropiados para la generación práctica de potencia eléctrica, basada en la fusión nuclear de los isótopos pesados del hidrógeno (deuterio y tritio). La duración de la pulsación debe ser mayor que 10^{-11} s para asegurarse de que la energía tuvo tiempo de propagarse a través del blanco (un gránulo inicialmente congelado) y menos de 10^{-9} s para que el blanco, ahora evaporado no tenga tiempo de dispersarse: por estas razones la duración de la pulsación debe ser del orden de 10^{-10} s. (*a*) Encontrar la potencia durante la pulsación necesaria para crear una presión de 1.0×10^{10} atm en la superficie del gránulo esférico de combustible de 100 micrones de diámetro. (Supóngase que toda la potencia es absorbida y que no hay reflexión.) Encontrar (*b*) la intensidad del haz enfocado y (*c*) la densidad de volumen correspondiente de la energía electromagnética. Encontrar los rcm de los campos eléctrico y magnético del haz enfocado. (De acuerdo

con la U. S. Federal Power Commission, en 1972 la capacidad total instalada para la generación de energía eléctrica en los Estados Unidos fue de 400 millones de kW.)

30-14. Una nave espacial cuya masa es de 2.0×10^3 kg, inicialmente en reposo y lejos de cualquier otro cuerpo, navega con la fuerza de radiación producida por un "cohete de fotones", el cual emite un haz electromagnético. (*a*) Encontrar la salida de potencia del cohete fotónico si la nave se mueve a 3.1×10^5 m/s después de una aceleración constante durante un año. (*b*) ¿Será posible esta aceleración con las fuentes actuales de haces de laser?

30-15. Un tambor esférico evacuado es negro en su interior y tiene una fuente puntual e isotrópica de radiación electromagnética en su centro. La fuente emite radiación con la rapidez de 10^7 W. Si la esfera está sometida a una presión de aire de 1.0×10^{-1} N/m^2 (una millonésima de la presión atomosférica) en la superficie exterior, calcular el radio de la esfera donde se igualen las presiones interior y exterior.

30-16. Un haz uniforme de luz, de intensidad 1.0×10^2 W/m^2 incide normalmente, durante 1.0×10^3 s en una delgada hoja de un cierto material. Este absorbe toda la luz y tiene una masa y un área de 0.50 g y 1.0 cm^2, respectivamente. Se supone que no actúa ninguna otra fuerza sobre la hoja y que ésta estaba al principio en reposo. (*a*) Encontrar la energía cinética de translación de la hoja y (*b*) su incremento en energía térmica. (*c*) Si el calor específico de la hoja es de 0.40 J/g-C°, ¿en cuánto se elevará la temperatura de la hoja?

30-17. Un haz horizontal electromagnético, con una intensidad constante de 10 MW/m^2 incide en una hoja rectangular, perfectamente absorbente, de 1.0 m^2 de área, que cuelga con libertad y gira alrededor de un eje horizontal en su borde superior. La masa de la hoja es de 50 g. ¿Con qué ángulo con respecto a la vertical quedará la hoja en equilibrio?

30-18. Demostrar que la potencia electromagnética, radiada por una partícula de carga q y aceleración a es proporcional a q^2a^2.

30-19. (*a*) Demostrar que la potencia electromagnética sinusoidal radiada por un oscilador eléctrico dipolar varía como la cuarta potencia de la frecuencia de oscilación y como el cuadrado de la amplitud de oscilación de la carga. (*b*) Un dipolo eléctrico emite radio de ondas de radio de 10 MHz con una amplitud de oscilación de las cargas de 0.10 m. Encontrar la amplitud de oscilación de un radiador atómico, que emite luz de 5000-Å de longitud de onda y tiene la misma potencia de salida.

30-20. El valor más aproximado de la velocidad de la luz tiene un error no mayor de 4 partes en 10^9. Supóngase que el método de radar se emplea para determinar la distancia a la Luna (3.8×10^8 m). (*a*) Encontrar qué fracción de segundo debe medirse para que una pulsación de radiación electromagnética complete una ida y vuelta a la Luna, si se toma en cuenta la precisión con que se conoce la velocidad de la luz. (*b*) ¿Cuál será la incertidumbre (en metros) de esta medición de la distancia de la Tierra a la Luna?

30-21. Usando una modificación del método de Fizeau en 1972 A. A. Michelson midió la velocidad de la luz tomando el tiempo que tardó un haz luminoso en ir y venir entre Mount Wilson y el Monte de San Antonio que están a 22 millas de distancia. Esta distancia se midió con un error de 1/5 de pulgada. Encontrar el máximo error permisible en la duración de un viaje redondo, si los errores en las medidas de la distancia y del tiempo deben ser semejantes.

30-22. En una cierta medida con microondas de la velocidad de la "luz", con una aproximación de 1 parte en 3×10^7, se empleó una radiación con una frecuencia de 10^{10} Hz. Encontrar qué error, en términos de número de longitudes de onda de la luz de 6000-Å es permisible en la medición de la longitud de onda de las microondas.

Capítulo

31

LA OPTICA DE LOS RAYOS: REFLEXION, REFRACCION Y LENTES

En este capítulo se tratarán las ondas,* principalmente las ondas electromagnéticas luminosas, que se mueven en dos y tres dimensiones y que encuentran los límites entre dos medios en aquellas condiciones en donde la longitud de onda sea pequeña comparada con el tamaño de los obstáculos o de las aberturas. Entonces, los únicos fenómenos que tienen lugar en las interfases, la reflexión y la refracción, pueden ser comprendidos y el progreso de una onda puede determinarse con un sencillo procedimiento geométrico, el trazado de rayos. En este capítulo se tratará de la óptica de los rayos, u óptica geométrica, excluyéndose efectos ondulatorios como los de interferencia y de difracción, que serán tratados en el Cap. 32.

31—1 OPTICA DE RAYOS Y OPTICA DE ONDAS

Un objeto opaco con un borde definido forma una sombra cuando se ilumina con la luz visible de una fuente pequeña. La luz recorre, o parece que lo hace, estrictamente una línea recta. No es evidente y ciertamente no lo es para el observador casual, que la luz es en realidad, un fenómeno electromagnético *ondulatorio*. En realidad, la propagación rectilínea de la luz en un medio uniforme, sugirió a los primeros físicos de que la luz consistía de partículas o corpúsculos. Consideremos primero bajo qué condiciones la luz o cualquier otra perturbación ondulatoria puede considerarse que sigue las "trayectorias" dadas por los rayos asociados con los frentes de onda (Sec. 16-5), esto es, notemos bajo qué condiciones se pueden ignorar los efectos ondulatorios distintivos.

*Los fundamentos de las ondas mecánicas, se encuentran en los Caps. 15 y 16.

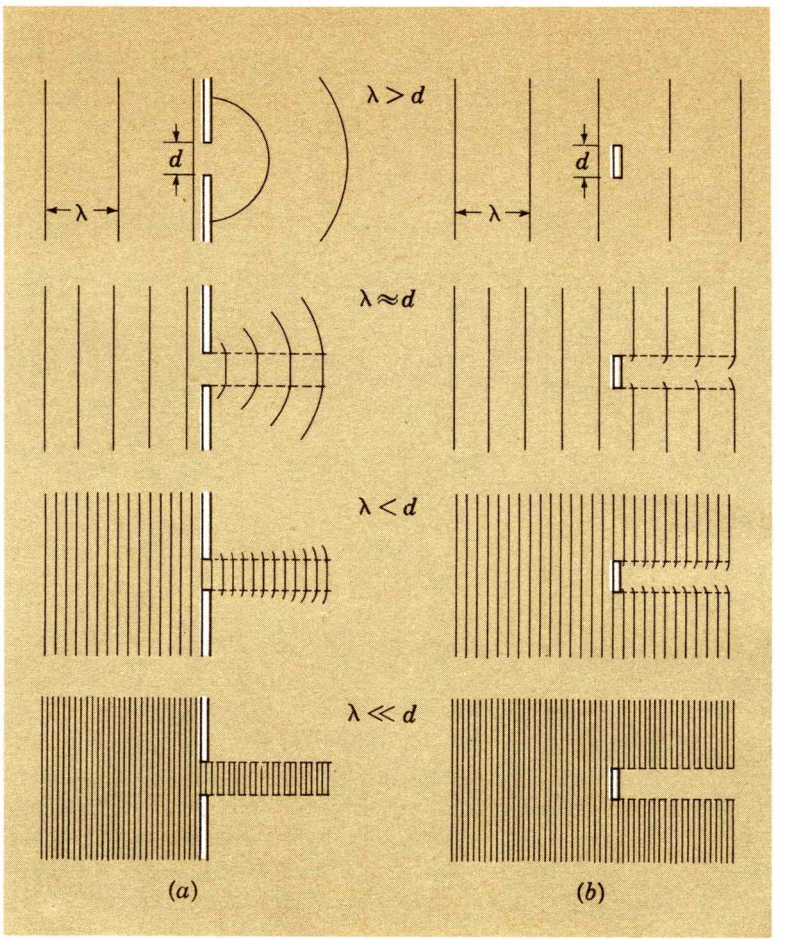


FIG. 31-1. Las ondas de longitud de onda λ decrecientes encuentran (*a*) una abertura y (*b*) un obstáculo de tamaño d.

La Fig. 31-1*a* representa a varias ondas de diversas longitudes λ que inciden en un objeto opaco con una abertura circular de ancho d. Cuando $\lambda > d$, las ondas se dispersan en todas direcciones al salir de la abertura, siendo circulares los frentes de onda. En cortas longitudes de onda la dispersión, o difracción, de las ondas, más allá de los límites de la sombra geométrica, es menos pronunciada. Por último, cuando $\lambda \ll d$, los frentes de onda permanecen rectilíneos al atravesar la abertura y la perturbación ondulatoria se encuentra estrictamente dentro de los límites de la "sombra" de la abertura. O dicho de otro modo, cualquier rayo que llegue a la abertura continúa después de ella sin cambiar de dirección.

Un comportamiento semejante se tiene con las ondas que encuentran un cuerpo aislado y opaco, como se indica en la Fig. 31-1*b*. Cuando la longitud de onda es relativamente grande comparada con d, los rayos se doblan y los frentes de onda se encorvan debido a la difracción provocada por el cuerpo. Cuando $\lambda \ll d$, el objeto forma una sombra definida y los efectos de difracción son

despreciablemente pequeños y se puede dibujar cualquier rayo sin desviación. En lo que resta de este capítulo supondremos que siempre se cumple la condición $\lambda \ll d$; los efectos de difracción que ocurren cuando $\lambda \gtrsim d$ se tratarán en el Cap. 32.

Entonces, ¿bajo qué condiciones puede tratarse la luz visible por el procedimiento de los rayos o de la óptica geométrica, más bien que con el de la óptica física u ondulatoria? Las longitudes de onda de la luz visible son algo menores que 10^{-3} mm. Por tanto, la óptica de rayos es suficiente para tratar con cuerpos o aberturas de tamaño ordinario, esto es, mucho mayores que 10^{-3} mm (10^{4} Å). Las condiciones para la "óptica" de rayos se aplican por igual a otros tipos de ondas; así, una onda sonora audible en el aire, con una frecuencia de 1000 Hz y una longitud de onda de 30 cm, o una microonda electromagnética con una longitud de onda de varios centímetros, no puede tratarse por la óptica geométrica, excepto que dichas ondas encuentren cuerpos cuyas dimensiones características sean mucho mayores que unos cuantos centímetros.

Aunque trataremos con longitudes de onda mucho más pequeñas que el ancho de aberturas o de cuerpos, siempre se supondrá que la longitud de onda es grande comparada con los cuerpos microscópicos responsables de los efectos de refracción y de reflexión. Por ejemplo, son los átomos individuales y sus electrones asociados en un sólido o en un líquido los que ocasionan que la luz visible se refleje o se refracte, pero el espacio entre átomos vecinos, típicamente de unos pocos angstroms, es mucho menor que la longitud de onda de la luz; por la misma razón, un alambrado ordinario de gallinero, que deja pasar la luz visible, actúa como un reflector opaco para las ondas de radio de varios metros de longitud.

31—2 EL PRINCIPIO DE RECIPROCIDAD

Supongamos que se observa en una película de un fenómeno ondulatorio, quizás una onda recorriendo la superficie de un líquido, como en una cuba de ondas y supongamos también que no hay disipación de energía. Ahora si la película se enrolla hacia atrás —como si se viera el movimiento ondulatorio con el tiempo invertido— se vería que los frentes de onda se mueven en sentido opuesto, invirtiéndose también el sentido de los rayos asociados con dicho frente de onda. Los dos movimientos ondulatorios, el primero con el tiempo transcurriendo hacia adelante y el segundo con el tiempo invertido, son movimientos *posibles,* pues ambos son compatibles con las leyes que rigen al movimiento ondulatorio. Así, si se conoce la "trayectoria" de una onda de un punto a un segundo punto, si se conoce la configuración del rayo (o de los rayos) que unen a los dos puntos, entonces el camino inverso, del segundo al primer punto, se encuentra sencillamente invirtiendo las flechas de los rayos. Brevemente dicho: si un rayo va de A a B, también va un rayo de B a A por la misma ruta; éste

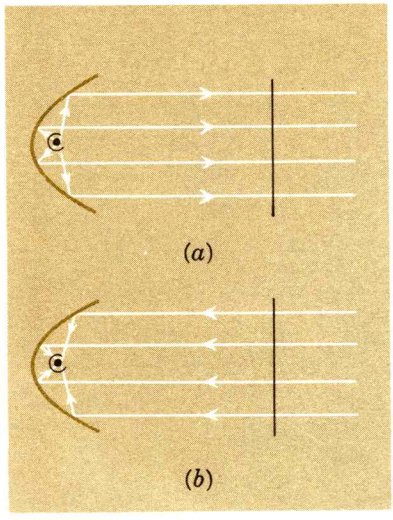


FIG. 31-2. Ejemplo de reversibilidad "óptica": un reflector parabólico, en (*a*) como transmisor y en (*b*) como un receptor.

es el *principio de reciprocidad* que dice que dos puntos cualesquiera conectados por un rayo son recíprocos, en el sentido en que pueden intercambiarse los sentidos de la propagación de las ondas sin ninguna alteración en el diseño de los frentes de onda. Denominado también el principio de la *reversibilidad óptica,* este principio se aplica a *todos* los movimientos ondulatorios no disipativos y no sólo a la luz visible.

En la Fig. 31-2 se ve una porción de los frentes de onda y sus rayos correspondientes, que radian desde la fuente puntual y se reflejan en un reflector parabólico (las ondas que quedan, emitidas por la fuente puntual continúan dilatándose como ondas esféricas). El haz luminoso consiste en ondas planas; así, un reflector parabólico transforma a los rayos divergentes en rayos paralelos; como si dijéramos, transforma una fuente puntual en una fuente de ondas planas. Invirtiendo el sentido de los rayos (imaginando que el tiempo se mueve hacia atrás), puede verse que un haz de frente de ondas planas incidentes en el reflector parabólico es enfocado, interceptándose todos los rayos en un mismo punto. Así, un reflector parabólico, sirve igualmente bien como transmisor o como receptor de un haz paralelo. Más generalmente, si se conoce el diseño de radiación de una antena transmisora, que da la intensidad radiada como una función de la dirección, se conocerá también el comportamiento de la misma antena empleada como receptor de radiación incidente en ella.

Otro ejemplo de reciprocidad se indica en la Fig. 31-3*a*. Aquí la luz que proviene de una fuente puntual atraviesa una lente para formar una imagen de la fuente. Si el rayo (o el tiempo) se

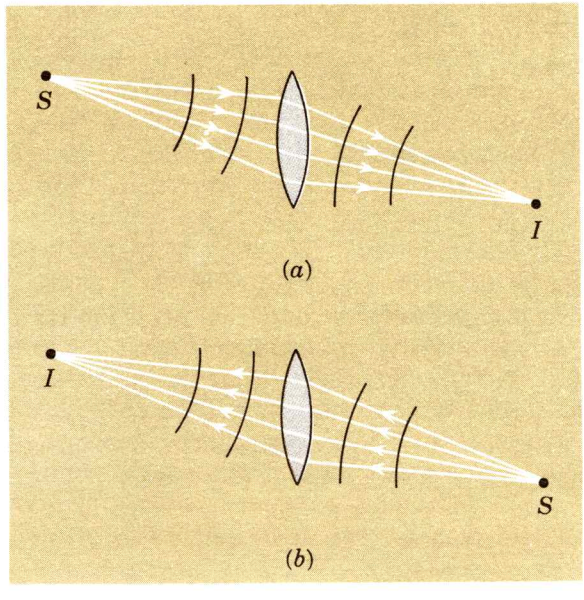


FIG. 31-3. (*a*) Una fuente *S* forma una imagen *I* cuando los rayos pasan a través de una lente. (*b*) Invirtiendo el sentido de los rayos, se intercambian entre sí la fuente y la imagen.

invierten, la imagen se vuelve fuente y la fuente imagen. Estrictamente hablando, las flechas y los rayos *no* son necesarios excepto para indicar por conveniencia cuál de las dos posibilidades está en consideración.

31—3 REGLAS DE LA REFLEXION Y DE LA REFRACCION

Cuando una onda encuentra una frontera entre dos medios, la onda incidente es en parte transmitida por el segundo medio y en parte reflejada hacia atrás en el primer medio. Puesto que en dos o en tres dimensiones, la onda transmitida es por lo general desviada, o *refractada,* en la interfase, le llamaremos el rayo *refractado.*

Se enunciarán primero las reglas de la reflexión y refracción demostrando después cómo ellas se infieren sencillamente de los principios fundamentales. La Fig. 31-4 representa a un rayo incidente en la interfase entre dos medios, por ejemplo, un estrecho haz luminoso que penetre al agua desde el aire. Por convención la dirección del rayo incidente θ_1, del rayo reflejado θ_1' y la del rayo refractado θ_2, se mide con relación a la normal a la interfase.

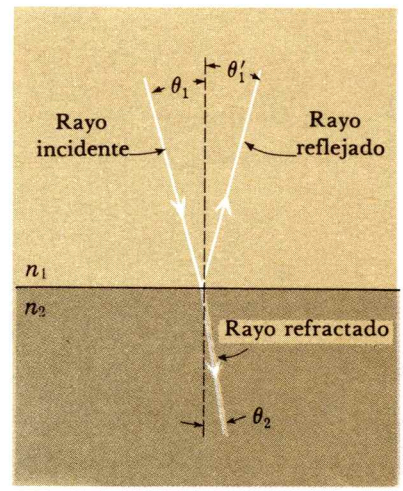


FIG. 31-4. Reflexión y refracción en una interfase.

1. Tanto el rayo reflejado como el refractado están en el plano definido por el rayo incidente y la normal.
2. El ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

$$\theta_1 = \theta_1' \tag{31-1}$$

3. Para una frecuencia dada, el ángulo de incidencia θ_1 y el de refracción θ_2, se relacionan del modo siguiente:

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2 \tag{31-2}$$

Donde n_1 y n_2 son, respectivamente, constantes características de los medios 1 y 2; esta relación se conoce como ley de Snell, en honor de su descubridor W. Snell (1591-1626). Las constantes, llamadas *índices de refracción* se relacionarán con las velocidades y las longitudes de las ondas en los medios respectivos en la Sec. 31-5. De acuerdo con el principio de la reciprocidad, se pueden invertir los sentidos de los rayos, por lo que la designación de un ángulo como de "incidencia" y el otro como de "refracción" es, en realidad. arbitrario.

Esto es todo en la óptica geométrica. Teniendo una tabla de los valores de n para varios materiales, se puede en principio trazar los rayos con completo detalle conforme pasen a través de una sucesión de superficies. En la reflexión *especular,* como en la superficie pulida de un espejo plano o curvo, las irregularidades en la superficie no son grandes. Aun en la reflexión *difusa,* la cual tiene lugar cuando la superficie no es lisa, la ley de la reflexión se aplica exactamente en cualquier porción de la superficie que sea lo bastante pequeña para que pueda considerarse lisa. Aunque la Fig. 31-4 representa rectilínea a la interfase entre los medios, estas

reglas también se aplican a las superficies curvas. Simplemente se escoge una interfase lo bastante pequeña como para que pueda considerarse como un plano. Aunque el programa de la óptica geométrica es sencillo en principio, sin que contenga más que construcciones geométricas que sigan las reglas anteriores, el diseño de sistemas ópticos, como lentes, conjuntos de lentes o antenas de radar, excepto en ciertas situaciones especiales, se vuelve extraordinariamente difícil porque deben trazarse un número de rayos muy grande. Los elementos sencillos de la teoría de la refracción en superficies curvas y en el diseño de lentes se discuten en la Sec. 31-8.

Hay un aspecto de la reflexión y de la refracción que *no puede* tratarse con los métodos de la óptica geométrica: las intensidades relativas de los haces luminosos reflejados y transmitidos. La relación reflexión-transmisión, puede en principio calcularse con la relación n_1/n_2, aplicando las ecuaciones de Maxwell a las ondas electromagnéticas, o aplicando la conservación de la energía y del ímpetu a las ondas mecánicas. Consideraremos un caso importante: aquél en donde la onda incidente es *totalmente* reflejada en la interfase (Sec. 31-7).

31—4 REFLEXION

En la óptica geométrica la ley de la reflexión puede comprenderse considerando la propagación de ondas planas que llegan a una superficie plana. La Fig. 31-5 representa a una sucesión de frentes planos de onda, que inciden en una superficie plana; el ángulo que cada frente de onda hace *con la superficie,* es el ángulo de incidencia θ_1. Se encuentran los frentes de onda reflejados con el principio de Huygens (Sec. 16-7), esto es, tomando la envolvente de las ondillas de Huygens formadas a lo largo del frente de onda, para encontrar un futuro frente de onda. En la interfase las

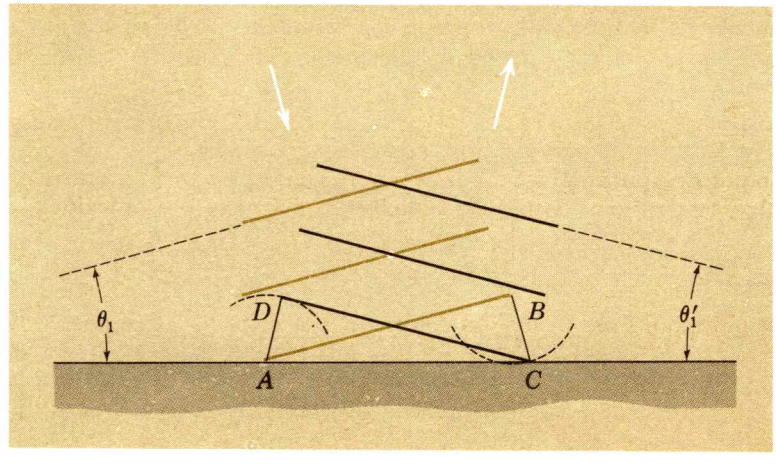


FIG. 31-5. Frentes de ondas planos que inciden en una superficie reflectante plana.

ondillas de Huygens son generadas tanto hacia adelante como *hacia atrás*. Existe una base física para esa construcción: cuando una onda electromagnética atraviesa un medio, sus campos eléctricos colocan a los electrones en oscilación forzada. Estos osciladores eléctricos generan ondas electromagnéticas que se propagan tanto hacia adelante como hacia atrás, pero dentro del medio refractor la radiación neta hacia atrás vale *cero*. En la frontera, sin embargo, la simetria necesaria para cancelar la onda que retrocede no existe y son generadas tanto la onda reflejada como la refractada.

Como se indica en la Fig. 31-5, el extremo izquierdo A del frente de onda incidente toca a la superficie cuando el extremo derecho B, está a la distancia BC de la superficie. Después de que ha transcurrido un tiempo $t = BC/c$ (c es la velocidad de la onda en el medio incidente), el extremo derecho del frente de onda llega al punto C. Simultáneamente el extremo izquierdo está en D, donde $AD = ct$. Por tanto, $BC = AD$ y $\theta_1 = \theta'_1$.

Consideremos ahora los frentes de onda esféricos que provienen de una fuente puntual S y que inciden en una superficie plana, como se representa en la Fig. 31-6. Se encuentra el rayo reflejado y los frentes de onda reflejados, aplicando a cada rayo la regla $\theta_1 = \theta'_1$. Los rayos reflejados parecen divergir de un punto I. Para un observador que ve sólo los rayos reflejados, estos rayos y sus frentes de onda esféricos asociados, parecen provenir del punto *imagen* I, más bien que de su verdadero origen, la fuente puntual S. El ojo humano se equivoca, porque interpreta que todos los rayos que le llegan han recorrido líneas rectas sin ningún cambio de dirección; así es como al ojo (o a una cámara) le parece que la fuente está localizada en la posición de la imagen, la cual, de la geometría de la Fig. 31-6, está localizada simétricamente con la fuente, con relación a la frontera reflectora colocada a la mitad de ellas. Esta imagen se dice que es *virtual*, considerando que los rayos parecen originarse en el punto I, aunque en realidad no es así.

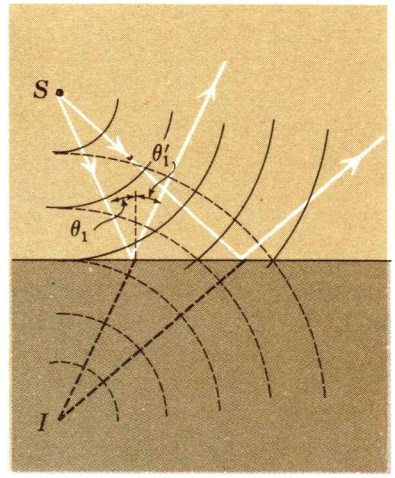


FIG. 31-6. Frentes de onda esféricos que llegan a una superficie reflectante plana y forman una imagen I.

Ejemplo 31-1

Un objeto se coloca cerca de dos espejos planos perpendiculares entre sí. ¿Cómo resultan las imágenes del objeto?

Véase la Fig. 31-7*a*, donde el objeto está representado por O y el ojo por E. Aplicando a cada reflexión la regla $\theta_1 = \theta'_1$ se encuentra que hay *tres* imágenes virtuales: la imagen I_1 formada por reflexión en el espejo 1, la imagen I_2, por la reflexión en el espejo 2 y la I_{12}, por reflexiones en ambos espejos. Podría decirse que la imagen I_{12} es la imagen en el espejo 2 de la imagen I_1. El objeto y sus tres imágenes están simétricamente colocados con respecto a las líneas que representan a los espejos.

Nótese que el rayo que llega al ojo de la imagen I_{12}, es *paralelo* al mismo rayo que sale del objeto O; esto es, un rayo que sufre dos reflexiones en un espejo de esquina emerge siempre paralelo al

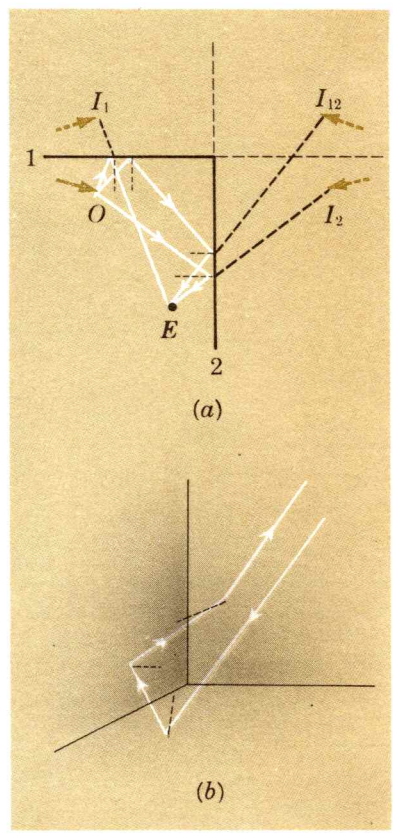


FIG. 31-7. (*a*) Imágenes formadas por las reflexiones en dos espejos perpendiculares. (*b*) Un espejo de esquina.

mismo rayo que sale del objeto *O*. Este mismo comportamiento se encuentra cuando una bola de billar hace dos "reflexiones" al chocar con una esquina de la mesa de billar. Cuando *tres* espejos mutuamente perpendiculares forman un reflector de esquina, cualquier rayo que se refleje en cada uno de los tres espejos, emergerá paralelo al rayo incidente, como se representa en la Fig. 31-7*b*. Cualquiera que sea su dirección, *todo* rayo que llegue a un espejo de esquina se refleja hacia atrás en la misma dirección, pero desplazado lateralmente. Por ejemplo, un cierto número de reflectores de esquina, por lo general hechos con vidrio rojo, se emplean en los guardafangos posteriores de las bicicletas; cualquier luz que las ilumine es reflejada hacia la fuente luminosa. Reflectores de esquina de gran tamaño son de uso común como "blancos" de las señales de radar.

31—5 INDICE DE REFRACCION

Recordaremos primero que cuando una onda pasa del medio 1, en donde su velocidad es v_1, a un segundo medio 2, en donde su velocidad es v_2, la *frecuencia* f de la onda *no cambia*. Si las longitudes de onda en los dos medios son, respectivamente λ_1 y λ_2, se puede escribir:

$$v_1 = f\lambda_1 \qquad \text{y} \qquad v_2 = f\lambda_2 \qquad (15\text{-}8), (31\text{-}3)$$

La longitud de onda es mayor en el medio donde la onda es más rápida.

Se indica la velocidad de las ondas electromagnéticas en el *vacío* con la letra c. Se puede entonces especificar la velocidad en cualquier medio por un *índice de refracción n,* la relación entre c y la velocidad de la onda en el medio. Por tanto,

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \qquad \text{y} \qquad v_2 = \frac{c}{n_2} \qquad (31\text{-}4)$$

donde n_1 y n_2 se denominan los índices de refracción de los medios 1 y 2. Por definición, el índice de refracción del vacío, o espacio libre, vale exactamente 1. La luz atraviesa cualquier medio a una velocidad *menor* que c, por tanto el índice de refracción siempre es mayor que 1. Por ejemplo, se ha encontrado que la velocidad de la luz en el agua es de 2.25×10^8 m/s, por lo que el índice de refracción del agua para la luz visible es $n = (3.00 \times 10^8 \text{ m/s})/(2.25 \times 10^8 \text{ m/s}) = 1.33$. El aire, cerca de la superficie de la Tierra tiene un índice de refracción $n = 1.00029$, aproximadamente la misma que en el vacío.

La Tabla 31-1 lista los índices de refracción, con tres cifras significativas, de algunos materiales transparentes comunes.

El índice de refracción *relativo* del medio 2 al medio 1, representado con n_{21}, vale

Tabla 31-1

Material	*Indice de refracción*
Agua	1.33
Alcohol etílico	1.36
Cloruro de sodio	1.54
Cuarzo (fundido)	1.46
Diamante	2.42
Estibinita (Sb_2S_3)	4.46
Hielo	1.31
Vidrio (crown)	1.52
Vidrio (flint ligero)	1.60

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \tag{31-5}$$

el cual, tomando en cuenta la Ec. (31-4) es equivalente a

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2}$$

Se infiere por supuesto que

$$n_{21} = \frac{1}{n_{12}}$$

En la siguiente sección veremos que el índice de la fracción definido aquí como la relación de las velocidades de la onda en los dos medios, es equivalente al índice de fracción definido por la ley de Snell, dada por la Ec. (31-2). Así, se puede medir el valor del índice de refracción relativo bastante directamente, observando la refracción de las ondas en una interfase. Las longitudes de onda en los dos medios pueden relacionarse con sus respectivos índices de refracción teniendo en cuenta (31-3) y (31-4):

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{31-6}$$

Si el índice es grande, la longitud de onda es pequeña; por ejemplo, cuando la luz azul, de longitud de onda igual a 4000 Å (en el espacio libre) entra en un vidrio que tenga un índice de refracción de 1.500, la longitud de esta luz *azul* en el vidrio es *menor,* esto es 4000 Å/1.500 = 2667 Å. Sin embargo, es costumbre caracterizar un color particular de la luz visible por su *longitud de onda en el espacio libre,* en lugar de por su frecuencia, debido a que la longitud de onda puede medirse directamente, mientras que la frecuencia se calcula conociendo la velocidad de la onda.

En el caso de las ondas mecánicas sólo pueden darse índices de refracción relativos para un par de medios; no existe un "medio" que corresponda al espacio libre de las ondas electromagnéticas, en donde el índice de refracción sea 1.

Las medidas demuestran que el índice relativo de refracción de un medio dado, por lo general, depende de la frecuencia. El índice de refracción de un material transparente a los rayos luminosos de luz visible, generalmente *aumenta* con la frecuencia. Así, la luz violeta atraviesa el vidrio a una velocidad menor (más o menos 1%) que la de la luz roja, de mayor longitud de onda y de menor frecuencia. Mientras que todas las frecuencias componentes de la luz blanca atraviesan el vacío con la misma velocidad c, las velocidades de las diversas frecuencias difieren al entrar la luz a un medio refractivo. La Tabla 31-2 muestra los índices de refracción del cuarzo para luces de diversas longitudes de onda (en el aire).

Tabla 31-2

Longitud de onda en el aire (Å)	*Indice de refracción del cuarzo*
4000	1.470
5000	1.463
6000	1.458
7000	1.455

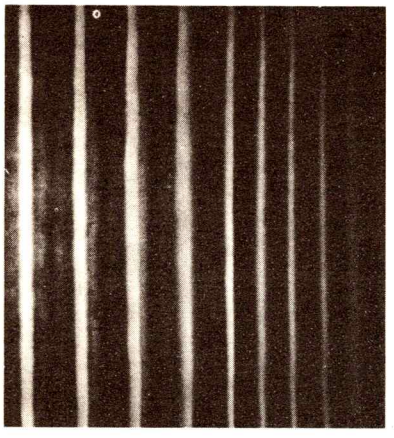


FIG. 31-8. Cambio en la longitud de onda debido a un cambio en su velocidad en una cuba de ondas. (Tomado de PSSC *Physics*, D. C. Heath and Company.)

Las ondas superficiales en un líquido de profundidad variable muestran un comportamiento similar al de las ondas luminosas en que su velocidad disminuye al reducirse la profundidad del agua; así, en el tanque de ondas puede verse como se comprimen los frentes de onda, correspondiendo a una disminución en su longitud de onda, al entrar las ondas en una región con menor profundidad; véase Fig. 31-8.

31—6 REFRACCION

La Fig. 31-9 representa unos frentes de onda que inciden del medio 1, en donde su velocidad es v_1, la longitud de onda λ_1 y el índice de refracción n_1, a un medio 2 donde las cantidades correspondientes son v_2, λ_2 y n_2. El ángulo de incidencia θ_1 es también el ángulo entre el frente de onda incidente y la interfase; de modo análogo, el ángulo de refracción θ_2 puede medirse entre la interfase y el frente de onda en el medio 2. Puede verse en la figura que en el intervalo de tiempo que tarda el extremo derecho del frente de onda en avanzar una longitud de onda λ_1 en el medio 1, el extremo izquierdo del mismo frente de onda ha avanzado, en el medio 2, una longitud de onda λ_2. De la geometría de la Fig. 31-9, se tiene que en el triángulo *ABC*:

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{CB}{AB} = \frac{\lambda_1}{AB}$$

y en el triángulo *ABD*:

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{AD}{AB} = \frac{\lambda_2}{AB}$$

Eliminando a *AB*, se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

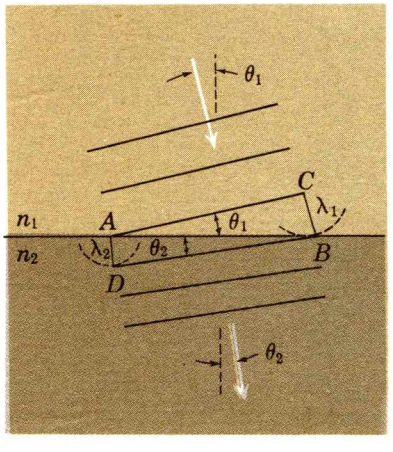


FIG. 31-9. Refracción, en una interfase, de un frente de onda plano.

Teniendo en cuenta (31-6), se puede escribir:

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2 \qquad (31\text{-}2), (31\text{-}7)$$

que es la ley de Snell.

Una forma alternativa de la ley de Snell, empleando el índice relativo de refracción es:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = n_{21} = \frac{1}{n_{12}} \qquad (31\text{-}8)$$

Puesto que la refracción de un rayo en una interfase se debe al cambio en la velocidad de la onda, se pueden calcular las veloci-

dades relativas de la onda en 2 medios, sencillamente aplicando la ley de Snell para encontrar el índice de refracción relativo. En 1862 J. B. L. Foucault realizó un experimento muy significativo en la historia de la teoría de la luz, cuando demostró que la velocidad de la luz visible dentro del agua es *menor* que en el aire.*

Considérese la Fig. 31-10 que representa a un rayo incidiendo en un material refractivo con caras paralelas. Puesto que la ley de Snell gobierna la refracción en ambas interfases y que los ángulos interiores θ_2 es el mismo en ambas, el rayo emergente es exactamente paralelo al incidente. El rayo se desplaza en sentido lateral una distancia que depende del espesor de la lámina y de su índice de refracción, pero sin que haya desviación de su dirección inicial; así, los objetos vistos a través de un vidrio de ventana, con superficies paralelas, no se ven distorsionados, sino sólo desplazados lateralmente por la refracción de los rayos luminosos.

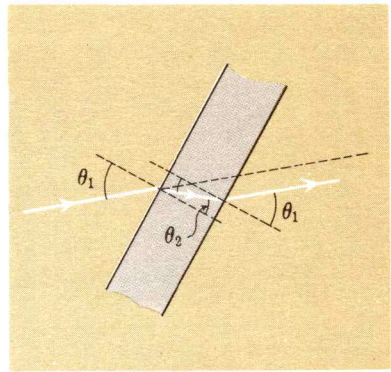


FIG. 31-10. Refracción de un rayo de luz en una placa de caras paralelas.

Un rayo se desvía de su dirección original cuando pasa por una lámina de material refractivo con caras *no paralelas:* este dispositivo recibe el nombre de *prisma;* véase la Fig. 31-11. El ángulo de desviación δ entre los rayos incidentes y emergentes depende, para un ángulo determinado de incidencia θ_1, del índice de refracción del prisma y de su ángulo ϕ. Así, si se envía luz blanca a través de un prisma de vidrio, las diversas frecuencias componentes son desviadas en ángulos diferentes, o *dispersadas,* puesto que el índice de refracción varía con la frecuencia. El índice n es mayor para las altas frecuencias (violeta) y menor en las bajas frecuencias (rojo); en consecuencia, la luz violeta se desvía más y la roja menos, estando todos los colores intermedios del espectro visible entre ellos.

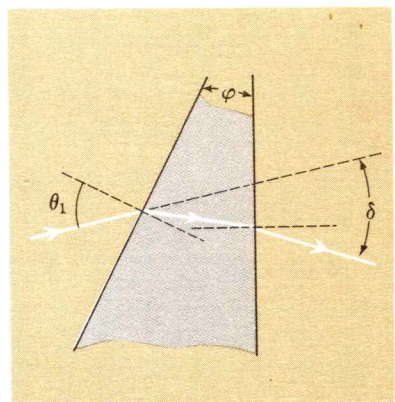


FIG. 31-11. Refracción de un rayo de luz en un prisma. Para un índice de refracción determinado, el ángulo de desviación δ aumenta conforme aumenta el ángulo ϕ del prisma.

Isaac Newton fue el primero que observó la dispersión de un espectro visible por un prisma y notó que un color simple, tal como el verde *no puede* ser resuelto posteriormente en colores componentes. Notó también que pueden emplearse dos prismas, primero para dispersar y después para reunir los diversos componentes de la luz blanca; véase Fig. 31-12.

El prisma se usa a menudo en un aparato, llamado espectrómetro de prisma, para analizar la luz visible en sus longitudes de onda componentes; véase Fig. 31-13. La luz de la fuente pasa primero por una estrecha rendija y después por el prisma. Si la luz emitida no es continua sobre una gama de frecuencias, sino que consiste de ciertas frecuencias discretas, como la luz emitida por átomos excitados, el ojo ve, o la película fotográfica imprime, una sucesión de "líneas", cada línea siendo una imagen de la rendija en una frecuencia particular. No se pueden hacer determinaciones absolutas de la longitud de onda con un espectrómetro de prisma,

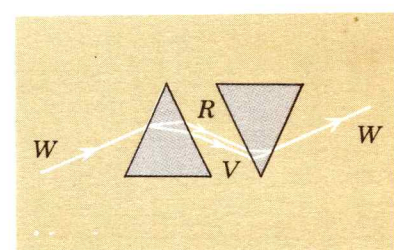


FIG. 31-12. Dispersión de la luz blanca por un prisma y su recombinación aproximada por un segundo prisma.

*El experimento de Foucault contradice la teoría corpuscular de la luz, en la cual la refracción de un rayo de luz se atribuye a que cambia la velocidad de la partícula en la interfase. La ley de Snell puede derivarse del modelo corpuscular, pero este modelo predice una velocidad *mayor* en el medio refractivo que en el vacío. Véase el Prob. 31-8.

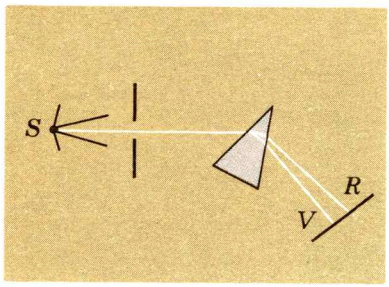


FIG. 31-13. Los elementos de un espectrómetro de prisma.

sino medidas relativas. Una determinación independiente de la longitud de onda, como es posible con un espectrómetro de cratícula de difracción (Sec. 32-10), se emplea para calibrar el espectrómetro de prisma.

Desde un punto de vista atómico, cualquier material refractivo no consiste más que de un gran número de partículas eléctricamente cargadas y sumergidas en el espacio vacío. Cuando la luz atraviesa un medio refractivo lleva estrictamente la velocidad de la luz en el vacío. Un índice de refracción mayor que 1 indica que, desde un punto de vista atómico, la radiación electromagnética es radiada de nuevo y dispersada por las partículas cargadas que forman al medio.

31—7 REFLEXION TOTAL INTERNA

En general, un haz incidente en la interfase entre dos medios refractivos, es en parte transmitido y parcialmente reflejado. Sin embargo existe una situación donde el rayo (haz) incidente *no puede ser* transmitido y en consecuencia es *reflejado* en su totalidad.

Considérese la Fig. 31-14, que representa a un grupo de rayos que pasa de un medio ópticamente menos denso a uno más denso (a un medio con n mayor). Es claro que, el máximo ángulo posible θ_1 es de 90°. De la ley de Snell, el ángulo correspondiente θ_2 es:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Bajo estas condiciones θ_2 es el *ángulo crítico* θ_c, donde:

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_1}{n_2} \tag{31-9}$$

y θ_c es el ángulo de refracción máximo posible en el medio 2.

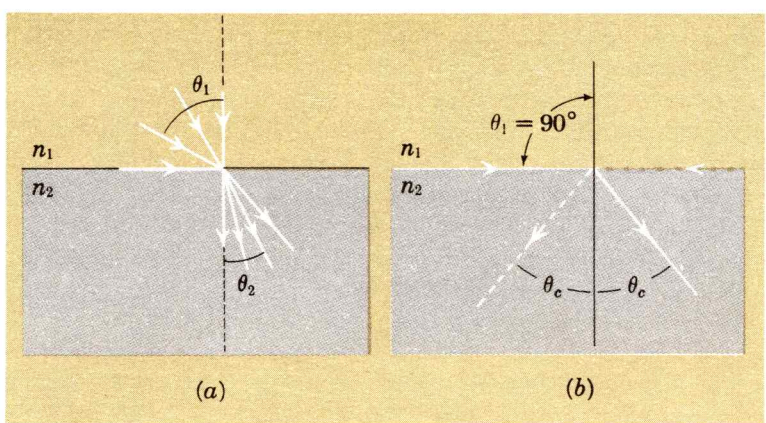


FIG. 31-14. (*a*) El ámbito permitido de ángulos de refracción; (*b*) el ángulo crítico θ_c.

Consideremos ahora que todas las direcciones de los rayos de la Fig. 31-14 se inviertan, como en la Fig. 31-15. Un rayo incidente en la interfase del medio 2 bajo el ángulo θ_c, emergerá en el medio 1 coincidiendo con la interfase. Todos los rayos incidentes con un ángulo menor emergerán en el medio 1. Pero es imposible que un rayo sea refractado en el medio 1, si su ángulo en el medio 2 es mayor que θ_c. En consecuencia todos los rayos incidentes con ángulos mayores que el crítico deben ser *reflejados del todo* y dentro del medio ópticamente más denso. Por ejemplo, en la interfase aire-agua, $\theta_c = \text{sen}^{-1}(1/1.33) = 49°$.

Así, un observador colocado dentro de un material ópticamente denso, tal como el agua, verá cuando mire hacia la superficie, un círculo transparente, por donde entran todos los rayos que llegan de arriba de la superficie, rodeado por un espejo.

El fenómeno de la reflexión total interna tiene aplicaciones importantes. Cuando la luz incide en un prisma de vidrio, como en la Fig. 31-16, con un ángulo mayor que θ_c, se refleja en la cara interior como de un espejo perfectamente reflector. Asimismo, el brillo particular de una gema, tal como un diamante, proviene del muy gran índice de refracción del carbón cristalizado, de su alta dispersión y de los múltiples rayos reflejados. En la Fig. 31-17 se representa un *tubo de luz;* la luz que llega a los lados del tubo se refleja totalmente y por tanto queda atrapada en su interior.

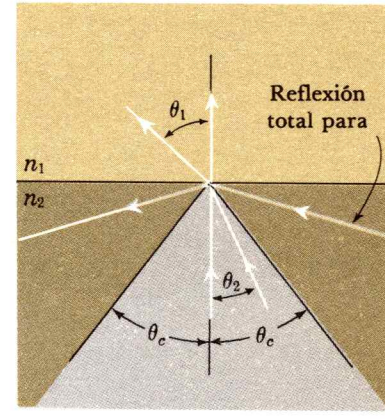


FIG. 31-15. Reflexión total interna para $\theta_2 > \theta_c$.

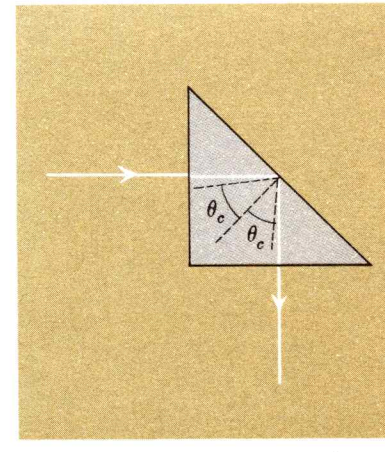


FIG. 31-16. Reflexión total interna, para incidencia normal en un prisma de 45° -90° -45°.

31—8 LENTES DELGADAS

Cuando un rayo de luz pasa por una lámina de vidrio de caras paralelas, el rayo se refracta en cada interfase, pero el rayo emergente es paralelo al incidente, como se demuestra en la Fig. 31-18*a*. El rayo se desplaza en sentido lateral pero *sin* que se desvíe en su dirección. Por otro lado, cuando un rayo penetra en una placa de vidrio con caras no paralelas (un prisma), el rayo emergente se desvía con relación al incidente, como se indica en la Fig. 31-18*b*.

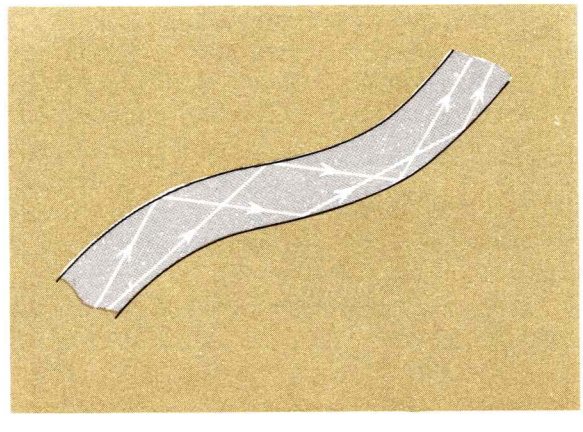


FIG. 31-17. Un tubo de luz.

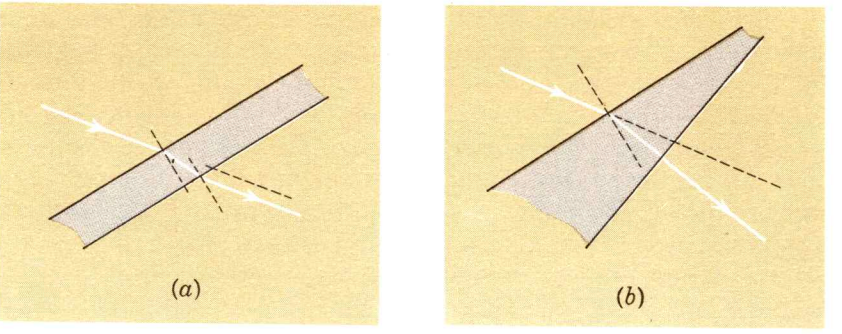


FIG. 31-18. (*a*) La refracción en una lámina con placas paralelas tiene como resultado un desplazamiento lateral de los rayos, pero ninguna desviación. (*b*) Un rayo es desviado por un prisma.

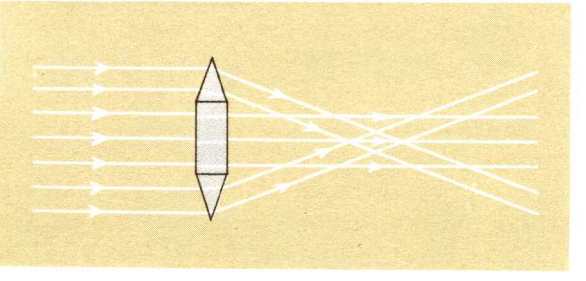


FIG. 31-19. Enfoque de una lente burda.

Consideremos ahora la estructura mostrada en la Fig. 31-19, dos prismas y una placa con caras paralelas. Un cierto número de rayos horizontales inciden desde la izquierda, pasan por esta lente bastante burda y se intersectan en una región a la derecha relativamente pequeña. Los rayos que pasan por el centro no se desvían. Aquellos rayos que pasan por los prismas superior e inferior son desviados hacia abajo y hacia arriba, respectivamente, emergiendo ambos con el mismo ángulo de desviación.

Se desea idear una estructura en donde *todos* los rayos paralelos incidentes se intersecten en un *único punto;* es claro lo que se necesita: la desviación de los rayos debe incrementarse poco a poco hacia arriba (o hacia abajo) a partir del centro de la lente, en lugar de hacerlo en forma brusca, como en la figura. Esto es, las superficies externas deberán ser curvas de modo uniforme en lugar de planas. En la práctica esto se realiza haciendo lentes con superficies *esféricas* que son relativamente fáciles de pulir. Estas lentes refractan los rayos paralelos para que éstos se intersecten (o casi) en un solo punto. Aquí se considerarán sólo lentes delgadas; esto es, se supondrá que el radio de curvatura de las superficies es grande comparado con el espesor central de la lente, como se indica en la Fig. 31-20.

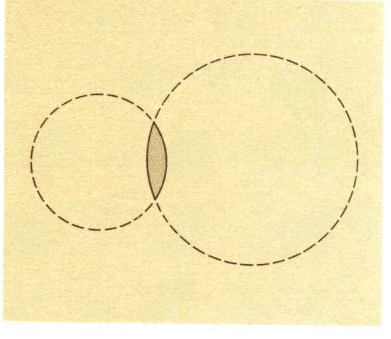


FIG. 31-20. Una lente delgada con superficies esféricas.

La Fig. 31-21*a* representa a una lente delgada con superficies esféricas *convexas*. Después de refractarse a través de la lente, los rayos inicialmente paralelos al eje se intersectan ahora en un solo punto, o al menos en una región más pequeña que la indicada en

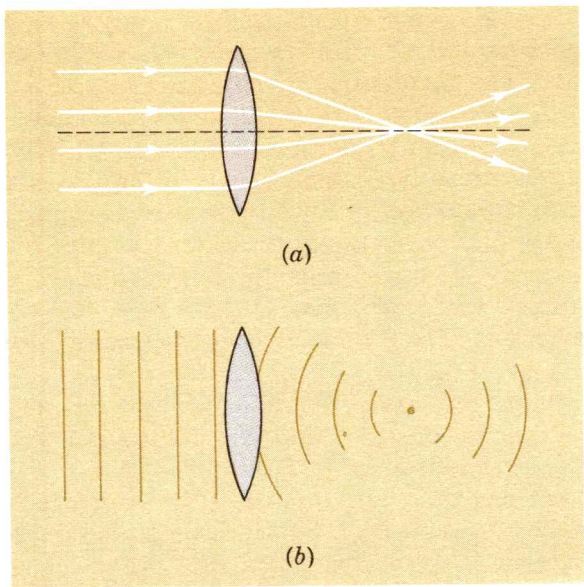


FIG. 31-21. (*a*) Rayos paralelos incidentes enfocados por una lente. (*b*) Ondas planas enfocadas por una lente.

la Fig. 31-19. Este punto se denomina el *punto focal principal* o *foco principal,* de la lente.

Así, si una fuente se coloca en el *infinito* (o a muy larga distancia de la lente) de modo que los rayos incidentes en la lente sean efectivamente paralelos en un pequeño ángulo sólido, estos rayos paralelos se intersectan en el foco principal después de atravesar la lente. El enfoque proviene de que cada rayo que está más lejos hacia arriba (o hacia abajo) del centro, es ligeramente más desviado que el que está más abajo (o más arriba) de él. El comportamiento correspondiente para las frentes de onda incidentes planas se representan en la Fig. 31-21*b*. Los frentes de onda sufren un cambio de curvatura en cada una de las dos caras, por lo que los frentes de onda emergentes se convierten en frentes de onda esféricos que se reúnen en el punto donde está el foco principal (y entonces se expanden hacia afuera como ondas esféricas divergentes). Esto proviene de que la porción central de la lente, que es relativamente gruesa, retarda más a los frentes de onda que las porciones delgadas cerca de las orillas.

Cualquier foco puede definirse de varias maneras equivalentes: (1) el punto en donde *todos los rayos se intersectan,* (2) el punto donde los *frentes de onda se reúnen en un punto,* cambiandose entonces los frentes de onda esféricos de convergentes en divergentes y (3) el punto donde la *intensidad* el haz luminoso es un *máximo.*

El principio de reciprocidad o de retroceso del tiempo (Sec. 31-2) asegura que se puede invertir la dirección de los rayos (o imaginar que el tiempo retrocede) sin cambiar la trayectoria de los rayos luminosos: así, si una fuente puntual se coloca en el foco

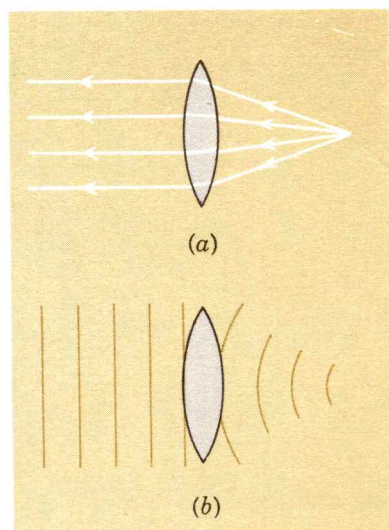


FIG. 31-22. (*a*) Después de la refracción, los rayos que se originan en el punto focal emergen como rayos paralelos. (*b*) Los frentes de onda esféricos y divergentes se convierten en frentes de onda planos después de la refracción a través de la lente.

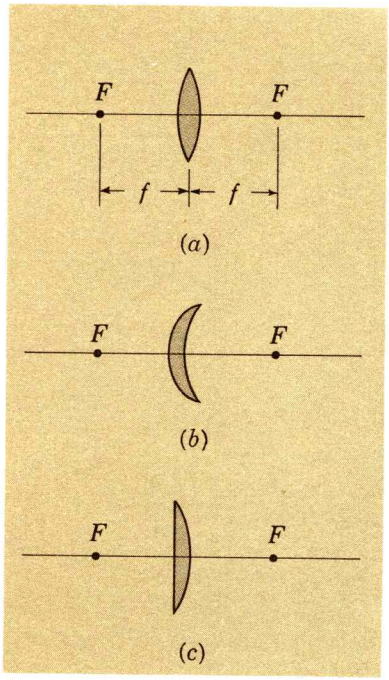


FIG. 31-23. Tres ejemplos de lentes convergentes: (*a*) una lente doble convexa, (*b*) una lente cóncavo-convexa o menisco convergente y (*c*) una lente plano-convexa.

principal, como en la Fig. 31-22, los rayos emergen de la lente como un haz de rayos paralelos. De modo equivalente, los frentes de onda esféricos que divergen del foco principal, al atravesar la lente emergen como frentes de ondas planos.

Supongamos que se invierte la lente delgada, intercambiando las dos caras, para permitir que los dos rayos atraviesen la lente en sentido opuesto. De nuevo los rayos incidentes paralelos convergen en un foco a la *misma* distancia del centro de la lente. Así, cada lente tiene *dos* puntos focales principales, uno de cada lado. Ambos focos principales, denotados con F, están a la misma distancia f, la *distancia focal,* del centro de una lente delgada; véase Fig. 31-23*a*.

Este resultado sirve no sólo para una lente delgada con dos superficies convexas, sino también para todas las lentes, como las que se muestran en la Fig. 31-23*b,* con una superficie cóncava y una convexa; o para una lente planoconvexa con una superficie de radio de curvatura infinito, como en la Fig. 31-23*c*. La condición esencial es que la lente sea más gruesa en el centro que en los bordes. (Evidentemente, la distancia focal depende del radio de curvatura de las dos superficies y del índice de refracción del material de la lente).

Imaginemos ahora que la lente se inclina un poco, como en la Fig. 31-24*a,* por lo que su eje de simetría (representado en trazos) no está en la dirección de los rayos paralelos incidentes; con un pequeño ángulo de inclinación no hay cambio: los rayos se enfocan esencialmente en el mismo punto que antes, a la distancia f del

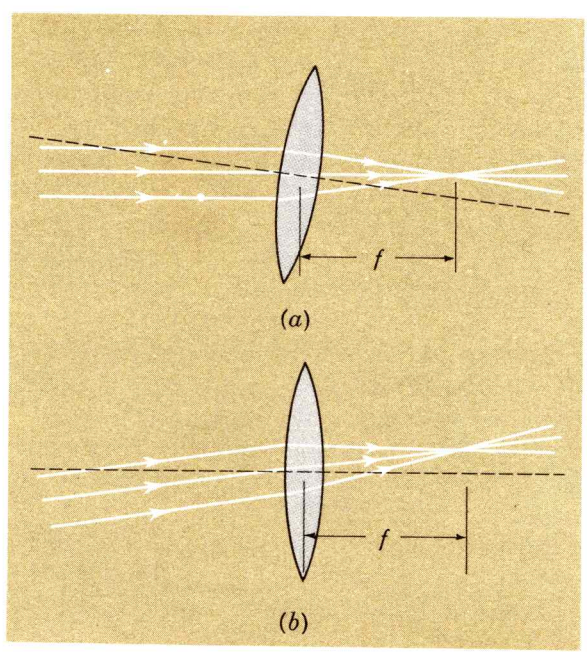


FIG. 31-24. (*a*) Inclinando la lente un pequeño ángulo *no* cambia el punto focal. (*b*) De modo equivalente los rayos oblicuos también se enfocan a una distancia f de la lente.

centro de la lente. Examinemos ahora la misma situación pero con el eje de la lente horizontal, como en la Fig. 31-24*b*. Para rayos paralelos que inciden en sentido oblicuo, el punto focal se desplaza en sentido transversal con respecto a la línea del eje. Es claro que el rayo que pasa por el centro de la lente no se desvía; pasa, en efecto, atravesando dos superficies paralelas. Así, los rayos que provienen de una fuente que está a distancia infinita se enfocan en un *plano,* el *plano focal,* a la distancia f de la lente.

Este resultado es válido, sin embargo, sólo si el ángulo entre los rayos y el eje de la lente es pequeño. Dichos rayos, aproximadamente paralelos al eje de la lente, se llaman *rayos paraxiales.* Supondremos en lo que sigue que la lente muy delgada y que los rayos son paraxiales.

El tipo de lente ilustrado se conoce como lente *convergente.* (Estrictamente, una lente más gruesa en el centro que en sus bordes es convergente sólo si su material es ópticamente más denso que sus alrededores, como una lente de vidrio sumergida en el aire). Cualquier lente convergente incrementa el grado de convergencia de los rayos y de los frentes de onda que la atraviesan, o disminuye el grado de su divergencia.

Se puede ilustrar la propiedad de la convergencia de una lente convergente para una fuente colocada en *cualquier* lugar a lo largo del eje de la lente. Supongamos que alguna fuente luminosa u objeto representado por O, se coloca cerca de una lente convergente delgada, como se indica en la Fig. 31-25. Se desea encontrar el lugar donde la luz que proviene de la punta de la flecha O, se enfoca después de atravesar la lente. Tres rayos son fáciles de trazar:

1. El rayo que pasa por el centro de la lente *no cambia,* ya que ni es desviado (las caras de la lente son paralelas aquí) ni desplazado lateralmente (la lente es muy delgada).
2. Un rayo incidente *paralelo* al eje de la lente es desviado al atravesar la lente hacia el foco principal F_2, colocado en el lado *alejado* de la lente.
3. Un rayo que pasa por el *foco principal* F_1 más *cercano,* al atravesar la lente emerge *paralelo* al eje de la lente.

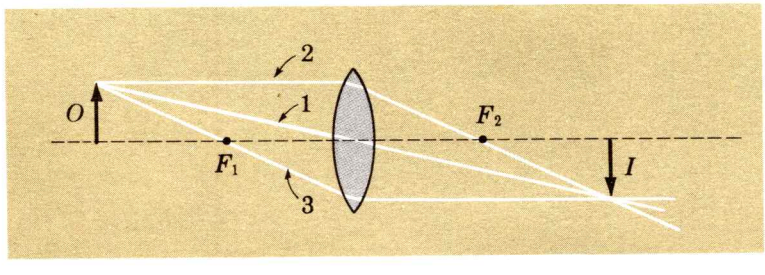


FIG. 31-25. Formación de la imagen I del objeto O.

Estos tres rayos se intersectan, o enfocan, en un solo punto; en realidad, *cualquier* otro rayo paraxial que provenga de la punta de la flecha *O* se intersecta para formar una imagen puntual de *O*. Se han trazado los rayos desde la punta de *O*; si se escoge cualquier otro punto de un objeto extenso colocado en el mismo plano transversal, es posible de nuevo encontrar el punto imagen correspondiente; por tanto, para rayos paraxiales que atraviesen una lente delgada se puede obtener la imagen *I* del objeto *O*.

El método de construcción de rayos es sencillo. Se necesita sólo conocer la distancia focal *f* de la lente; entonces se puede localizar la imagen dibujando los tres rayos como en la Fig. 31-25. El trazo de los rayos, estrictamente un procedimiento geométrico, no es siempre practicable, por lo que es deseable encontrar la relación matemática entre la distancia focal *f*, la distancia *s* del objeto a la lente y la distancia *s'* de la imagen a la lente. Considérese la Fig. 31-26, que es la misma Fig. 31-25 pero con letras de identificación. La distancia del objeto *s* es *AB*, la distancia de la imagen *s'* es *EH* = *DG* y la distancia focal *f* es *CD* = *DF*. La altura del objeto *h* es *AJ* = *BD*; la altura de la imagen *h'* es *GH* = *DE*. Los triángulos *AJD* y *DGH* son semejantes. Por tanto,

$$\frac{AJ}{JD} = \frac{GH}{DG}$$

$$\frac{h}{s} = \frac{h'}{s'} \tag{31-10}$$

La relación de las *distancias s'/s*, de la imagen y del objeto, es igual a la relación de los *tamaños, h'/h*. Esta última relación, *h'/h* se conoce como el *aumento lateral*.

Los triángulos *BDF* y *FGH* son semejantes. Por tanto,

$$\frac{DF}{BD} = \frac{FG}{GH}$$

$$\frac{f}{h} = \frac{s' - f}{h'}$$

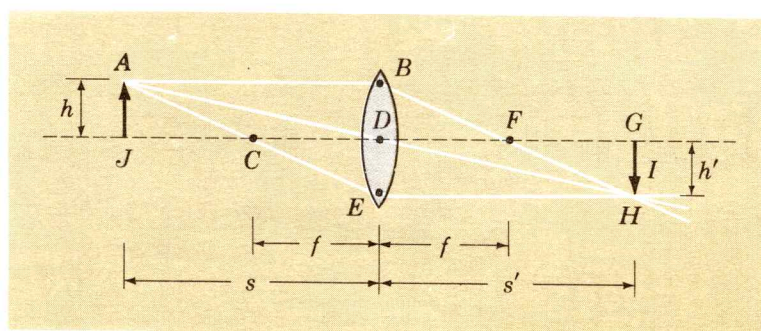


FIG. 31-26. Relaciones geométricas entre la distancia *s* del objeto, *s'* de la imagen y la distancia focal *f*.

Empleando la Ec. (31-10), la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{f}{s}=\frac{s'-f}{s'}=1-\frac{f}{s'}$$

dividiendo entre f y rearreglando los términos:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s'} \qquad (31\text{-}11)$$

Esta es la fórmula* para localizar las imágenes formadas por una lente delgada. Esto puede hacerse calculando las distancias de la imagen o del objeto o pueden hacerse igualmente bien por construcción gráfica de los rayos [que es como se derivó (31-11)]. Por ejemplo, si $f = 12$ cm y $s = 15$ cm, se encontrará, ya sea en forma gráfica o por aplicación de (31-11) que $s' = 60$ cm. Además, el tamaño de la imagen es 4 veces mayor que el del objeto.

Si se pone $s = \infty$ en (31-11) se encuentra entonces que $s' = f$; esto es, que la imagen de un objeto muy distante se encuentra en el foco principal, de acuerdo con su definición. Inversamente, si $s = f$, entonces $s' = \infty$.

La imagen representada en las Figs. 31-25 y 31-26 se dice que es una imagen *real:* los rayos pasan en realidad por este lugar. Si una hoja de papel se colocara a la distancia s' de la lente se verá una imagen real enfocada en ella. La imagen estará invertida en el plano focal transversal: arriba y abajo estarán intercambiados con relación al objeto, así como a la izquierda y derecha. La Ec. (31-11) demuestra que al incrementarse s disminuye s', e inversamente, por lo que cuando el objeto se desplaza a lo largo del eje de la lente, su imagen se desplaza en el *mismo* sentido. Así, un objeto tridimensional aunque invertido en el plano transversal, *no* está invertido a lo largo del eje de la lente.

Cuando se aplica el principio de reciprocidad a las Figs. 31-25 y 31-26, los rayos invierten su sentido y sus imágenes originales se convierten en objetos y viceversa. Las dos posiciones, la de s y la de s', se dice que son puntos *conjugados*. Cuando $s = 2f$, se tiene que entonces $s' = 2f$. En ese caso especial, la lente sólo invierte al objeto, sin cambiar su tamaño.

Un cierto número de dispositivos ópticos se basan en que las lentes convergentes forman imágenes reales. El más familiar de todos es el ojo, que forma una imagen real en la retina. En este caso es fija la distancia s' de la lente del ojo a la retina; los objetos colocados a varias distancias del ojo se enfocan en la retina,

*Cuando las distancias del objeto y de la imagen se miden desde la lente, la ecuación correspondiente se dice que está en *forma gaussiana*. En la *forma newtoniana*, las distancias se miden desde el foco principal; véase Prob. 31-23.

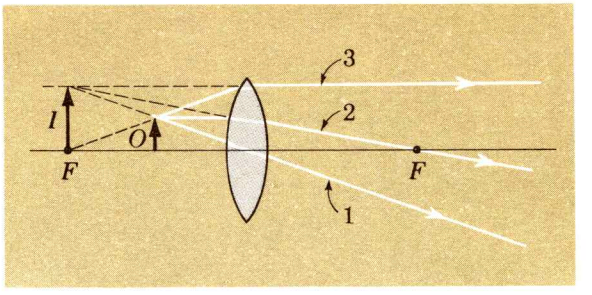


FIG. 31-27. Formación de una imagen virtual.

cuando los músculos del ojo cambian la distancia focal f de la lente del ojo, cambiando el rayo de curvatura de las superficies de dicha lente. Una cámara (fotográfica) forma una imagen real en el plano focal de la película fotográfica y un proyector, forma una imagen invertida y aumentada de una transparencia, o de una película, en la pantalla.

Consideremos ahora lo que sucede cuando se coloca un objeto más cerca de una lente convergente que el punto focal principal, como en la Fig. 31-27. Se localiza en forma geométrica la imagen dibujando exactamente como antes los mismos tres rayos. El rayo 1 que atraviesa la lente en su centro, no se desvía. El rayo 2, en un principio paralelo al eje de la lente, pasa por el punto focal lejano. El rayo 3 se dibuja en una dirección tal que después de salir del objeto, tenga la misma dirección que un rayo que salga del punto focal próximo y que pase por el ápice del objeto; por consiguiente este tercer rayo emerge de la lente paralelo al eje. Estos rayos *no* se intersectan. ¿Qué clase de imagen se forma ahora? ¿Qué es lo que ve el ojo cuando se encuentra a la derecha y mirando hacia la lente?

El ojo, (o la cámara) es ingenuo, porque interpreta que cualquier rayo que lo alcance ha viajado siempre estrictamente a lo largo de una línea recta; o dicho de otro modo, el ojo reconoce solamente la dirección *final* de los rayos que le llegan. Así, los tres rayos parecen estar originados en aquel punto a la izquierda de la lente donde se intersectan sus prolongaciones. Los rayos parecen provenir de la llamada imagen virtual I. Si una hoja de papel se coloca en I *no* puede verse imagen en él. Pero un ojo que observe el objeto a través de la lente lo verá como una imagen *virtual, derecha* y *aumentada*. En esta forma, cuando un objeto está más cerca de la lente que el foco, la lente convergente es una *lente de aumento*, o una *lupa*.

La Ec. (31-11) de la lente, puede emplearse para calcular la distancia s' de la imagen virtual, si s' se toma como negativa, como puede comprobarse analizando la geometría de la Fig. 31-27 en la forma que se analizó la de la Fig. 31-26. Por ejemplo, si $f = 40$ cm y el objeto está colocado a $s = 30$ cm, se encuentra con (31-11) que $s' = -120$ cm; además, de (31-10), se encuentra que el tama-

ño de la imagen virtual es 120/30 = 4 veces mayor que el objeto.

Hasta ahora se han considerado las lentes convergentes, que son más gruesas en el centro que en los bordes (cuando el índice de refracción de su material, es mayor que el del medio que lo rodea). Consideremos ahora el caso inverso, una lente delgada con superficies esféricas, pero más delgada en su centro que en sus bordes, como se representa en la Fig. 31-28. Esta lente es *divergente* porque incrementa el grado de divergencia de los rayos y de los frentes de onda que la atraviesan. Los rayos incidentes paralelos divergen al atravesar la lente y parecen provenir de una fuente puntual en el foco principal del mismo lado de la lente (Fig. 31-28*a*). De modo equivalente, las ondas planas incidentes emergen de una lente divergente como frentes de onda esféricos y divergentes (Fig. 31-28*b*). Se puede usar de nuevo (31-11) para relacionar la distancia de la imagen, la distancia del objeto y la distancia focal, si se toma como *negativa* la distancia focal de la lente divergente. La distancia s del objeto es, como antes, tomada positiva. De nuevo existen dos focos principales, uno de cada lado de la lente, y el enfoque de los rayos paraxiales es independiente del ángulo de inclinación de la lente o de la cara de la lente vuelta hacia el objeto.

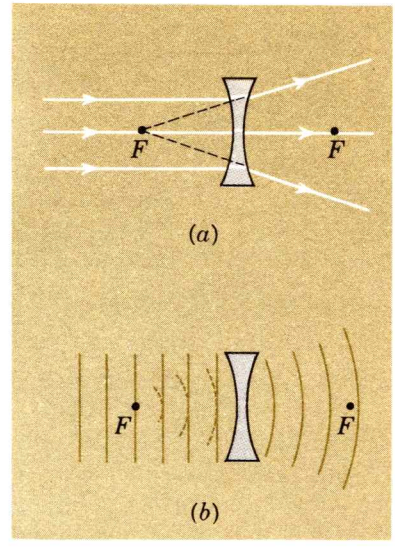


FIG. 31-28. Divergencia de (*a*) los rayos y (*b*) los frentes de onda, originados por una lente divergente.

Se encuentra la imagen producida por una lente divergente, por medio de la misma construcción de rayos realizada anteriormente; véase la Fig. 31-29. El rayo 1 pasa sin desviarse por el centro de la lente. El rayo 2, paralelo al eje de la lente, emerge como si se originara en el foco principal cercano F. El rayo 3 es "apuntado" hacia el foco principal lejano y es, por tanto, desviado de modo que emerge paralelo al eje. Después de emerger de la lente los rayos parecen divergir de la imagen I, que es menor, derecha y virtual. En realidad, una lente divergente *siempre* forma una imagen *virtual* de un objeto real. Que I es virtual resulta porque la distancia s' de la imagen, calculada con (31−11), resulta negativa. Por ejemplo, con una lente divergente con $f = -10$ cm y con un objeto a $s = 15$ cm se encuentra $s' = -6$ cm.

Hemos tratado con lentes comunes, las formadas por materiales ópticamente densos como el vidrio, y propuestas para emplear-

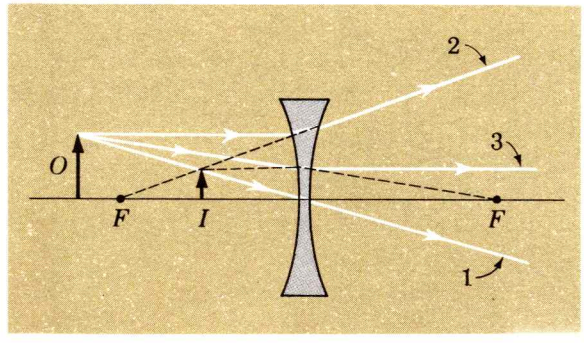


FIG. 31-29. Formación de la imagen por una lente divergente.

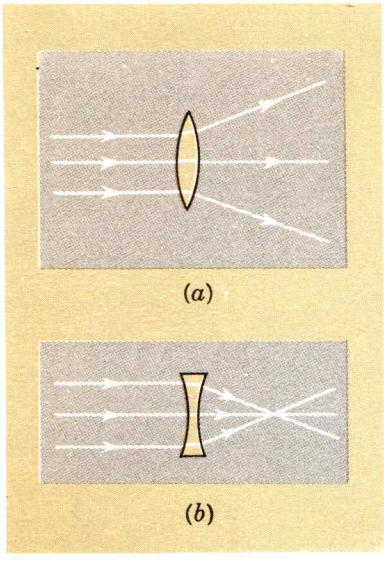


FIG. 31-30. Lentes sumergidas en un medio ópticamente más denso: (*a*) una lente divergente y (*b*) una lente convergente.

las con luz visible, pero las lentes pueden construirse de materiales ópticamente ligeros; por ejemplo, la Fig. 31-30 representa lentes convergentes y divergentes formadas por cavidades en el interior de un medio de mayor densidad óptica. En este caso la lente convergente tiene un par de superficies cóncavas y la divergente un par de superficies convexas.

El término *lente* no está restringido a dispositivos que enfocan la luz visible; también existen lentes acústicas y lentes de microondas. En realidad se refiere a arreglos de campos magnéticos y eléctricos, capaces de enfocar un haz de partículas cargadas, respectivamente como lentes magnéticas y electrostáticas.

31—9 INSTRUMENTOS OPTICOS

Para trazar los rayos a través de dos o más lentes sucesivas, se emplea el procedimiento siguiente: considerar la imagen obtenida por la primera lente como objeto para la segunda lente, considerar la imagen dada por la segunda lente como un objeto para la tercera y así sucesivamente.

La combinación de lentes representada en la Fig. 31-31, ilustra el microscopio compuesto. Aquí el objeto O_1 se coloca cerca del foco principal f_1 de la lente objetiva; la imagen I_1 es mayor y real. El ocular se emplea para formar una imagen virtual I_2 aún más aumentada. Sin la ayuda de un istrumento óptico, pueden verse más claramente los objetos y tener una imagen en la retina de mayor tamaño, llevando al objeto tan cerca del ojo como lo permitan sus propiedades de enfoque, por lo general a unos 25 cm del ojo. Por consiguiente, un microscopio es más efectivo si la imagen final I_2 se encuentra a 25 cm del ojo.

La Fig. 31-32 representa una combinación de dos lentes convergentes. La lente 1 forma una imagen real e invertida I_1, del objeto O_1. La imagen I_1 se vuelve el objeto O_2 para la lente 2. En el arreglo particular indicado ahí, el objeto O_2 queda justamente dentro del punto focal de la segunda lente. En consecuencia, la

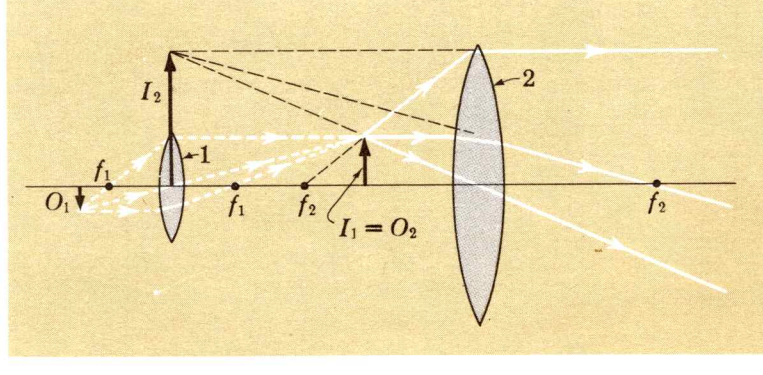


FIG. 31-31. Un microscopio compuesto.

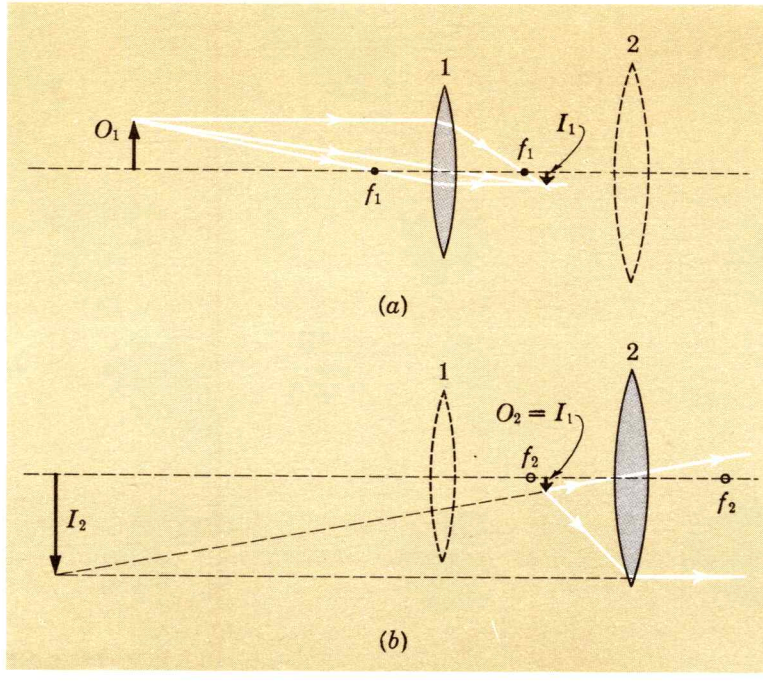


FIG. 31-32. Formación de la imagen (*a*) por la lente 1, seguida (*b*) por la lente 2 en un anteojo astronómico.

imagen I_2, formada por la lente 2, es virtual, encontrándose a la izquierda de la lente 2. Nótese que los rayos escogidos para encontrar la imagen I_1, *no* continúan hasta la segunda lente; en su lugar, se escogen nuevos rayos cuyas desviaciones al atravesar la lente 2 se trazan como se indican en la Fig. 31-27. Nótese también que, con el propósito de realizar la contrucción geométrica, se supone que las lentes tienen un tamaño transversal infinito.

El *telescopio astronómico,* corresponde muy aproximadamente al arreglo de lentes de la Fig. 31-32. El objeto O_1 está, por supuesto, muy distante de la lente 1; su imagen real I_1 se examina con la lente 2; esta lente actúa como lente de aumento, obteniéndose con ella una imagen muy aumentada que se forma a gran distancia de la lente. La lente 1 (proxima al objeto) se conoce como el *objetivo;* la lente 2 (próxima al ojo) se denomina el *ocular.* Para un objeto O_1 a gran distancia del anteojo y con una imagen final I_2, también a gran distancia, resulta claro que la distancia total entre el objetivo y el ocular es aproximadamente igual a $f_1 + f_2$: esta es la mínima longitud del anteojo.

RESUMEN

En la óptica de rayos, u óptica geométrica, se ignoran los efectos de difracción y se trata sólo con los cambios de dirección de los rayos en las interfases, debidas a la reflexión y a la refracción. En la reflexión,

$$\theta_1 = \theta_1' \tag{31-1}$$

Y en la refracción (ley de Snell):

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2 \tag{31-2}$$

donde los índices de refracción n_1 y n_2 valen:

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \qquad \text{y} \qquad v_2 = \frac{c}{n_2} \tag{31-4}$$

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n_{12}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tag{31-5), (31-6}$$

La refracción se debe al retardo de las ondas en un medio de cierta densidad óptica.

Un rayo queda del todo reflejado internamente cuando no puede tener lugar la refracción, estando dado el ángulo crítico θ_c en el medio 2 por

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_1}{n_2} \tag{31-9}$$

La ecuación para una lente delgada es;

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \tag{31-11}$$

donde las distancias del objeto y la imagen s y s' y la distancia focal f se miden desde el centro de la lente. Las convenciones de signos son las siguientes:

$f > 0$	Lente convergente
$f < 0$	Lente divergente
$s > 0$	Objeto real
$s < 0$	Objeto virtual
$s' > 0$	Imagen real
$s' < 0$	Imagen virtual

PROBLEMAS

31-1. Muchos instrumentos sensibles, que implican la medida de ángulos pequeños, como en el péndulo de torsión en el experimento de Cavendish, tienen un espejo montado en el objeto y experimentan un desplazamiento angular. Demostrar que, si el espejo gira un ángulo θ, un rayo de luz reflejado por el espejo y que proviene de una fuente fija de luz, gira un ángulo 2θ.

31-2. Dos espejos planos hacen un ángulo θ, como en la Fig. P31-2. Encontrar las imágenes del objeto O, si el ángulo θ es igual a (*a*) 90°, (*b*) 60° y (*c*) 30°.

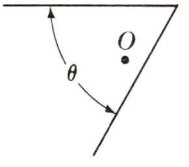


FIG. P31-2

31-3. Calcular la altura mínima de un espejo colocado en un plano vertical, que permita a una persona de 1.8 metros de altura verse de la cabeza a los pies.

31-4. Calcular con qué ángulo, con relación a la normal, debe incidir un rayo de la interfase entre dos medios con índices de refracción n_2 y n_1 para que el ángulo reflejado y el transmitido sean perpendiculares.

31-5. Un nadador, que nada bajo el agua, mira hacia la superficie del agua y ve que la luz que le llega a su ojo hace un ángulo de 45° con respecto a la superficie. ¿Cuál es el ángulo entre el rayo en el aire y la superficie del agua? (Para el agua, $n = 1.33$.)

31-6. Una luz de 4500-Å de longitud de onda llega por un medio haciendo un ángulo relativo a la normal de 60° y pasando a un segundo medio donde el ángulo que hace el rayo con relación a la normal es de 30°. ¿Cuál es el índice de refracción relativo del segundo medio con respecto al primero?

31-7. Un hombre que está de pie a un lado de una alberca vacía no puede ver su fondo. (Véase la Fig. P31-7). Calcular la profundidad del agua ($n = \frac{4}{3}$) que debe agregarse a la alberca si el hombre, permaneciendo en su posición, puede ver la arista del fondo.

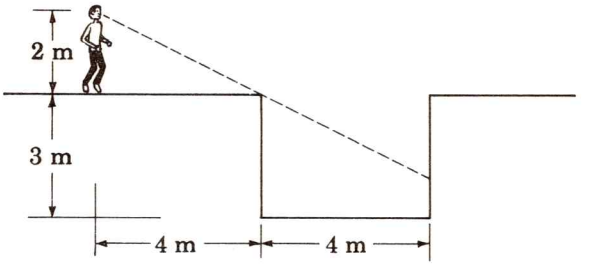


FIG. P31-7

31-8. La ley de Snell (sen θ_1/sen θ_2 = una constante) puede derivarse de un modelo de partículas de la luz, en donde se supone que las partículas luminosas se mueven a velocidad constante dentro de cualquier medio uniforme y que la componente de la velocidad de la partícula, paralela a la interfase entre los dos medios refractivos, permanece sin cambio (Véase Fig. P31-8). Nótese que $v_{t1} = v_{t2}$. (*a*) Derivar la ley de Snell del modelo de partículas y demostrar que sen θ_1/sen $\theta_2 = v_2/v_1$, donde v_1 y v_2 son, respectivamente, las velocidades de la partícula en los medios 1 y 2. (*b*) Demostrar que, de acuerdo a este modelo de partículas, la velocidad de propagación de la luz en un medio refractivo es mayor que en el vacío en contradicción con el resultado experimental.

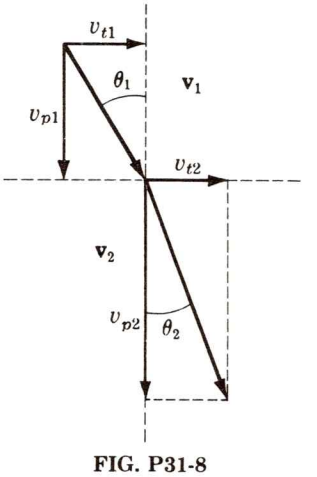


FIG. P31-8

31-9. En el siglo I a. de J. C. Ptolomeo conocía la ley de Snell en la forma aproximada θ_1/θ_2 = constante. Suponiendo que el índice relativo de refracción sea 1.50, calcular qué porcentaje de error habrá en el

ángulo de refracción si se usa la forma aproximada de la ley de Snell en los ángulos de incidencia de (*a*) 20° y (*b*) 40°.

31-10. Un rayo de luz incide en un prisma de 45° -45° -90° con un índice de refracción de 1.50, como se indica en la Fig. P31-10. ¿Cuánto vale el ángulo ϕ?

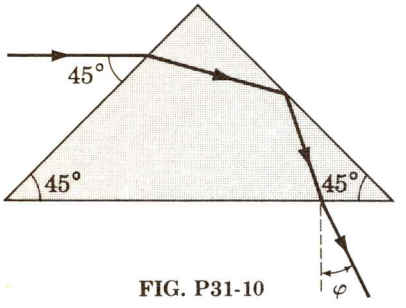


FIG. P31-10

31-11. Un rayo de luz pasa por varias placas paralelas de diferentes índices de refracción. Supóngase que el orden de los materiales se cambia; por ejemplo, 2,1,4,3, en lugar de 1,2,3,4. Supóngase, además, que *no* hay reflexión total interna. Demostrar que *no* cambia el ángulo del rayo emergente.

31-12. La "profundidad aparente" de un cuerpo sumergido en un medio refractivo ópticamente denso, es menor que la verdadera profundidad del cuerpo, cuando se ve en forma directa desde arriba. Demostrar que la profundidad aparente d' está relacionada con la verdadera profundidad d, por la ecuación $d' = d/n$, donde n es el índice relativo de refracción del medio en donde el cuerpo está sumergido. (Véase la Fig. P31-12.) Se puede suponer que los ángulos son tan pequeños que el seno del ángulo puede reemplazarse por el ángulo mismo.

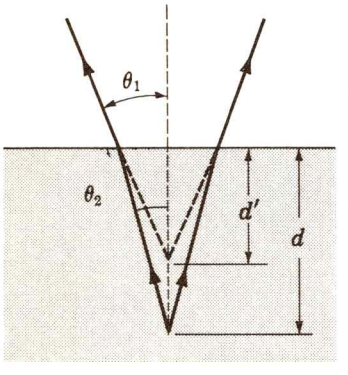


FIG. P31-12

31-13. La profundidad aparente de un cuerpo dentro de un medio refractivo es más pequeña que su verdadera profundidad por el factor n, donde n es el índice de refracción del medio ópticamente más denso (Prob. 31-12). Un microscopio se enfoca en una marca que está en la superficie superior del fondo de un pequeño recipiente; entonces, se le agrega agua hasta una profundidad de 3.00 mm. Calcular qué distancia debe elevarse la lente del microscopio para enfocar de nuevo la marca.

31-14. La Fig. P31-14 representa dos rayos paralelos 1 y 2, incidentes en un prisma de 45°, 45° y 90°. El índice de refracción del vidrio es de 1.5. Trazar dos rayos para demostrar que éstos emergen invertidos del prisma. ¿Qué uso práctico tiene un prisma de este tipo?

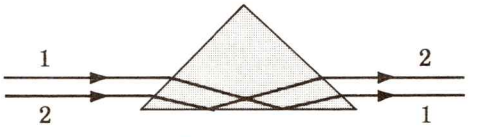


FIG. P31-14

31-15. Un pez al mirar hacia arriba de la interfase agua-aire, observa un círculo transparente circular, rodeado por un espejo. Calcular el radio de este círculo cuando el ojo del pez está a 1.00 m de la superficie del agua. (Para el agua, n vale 1.33.)

31-16. El ángulo que se desvía un rayo pasando por un prisma depende, por supuesto, del ángulo de incidencia del rayo con respecto a la primera superficie, el ángulo del prisma y su índice de refracción. Sin embargo, existe un ángulo de incidencia donde el ángulo de desviación es δ mínimo. (Véase Fig. 31-11.) Demostrar que en la desviación mínima los ángulos de incidencia y de salida son iguales con relación a las superficies frontal y posterior del prisma. (*Sugerencia:* aplicar el principio de reciprocidad.)

31-17. Cuando un rayo incide en un prisma con un ángulo ϕ tal que se produzca desviación mínima, los rayos incidente y emergente hacen un mismo ángulo con respecto a la superficies del prisma (Prob. 31-16). Demostrar que si el rayo emergente se desvía un ángulo δ en las condiciones de desviación mínima, el índice de refracción del prisma está dado por $n = \text{sen}\,[(\delta + \phi)/2]\,\text{sen}\,(\phi/2)$; véase Fig. 31-11. Esto proporciona un medio directo de medir el índice de refracción del prisma.

31-18. Las leyes de la reflexión y de la refracción pueden considerarse como ejemplos particulares de un notable principio general llamado el principio del tiempo extremo o *principio de Fermat,* propuesto primero por P. Fermat en 1650. De acuerdo con este principio la trayectoria que sigue un haz luminoso difiere de otras trayectorias alternas concebibles en que el camino real es el de *tiempo extremo.* (*a*) Demostrar que la ley de la reflexión puede deducirse del principio de Fermat. (*b*) Demostrar que la ley de Snell (la ley de la refracción) puede deducirse del principio de Fermat, empleando la Fig. P31-18. (Esta figura representa un rayo que parte del punto A, en el medio 1, incide en la interfase con el medio 2 en el punto B, siguiendo después hasta el punto C. Los puntos A y C, respectivamente a las distancias h_1 y h_2 de la interfase, pueden considerarse como fijos, mientras que el punto B se considera a una distancia x del punto D.) (*c*) Demostrar que el tiempo total de recorrido, de A a B y a C, vale:

$$t = \frac{(h_1 + x^2)^{1/2}}{c/n_1} + \frac{(h_2^2 + (L-x)^2)^{1/2}}{c/n_2}$$

(*d*) Demostrar que $n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$ tomando la derivada para encontrar el tiempo mínimo de recorrido.

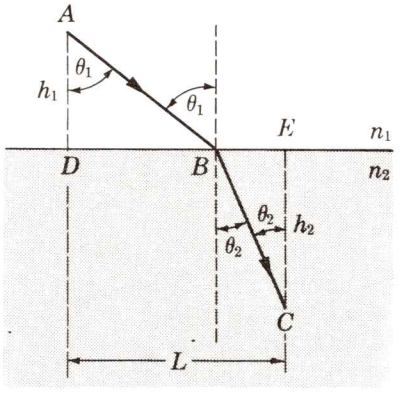


FIG. P31-18

31-19. Una lente convergente delgada y sencilla, tiene una distancia focal de 40 cm. Encontrar la imagen y describir su naturaleza (real o virtual) para un objeto colocado a las siguientes distancias de la lente: (*a*) 120 cm, (*b*) 80 cm, (*c*) 40 cm y (*d*) 20 cm.

31-20. Una sencilla lente divergente delgada tiene una distancia focal de 40 cm. Encontrar la imagen y describir su naturaleza (real o virtual) para un objeto colocado a las siguientes distancias de la lente: (*a*) 120 cm, (*b*) 80 cm, (*c*) 40 cm y (*d*) 20 cm.

31-21. Demostrar que la distancia mínima entre un objeto y su imagen real, formada por una lente convergente delgada de distancia focal f, es $4f$.

31-22. Un radiador puntual e isotrópico de luz se encuentra en $x = 0$ en el eje de una lente convergente de 20 cm de distancia focal, que se encuentra en $x = 40$ cm. La abertura de la lente tiene un radio de 5.0 cm. Construir una gráfica de la intensidad de la radiación (en unidades arbitrarias) como una función de x, en el tramo de $x = 0$ a $x = 80$ cm.

31-23. La Ec. (31-11) está en la forma *gaussiana* de la ecuación general de las lentes; las distancias s y s' del objeto y de la lente, se miden con relación al centro de la lente delgada. Demostrar que si las distancias s y s' del objeto y de la imagen, se miden *desde los dos focos principales,* la ecuación de las lentes puede escribirse así: $SS' = f^2$, que es la forma *newtoniana* de la ecuación de las lentes.

31-24. Un objeto y su imagen real se encuentran a 50 cm de distancia. (*a*) Encontrar las dos posiciones de una lente delgada, con relación al objeto, una de las cuales producirá una imagen de doble tamaño que el objeto. (*b*) ¿Cuál es la distancia focal del lente?

31-25. Una cierta persona puede ver más claramente a los objetos colocados a 25 cm de sus ojos, cuando usa anteojos convergentes con una distancia focal de 1.00 m (+ 1 dioptría). ¿Dónde estarán los objetos que dicha persona verá con más claridad sin emplear sus anteojos?

31-26. Una película fotográfica, de 8 mm de ancho, se proyecta en una pantalla colocada a 4.0 m de distancia, siendo el ancho de la imagen proyectada de 1.0 m. ¿Cuál será la distancia focal de la lente de proyección?

31-27. Dos lentes delgadas, convergentes e idénticas, cada una de 40 cm de distancia focal, están separadas 20 cm. Un objeto se coloca a 80 cm de la primera lente. Encontrar dónde está la imagen final con relación a la posición del objeto.

31-28. Encontrar a qué distancia de una lente convergente de distancia focal f, debe colocarse un

objeto para que su imagen tenga el doble de su tamaño, si la imagen (*a*) es real y (*b*) virtual.

31-29. Demostrar que la longitud focal equivalente f de una combinación de lentes formada por dos lentes delgadas en contacto, está dada por $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$, donde f_1 y f_2 son las distancias focales de las dos lentes.

31-30. Encontrar qué distancia debe moverse la lente de una cámara, cuya distancia focal es de 50 mm, cuando se enfoca desde un objeto colocado en el infinito a uno colocado a 2.0 m.

31-31. Demostrar que, en general, si una lente o combinación de lentes, forma una imagen virtual de un objeto real, entonces un objeto virtual en el lugar de esta imagen, formará una imagen real.

31-32. Debe construirse un telescopio astronómico, cuyo ocular tiene una distancia focal de 1.5 cm y el aumento del telescopio debe ser de 100. (*a*) Calcular la distancia focal del objetivo. (*b*) ¿Cuál será el largo total del anteojo astronómico?

31-33. (*a*) La distancia focal de una lente convergente sencilla para la luz verde ¿será mayor o menor que la distancia focal para la luz azul? (*b*) ¿Cuál color tiene la mayor distancia focal en una lente divergente sencilla?

31-34. Supóngase que una lupa de f centímetros de distancia focal, se coloca junto al ojo cuando se observa un objeto colocado cerca del punto focal principal. La imagen formada por la lupa está a 25 cm del ojo, en el llamado punto próximo de visión distinta. Demostrar que el aumento angular de esta lupa vale $25/(f - 1)$.

Capítulo

32

OPTICA ONDULATORIA: INTERFERENCIA Y DIFRACCION

El fenómeno de interferencia y difracción proviene de la superposición de ondas de dos o más fuentes coherentes. Investigaremos las relaciones geométricas que gobiernan la diferencia de fases entre las ondas de dos (o más) fuentes y, en consecuencia, obtener la intensidad de la onda resultante.

32—1 SUPERPOSICION E INTERFERENCIA DE ONDAS

La perturbación ondulatoria resultante, producida por dos o más ondas se rige por el *principio de superposición* (Sec. 15-2): para encontrar el efecto neto de ondas separadas, se suman o superponen las perturbaciones componentes en cada instante del tiempo y en cada punto del espacio. Así, el campo eléctrico resultante, originado en dos ondas electromagnéticas vale $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, donde los campos eléctricos $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ de las ondas individuales se superponen ahora como vectores.* El principio de superposición implica entonces que para encontrar la onda resultante de dos fuentes, deberá primero encontrarse la perturbación ondulatoria de cada fuente por separado y entonces sumar estas perturbaciones.

Una consecuencia importante del principio de superposición es el siguiente: si dos ondas se encuentran, pasando ambas por la misma región del espacio al mismo tiempo, cada onda emerge de su "colisión" como si la segunda onda no hubiera existido. El avance de una onda es del todo independiente de la presencia de las otras ondas (véase la Fig. 32-1); en realidad la validez del principio de superposición se ha establecido porque las ondas que "interfieren" no actúan entre sí. Por ejemplo, cuando un observa-

*Se podría escoger igualmente el campo magnético resultante **B**. Sin embargo, es una convención emplear el campo eléctrico, más bien que el magnético, para describir la onda electromagnética.

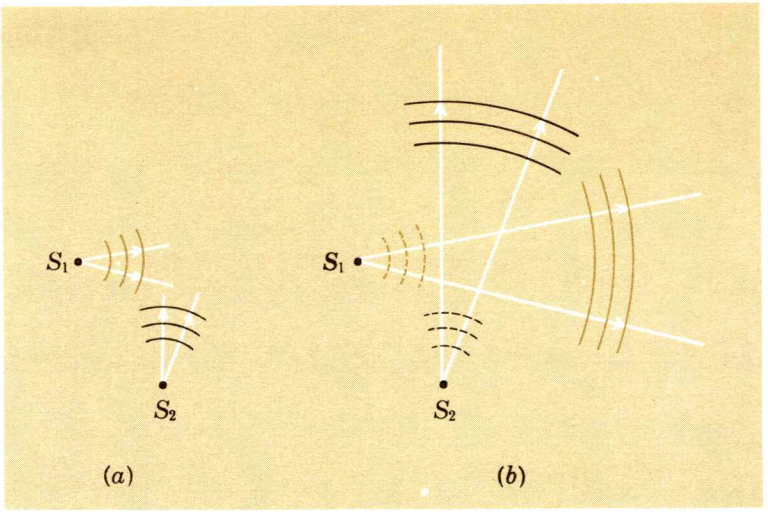


FIG. 32-1. Cuando tiene lugar el principio de superposición, las ondas generadas por dos fuentes independientes (*a*) no interaccionan (*b*).

dor mira a un objeto que emite o refleja luz, su percepción no es afectada en forma, color y brillo por cualquier radiación electromagnética, luminosa u otra que pase por la línea que une al observador con el objeto observado. El principio de superposición se mantiene casi exactamente para la radiación electromagnética, aunque sean grandes las intensidades de las ondas individuales.

Cuando dos o más ondas se mezclan, se dice que interfieren. Si la perturbación ondulatoria resultante en algún punto es mayor que la de cualquiera de las ondas separadas componentes, se dice que las ondas interfieren *constructivamente*. Si, por otro lado, la perturbación ondulatoria resultante es menor que la de cualquiera de las perturbaciones individuales, se dice que las ondas exhiben *interferencia destructiva*. Aquel punto del espacio en donde las ondas componentes siempre tengan interferencia destructiva, con una perturbación ondulatoria resultante igual a *O*, en *todos* los instantes, se llama un *nodo*.

En lo que sigue de este capítulo se tratará sobre todo con la interferencia de dos fuentes puntuales que radian ondas sinusoidales electromagnéticas de la misma frecuencia. Aunque nos concentraremos en los campos eléctricos y en la intensidad de las ondas de radio y en la luz visible, deberá comprenderse que el análisis se aplica igualmente bien para cualquier otro tipo de ondas que se propaguen en dos y en tres dimensiones. Por ejemplo, para aplicar la teoría a las ondas sonoras basta reemplazar el vector del campo eléctrico por el escalar de diferencia de presión.

Recuérdese que el promedio temporal de la intensidad de una onda continua sinusoidal y electromagnética está dado por

$$I = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 \qquad \text{(30-36), (32-1)}$$

donde E_0 es ahora la amplitud del campo eléctrico *resultante*. La intensidad es proporcional al *cuadrado* del campo eléctrico resultante. Así, para encontrar el diseño de intensidad de dos radiadores, *primero* se superponen las ondas individuales para encontrar E_0 y entonces se eleva al cuadrado E_0 para encontrar I. Cuando se trata de dos fuentes idénticas que oscilan de continuo, *no se pueden* combinar las intensidades de las dos fuentes; esto es, en general I *no* es igual a $I_1 + I_2$. En resumen, se superponen las funciones de la onda, no las intensidades.

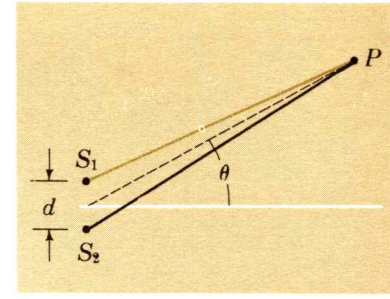


FIG. 32-2. Dos fuentes puntuales, S_1 y S_2, cuya radiación resultante se observa en el punto P.

32—2 INTERFERENCIA DE DOS FUENTES PUNTUALES

Consideraremos primero el diseño de radiación de dos antenas idénticas de radio S_1 y S_2, que oscilan en fase con la misma frecuencia f y por tanto radian ondas de longitud $\lambda = c/f$; por ejemplo, dos osciladores eléctricos dipolares (Sec. 30-7) orientados en sentido perpendicular al plano del papel, como se indica en la Fig. 32-2. Entonces, considerando la radiación emitida en el plano del papel, cada fuente radia uniformemente en todas direcciones, pero *por separado;* la intensidad de cada fuente depende sólo de la distancia a la fuente y el campo eléctrico es perpendicular al plano del papel. Se desea encontrar la intensidad resultante I en cualquier punto P (debida a las *dos* fuentes) como una función del ángulo θ medido desde el bisector perpendicular a la línea que une a S_1 con S_2. El punto P está a mucho mayor distancia de las fuentes que la distancia d que la separa. Nuestra tarea es, primordialmente, encontrar la amplitud resultante E_0 en cualquier punto P.

¿Qué es lo que influye sobre E_0? Se pueden encontrar con facilidad los factores significativos observando un ejemplo sencillo; considérese la Fig. 32-3*a*. Existen dos fuentes que oscilan *en fase* entre sí y que se encuentran a la distancia de una semilongitud de onda ($d = \lambda/2$). En el punto P_1 (donde $\theta = 0$) las longitudes de las trayectorias S_1 y S_2 son *iguales;* en consecuencia el campo eléctrico E_0 en dicho punto, es simplemente la suma de E_1 y de E_2, las amplitudes del campo eléctrico en P_1, que provienen de las dos fuentes individuales. Puesto que E_1 y E_2 están en fase en P_1, habrá una interferencia constructiva en dicho punto. Es útil indicar las diferencias de fase de campos que oscilan por separado, por medio de vectores. Se ve entonces, que en P_1 el campo eléctrico resultante es el *doble* del que proviene de una sola fuente y, como la intensidad promedio es proporcional a E_0^2, la intensidad en P_1 es *cuatro* veces mayor que la de una sola fuente.

Considérese ahora el punto P_2 ($\theta = 90°$) en la Fig. 32-3*a*. En este caso las trayectorias difieren en $\frac{1}{2}\lambda$, la onda que proviene de S_2 recorre $\frac{1}{2}\lambda$ más que la que proviene de S_1. Aunque las fuentes oscilan en fase, los campos eléctricos de S_1 y de S_2 están *defasados* (o fuera de fase) en 180° en P_2. Si P_2 está lejos de las dos fuentes, cada uno de los campos eléctricos es en esencia de la misma

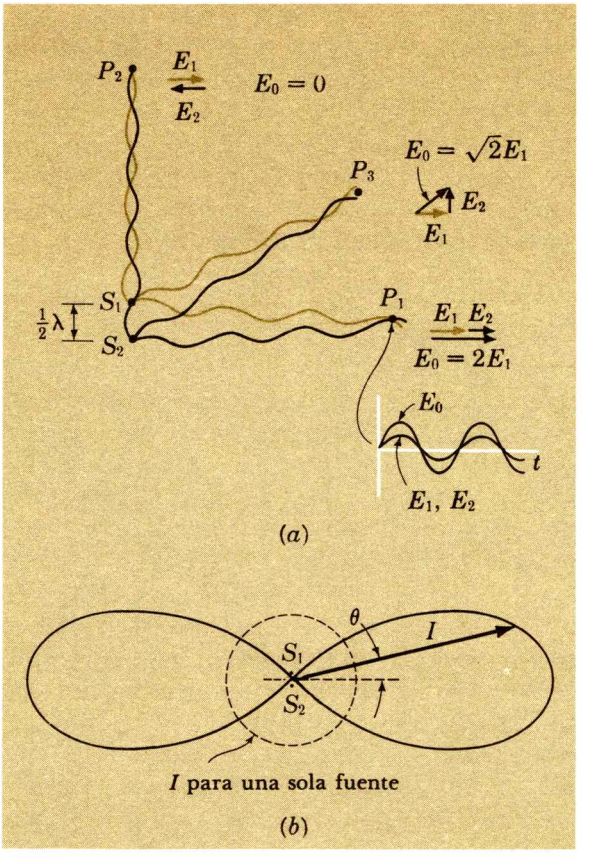


FIG. 32-3. (*a*) Radiación de dos fuentes puntuales idénticas que oscilan en fase y a la distancia de $\frac{1}{2}\lambda$. (*b*) El diseño de radiación.

magnitud, y habrá una interferencia destructiva completa en dicho punto, en donde la intensidad valdrá cero.

La situación en el punto P_3 con $\theta = 30°$, es algo más complicada. La diferencia de trayectoria es d sen $\theta = (\frac{1}{2}\lambda)$ (sen 30°) $= \frac{1}{4}\lambda$. Los campos eléctricos en *el punto* P_3 están defasados en 90°. Esto se puede simbolizar dibujando a E_1 y a E_2 como vectores también defasados en 90°. La amplitud resultante del campo eléctrico es $\sqrt{2}E_1$ y la intensidad es proporcional a $(\sqrt{2}E_1)^2 = 2E_1^2$. Así, para $\theta = 30°$, la intensidad promedio es el doble de la que proviene de un único radiador.

Podríamos calcular rápidamente la intensidad en otros puntos a las mismas distancias de los osciladores, para encontrar I como una función de θ. Los resultados se pueden representar en un diagrama polar, poniendo la intensidad I como una función de θ, como en la Fig. 32-3*b*. En esencia la radiación electromagnética se radia entre las direcciones $\theta = 0°$ y $\theta = 180°$, siendo nula en sentido perpendicular. El diseño de radiación de dos antenas de radio se dice que está formada de dos *lóbulos*. Si las dos antenas están exactamente en el mismo lugar, más bien que separadas, el

diseño de radiación sería un círculo; la interferencia entre dos fuentes, aunque no cambie a la energía radiada total, redistribuye esta energía en el espacio.

En general, el tiempo promedio de la intensidad I es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo resultante E_0, y E_0 depende de la *diferencia de fase* ϕ entre las dos ondas incidentes en el *punto de observación P*. La diferencia ϕ de fase depende, a su vez, de (1) la *diferencia de fase intrínseca* Φ entre las fuentes, esto es, la diferencia de fase entre las dos fuentes puntuales oscilantes y (2) la diferencia entre las longitudes de las trayectorias Δr de los dos puntos hasta P.

Esto es lo difícil y lo fácil de la interferencia. Es sencillamente un problema de geometría el encontrar las diferencias de trayectoria de dos o más osciladores, hasta el punto en donde se desea encontrar la intensidad.

Supóngase que dos fuentes puntuales S_1 y S_2, de la Fig. 32-2 se encuentran a una distancia arbitraria d y que estas fuentes oscilan *en fase* a la misma frecuencia $f = c/\lambda$. La intrínseca diferencia de fase Φ es entonces cero; ϕ, la diferencia de fase en el punto de observación, se relaciona con la diferencia de trayectoria Δr, por:

$$\frac{\text{Diferencia de Fase (en el punto de observación)}}{2\pi} = \frac{\text{Diferencia en trayectorias}}{\lambda}$$

lo que puede escribirse:

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta r}{\lambda} \tag{32-2}$$

Se supone que el punto P está muy lejos de S_1 y S_2, comparada con d, que los dos rayos que llegan a P hacen el mismo ángulo θ con respecto al bisector perpendicular de la línea que une a S_1 y a S_2. De la geometría de la Fig. 32-4, la diferencia de trayectorias valdrá entonces

$$\Delta r = d \operatorname{sen}\theta \tag{32-3}$$

Como (32-2) demuestra, la diferencia de fase en P es cero (o un múltiplo entero de 2π) y hay una interferencia constructiva si la diferencia de trayectorias, cualquiera que sea, es un múltiplo entero de la longitud de onda; esto es, la interferencia constructiva corresponde a $\Delta r = m\lambda$, donde $m = 0, 1, 2, \ldots$ Así, de (32-3), la dirección θ para intensidad máxima de radiación está dada por

$$\text{Máxima } I\text{: } \Delta r = m\lambda = d \operatorname{sen}\theta \qquad \text{con } m = 0, 1, 2, \ldots \tag{32-4}$$

Por otro lado cuando la diferencia de trayectorias es un múltiplo

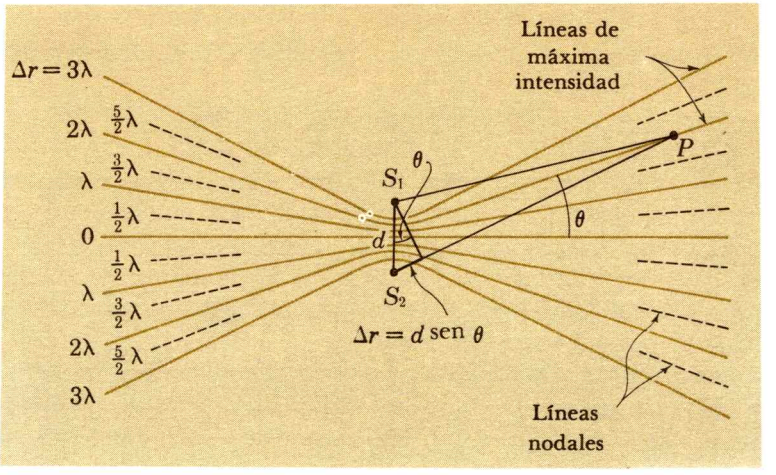


FIG. 32-4. Líneas de máxima intensidad y líneas nodales de dos fuentes puntuales que oscilan en fase.

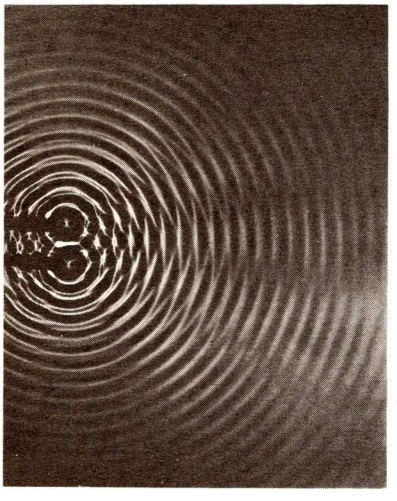


FIG. 32-5. Interferencia de dos fuentes puntuales en un tanque de ondas. (Tomado de la PSSC *Physics*, D. C. Heath y Company).

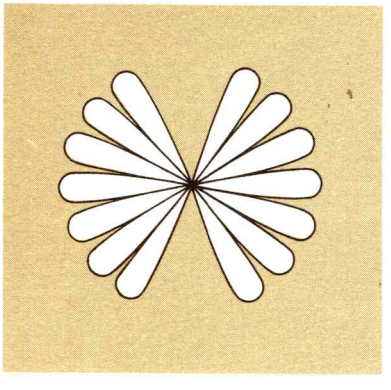


FIG. 32-6. Diseño de intensidad de dos fuentes a la distancia de $\frac{7}{2}\lambda$.

impar de $\lambda/2$, existe una interferencia destructiva, estando dadas las direcciones de la intensidad de los puntos nodales por

$$\text{Cero } I\text{: } \Delta r = m\frac{\lambda}{2} = d \text{ sen } \theta \qquad \text{con } m = 1, 3, 5, \ldots \tag{32-5}$$

En la Fig. 32-4 el punto P corresponde a una interferencia de trayectoria de 2λ y el lugar geométrico de los puntos, todos con la misma diferencia de trayectoria, define una curva de máxima intensidad. La curva es una hipérbola, ya que ésta se define como el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos puntos fijos (aquí S_1 y S_2), difieren en una constante (aquí 2λ). Las asíntotas de la hipérbola hacen un ángulo θ con la relación a la bisectriz de la línea que une a S_1 y S_2. Una serie de éstas hipérbolas localiza los puntos de máxima intensidad y un segundo grupo de hipérbolas representa las líneas de intensidad cero, o *líneas nodales:* las diferencias de trayectorias de estas curvas es un múltiplo impar de $\lambda/2$.

El diseño de interferencia de dos fuentes puntuales, que oscilan sinusoidalmente, puede demostrarse en forma notable con las ondas generadas en la superficie del agua por dos cuerpos que oscilan en sentido perpendicular a su superficie. Una fotografía de este diseño de interferencia es la Fig. 32-5.

Las variaciones de la intensidad con el ángulo pueden también representarse en un diagrama polar como en la Fig. 32-6. En ese caso las fuentes están a la distancia de $\frac{7}{2}\lambda$ y el número de lóbulos en el diseño de radiación es mayor que el de los dos lóbulos representados en la Fig. 32-3*b*.

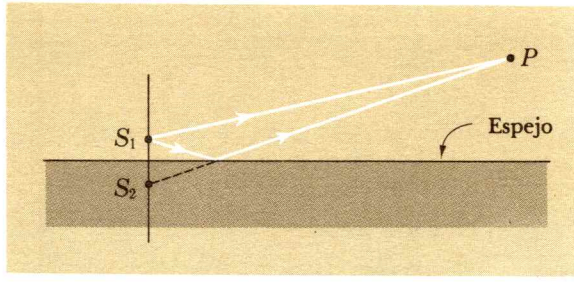


FIG. 32-7. Rayos que salen de la fuente puntual S_1 y de su imagen especular S_2.

32—3 REFLEXION Y CAMBIO DE FASE

Con un arreglo ingenioso, conocido como *espejo de Lloyd* (inventado por H. Lloyd en 1834) se pueden producir efectos de interferencia con una sola fuente de ondas, en lugar de dos. (Como veremos, es esencial tener una segunda fuente para observar efectos de interferencia con luz visible.) Se coloca la única fuente S_1, próxima a una hoja reflectora, o espejo, como se ve en la Fig. 32-7. En este caso las ondas alcanzan el punto P, una directamente a partir de S_1 y la otra después de una reflexión en el espejo. Se puede considerar el rayo reflejado como si se originara en una fuente S_2, situada abajo de la superficie del espejo y siendo la imagen especular de S_1. Se supone que P está lejos de S_1 y que todas las radiaciones que llegan al espejo se reflejan. Debía esperarse, entonces, que el diseño de intensidad resultante de la interferencia entre las ondas que llegan de la fuente real y las que llegan de su imagen especular (una fuente virtual) fueran justamente las que se encontraron antes para dos fuentes reales que oscilan en fase. Ciertamente, las diferencias de trayectoria y las relaciones geométricas no han cambiado. Sin embargo, esto no es lo que se observa; se ha encontrado que los lugares de intensidad máxima y mínima se han intercambiado: las líneas nodales son ahora líneas de intensidad máxima y a la inversa. En apariencia existe ahora un cambio adicional de fase de 180°, no atribuible a una diferencia de trayectorias. En realidad, una onda electromagnética sufre un corrimiento de *fase de 180°*, ya sea que *se refleje en un medio ópticamente más denso o en una superficie conductora.*

Para comprender lo anterior, recordemos los resultados encontrados cuando una pulsación ondulatoria transversal, que se propaga en una cuerda tensa, se refleja en la interfase (dos cuerdas de diferentes densidades); véase Fig. 32-8. Una onda reflejada en la interfase y pasando a un medio donde es menor la velocidad de la onda, recibe un defasamiento de 180°. Sin embargo, no hay defasamiento cuando una onda en un medio "lento" se refleja en la interfase que lleva a un medio "rápido". Exactamente se tiene el mismo comportamiento en las ondas electromagnéticas: un defasamiento de 180° tiene lugar cuando la onda incide de un medio menos denso y es reflejada por la superficie de un medio más

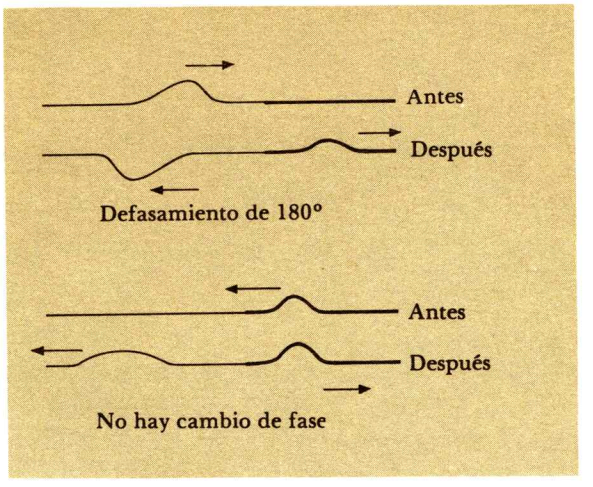


FIG. 32-8. Cambios de fase en la reflexión de una pulsación ondulatoria transversal, al llegar a una solución de continuidad en una cuerda tensa. La velocidad de la onda es mayor en la cuerda ligera que en la tensa.

denso. Por supuesto, este importante resultado puede deducirse de las ecuaciones de Maxwell. Las relaciones de fase en la reflexión están compendiadas en la Fig. 32-9. Así, cuando luz visible pasando por el aire incide en un medio de mayor densidad óptica como el vidrio, las ondas reflejadas invirten su fase; pero cuando la luz incide en una interfase yendo del vidrio al aire o hacia un medio con menor índice de refracción, no hay cambio de fase. También tienen lugar defasamientos de 180° cuando una onda electromagnética se refleja en una superficie conductora, por ejemplo, las ondas de radio incidentes en una superficie metálica o la luz en un espejo. La evidencia experimental de los campos de fase proviene de los experimentos de interferencia, como el del espejo de Lloyd.

32—4 FUENTES COHERENTES E INCOHERENTES

Se ha supuesto hasta ahora que las dos fuentes de onda que interfieren generan ondas sinusoidales en forma continua, y que cualquier diferencia intrínseca de fase entre las fuentes, se mantie-

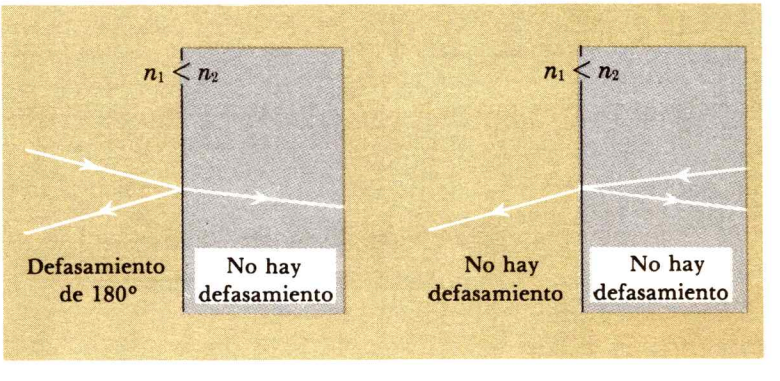


FIG. 32-9. Cambios de fase de una onda electromagnética al llegar a una interfase.

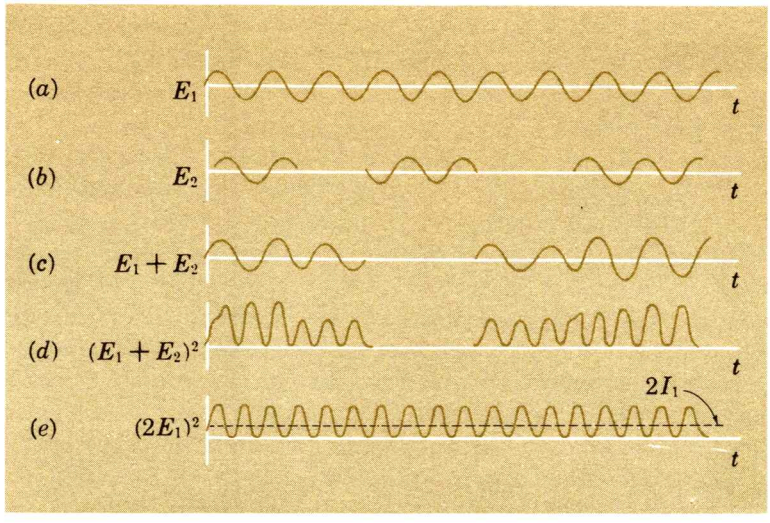


FIG. 32-10. El campo eléctrico como una función del tiempo en (*a*) un oscilador continuo, (*b*) un oscilador que emite y deja de emitir de modo irregular, (*c*) la onda resultante. El cuadrado del campo resultante en (*d*) dos fuentes incoherentes y (*e*) dos fuentes coherentes.

ne por tiempo indefinido. De seguro éste es el caso de dos osciladores eléctricos dipolares conectados a un mismo radio oscilador que funciona de continuo. Dos fuentes como esas, que mantienen una relación constante de fase, se dice que son fuentes *coherentes;* las ondas así generadas se dice que tienen *coherencia* tanto en el espacio como en el tiempo.

Supóngase ahora que una fuente oscila continuamente mientras que otra, que genera ondas de la misma frecuencia y longitud de onda, en lapsos *al azar* emite o deja de emitir. Los campos eléctricos separados E_1 y E_2, originados en las dos fuentes y el campo resultante, se representan como una función del tiempo en la Fig. 32-10. Como E_2 no es una onda *continua* monocromática, tampoco lo será la resultante $E_1 + E_2$. Tendrá la misma frecuencia que las dos fuentes, pero tanto la fase como la amplitud de la onda resultante cambian abrupta e irregularmente con el transcurso del tiempo: estas dos fuentes se dice que son *incoherentes*. Su interferencia simultánea en cualquier punto del espacio determina su intensidad, que es proporcional a $(E_1 + E_2)^2$, la cual fluctúa de manera errática con el transcurso del tiempo, lo que está en contraste con las variaciones de intensidad que en el transcurso del tiempo tienen dos fuentes coherentes, como se indica en la Fig. 32-10*e*. El promedio temporal de la intensidad resultante de muchos ciclos es proporcional a $(E_1 + E_2)^2$ en las fuentes coherentes, pero proporcional a $E_1^2 + E_2^2$ en las fuentes incoherentes.

Las posiciones de las líneas nodales y de las líneas de máxima intensidad dependen como hemos encontrado, de la diferencia intrínseca de fase entre los osciladores. Si un oscilador se defasa en 180°, las líneas nodales se convierten en líneas de máxima intensidad e inversamente. Esto es, un corrimiento en la fase ocasiona un corrimiento angular en el diseño de radiación. Así, si dos oscilado-

res no vibran de modo coherente porque uno o ambos emiten o dejan de emitir al azar, no se encontrará un diseño fijo de interferencia en el espacio, sino uno que fluctúa rápidamente y cuyo promedio temporal es independiente del ángulo θ. Otra manera de decirlo es la siguiente: la interferencia es eliminada.

Es sencillo proyectar una pareja de osciladores coherentes para las ondas sonoras conectando los altavoces a un oscilador de audio frecuencia, o en el caso de radiación electromagnética de gran longitud de onda, conectando dos antenas de radio a un circuito eléctrico oscilante, pero *no* es posible, sin tener un gran cuidado, el proyectar un par de osciladores coherentes para la luz visible. Esta se emite cuando los átomos en ciertos estados excitados de energía realizan transiciones discontinuamente a menores estados de energía, siendo la pérdida de energía del átomo la energía de la luz emitida. Un átomo típico que emite luz visible, la está radiando por solo 10^{-8} s; aunque muy corto, este tiempo es grande comparado con el periodo de oscilación para una frecuencia típica de la luz visible, que es de $\approx 10^{-15}$ s. La mayoría de las fuentes luminosas dependen del calentamiento de los átomos para producir las transiciones atómicas que eleven a los átomos a los máximos estados de energía, que es la condición previa para la radiación. La excitación de los átomos proviene del movimiento térmico desordenado. En consecuencia, la radiación por un gran número de átomos, cada uno durante unos 10^{-8} s, será también irregular, lo que equivale a decir que la radiación de la luz visible de fuentes luminosas térmicamente excitadas es *incoherente*. Por supuesto, la radiación de dos átomos emisores cualesquiera *es* coherente durante un periodo de unos 10^{-8} s, pero puesto que la intensidad de la luz visible se registra en el ojo o en una película fotográfica durante un tiempo mucho mayor que 10^{-8} s, la luz aparece esencialmente incoherente.

Las fuentes coherentes de luz visible se han vuelto disponibles con un dispositivo llamado *laser*, la sigla para *l*ight *a*mplification by the *s*timulated *e*mission of *r*adiation. (Amplificación de luz por la emisión estimulada de radiación.) Una explicación completa del funcionamiento del laser sólo es posible por medio de la teoría cuántica, por lo que lo que sigue es sólo una explicación general. En un laser los átomos se llevan a estados excitados preparándolos para la radiación, no por excitación térmica, sino por *bombeo óptico,* en donde una luz de mayor frecuencia que la emitida por los átomos es *absorbida* por un material activo (por ejemplo, átomos de cromo en el interior de un rubí). Estos átomos permanecen en estados superiores de energía durante más de 10^{-8} s. Cuando la luz, cuya frecuencia va a ser amplificada por el laser, entra al material, estimula a los átomos en estados superiores de energía a hacer transiciones a estados menores de energía, emitiéndose, por tanto, luz de la *misma* frecuencia que la radiación "estimuladora".

Las ondas luminosas emitidas por los átomos estimulados estarán en fase con las ondas que estimulan la emisión. Si las ondas emitidas están defasadas, la intensidad resultante se reduciría, resultado que violaría la conservación de energía. Por tanto, la luz emite en sincronismo —esto es, en coherencia— con la luz que estimula la emisión. Existe amplificación de la luz. En la práctica, el material activo, que ha sido bombeado ópticamente a estados excitados, se mantiene entre dos límites perfectamente reflectores, siendo la luz emitida obligada a recorrer repetidas veces, por múltiples reflexiones, el espacio entre dichos límites. La intensidad de la onda crece porque la luz presente primero ocasiona que átomos adicionales emitan luz en coherencia. La luz aprovechable —muy monocromática, unidireccional, intensa y coherente— sale del laser atravesando un espejo final *parcialmente* reflector. Las aplicaciones tecnológicas del laser derivan de que produce radiación electromagnética en la radiación visible con las propiedades de coherencia antes aprovechable sólo en las ondas de radio.

32—5 EXPERIMENTO DE YOUNG DE LA DOBLE RENDIJA

Evidentemente *no* se pueden observar fenómenos de interferencia con la luz visible usando dos fuentes separadas de luz ordinaria, pues éstas fuentes son *incoherentes*. Si se desea observar la interferencia de la luz visible se debe, aparte de emplear dos haces de laser (entrelazados en fase), dividir las ondas de una única fuente puntual en dos haces y después recombinarlos. Esto puede llevarse a cabo iluminando dos rendijas con luz de una sola fuente, como se representa en la Fig. 32-11.

Aquí la luz de la fuente S pasa por una rendija muy estrecha, para llegar después a la doble rendija. Como se hizo notar en la

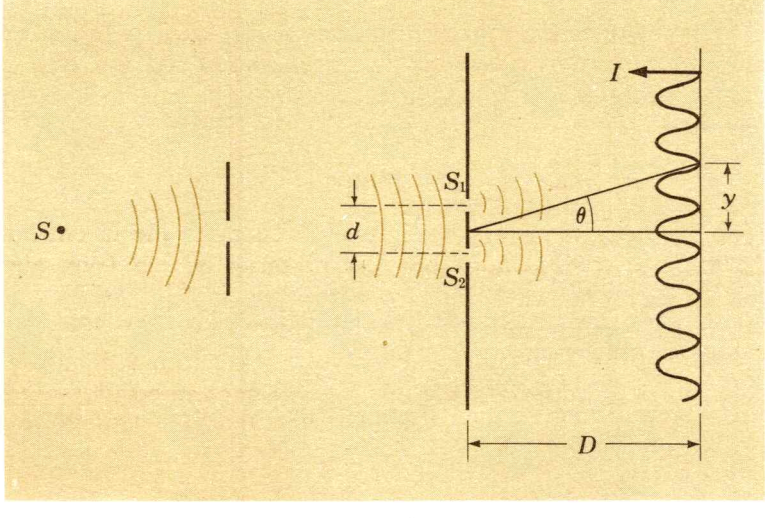


FIG. 32-11. Experimento de la doble rendija de Young. (Diagrama esquemático, *no dibujado a escala*)

Sec. 31-1, las ondas no emergen en el interior de la sombra geométrica de una rendija muy estrecha. La luz se difracta; esto es, el frente de onda se dispersa más allá de los límites geométricos que corresponden a la óptica de rayos. La difracción se considerará después en este capítulo; por ahora es suficiente decir que una única fuente de ondas ilumina a las dos rendijas. En efecto, las rendijas son fuentes de ondas coherentes, S_1 y S_2, las cuales producen el característico diseño de interferencia en una pantalla distante.

Un arreglo semejante al representado en la Fig. 32-11, fue empleado por Thomas Young (1773-1829) en 1801 en un experimento de gran significado histórico, pues la observación de Young del diseño de interferencia de la luz demostró conclusivamente que la luz está en realidad formada por ondas. En la época del experimento de Young no se sabía que la luz consiste de ondas *electromagnéticas,* pero el fenómeno de interferencia demostró que el modelo de partículas para la luz era impotente para explicar esos resultados experimentales. Si la luz consistiera en partículas que se movieran en línea recta, con seguridad no se encontraría, como se indica en la Fig. 32-11, un máximo de intensidad en el centro de la pantalla ($\theta = 0$), exactamente en el punto en donde la "sombra" de las dos rendijas haría esperar una intensidad de cero.

La Fig. 32-12 es una fotografía del diseño de interferencia de una doble rendija; nótese que la intensidad de las máximas *no* es constante sino que disminuye al alejarse del centro del diseño, donde ($\theta = 0$). Las intensidades máximas serían en esencia uniformes si las dos rendijas fueran de ancho infinitesimal, pero con rendijas de ancho finito aparecen efectos adicionales de *difracción.* Por supuesto, puesto que un laser es una fuente coherente de luz, se puede emplear un arreglo experimental sencillo para producir efectos de interferencia: no se necesita más que colocar la doble rendija en la trayectoria del haz del laser y omitir la primera rendija.

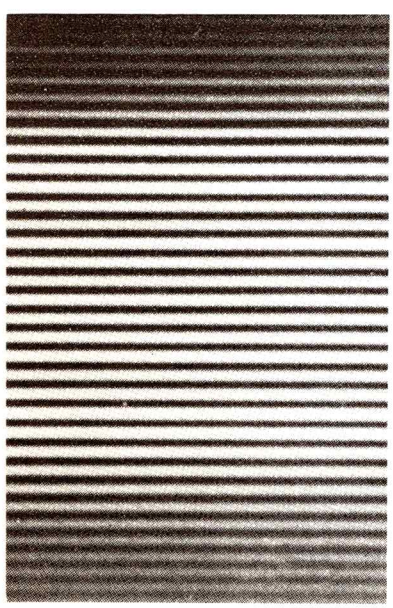


FIG. 32-12. Franjas de interferencia en el experimento de la doble rendija de Young (cortesía de Klinger Scientific Apparatus Corporation).

Las regiones alternadas brillantes y obscuras en la pantalla se denominan franjas o bandas de interferencia. La posición de las franjas brillantes de interferencia está dada por la relación ya derivada:

$$m\lambda = d \operatorname{sen} \theta \quad \text{donde} \quad m = 0, 1, 2, \ldots \quad (32\text{-}4), (32\text{-}6)$$

donde d es ahora la distancia de separación entre las dos rendijas. El ángulo θ puede medirse muy sencillamente notando que cuando las franjas de interferencia están muy próximas (digamos separadas unos pocos milímetros), como es lo típico cuando la distancia de la pantalla a las rendijas es de decenas de centímetros, como el ángulo θ es muy pequeño, se puede escribir:

$$\operatorname{sen} \theta \approx \theta \approx \frac{y}{D}$$

por lo que (32-6) puede escribirse del modo siguiente:

$$m\lambda = \frac{d}{D}\, y \qquad (32\text{-}7)$$

Todas las cantidades de la Ec. (32-7), menos λ, son directamente medibles y de esa manera se puede calcular la longitud de onda de la luz visible (que varía desde 0.0004 hasta 0.0007 mm).

Si son dados m y d, la distancia y en (32-7) es proporcional a la longitud de onda; en consecuencia, las diferentes longitudes de onda de la luz blanca producen diferentes diseños de interferencia. La franja central de interferencia es blanca (las ondas de cualquier longitud interfieren de modo constructivo con $m = 0$); para las otras franjas, la posición de las regiones brillantes depende directamente de la longitud de onda, de acuerdo con (32-7). Así, para una franja dada (una m dada) las longitudes de onda largas (por ejemplo, rojo) estarán más separadas del centro que la luz de longitud de onda más corta (violeta). Cada franja, excepto la central consiste del espectro dispersado de la luz blanca.

32—6 INTERFERENCIA EN PELICULAS DELGADAS

Los ejemplos familiares de interferencia involucran a las películas delgadas. La variedad de colores que se observan en una película de aceite sobre agua tienen su origen en la interferencia entre las ondas luminosas reflejadas por las dos superficies de la película de aceite.

Considérese el arreglo representado en la Fig. 32-13, donde un transmisor de microondas envía un haz de radiación monocromática hacia dos planos paralelos A y B, cada uno de los cuales contiene una red de alambres y se comporta como un espejo parcial. Una fracción de las ondas incidentes se refleja en cada plano. Un receptor, a una distancia relativamente grande de los reflectores, registra el campo eléctrico resultante de las ondas reflejadas de los espejos A y B, los cuales se encuentran a una distancia d. Por supuesto, los dos haces reflejados son coherentes,

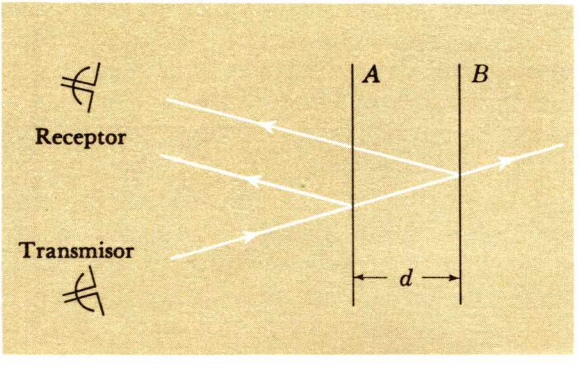


FIG. 32-13. Interferencia de una onda de radio parcialmente reflejada en las interfases A y B.

puesto que se originan en un único generador de ondas. Las ondas reflejadas interferirán en forma constructiva, si la diferencia de trayectorias (aproximadamente aquí igual a $2d$ para incidencia y reflexión casi normal) es un múltiplo entero de la longitud de onda, es decir, el receptor registra una señal cuando

$$2d = m\lambda \qquad \text{donde} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Ambas ondas reflejadas sufren un cambio de fase de 180°.

El dispositivo representado en la Fig. 32-13 es un tipo sencillo de interferómetro; este instrumento puede servir para medir longitudes de onda; y viceversa, conociendo la longitud de onda se puede medir el desplazamiento de uno de los espejos. Supongamos, por ejemplo, que los espejos A y B se encuentran separados al principio por una distancia tal, que se obtiene una interferencia constructiva. Entonces, si el espejo B se recorre una distancia de $\frac{1}{4}\lambda$, la longitud de la trayectoria total del rayo reflejado por B cambia en $\frac{1}{2}\lambda$ y su interferencia con la onda de A, en el receptor, es ahora destructiva. En la Sec. 32-7, se discutirá un interferómetro con el cual se puede medir desplazamientos de una fracción de la longitud de onda de la luz visible, esto es, de unos pocos millares de angstroms.

Considérese ahora la situación con luz visible, como se indica en la Fig. 32-14. En este caso los rayos luminosos inciden casi en sentido perpendicular a dos interfases paralelas que separan a medios cuyos índices de refracción son n_1, n_2, y n_3. Para determinar si los rayos reflejados interfieren constructiva o destructivamente, se debe tener en cuenta lo siguiente: (1) Una onda reflejada sufre un cambio de fase de 180°, con relación a la onda incidente (y transmitida), si la onda incide desde un medio de menor a uno de mayor índice de refracción (Sec. 32-3); (2) la longitud de onda λ_m dentro de cualquier medio con índice de refracción n, es

$$\lambda_m = \frac{\lambda}{n} \qquad (31\text{-}6),(32\text{-}8)$$

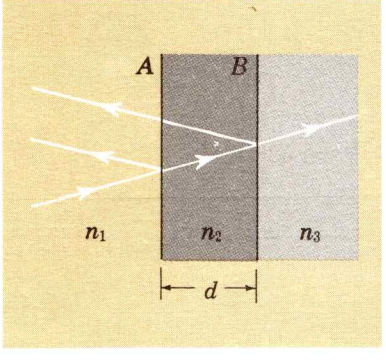


FIG. 32-14. Interferencia debida a las reflexiones en dos interfases.

donde λ es la longitud de onda en el espacio libre.

El acortamiento de las longitudes de onda en un medio ópticamente denso lleva a la idea de la *longitud del camino óptico,* definido como la longitud de la trayectoria, multiplicada por el índice de refracción del medio, lo que es equivalente a la longitud de la trayectoria en el vacío. Por ejemplo, la longitud de onda de la luz roja en el vacío es de 6000 Å, mientras que la longitud de onda de la misma radiación en el vidrio, con $n = 1.50$, es 6 000 Å/1.5 = 4000 Å. Una longitud de 6.0 mm en el vacío contiene 10 000 de tales longitudes de onda mientras que estas mismas 10 000 longitudes de onda ocupan sólo 4.0 mm en el vidrio. Así, la trayectoria geométrica *en el vidrio* es de 4.0 mm; el camino óptico

equivalente es de (4.0 mm) (1.5) = 6.0 mm, puesto que éste es el camino óptico equivalente en el vacío y contiene el mismo número de longitudes de onda. Es claro, entonces, que al calcular las diferencias de fase se deben tomar en cuenta los cambios de longitud de onda en un medio refractivo, reemplazando la longitud de la trayectoria geométrica por la longitud del camino óptico.

Supóngase que en la Fig. 32-14 se tiene una delgada película de aceite flotando en agua, con $n_1 = 1.00$, $n_2 = 1.46$, y $n_3 = 1.33$, iluminados en incidencia normal con luz monocromática de longitud de onda λ en el vacío. Puesto que $n_1 < n_2$, pero $n_2 > n_3$, un cambio de fase de 180°, tiene lugar en la reflexión de la superficie A pero no en la superficie B. Entonces, la condición para máxima intensidad reflejada es

$$2d = (m + \tfrac{1}{2})\lambda_{m_2} \qquad \text{donde} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

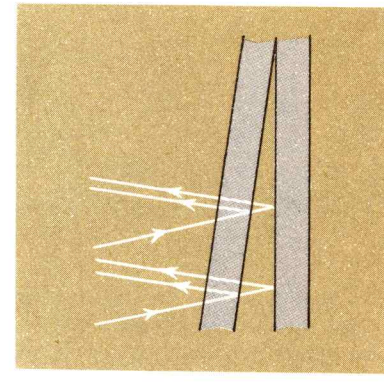
o, en forma equivalente,

$$2d = (m + \tfrac{1}{2})\frac{\lambda_{m1}}{n_{21}}$$

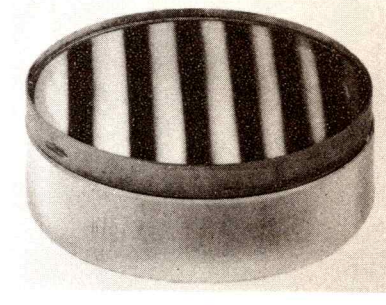
donde λ_{m1} es la longitud de onda en el espacio libre. La luz que brilla en una película de aceite llega al ojo desde varias fuentes y las diferencias de sus caminos varían de acuerdo al ángulo de incidencia sobre la película; además la película puede ser de espesor variable. Por último, los diversos colores tienen diferentes longitudes de onda, por lo que si existe interferencia constructiva para una longitud de onda, podría haber interferencia destructiva para otra. En consecuencia se ve una gran variedad de colores en la película.

Una situación sencilla se obtiene cuando dos placas de vidrio, perfectamente planas, se encuentran algo inclinadas para producir una película de aire entre ellas con forma de cuña, como en la Fig. 32-15*a*. Debido a que el espesor de la película cambia uniformemente, al observar las placas casi paralelas, se ve una sucesión de franjas paralelas de interferencia, como en la Fig. 32-15*b*. Este arreglo proporciona una prueba directa de que una superficie es ópticamente plana (plana dentro de una fracción de la longitud de onda de la luz). La separación de una superficie plana se manifiesta en el diseño de interferencia con franjas de interferencia no paralelas o espaciadas en forma desigual.

Una modificación del arreglo con dos placas planas se representa en la Fig. 32-16*a*, donde una lente plana convexa está en contacto con una placa plana de vidrio. La cuña de aire tiene simetría cilíndrica y las franjas de interferencia se presentan como círculos alternativamente brillantes y oscuros, como en la Fig. 32-16*b*. Este fenómeno se denomina como de los *anillos de Newton*. Nótese en especial que la región central es *oscura,* no brillante. En el punto de contacto hay una diferencia igual a *cero* en los caminos entre los rayos reflejados de las dos interfases adyacentes,

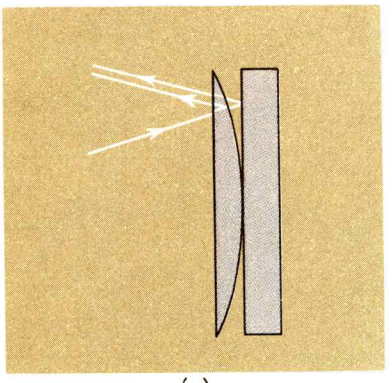


(*a*)

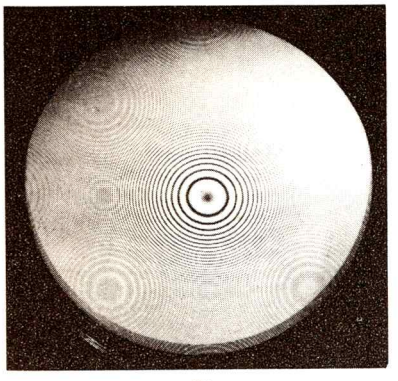


(*b*)

FIG. 32-15. (*a*) Interferencia en una cuña de aire. (*b*) Las franjas observadas. (Cortesía de Bausch and Lomb, Rochester, N. Y.)



(*a*)



(*b*)

FIG. 32-16. (*a*) Interferencia que orina los anillos de Newton. (*b*) Los anillos observados. (Cortesía de Bausch and Lomb, Rochester, N. Y.)

pero los rayos reflejados están defasados: una interfase es entre el vidrio y el aire mientras que la otra es entre el aire y el vidrio.

32—7 EL INTERFEROMETRO DE MICHELSON

Este notable instrumento óptico fue inventado por A. A. Michelson (1852-1932), el primer estadounidense laureado con el Premio Nobel de Física. Sus partes esenciales se representan en la Fig. 32-17. Un haz de luz incidente se divide por un espejo semiplateado M en dos rayos, los que siguen trayectorias perpendiculares hacia los espejos M_1 y M_2 y entonces son recombinados para interferir cuando entran en el ojo del observador M está inclinado 45° con relación al rayo incidente. La placa compensadora P, paralela a M y de igual espesor, se coloca como se indica en la figura, para lograr que los caminos ópticos vertical y horizontal sean, al menos, casi iguales.

Con los espejos M_1 y M_2 exactamente perpendiculares en sus centros, a los rayos incidentes, el diseño observado de interferencia es semejante al de la Fig. 32-18: una serie de franjas circulares de interferencia, reminiscentes de los anillos de Newton. (Los rayos no centrales incidentes en los espejos recorren caminos algo diferentes a los de los rayos que inciden en el centro de los espejos.)

Supongamos que un círculo oscuro aparece primero en el centro del diseño de interferencia, por lo que los rayos centrales que toman las dos rutas han interferido destructivamente. Imaginemos ahora que el espejo M_2 se ha desplazado $\frac{1}{4}\lambda$. La longitud del camino de los rayos verticales se ha cambiado, por tanto, en $\frac{1}{2}\lambda$ y los rayos centrales, combinándose, llegan ahora al ojo interfiriendo

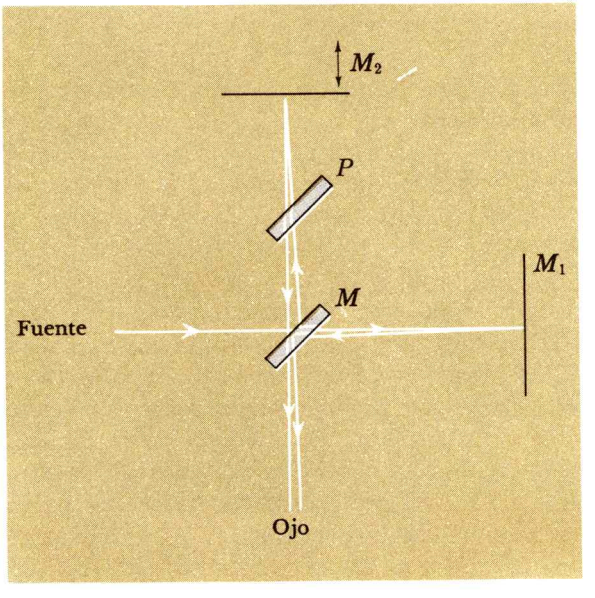


FIG. 32-17. Los elementos de un interferómetro de Michelson. M es un espejo parcialmente plateado, P una placa compensadora, M_1 un espejo fijo y M_2 un espejo movible.

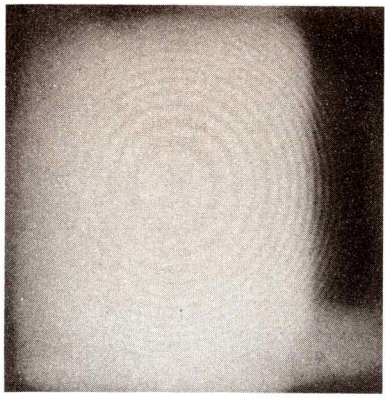


FIG. 32-18. Diseño de interferencia observado en un interferómetro de Michelson, cuando los espejos M_1 y M_2 de la Fig. 32-17 están exactamente perpendiculares.

constructivamente y, en consecuencia, la mancha central se ha transformado de obscura a brillante y el negro y el blanco se han intercambiado en todas las franjas de interferencia de los alrededores. Un desplazamiento posterior de $\frac{1}{4}\lambda$ restaura la mancha oscura. Al moverse el espejo M_2 se observa una sucesión de anillos de interferencia que se mueven hacia el centro del diseño y cada alternación de blanco y negro corresponde a un desplazamiento del espejo de $\frac{1}{4}\lambda$. Así puede medirse la longitud de onda de la luz contando el número total de corrimientos de las franjas en un desplazamiento conocido del espejo. Al revés, conociendo la longitud de onda se puede medir un desplazamiento del espejo dentro de una fracción de la longitud de onda de la luz.

Puesto que el metro se define como 1 650 763.73 longitudes de onda de la luz del kriptón 86, se puede medir una distancia en metros en términos de la longitud de onda de esta luz.

Un interferómetro de Michelson es capaz, fácilmente, de detectar una diferencia de longitudes en los caminos ópticos tan pequeña como una longitud de onda óptica. Por ejemplo, con $\lambda = 6000$ Å, un desplazamiento del espejo de $\frac{1}{2}\lambda$ corresponde a una diferencia en el tiempo de un viaje redondo de sólo $(\frac{1}{2} \times 6000 \text{ Å})/(3.0 \times 10^8 \text{ m/s}) = 10^{-15}$ s. La posibilidad de medir indirectamente estás pequeñísimas diferencias en el tiempo recorrido por la luz es la base del uso del interferómetro de Michelson en el experimento de Michelson-Morley, una prueba fundamental de la teoría especial de la relatividad. Véase Cap. 34.

32—8 RADIACION DE UNA FILA DE FUENTES PUNTUALES

El término *difracción* se emplea para describir el fenómeno ondulatorio resultante de la interferencia de *muchas* (aun en un número infinito) fuentes puntuales que oscilan coherentemente. Así, la difracción no es sino la interferencia de ondas de muchas fuentes. La física es la misma que para dos fuentes; la geometría puede ser más complicada.

Considérese la Fig. 32-19, en donde un gran número (aquí, 12) de osciladores puntuales idénticos están arreglados en una fila con ancho total w, cada fuente estando separada de las vecinas por la distancia d; por ejemplo, podrían ser 12 antenas de radio dipolares igualmente espaciadas. Todas las fuentes puntuales oscilan en la misma frecuencia y en la misma fase; entre ellas *no hay una diferencia intrínseca de fase.* Las fuentes generan ondas de longitud λ, siendo esta longitud *grande* comparada con la distancia d. Se desea encontrar la intensidad relativa, observada de algún punto muy distante P como una función del ángulo θ entre la normal a la línea de osciladores y la línea que une a cualquiera de ellos con el punto P; esto es, se desea encontrar el diseño de radiación de este arreglo de osciladores igualmente espaciados.

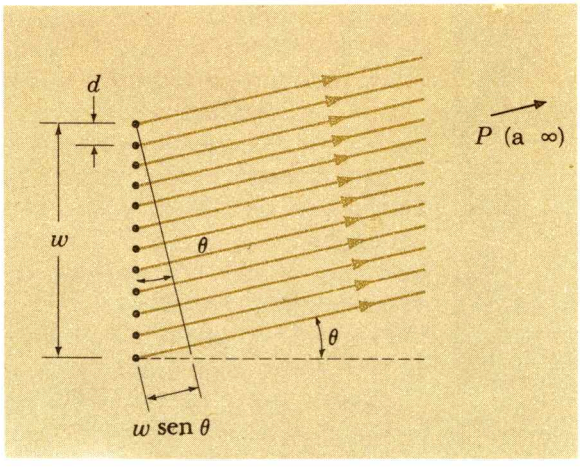


FIG. 32-19. Una fila de osciladores puntuales igualmente espaciados

Como no hay diferencia intrínseca de fase entre dos osciladores cualesquiera, la diferencia de fase ϕ a un punto distante proviene sólo de la diferencia Δr en las longitudes de las trayectorias, de donde

$$\phi = \frac{2\pi \Delta r}{\lambda} \tag{32-9}$$

Es claro, que cuando $\theta = 0$, todos los rayos dibujados en sentido horizontal hasta un punto a una distancia infinita tienen la misma longitud y las fuentes interfieren constructivamente. Así, el campo eléctrico resultante cuando el ángulo $\theta = 0$ es N (aquí, 12) veces el campo eléctrico de cualquier oscilador sencillo.

¿Bajo qué ángulo la intensidad es cero? El procedimiento es el siguiente: se escoge una pareja de osciladores tal que el campo resultante en P de dicho par valga cero. Así, se deben escoger los osciladores y el ángulo θ de tal modo que la diferencia de longitudes de los caminos entre cada par sea $\frac{1}{2}\lambda$ (o un múltiplo impar de $\frac{1}{2}\lambda$); entonces la pareja de osciladores debe interferir destructivamente. Supóngase entonces, que el ángulo θ es tal, que la diferencia en longitudes en los caminos entre los osciladores 1 y 7, es de $\frac{1}{2}\lambda$. En un punto distante el campo eléctrico resultante de esta pareja vale cero. Pero, con la geometría de la Fig. 32-19, se ve que el oscilador 2 y el oscilador 8 difieren también entonces en longitudes de los caminos por $\frac{1}{2}\lambda$. En realidad, podemos tomar todos los osciladores en parejas —1 y 7, 2 y 8, 3 y 9, etc.—, de tal modo que el campo eléctrico resultante de todos los osciladores en el punto P valgan cero. El primer cero de intensidad ocurre cuando

$$\frac{N}{2} d \operatorname{sen} \theta = \frac{\lambda}{2}$$

Primera intensidad cero: $Nd \operatorname{sen} \theta = \lambda$

Se puede escribir esta ecuación en términos en el ancho total w del arreglo. De la Fig. 32-19, $w = (N-1)d \approx Nd$ para un valor grande de N. Así, para un gran número N de osciladores,

Primera intensidad cero: $w \operatorname{sen}\theta = \lambda$

Donde w sen θ es la diferencia de caminos entre el oscilador 1 y el 12, los que están en los extremos finales del arreglo.

La segunda intensidad cero se encuentra de modo semejante. Se divide ahora el arreglo en 4 zonas, grupos de osciladores: osciladores del 1 al 3, del 4 al 6, del 7 al 9 y del 10 al 12. El ángulo θ debe ser aún mayor, suficiente de hecho, para que la diferencia de caminos entre el oscilador 1 y el 4 sea $\frac{1}{2}\lambda$. Estas parejas de fuentes interfieren entonces destructivamente a una distancia infinita. De manera semejante pueden emparejarse los osciladores 2 y 5, 3 y 6, etc., de modo que de nuevo el campo resultante de este arreglo valga cero.

Para N grande, la diferencia de camino w sen θ entre las fuentes en los extremos del arreglo es ahora 2λ, por lo que se tiene

Segunda intensidad cero: $w \operatorname{sen}\theta = 2\lambda$

Es aparente entonces que los ángulos para intensidad *cero* están dados en general, por

$$w \operatorname{sen}\theta = n\lambda \qquad (32.10)$$

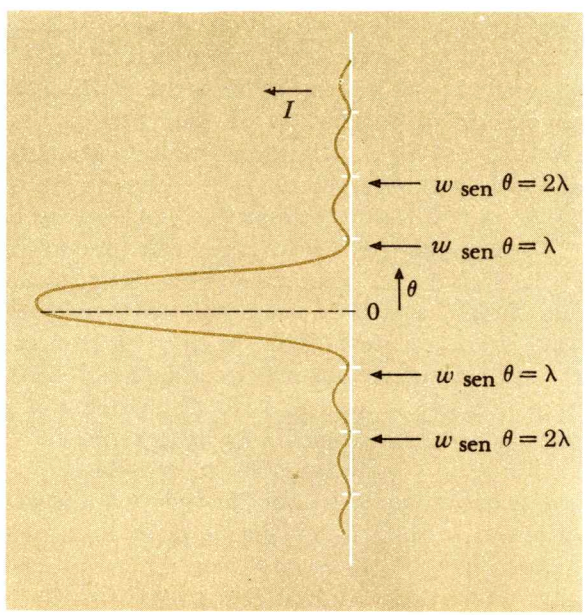


FIG. 32-20. La intensidad como una función del ángulo θ.

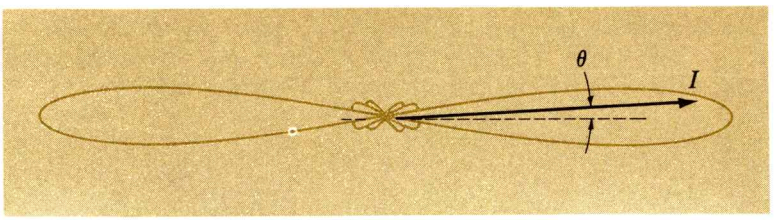


FIG. 32-21. Diseño de radiación para una fila de osciladores puntuales igualmente espaciados.

donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ (pero *no* cero) y el número de fuentes N es grande.

La Fig. 32-20 representa la intensidad radiada I como una función de θ. Este *diseño de difracción,* consiste de un máximo intenso en $\theta = 0$, que tiene doble ancho que los relativamente más débiles máximos secundarios que aparecen en forma simétrica a sus costados. Los ceros están dados por (32-10). La misma información es representada en una forma gráfica diferente en la Fig. 32-21, que indica el diseño de radiación del arreglo de osciladores; consiste de dos lóbulos centrales estrechos e intensos en los que se dirige la mayoría de la energía radiada, junto a pequeños lóbulos laterales. Así, un arreglo de antenas espaciadas, de modo uniforme con $d \ll \lambda$, radiará intensamente solo en dirección perpendicular a la línea de antenas.

32—9 DIFRACCION POR UNA SOLA RENDIJA

Dada una fuente luminosa monocromática, qué ilumine una sola rendija estrecha, situada a una gran distancia de la fuente, ¿cuál será el diseño de intensidad de la luz que llega a una pantalla muy lejana? ¡Ya hemos resuelto este problema! Reconoceremos sólo que cuando un frente de onda plano de la luz incide en una abertura y en otro plano opaco, se puede, por medio de la construcción de Huygens, imaginar a cada punto del frente de onda como una nueva fuente de radiación. Estas fuentes puntuales coherentes y distribuidas de modo continuo, oscilan en fase. En efecto, un arreglo infinito de fuentes puntuales se dispersa sobre el ancho finito de la rendija y el intenso diseño radiado en el plano de la rendija será precisamente el que ya se ha derivado.

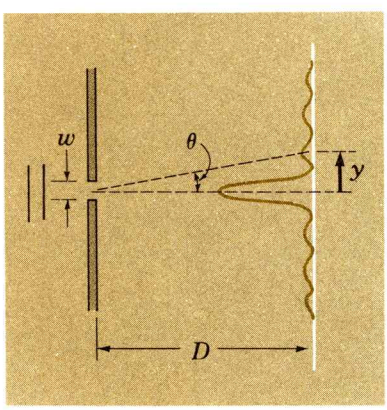


FIG. 32-22. Diseño de difracción de una sola rendija.

Un arreglo para difracción con una sola rendija se representa en la Fig. 32-22. Para pequeños desplazamientos y, el ángulo θ está dado por $\operatorname{sen}\theta \approx \theta \approx y/D$. La fuente luminosa S está a tan gran distancia de la rendija que los frentes de onda esféricos o cilíndricos que llegan a la rendija son, efectivamente, ondas planas; además, la pantalla de observación a la distancia D de la rendija de ancho w está lejos de la rendija.

En estas condiciones se observa la *difracción de Fraunhofer,* que se aplica cuando tanto la fuente como la pantalla están a una distancia infinita de la rendija o, de modo equivalente, cuando es *plano* el frente de onda en la rendija. Estas condiciones se pueden llenar, aun cuando la fuente y la pantalla estén físicamente cerca de la

rendija, colocando la fuente luminosa en el foco principal próximo de una lente convergente. Entonces los frentes de onda divergentes de la fuente —esféricos o cilíndricos— emergen como frentes de ondas *planos* de la lente e inciden en la rendija. Análogamente se puede colocar la pantalla de observación en el plano focal principal y lejano de una segunda lente convergente; entonces los rayos paralelos que salen de la rendija se enfocan en el plano focal de la pantalla; véase Fig. 32-23. El caso general, sin distinción de distancia o frente de onda, se conoce como difracción de *Fresnel.* La difracción de Fraunhofer, es un caso especial de la difracción de Fresnel.

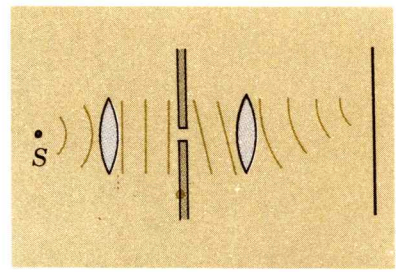


FIG. 32-23. Condiciones de la difracción de Fraunhofer, realizada con la fuente y la pantalla a distancia *finita* de la rendija por medio de lentes convergentes.

La Fig. 32-24 es una fotografía de un diseño de difracción de Fresnel, debido a una sola rendija y que corresponde a la Fig. 39-20. Las débiles franjas de difracción secundarias tienen el mismo ancho angular la mitad del de la franja central. Nótese que, de acuerdo con (32-10), para una longitud de onda dada, el diseño de difracción se expande conforme disminuye el ancho de la rendija y la luz es difractada mucho más allá de las sombras geométricas de los bordes de las rendijas. En realidad, el diseño de difracción no se parece al diseño de intensidad constante con bordes definidos que se observa cuando la luz pasa por una rendija ancha.

Ejemplo 32-1

Las franjas centrales obscuras en el diseño de difracción de una sola rendija, están separadas por 2.0 mm cuando la rendija se ilumina con luz de 6000-Å y la pantalla está colocada a 1.0 m de la rendija. ¿Cuál es el ancho de ésta?

De la Ec. (32-10,)

$$w \operatorname{sen} \theta \approx w \frac{y}{D} = n\lambda$$

donde D es la distancia entre la rendija y la pantalla y y es la distancia del máximo central, en el diseño de difracción, al cero. Aquí $2y = 2.0$ mm con $n = 1$. Así,

$$w = \frac{n\lambda D}{y} = \frac{(1)(6.0 \times 10^{-7}\ \text{m})(1.0\ \text{m})}{1.0 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 0.60\ \text{mm}$$

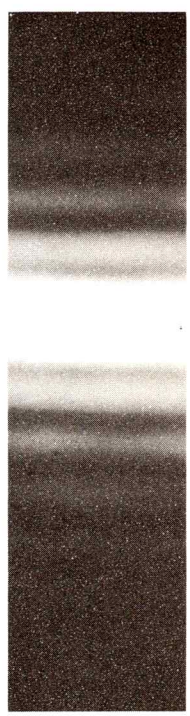


FIG. 32-24. El diseño de difracción de Fraunhofer de una rendija.

Supongamos ahora que se tienen *dos* rendijas paralelas, cada una de ancho w, estando sus centros separados por la distancia d. Las dos rendijas están iluminadas con una onda monocromática plana. Si se cubre una rendija y se deja expuesta la segunda, el diseño de difracción es, por supuesto, el de una sola rendija (Fig. 32-24); si se cubre la segunda rendija y se expone la primera se verá el *mismo* diseño de difracción en la pantalla, pero corrido una distancia d. Con ambas rendijas expuestas a un haz de frentes

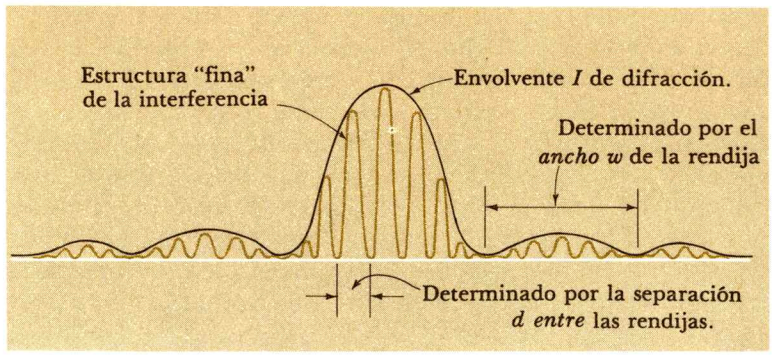


FIG. 32-25. Variaciones de intensidad para una doble rendija.

de onda planos, el diseño en una pantalla distante es como se representa en la Fig. 32-25. Existe como antes un diseño de difracción, pero ahora con rápidas variaciones adicionales de su intensidad, producidas de la *interferencia* de la doble rendija (Sec. 32-5). Las variaciones de intensidad en la Fig. 32-25 son gobernadas por dos influencias; la primera es la *interferencia* entre las dos rendijas, que es responsable de las franjas de interferencia estrechas, todas de igual ancho determinado por la *distancia de separación d* entre las rendijas. La segunda influencia es la difracción en cada una de las dos rendijas, la cual es responsable para las variaciones lentas con la distancia en la intensidad de las franjas de interferencia. Las líneas oscuras en el diseño de difracción están determinadas por el ancho w de la rendija. Se puede describir esta curva diciendo que el diseño de interferencia está "modulado" por el diseño de difracción.

32—10 LA CRATICULA O RETICULA DE DIFRACCION

La cratícula, inventada por J. Fraunhofer (1787-1826), es un instrumento de alta resolución para analizar una radiación policromática en sus longitudes de onda componentes. La denominada cratícula de transmisión consiste de una serie de N rendijas paralelas y separadas entre sí por la distancia d. Por ejemplo, líneas muy próximas (tal vez 10,000 en un cm) pueden ser grabadas en una placa de vidrio. Como otro ejemplo, una persiana puede emplearse como cratícula para las ondas sonoras.

Los elementos esenciales de una cratícula se ilustran en la Fig. 32-26. Este arreglo es, en realidad, semejante al arreglo de las fuentes igualmente espaciadas, representadas en la Fig. 32-19. Sin embargo, aquí se supone que la *distancia de separación d entre cada una de las N rendijas adyacentes es mayor que una longitud de onda.*

Se desea encontrar la posición angular de la intensidad principal máxima en una pantalla distante. Supongamos que la diferencia en los caminos entre las rendijas 1 y 2 hasta un punto distante,

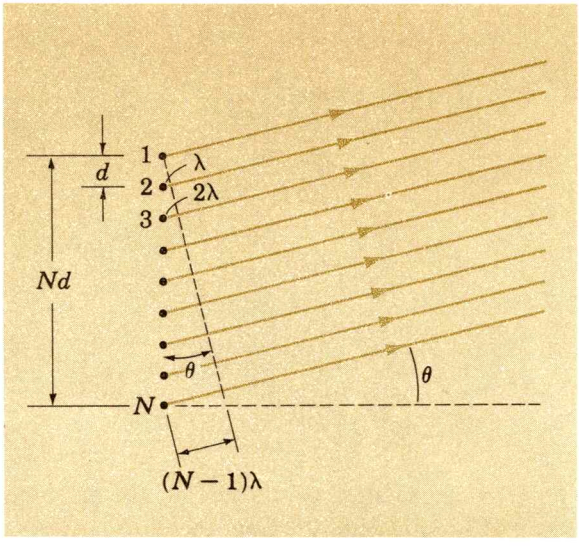


FIG. 32-26. El arreglo de las fuentes en una cratícula ($d > \lambda$).

es de una longitud de onda; las ondas de estas dos rendijas interfieren constructivamente, tal como en la primera interferencia no central y máxima en el experimento de la doble rendija de Young (Sec. 32-5). La diferencia de caminos, d sen θ es de una longitud de onda entre cualquier pareja de rendijas adyacentes y todas las rendijas envían ondas que se suman constructivamente en la dirección θ, dada por $d \operatorname{sen}\theta = \lambda$. La intensidad de este ápice es mucho mayor que en la doble rendija: con N rendijas y no dos, el campo eléctrico resultante se multiplica por el factor N y la intensidad por el factor N^2. Puesto que la energía total se incrementa por un factor N y no N^2, el ancho del ápice intenso deberá, por la conservación de la energía, de *reducirse* por un factor N.

Existen aún otros ápices de fuerte interferencia. Todas las rendijas interferirán de manera constructiva en un punto distante, cuando la diferencia de caminos, d sen θ, entre rendijas adyacentes sea un múltiplo entero m de la longitud de onda. Así, intensos ápices de interferencia ocurren cuando

$$m\lambda = d \operatorname{sen}\theta \qquad (32\text{-}11)$$

donde $m = 0, 1, 2, \ldots$ El entero m denota el orden del ápice de interferencia.

Nótese que el ángulo θ depende de la longitud de onda. Si la radiación que llega consiste de muchas longitudes de onda, cada longitud de onda componente se desviará diferentemente, el extremo rojo del espectro visible más que el extremo violeta. Por supuesto, cuando $m = 0$, entonces $\theta = 0$ para todas las longitudes de onda; el "espectro" de orden cero consiste de luz blanca. Pero el

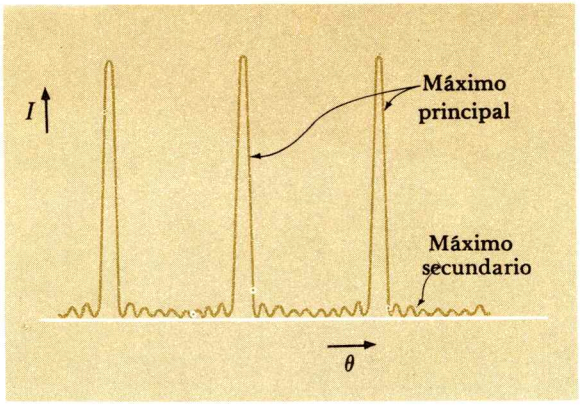


FIG. 32-27. Variaciones de intensidad en una cratícula.

espectro de primer orden ($m = 1$), el espectro de segundo orden ($m = 2$), etc., muestra a la luz cada vez más dispersa. La longitud de onda se calcula fácilmente si se conoce la separación de las rendijas (o su recíproco, el número de líneas en la cratícula) y se mide θ.

La luz policromática puede dispersarse en un espectro con una cratícula (por efectos de interferencia y difracción) o con un prisma (porque la refracción depende de la frecuencia). Aunque un prisma forma un espectro más intenso que una cratícula (dirige *toda* la luz a *un* espectro, en lugar de diluirlo en varios espectros), no permite una medida directa de la longitud de una onda puesto que se debe conocer precisamente cómo varía el índice de refracción del prisma con la longitud de onda. Una ventaja distintiva de la cratícula es su resolución; con un número bastante grande de rendijas una cratícula puede resolver dos radiaciones de longitudes de onda muy próximas.

La Fig. 32-27 representa el diseño de intensidad de una cratícula con sólo unas pocas rendijas.

Ejemplo 32-2.
Una cratícula tiene 5,000 rayas en 1.0 cm. Encontrar la separación angular en el espectro visible de primer orden (con una longitud de onda de 4 000 a 7000-Å).

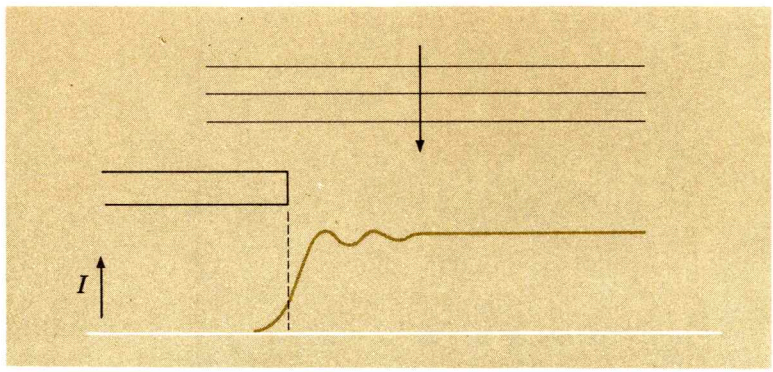
El espaciamiento de la cratícula $d = \frac{1}{5000}$ cm. De (32-11),

$$\theta = \text{sen}^{-1} \frac{m\lambda}{d}$$

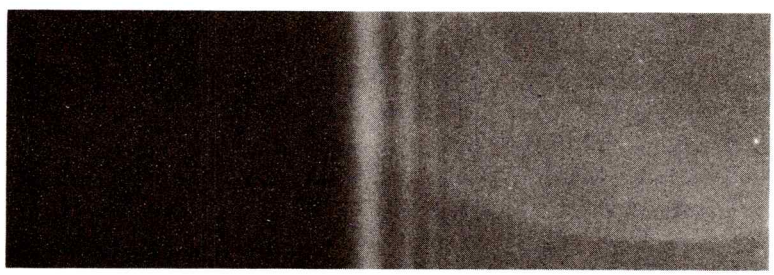
Para $\lambda = 4000$ Å,

$$\theta = \text{sen}^{-1} (4.0 \times 10^{-7} \text{ m})(5.0 \times 10^{5} \text{ m}^{-1}) = 11.5°$$

Análogamente, para $\lambda = 7000$ Å, se encuentra $\theta = 20.5°$. El espectro entero visible está comprendido en los 9° entre el violeta y el rojo extremos.



(*a*)



(*b*)

FIG. 32-28. Difracción de ondas planas en un borde recto y opaco: (*a*) la intensidad como una función de la distancia y (*b*) el diseño de difracción.

32—11 OTROS EJEMPLOS DE DIFRACCION

La difracción fue primero observada en 1655 por F. M. Grimaldi (1618-1663), quien notó que la sombra de un borde recto afilado, *no* es del todo definida, como se predice con la óptica de rayos, sino que presenta una difracción característica en las variaciones de la intensidad cerca del borde. Cuando una onda plana incide en un borde recto y opaco, las variaciones de intensidad en una pantalla *cercana* se representan en la Fig. 32-28. La intensidad decrece poco a poco hasta 0 *tras* el borde geométrico de la sombra, presenta variaciones cerca del borde y se vuelve constante para puntos lejanos del borde.

Supongamos ahora que se tiene una amplia rendija de bordes opacos e iluminada por una onda plana. El diseño de intensidad que se ve cerca de la rendija debe ser el de dos orillas rectas, como se indica en la Fig. 32-29*a*. La intensidad es en esencia constante en el centro de una rendija ancha y los efectos de difracción aparecen sólo cerca de los bordes. En realidad, para pequeñas longitudes de onda (o gran ancho de la rendija), la intensidad es esencialmente la que predice la óptica de rayos: obscuridad en la sombra geométrica de la rendija y en el centro intensidad constante. Este resultado es apenas sorprendente; si la óptica de rayos tiene éxito para explicar las propiedades luminosas cuando el efecto ondulatorio es despreciable —esto es, cuando la longitud de

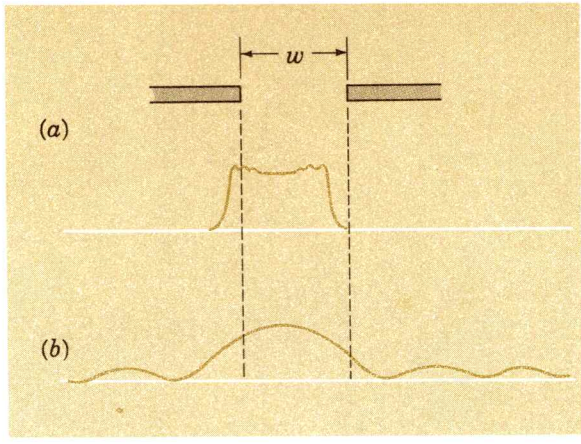


FIG. 32-29. Difracción con una sola rendija: (*a*) pantalla próxima a la rendija, (*b*) pantalla muy lejos de la rendija.

onda es de magnitud despreciable comparada con las dimensiones de una abertura o de un objeto—, entonces una teoría ondulatoria congruente *debe* proporcionar los resultados de la óptica de rayos en el límite, $\lambda/L \to 0$, donde L es una longitud característica. Así, se puede escribir en símbolos:

$$\text{Límite}_{\lambda/L \to 0} \text{ (óptica de ondas)} = \text{óptica de rayos}.$$

La Fig. 32-29 representa la transición de la óptica de rayos a la ondulatoria en la difracción de una rendija sencilla. En la Fig. 32-29*a* la pantalla está muy cerca de la rendija; en la Fig. 32-29*b* la pantalla se ha movido muy lejos de ella, por lo que se obtiene las condiciones de la Fig. 32-22, y se tiene el característico diseño de difracción de una sola rendija de la Fig. 32-20. Nótese que la "forma" de la rendija es claramente evidente sólo en la Fig. 32-29*a*.

Se puede hacer la transición de la óptica ondulatoria a la de rayos de diferente manera. Supongamos que la pantalla está lo bastante lejos de la rendija para producir el diseño de difracción de la Fig. 32-29*b*. Si la longitud de la onda disminuye lo suficiente, el diseño de la Fig. 32-29*a*, aparece en la pantalla.

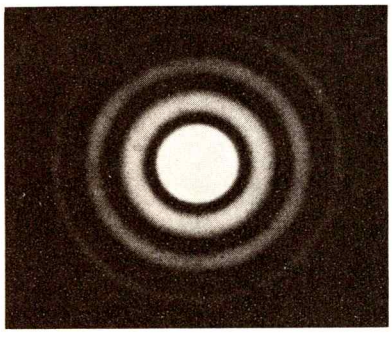


FIG. 32-30. Diseño de difracción de Fraunhofer, a través de una abertura circular. (De M. Cagnet, M. Francon, J. C. Thrierr, *Atlas of Optical Phenomena*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1962, Cortesía de Springer-Verlag, Heidelberg.)

32—12 DIFRACCION Y RESOLUCION

Supongamos que una fuente puntual de luz está lejos de una superficie opaca con una abertura circular de diámetro d. Entonces llegan, en efecto, ondas planas a la perforación y en una pantalla bastante lejos de la abertura se observa un diseño de difracción (de Fraunhofer), como se representa en la Fig. 32-30: una mancha central brillante rodeada por anillos de difracción. El diseño es semejante al debido a una sola rendija (Fig. 32-24), pero con franjas de difracción circulares en lugar de rectas.

Por medio de un análisis semejante al realizado en la Sec. 32-8 puede demostrarse que la separación angular θ entre el centro de

la mancha brillante y el primer cero en el diseño de difracción, está dado por*

$$\text{sen}\,\theta \approx \theta = 1.22\,\frac{\lambda}{d} \qquad (32\text{-}12)$$

donde λ es la longitud de onda. Véase Fig. 32-31.

El carácter inexacto y no puntual de la imagen de un punto objeto no es por sí misma una dificultad seria si fuera un objeto puntual *único*. Pero si dos imágenes, cada una de ellas una mancha, de dos objetos puntuales se sobreponen muy próximamente, no pueden distinguirse de la imagen de un solo objeto puntual. Así, existe una limitación fundamental, que tiene su origen en la difracción y en el carácter ondulatorio de la luz, en la resolución de *dos* objetos puntuales. Por supuesto, cualquier objeto extenso no es más que una colección de objetos puntuales.

Supongamos por ejemplo, que dos estrellas tienen una separación angular ϕ cuando se ven directamente. Cuando se interpone una abertura**, tal como la lente objetivo de un telescopio astronómico, se ven dos discos, cada uno de "radio" θ, como está dado por (32-12), separados por ϕ, como se ve en la Fig. 32-32*a*. La cuestión es, entonces, ¿cuál es la ϕ mínima que permita que dos imágenes definidas queden resueltas? La Fig. 32-32*b* y *c* representa dos imágenes difracción de dos fuentes puntuales. Las imágenes

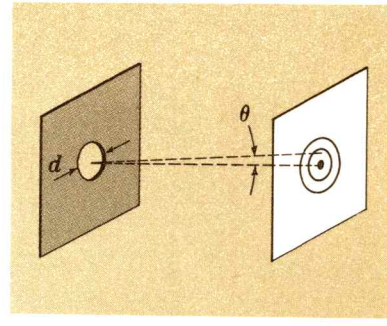
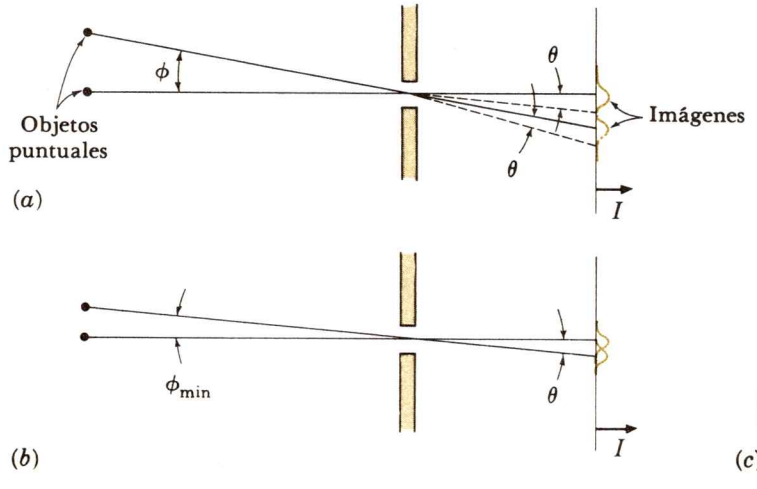
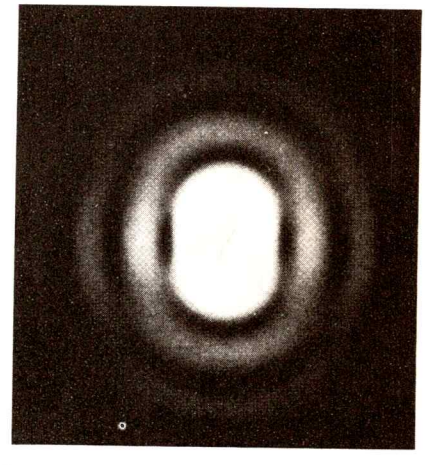


FIG. 32-31. Difracción a través de una abertura circular; el ángulo θ da el radio angular de la primera franja obscura.

FIG. 32-32. (*a*) Dos objetos puntuales de separación angular ϕ se resuelven con claridad como dos imágenes distintas, cada una de radio angular θ. (*b*) El criterio de Rayleigh para la resolución, $\phi_{\min} = \theta$. (*c*) Diseño de intensidad que corresponde a la parte (*b*). De M. Cagnet M. Francon. J. C. Thrierr, *Atlas of Optical Phenomena*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1962, Cortesía de Springer-Verlag, Heidelberg).




(c)

*El número 1.22 es la raíz más pequeña de la función de primer orden de Bessel, la cual entra en situaciones de simetría cilíndrica, de una manera análoga a la aparición de funciones sinusoidales en situaciones con simetría rectangular.

**Siempre se ve a través de una abertura, aunque ésta sea sólo la pupila del ojo.

tienen una separación angular ϕ, justamente igual al radio angular θ de cada imagen separada. El centro de una imagen cae justo, en el primer cero de la intensidad de la segunda. Se puede decir que hay, de hecho, *dos* imágenes. Esta situación conveniente corresponde al llamado *criterio de Rayleigh* para la resolución, siendo entonces el ángulo mínimo ϕ para la resolución:

$$\phi_{\text{min}} = \theta = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

de (32-12).

Todos los aparatos ópticos —espejos, lentes, aberturas y el mismo ojo— están limitados en último análisis en su poder de resolución por el efecto de difracción. Las imágenes son intrínsecamente borrosas y su resolución puede mejorarse sólo empleando ondas de corta longitud o aberturas de gran tamaño. Así, la motivación para construir telescopios, ya sea para radiación visible o radioelectromagnética, con lentes o espejos de gran diámetro, no sólo es para capturar mayor radiación e incrementar así la intensidad de la imagen, sino también para mejorar la resolución de las imágenes; esto es, los grandes telescopios producen imágenes brillantes y bien definidas.

RESUMEN

Para encontrar la intensidad resultante de dos o más fuentes de ondas, se aplica el principio de superposición, sumando las funciones de ondas separadas en cualquier instante del tiempo y en cualquier punto del espacio, para encontrar la amplitud de la onda resultante, cuyo cuadrado es proporcional a la intensidad.

Para dos fuentes coherentes que radien ondas de la misma longitud de onda λ, la amplitud resultante está determinada por la diferencia de fase ϕ en cualquier punto de observación,

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta r}{\lambda} \qquad (32\text{-}2)$$

donde Δr es la diferencia de caminos, siendo cero la diferencia *intrínseca* de fase entre las dos fuentes. Si las dos fuentes oscilan en fase y están separadas por la distancia d, la intensidad en un punto distante es máxima cuando

Máxima I: $$\Delta r = m\lambda = d \operatorname{sen}\theta$$

$$\text{con } m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (32\text{-}4)$$

donde θ es el ángulo medido desde el bisector perpendicular a la línea que une a las dos fuentes. En el experimento de la doble

rendija de Young, las fuentes puntuales están reemplazadas por dos rendijas paralelas iluminadas a través de una sola rendija.

Las ondas electromagnéticas sufren un corrimiento de fase de 180°, cuando se reflejan en un medio de mayor densidad óptica o en una superficie conductora.

La difracción es la interferencia de un gran número de fuentes coherentes. Los ceros de la intensidad radiada por una fila de muchas fuentes que oscilan en fase y que están separadas por distancias iguales mucho menores que una longitud de onda λ, están dados por

$$w \operatorname{sen} \theta = n\lambda \qquad (32\text{-}10)$$

donde w es el ancho total de la fila y $n = 1, 2, 3, \ldots$ Esta relación da también los ceros en el diseño de intensidad de la difracción de una sola rendija, con la condición de que tanto la fuente como el punto de observación estén lejos de la rendija.

Los ápices de interferencia intensos y bien resueltos de una cratícula, ocurren cuando

$$m\lambda = d \operatorname{sen} \theta \qquad (32\text{-}11)$$

donde d es la distancia entre las rendijas adyacentes y $m = 0, 1, 2, \ldots$

Los efectos de difracción debidos a cualquier abertura limitan la resolución de dos objetos puntuales.

PROBLEMAS

32-1. Dos osciladores separados e isotrópicos generan ondas de longitudes algo diferentes. Discutir cualitativamente (*a*) cómo varía la intensidad radiada con el tiempo en una posición fija y (*b*) cómo las líneas nodales, en el diseño de interferencia, varían con el tiempo.

32-2. Dos fuentes puntuales idénticas oscilan en fase. Encontrar los puntos de oscilación mínima en la línea que une a las dos fuentes cuando (*a*) las fuentes están a una distancia de 5 longitudes de onda y (*b*) las fuentes están separadas por la distancia de $5\frac{1}{2}$ longitudes de onda. (*c*) ¿Cuáles términos describen la interferencia en esta región?

32-3. Las dos bocinas de un sistema estereofónico, están conectadas en fase a la misma fuente de 165 Hz la cual produce ondas sonoras con una longitud de onda de 2.0 m. La distancia entre las bocinas es de 2.0 m. Encontrar cuánto debe alejarse un oyente hasta que escuche un mínimo en la intensidad sonora; supóngase que se mueve en sentido perpendicular a la línea que une a las dos bocinas.

32-4. Encontrar cuál es la relación del área dentro del diseño de radiación de dos fuentes, Fig. 32-3*b*, al área dentro del diseño de una sola fuente.

32-5. Dos generadores de microondas, separados 6.0 cm, oscilan en fase con la frecuencia de 10 MHz. ¿Cuál es la separación angular entre los lóbulos de su diseño de radiación?

32-6. El diseño de radiación de dos radiooscilladores idénticos e isotrópicos consiste en seis lóbulos. Encontrar la distancia entre los osciladores, si estos radian con la frecuencia de 10 MHz.

32-7. Una prueba sencilla para determinar si las dos bocinas de un sistema estereofónico se encuentran conectadas en forma apropiada es ésta: se compara la respuesta a los tonos bajos con las bocinas conectadas en un sentido con la respuesta cuando los alambres de una de las bocinas está con polaridad invertida; la conexión correcta corresponde a la mayor respuesta al tono bajo. Verificar este procedimiento en términos de efecto de interferencia.

32-8. Dos osciladores son semejantes a los de la Fig. 32-3, excepto que el ángulo entre el eje de simetría de los lóbulos y la línea que une a los osciladores, es de 30°. (*a*) Encontrar la diferencia de fase intrínseca entre los dos osciladores. (*b*) Dibujar un esquema del diseño de radiación.

32-9. Una onda electromagnética plana, de 30.0 cm de longitud de onda que se mueve en un plano horizontal incide en dos antenas receptoras, verticales y dipolares, separadas por 10.0 cm y colocadas en una línea norte - sur. Las medidas demuestran que la señal que recibe la antena del sur se desfasa a 60°, detrás de la señal que recibe la antena norte. ¿Cuál será la dirección posible de propagación de la onda incidente?

32-10. Un punto generador de ondas en la superficie del agua está a 6.0 cm de un plano reflector. Las ondas en el agua tienen una longitud de onda de 3.0 cm. Encontrar el ángulo, medido con relación a la normal o al reflector, donde la intensidad es 0, a gran distancia del generador.

32-11. Un oscilador de microondas que genera microondas de 1.0 cm, se coloca a 3.0 cm de una gran lámina conductora. Un receptor de microondas está a 30.0 cm del oscilador (medidos adelante de la lámina). Encontrar qué distancia mínima (que no sea cero) entre el receptor y la lámina resultará en una intensidad de recepción igual a cero.

32-12. La antena de radar de un barco transmite y recibe ondas de 10 cm, de longitud de onda. La antena está a 10 m de la superficie del agua. A qué altura mínima (que no sea cero) sobre la superficie del agua debe encontrarse un avión, cuando esté a 5.0 km del barco, para eludir la detección por el receptor de radar.

32-13. El fenómeno de "desvanecimiento" en la radio recepción se debe en gran medida a la interferencia entre dos ondas del transmisor al receptor, una que sigue una ruta directa y otra que incluye reflexión en una capa conductora de partículas cargadas (la ionosfera), que se encuentra sobre la Tierra. Supongamos que el transmisor y el receptor están a 10 km de distancia. Encontrar la mínima altura en la capa de la ionosfera que produzca un mínimo en la señal recibida para ondas de radio de 710 kHz.

32-14. Debido a que un haz de laser es coherente, se puede modular con una señal en la misma forma que un haz de radio se modula con una señal de audio. Tomando el ancho de la banda necesario hasta 2 kHz para escuchar bien las palabras, encontrar cuántas bandas de voz que no se sobrepongan pueden acomodarse en la región verde del espectro visible (de 5 000 a 5700 Å).

32-15. En un experimento con la doble rendija de Young se iluminan las dos rendijas, separadas por 0.40 mm, con luz de 6000-Å. El diseño de interferencia se observa en una pantalla colocada a 1.0 m, de las rendijas. ¿Cuál será la separación entre las franjas adyacentes en el diseño de interferencia?

32-16. Dos rendijas idénticas paralelas, iluminadas con luz de 7000-Å de longitud de onda, producen un diseño de interferencia en una pantalla a 0.80 m, estando las franjas adyacentes a 0.70 mm de distancia. (*a*) ¿Cuál es la distancia entre las dos rendijas? (*b*) ¿Cuál será la distancia entre las franjas adyacentes si se iluminan las rendijas con luz de 4000-Å de longitud de onda?

23-17. Una delgada cuña de aire se forma con dos placas de vidrio en contacto en una de sus orillas y separadas por una hoja de papel en la otra. La distancia entre las dos orillas de las placas es de 6.0 cm. Se ven 10 franjas de interferencia por centímetro entre dichos bordes cuando las placas se iluminan desde arriba con luz de 6000-Å de longitud de onda. ¿Cuál es el espesor de la hoja de papel?

32-18. Una lente plana convexa toca a una placa plana de vidrio: entonces se ven anillos de Newton, con una mancha negra central, cuando se observa desde arriba. Demostrar que el radio de las franjas obscuras de interferencia vale aproximadamente $\sqrt{m\lambda R}$, donde λ es la longitud de onda, R es el radio de curvatura de la interferencia esférica y $m = 0, 1, 2, \ldots$.

32-19. La reflexión en una lente de una cámara fotográfica puede reducirse apreciablemente si la lente se recubre con una delgada película de material transparente. Suponiendo que el espesor de la película se escoge para evitar la reflexión de la luz amarilla de 5800-Å de longitud de onda (en el centro del espectro visible), encontrar su espesor mínimo, si el índice de refracción de recubierto es de 1.30 y el de la lente de vidrio es de 1.60. (Estas lentes recubiertas parecen púrpuras, una mezcla de luces roja y violeta, porque la luz de los extremos del espectro visible, que tienen longitudes de onda bastante diferentes de las de la luz del centro del espectro, no es eliminada por el recubierto.)

32-20. Una delgada película de material transparente, con un índice de refracción de 1.50 se coloca en uno de los haces de un interferómetro de Michelson (Fig. 32-17). Cuando se emplea luz de 6000 Å de longitud de onda, se observa que la película ocasiona el desplazamiento de 40 franjas. ¿Cuánto vale el espesor de la película?

32-21. Considérese una línea recta de 20 antenas de radio, a 40 cm una de otra. Encontrar el ancho angular de la banda central intensa, en el diseño de recepción para las radio-ondas incidentes con longitudes de onda (*a*) 5.0 m y (*b*) 2.5 m.

32-22. Demostrar que la mayor intensidad de orden cero en la Ec. (32-10), es menor o igual a w/λ.

32-23. El diseño de difracción recibido en una pantalla a 1.0 m de una única rendija tiene el máximo central limitado por franjas obscuras separadas 2.0 mm. La longitud de onda de la luz es de 6000 Å. ¿Cuánto vale el ancho de la rendija?

32-24. Ondas planas sonoras, con una frecuencia de 375 Hz, inciden una ventana muy alta de 2.5 m de ancho, situada en un salón muy grande. Se ha encontrado que en la pared lejana la intensidad del sonido cae de continuo hasta cero, a un ángulo de 30° con relación a la normal a la superficie de la ventana. ¿Cuál será la velocidad de las ondas sonoras?

32-25. Un diseño de difracción de una sola rendija se observa en una pantalla. Encontrar los cambios que deben ocurrir en el diseño si el aparato entero, de la fuente de luz hasta la pantalla, se sumerge en un medio cuyo índice de refracción sea n.

32-26. La luz de dos fuentes lineales idénticas pasa a través de una rendija de ancho w y después llega una pantalla distante. Las fuentes están a la distancia D de la rendija y emiten luz con longitud de onda λ. Encontrar en la pantalla la mínima distancia de separación entre las fuentes lineales, que les permita resolverse en dos diseños distintos de difracción.

32-27. Encontrar cuál es la menor distancia entre dos objetos puntuales para que puedan ser resueltos por el ojo (diámetro de la pupila, 2.0 mm) cuando los objetos están a 25 cm del ojo. Supóngase que la longitud de onda de la luz es de 5000 Å. y use el criterio de Rayleigh.

32-28. El telescopio de Monte Palomar tiene un espejo de 500 cm de diámetro. Encontrar el diámetro de un espejo reflector de un radio telescopio, funcionando a 21 cm de longitud de onda, que tenga el mismo poder de resolución que el telescopio de Palomar.

32-29. Una lupa con 5 cm de distancia focal y 1.0 cm de diámetro, se emplea para ayudar al ojo (diámetro de la pupila, 2.0 mm) a observar dos objetos puntuales muy juntos. Encontrar lo cerca que deben estar los objetos para que puedan resolverse en dos objetos diferentes. Supóngase que la longitud de onda de la luz es de 5000 Å y que el punto próximo del ojo es de 25 cm.

32-30. Una persiana tiene un "espaciamiento en la cratícula" de 4.5 cm y se usa como cratícula de difracción para ondas sonoras de 1.3 cm. ¿Bajo qué ángulo con respecto a la normal "a la cratícula" se encontrará el máximo de intensidad del primer orden?

Capítulo 33

POLARIZACION

Todos los tipos de ondas presentan efectos de interferencia y de difracción, pero sólo las ondas *transversales,* aquéllas en donde la perturbación propagada es una magnitud *vectorial,* presentan el fenómeno de *polarización.* El efecto de polarización puede ilustrarse, por ejemplo, por las ondas transversales que recorren una cuerda tensa. Aquí se tratará de las propiedades de polarización de las ondas electromagnéticas. Primero se considerará cómo la superposición de movimientos armónicos simples da lugar a la polarización lineal, circular y elíptica. Entonces, trataremos las propiedades de polarización en la radiación de un dipolo eléctrico oscilador. En seguida se regresará al significado de la polarización en la luz visible y los medios con que se logra.

33—1 SUPERPOSICION DE MOVIMIENTOS ARMONICOS SIMPLES

La Fig. 33-1 representa dos movimientos armónicos simples con la misma frecuencia y perpendiculares entre sí, pero con fases relativas variables, junto con su resultante. La oscilación a lo largo del eje X se representa con $\mathbf{E}_x$; la que está a lo largo de Y, con $\mathbf{E}_y$. La resultante de $\mathbf{E}_x$ y de $\mathbf{E}_y$ es $\mathbf{E}$. Estas oscilaciones pueden identificarse con el campo eléctrico de dos ondas electromagnéticas que se propagan perpendicularmente al plano del papel.*

En la Fig. 33-1*a* las dos oscilaciones están en *fase* y su resultante es también un movimiento armónico simple a lo largo de una recta. La onda correspondiente se dice que está *linealmente* polarizada, estando contenido en el plano de polarización los vectores del campo eléctrico resultante y la dirección en que se

*El campo magnético $\mathbf{B}$ es, por supuesto, siempre perpendicular al campo eléctrico $\mathbf{E}$; las direcciones de $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{I}$ (el vector intensidad de la onda electromagnética) están relacionadas por la fórmula de Poynting $\mathbf{I} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$, Ec. (30-26).

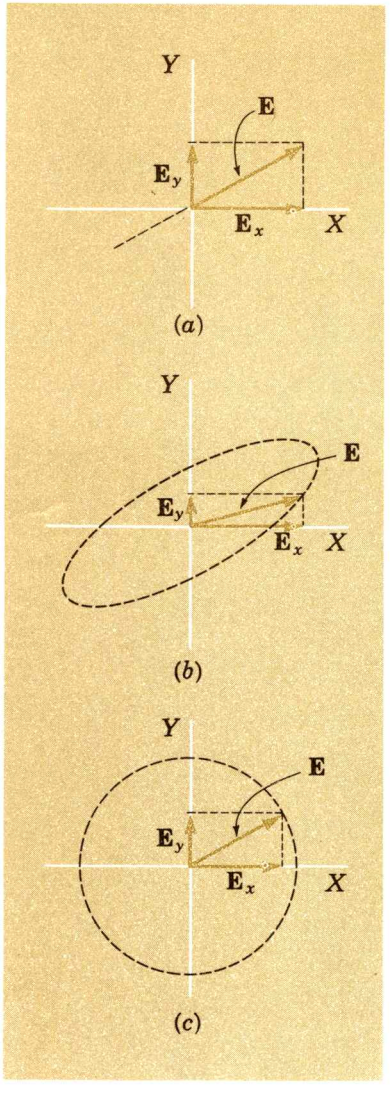


FIG. 33-1. Movimientos armónicos simples de la misma frecuencia y perpendiculares, con (*a*) ninguna diferencia de fase, (*b*) una diferencia finita de fase y (*c*) una diferencia de fase de 90°, con amplitudes iguales.

propaga la onda. El ángulo del campo resultante, con relación al eje X, depende de las amplitudes relativas de $\mathbf{E}_x$ y $\mathbf{E}_y$. A la inversa, una onda linealmente polarizada en una dirección oblicua con relación al eje X, es equivalente a dos ondas linealmente polarizadas que vibren en fase a lo largo de X y Y.

En la Fig. 33-1*b*, las dos oscilaciones componentes *no* están en fase y la punta del vector del campo eléctrico resultante $\mathbf{E}$, traza una elipse en el plano perpendicular a la dirección en que se propaga la onda. La orientación del eje mayor de la elipse depende tanto de la amplitud como de la diferencia de fase entre las dos oscilaciones. Por ejemplo, si las amplitudes son iguales y la diferencia de fase es de 45°, el eje mayor de 1 elipse hará un ángulo de 45° con el eje X. Una onda resultante producida por dos ondas polarizadas en sentido lineal y oscilando en direcciones perpendiculares una a otra, pero con diferencia de fase, se dice que están *elípticamente polarizadas.*

Supongamos ahora que los dos osciladores componentes están desfasados 90° y que son de igual amplitud, como en la Fig. 33-1*c*. La resultante $\mathbf{E}$ es ahora de magnitud constante y gira con la frecuencia de las ondas componentes, trazando un círculo la punta del vector $\mathbf{E}$: ésta es una onda *circularmente* polarizada. El sentido de rotación depende de las fases relativas de $\mathbf{E}_x$ y de $\mathbf{E}_y$. Si $\mathbf{E}_y$ se atrasa 90° con respecto a $\mathbf{E}_x$, el vector $\mathbf{E}$ gira en sentido levógiro y la onda correspondiente, supuestamente saliendo del papel, se dice que está circularmente polarizada a la izquierda. Por otro lado si $\mathbf{E}_x$ se atrasa 90° con respecto a $\mathbf{E}_y$, el sentido en que gira $\mathbf{E}$ es dextrógiro y la onda está circularmente polarizada hacia la derecha.

Los tres ejemplos representados en la Fig. 33-1 y otros más, pueden demostrarse con el movimiento de la bola de un péndulo en un plano horizontal. Con un péndulo simple de pequeña amplitud, la bola se mueve con movimiento armónico simple en una recta; como péndulo cónico se mueve en un círculo horizontal; su trayectoria más general es una elipse. Estos mismos diseños pueden verse en la pantalla de un osciloscopio cuando se aplican variaciones sinusoidales a las placas desviadoras horizontales y verticales.

33—2 PROPIEDADES DE POLARIZACION DE LAS ONDAS DE UN DIPOLO ELECTRICO OSCILADOR

Recordemos algunos resultados, encontrados en la Sec. 30-6, relativos a las ondas electromagnéticas radiadas por un dipolo eléctrico oscilador. Las ondas están generadas por cargas eléctricas de signo opuesto que oscilan en forma sinusoidal en una recta, el eje dipolar. A gran distancia del dipolo, los frentes de onda son esferas. Además, las ondas radiadas están *linealmente polarizadas*, estando el campo eléctrico en el plano que contiene al dipolo

eléctrico y a la dirección en que se propaga la onda. La magnitud del campo eléctrico *no* es el mismo en todas las direcciones: **E** es máximo en el plano perpendicular al eje del dipolo y cero a lo largo del eje dipolar, como se indica en la Fig. 33-2. Como la intensidad de radiación varía con E^2, no se emite energía en la dirección del eje del dipolo.

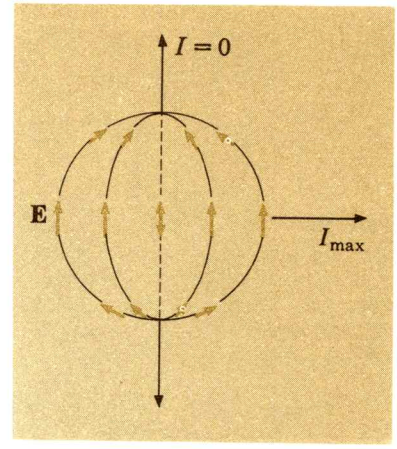


FIG. 33-2. Campo eléctrico radiado por un dipolo eléctrico oscilador.

La Fig. 33-3*a* representa un oscilador eléctrico dipolar que transmite ondas a un receptor eléctrico dipolar próximo. La orientación relativa de las dos antenas dipolares debe ser apropiada si la máxima energía debe transferirse del transmisor al receptor. Así, si el dipolo receptor es paralelo al campo eléctrico de la onda que le llega, este campo eléctrico debe impulsar las cargas a lo largo del eje del dipolo y producir una gran señal en el receptor; pero si la antena receptora se gira 90°, como en la Fig. 33-3*b*, no se recibirá señal.

Supongamos ahora que se coloca una pantalla, formada por una serie de alambres o barras paralelas, entre el transmisor y el receptor, los alambres conductores estando primero orientados en dirección paralela a la dirección de polarización de las ondas electromagnéticas, como se indica en la Fig. 33-4*a*. Como el campo eléctrico oscila en la dirección de los alambres obliga a oscilar a las cargas contenidas dentro de los alambres y la onda incidente es fuertemente absorbida por la reja de alambres, lo que se confirma porque el receptor recibe una señal reducida. Por otro lado, si la reja de alambre se gira 90°, de modo que el campo eléctrico incidente sea perpendicular a la dirección de "fácil absorción" por los alambres, las ondas electromagnéticas pasan por la reja con poca absorción, como se indica por la intensa señal en el receptor.

Estos efectos fundamentales, que son una contraparte exacta de las propiedades de polarización de las ondas de la luz ordinaria,

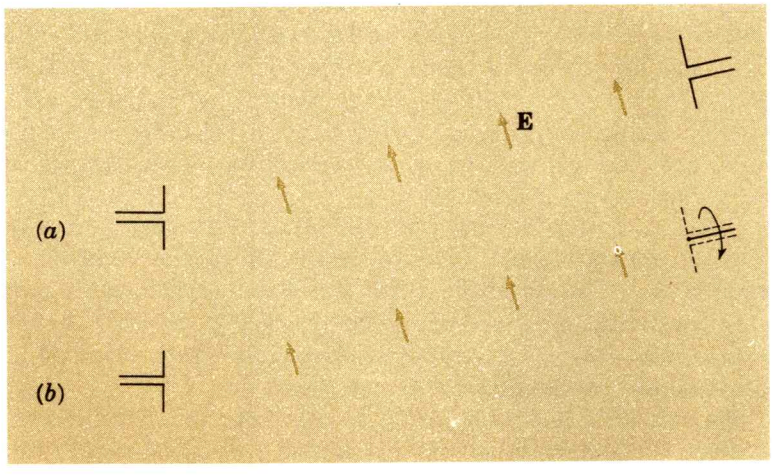


FIG. 33-3. (*a*) Un transmisor dipolar hacia un dipolo receptor. (*b*) No se recibe señal cuando los ejes de los dos dipolos son perpendiculares.

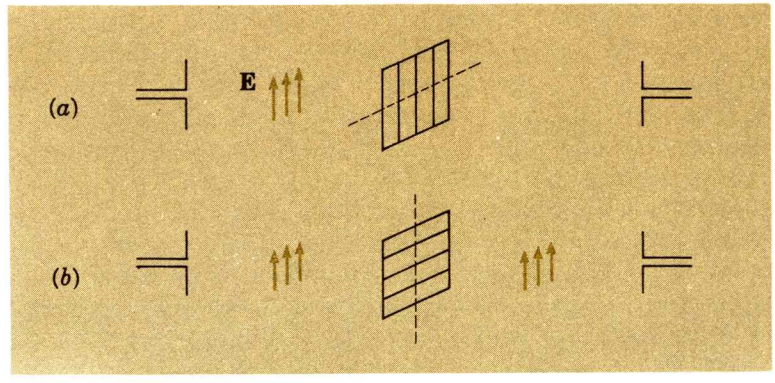


FIG. 33-4. (*a*) La señal no alcanza al receptor cuando los alambres de la rejilla son paralelos a la dirección de polarización de la radiación. (*b*) Cuando los alambres se hacen girar 90°, la señal alcanza al receptor.

pueden demostrarse con facilidad con microondas de unos pocos centímetros de longitud de onda.

33—3 POLARIZACION DE LA LUZ VISIBLE

Cuando un oscilador dipolar radio eléctrico se impulsa de modo continuo a una frecuencia constante, las ondas emitidas son coherentes y linealmente polarizadas: éste no es el caso para la luz visible. Excepto en el laser (Sec. 32-4), la luz visible de las fuentes ordinarias proviene de la radiación al azar, o aleatoria, de muchos átomos individuales, cada átomo radiando durante más o menos 10^{-8} s. No sólo la luz emitida es incoherente en el sentido de que las fases de los trenes sucesivos e individuales de luz no son las mismas, sino en que la dirección de polarización de la luz de los átomos individuales varía en todas las orientaciones posibles, por lo que el campo eléctrico en el plano perpendicular a la dirección de propagación, tiene también todas las direcciones posibles. Si se fuera capaz de alguna manera de medir la polarización de la luz de una fuente formada por muchos átomos radiadores, se encontraría primero una dirección de polarización para la luz de un átomo, otra dirección para la luz del siguiente y así sucesivamente. Los trenes individuales de ondas llegan sin embargo, con tan pequeños intervalos de tiempo (mucho menos que 10^{-8} s) que resulta imposible especificar la dirección de polarización de la luz en cada instante. Cuando la dirección de polarización cambia al azar y con rapidez, así que no puede seguirse en el tiempo, se dice que la luz está *no polarizada*.

Tres maneras de representar la luz no polarizada se muestran en la Fig. 33-5. Los diversos vectores del campo eléctrico, vistos desde la dirección de propagación de los trenes de onda separados, que representan orientados al azar en la Fig. 33-5*a*. Alternativamente, cada vector del campo eléctrico puede reemplazarse por sus componentes rectangulares; en consecuencia la luz no polarizada es equivalente a dos oscilaciones linealmente polarizadas del campo eléctrico, perpendiculares una a otra y de igual magnitud, que

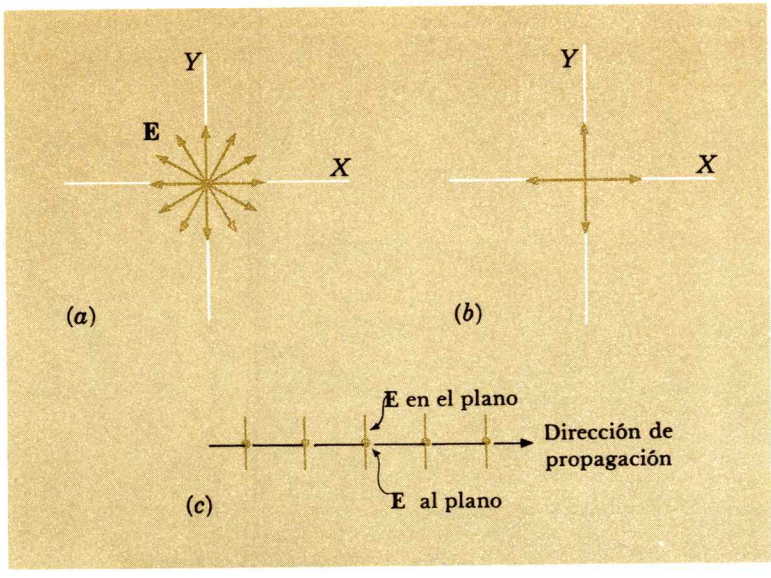


FIG. 33-5. Varias representaciones de ondas no polarizadas: (*a*) vectores del campo eléctrico de una onda no polarizada que entra o sale del plano del papel; (*b*) el campo equivalente (de fase aleatoria); y (*c*) una onda no polarizada con dos campos eléctricos mutuamente perpendiculares.

por conveniencia se ha supuesto que son horizontal y vertical; véase Fig. 33-5*b*. (Sin embargo debe recalcarse que las componentes X y Y *no* son continuas y coherentes por separado. Como los trenes de onda separados, en un haz de luz no polarizado, son aleatorios tanto en fase como en dirección de polarización, las dos componentes rectangulares fluctúan aleatoriamente en fase). Por último, se puede representar también la luz no polarizada como en la Fig. 33-5*c*: aquí, líneas perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación, representan a las dos ondas equivalentes linealmente polarizadas con fase aleatoria.

Una manera sencilla de producir la luz visible linealmente polarizada es hacer pasar un haz de luz no polarizado a través de una hoja del material conocido comercialmente como Polaroide. Este material consiste de moléculas de herapatita, que parecen agujas, alineadas sobre todo en una dirección; esta alineación se logra estirando la hoja flexible y transparente cuando el material se solidifica. En sus propiedades de polarización para la luz visible, una hoja de Polaroide es semejante a la reja de alambres paralelos empleada en microondas: con el campo eléctrico paralelo al eje mayor de las moléculas, la onda se absorbe y con el campo eléctrico perpendicular al eje mayor, la onda es casi transmitida por completo.

Es costumbre designar la dirección del campo eléctrico, cuando se transmite fácilmente dentro de la hoja polarizadora, como *dirección de polarización*. Entonces, si un haz no polarizado incide en una hoja polarizadora, sólo se transmiten las oscilaciones del campo eléctrico, paralelas a la dirección de polarización. Se han tomado las dos direcciones equivalentes y perpendiculares de pola-

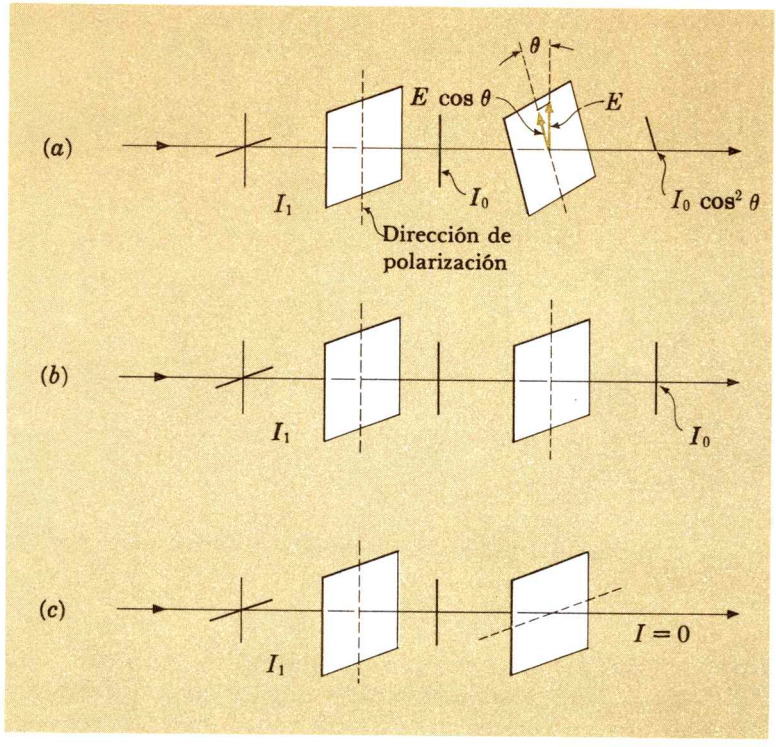


FIG. 33-6. Hojas polarizadoras cuyas direcciones de polarización difieren en (*a*) θ, (*b*) 0°, y (*c*) 90°.

rización en el haz no polarizado, paralelas y perpendiculares a la dirección de polarización del polaroide; véase la Fig. 33-6.

Supongamos ahora que la luz emergente, linealmente polarizada, incide en una segunda hoja polarizadora, cuya dirección de polarización hace un ángulo θ con relación a la luz que incide en ella. Se puede descomponer el campo eléctrico **E** en sus componentes rectangulares, $E \cos \theta$, paralela a la dirección de polarización del segundo polaroide y E sen θ, perpendicular a él. Sólo la componente $E \cos \theta$ se transmite; la otra se absorbe.

¿Cuál será, entonces, la intensidad de la luz después de pasar por el segundo polaroide? Recordando que la intensidad I varía como E^2, donde **E** es el campo eléctrico resultante de una onda electromagnética, se infiere que la intensidad transmitida está dada por

$$I = I_0 \cos^2 \theta \tag{33-1}$$

donde I_0 es la intensidad máxima correspondiente a $\theta = 0$.

Cuando $\theta = 90°$, esto es, cuando las direcciones de polarización de las dos hojas polarizadoras son perpendiculares, la intensidad transmitida vale cero. Dicho de otro modo, cuando el *polarizador* y el *analizador* son perpendiculares, hay *extinción*. La Ec. (33-1), que gobierna la intensidad a través de dispositivos *cualesquiera*

cada uno de los cuales transmite sólo una dirección de polarización, se denomina *ley de Malus,* en honor de su descubridor, E. L. Malus (1775-1812).

La dirección de polarización de un dispositivo polarizador, como una hoja polarizadora, no puede establecerse, a menos que exista un medio independiente de determinar la dirección de polarización de una sola onda. Esto se infiere de que los experimentos con dos hojas polarizadoras dan las direcciones *relativas* de polarización de dos hojas como diferentes en 90°, cuando no se transmite la luz a través de ellas; pero con este experimento sólo no encuentra la dirección de polarización de cualquiera de las hojas. El polaroide es un ejemplo bien conocido de un cierto número de materiales que presentan *dicroísmo,* la atenuación de una de las componentes de la polarización y la transmisión de la componente perpendicular. La turmalina, un cristal natural, es dicroico.

Ejemplo 33-1

Un haz de luz no polarizado pasa por una *sola* hoja de Polaroide. ¿Cuál es la intensidad del haz transmitido, comparada con la del haz incidente?

Si la luz incidente es en verdad no polarizada, entonces las dos oscilaciones perpendiculares equivalentes en quienes el haz puede ser descompuesto, mostrado en la Fig. 33-5*b*, deben ser de igual magnitud. Se puede escoger la orientación de una oscilación paralela a la dirección de polarización de la hoja polarizadora: esta componente es por completo transmitida y la otra es completamente absorbida; en consecuencia, la intensidad de la luz transmitida es la *mitad* de la de la luz incidente.

Ahora, si no hay absorción para las oscilaciones paralelas a la dirección de polarización de una hoja polarizadora, agregando una segunda hoja polaroide con su dirección de polarización paralela a la de la primera, *no* se producirá atenuación posterior en la intensidad de la luz. Sin embargo, este comportamiento ideal no se encuentra, porque existe absorción parcial, aun en la orientación preferente.

Ejemplo 33-2.

Un haz de luz no polarizado llega a dos hojas polarizadoras de tal modo orientadas que la segunda hoja no transmite luz. Una tercera hoja polaroide se introduce entonces entre las dos primeras hojas. ¿Cómo varía la intensidad de la luz transmitida con la orientación de la tercera hoja? (La intensidad, para todas las orientaciones ¡es *diferente* de cero!)

Las direcciones de polarización de las hojas 1 y 2 son perpendiculares entre sí. Supongamos que el ángulo, entre las direcciones de polarización de las hojas 1 y 3, sea θ. Entonces, como lo demuestra la Fig. 33-7*a*, si **E** es la magnitud del campo eléctrico transmitido a través de la primera hoja, la componente que emerge de la tercera (la colocada *entre* la primera y la segunda hoja) es $E \cos \theta$. En la Fig. 33-7*b* se observa que la componente que emerge de la última hoja tiene la magnitud $E \cos \theta \cos (90° - \theta) = E \cos \theta \operatorname{sen}$

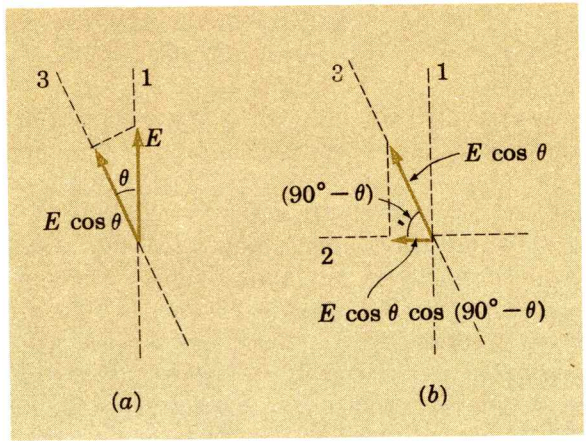


FIG. 33-7

θ. Así, la intensidad varía de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$I = I_0 \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta = \tfrac{1}{4} I \operatorname{sen}^2 2\theta$$

donde I_0 es la intensidad transmitida a través de la primera hoja. Nótese que existen *cuatro* posiciones en donde la intensidad es máximo: 45°, 135°, 225° y 315°. Nótese también que intercambiando las hojas 1 y 3 no cambia la dependencia de I con θ.

33—4 POLARIZACION POR DISPERSION

Imaginemos a una luz linealmente polarizada que incide en un cuerpo mucho más pequeño que la longitud de onda de la luz, por ejemplo, una molécula. El campo eléctrico de la onda incidente actúa sobre las cargas que están dentro de la molécula y obliga a los electrones a oscilar a lo largo de la dirección de polarización; pero las cargas que oscilan en una línea, constituyen un oscilador eléctrico dipolar y la molécula se convierte, en efecto, en un dipolo oscilador y radia en consecuencia, absorbiendo radiación de la onda incidente y volviendo a radiar esta energía en diversas direcciones. La onda incidente se dice que ha sido *dispersada* por la molécula.

Examinemos las propiedades de polarización de la radiación dispersada. La Fig. 33-8*a* representa una onda, linealmente polarizada que incide en un centro de dispersión. Recordando la polarización y las propiedades de intensidad de la radiación emitidas por un dipolo eléctrico oscilante (Fig. 33-2), puede verse que si la onda incidente está linealmente polarizada en el plano del papel y el eje del oscilador inducido es por tanto paralelo al campo de la onda incidente, *no* hay radiación dispersada a lo largo del eje del dipolo, esto es, dispersada a 90° en el plano del papel. La radiación dispersada está también polarizada en sentido lineal en el plano determinado por el eje del dipolo y la dirección de

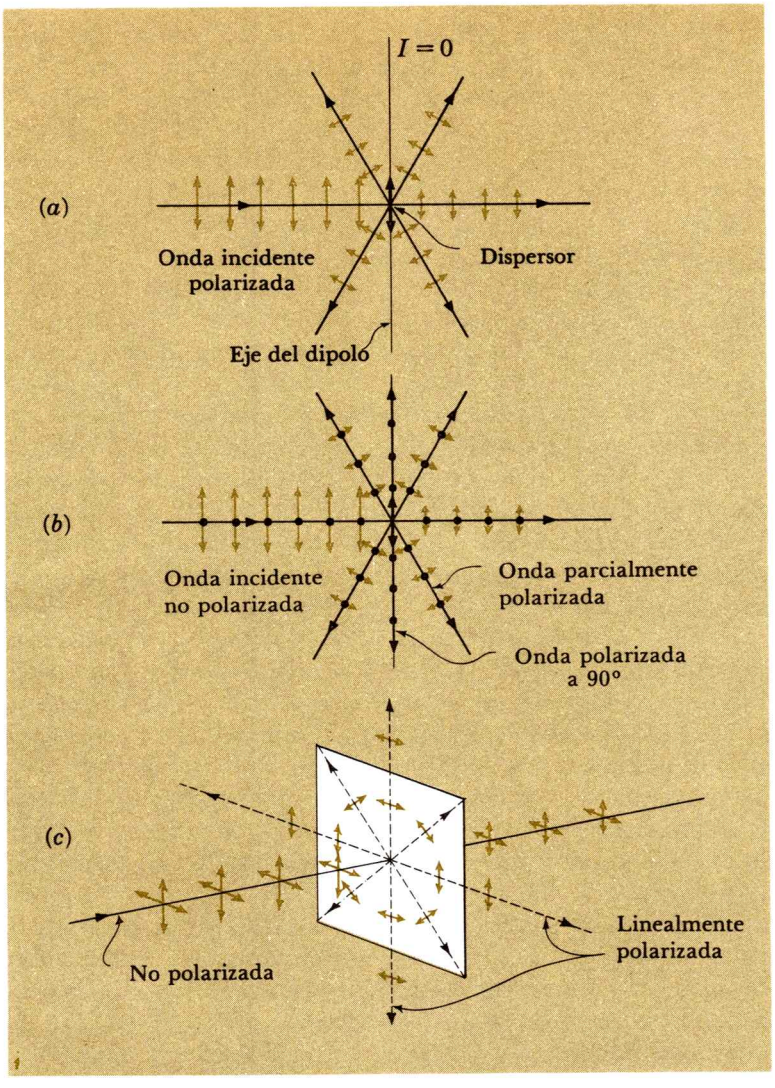


FIG. 33-8. (*a*) Dispersión de una onda linealmente polarizada por un dipolo eléctrico oscilador inducido. (*b*) y (*c*): Dispersión de una onda no polarizada.

propagación de la onda dispersada. La intensidad es máxima en el plano perpendicular al dipolo oscilante, pero disminuye hasta cero conforme la dirección de dispersión se aproxima a los 90°.

La Fig. 33-8*b* representa el caso más general: luz no polarizada que incide en un centro de dispersión. Las oscilaciones del dipolo están tanto en el plano del papel, como perpendiculares a él. La radiación es ahora dispersada en *todas* direcciones. La radiación dispersada a 90° en el plano del diagrama está polarizada en sentido linealmente por completo y en parte polarizada en las demás direcciones (excepto en la dirección en que se mueve la onda incidente). Esto se representa también en la Fig. 33-8*c*.

Los electrones en un átomo o en una molécula típicos, tienen frecuencias de oscilación natural que corresponde a la luz ultravio-

leta. Cuando la luz visible incide en un centro de dispersión atómico o molecular, impulsa a los electrones a oscilar en una frecuencia que es menor que la frecuencia natural de oscilación, o frecuencia resonante. Por supuesto, la luz violeta se aproxima más a la frecuencia natural que la luz roja y debe esperarse que siendo las demás cosas iguales, la luz azul sea dispersada en forma más efectiva que la roja. Un análisis detallado demuestra que la intensidad de la radiación dispersada varía como la cuarta potencia de la frecuencia. Como los extremos del espectro visible difieren por un factor de aproximadamente 2, la intensidad de la luz violeta dispersada es, a groso modo, 2^4, o 16 veces que la de la luz roja.

Consideremos la dispersión de la radiación visible del Sol por las partículas y moléculas en la atmósfera de la Tierra. El cielo parece azul sobre nuestra cabeza, porque el azul es dispersado en mayor grado por las moléculas de aire y por las partículas de polvo, que la luz roja (el mismo fenómeno produce el aspecto azulado de un salón lleno de humo de cigarro). Por otra parte, mirando directamente al Sol, en especial a través de una atmósfera de gran espesor y llena de polvo, se observan colores predominantes distintos al azul, ya que la luz azul ha sido dispersada de la dirección delantera. Como podría esperarse, la luz azul dispersada en el cielo está, al menos, en parte polarizada y puede usarse las propiedades de polarización de la luz dispersada para orientarse con ella. En realidad las abejas usan este esquema de "navegación" u orientación; cada uno de los muchos ojos de la cabeza de la abeja pueden detectar el estado de polarización de la luz dispersada del Sol.

El efecto de polarización entra también en la *doble* dispersión de las ondas electromagnéticas. Supongamos que luz no polarizada incide en un primer dispersor y que la radiación dispersada a 90° excita entonces a un segundo dispersor: nos interesa la intensidad de esta luz doblemente dispersada. Como se indica en la Fig. 33-9, la intensidad de las ondas dispersadas por el segundo centro de dispersión vale cero en una dirección perpendicular al plano que contiene al haz incidente y los dos centros de dispersión. Este

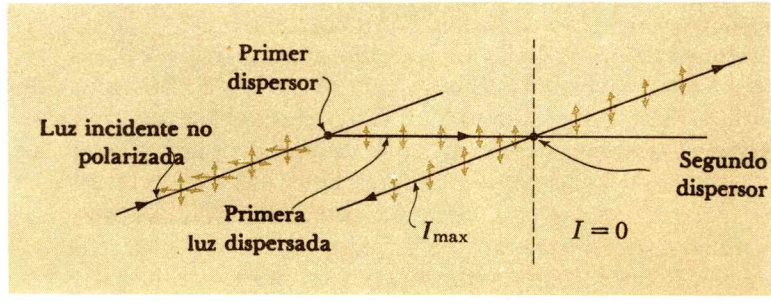


FIG. 33-9. Características de polarización en una doble dispersión.

efecto fue observado en los rayos X por C. G. Barkla (1877-1944) en 1906, estableciéndose por tanto que los rayos X son ondas transversales.

Además de las ondas polarizadas debidas a la dispersión de la radiación electromagnética, las ondas polarizadas pueden producirse también en la luz que se refleja y se refracta en la interfase entre dos medios, o en la transmisión a través de un medio refractivo anisotrópico.*

PROBLEMAS

33-1. Un movimiento armónico simple, a lo largo del eje Y, adelanta a una oscilación armónica simple de la misma frecuencia y amplitud, en el eje de las X, en 45°. Encontrar la orientación del eje mayor de la elipse producida por la superposición de las dos oscilaciones.

33-2. Dos movimientos armónicos simples, en dos direcciones perpendiculares, se describen con $X = A$ sen ωt y $Y = B$ sen $(\omega t + \delta)$, donde A, B, ω y δ son constantes. (*a*) Demostrar que cuando $\delta = 0$ pero $A \neq B$, la trayectoria trazada en el plano XY es una recta inclinada con relación a los ejes X e Y. (*b*) Demostrar que en el caso general, cuando $\delta \neq 0$, la trayectoria es una elipse, cuyo eje de simetría no coincide con los ejes X y Y.

33-3. Encontrar el ángulo entre los ejes de polarización de dos hojas polarizadoras ideales, si la intensidad de la luz transmitida es el 25.0% de la intensidad incidente en la primera hoja.

33-4. La dirección de polarización de un haz luminoso, linealmente polarizado, se hace girar 90°. Encontrar la intensidad del haz resultante si se usan (*a*) dos hojas polarizadoras cada una de las cuales hace girar la dirección de polarización en 45° y (*b*) 90 hojas polarizadoras, cada una de las cuales hace girar la dirección de polarización en 1.0°.

33-5. Algunos anteojos para el sol estan hechos de Polaroide. Las hojas polarizadoras tienen el propósito de disminuir la intensidad de la luz reflejada por las superficies horizontales. El eje de polarización del polaroide, ¿deberá estar horizontal o vertical?

33-6. El Sol está en el oriente. Un hombre mira al cielo encima de su cabeza a través de una hoja polarizadora. Encontrar para qué orientación del eje de polarización de la hoja, este-oeste o norte-sur, la intensidad de la luz es un mínimo.

33-7. Luz no polarizada que se mueve en sentido vertical hacia arriba, es dispersada. Parte de esta luz dispersada se mueve hacia el norte y es entonces dispersada por segunda vez. ¿En qué dirección será cero la intensidad de la luz doblemente dispersada?

33-8. Demostrar que cualquier onda electromagnética, polarizada en sentido lineal, puede considerarse como la superposición de dos ondas circularmente polarizadas, una dextrógira y la otra levógira.

33-9. Demostrar que cuando una onda electromagnética, circularmente polarizada actúa sobre un absorbedor, éste recibe una torca, por lo que dicha onda lleva un ímpetu angular.

33-10. Una luz circularmente polarizada atraviesa una hoja polarizadora ideal. ¿Qué fracción de la intensidad incidente se absorbe por la hoja?

---

*Véase R. T. Weidner y R. L. Sells, *Elementary Classical Physics* 2a. Ed., Secs. 40-5 y 40-7, Allyn and Bacon, 1973.

Capítulo
34

LA CINEMATICA RELATIVISTA: EL ESPACIO Y EL TIEMPO

La teoría de la relatividad, que fue creación original de Albert Einstein (1879-1955) en 1905, está catalogada como uno de los grandes adelantos de la física del siglo XX. Mientras que la teoría cuántica incorpora a la física al dominio de "lo muy pequeño", la teoría de la relatividad incorpora a la física al dominio de "lo muy rápido".

Aunque con frecuencia se le considera esotérica y recóndita, los aspectos principales de la teoría de la relatividad se pueden establecer con una complejidad matemática mínima con base en dos postulados fundamentales. Ya no se puede considerar que la teoría de la relatividad está basada en conjeturas; hasta sus predicciones más osadas han sido confirmadas experimentalmente. Muchas de éstas entran en conflicto con nuestras concepciones basadas en el sentido común; de hecho, la teoría de la relatividad demuestra que la física clásica conduce a resultados totalmente equivocados cuando se aplica a fenómenos que ocurren a altas velocidades. En consecuencia, debemos prepararnos para reexaminar en forma crítica las suposiciones más obvias acerca de la naturaleza del espacio y del tiempo y para revisarlas minuciosamente.

En este capítulo trataremos exclusivamente la cinemática relativista —el espacio, el tiempo, las velocidades y su relación, que resulta del postulado de la constancia de la rapidez de la luz—. En el próximo capítulo se investigarán las implicaciones que tiene la teoría de la relatividad en la dinámica —el ímpetu, la energía, la masa y otras cantidades mecánicas— que resultan del postulado de la invariancia de las leyes de la física.

34—1 LA CONSTANCIA DE LA RAPIDEZ DE LA LUZ

Todos los observadores obtienen el mismo valor constante c al medir la rapidez de la luz en el vacío. Este es el postulado básico en el cual descansa la cinemática relativista. Probablemente, esta suposición fue hecha por Einstein, en su formulación de la teoría, sin un conocimiento directo de la evidencia experimental que sustentaba este aparentemente extraño postulado.

El postulado es extraño en el hecho de que asegura que las medidas de *todos* los observadores resultan en el mismo valor constante de la rapidez de las ondas electromagnéticas en el espacio vacío, independientemente del estado de movimiento del observador o de la fuente de radiación electromagnética. Con respecto a este comportamiento, la propagación de las ondas electromagnéticas es radicalmente diferente de la propagación de cualquier otra onda. Por ejemplo, considérense las ondas de sonido a través del aire, cuya rapidez, a temperatura ambiente, es de 340 m/s *con respecto al medio* (aire) en el que se propagan tales ondas. Consecuentemente, si un observador se encuentra en reposo en el aire, determinará que la perturbación de la presión debida al pulso de sonido recorre una distancia de 340 m en 1 s. Pero si un observador se mueve con respecto del aire a, digamos, 40 m/s, en la misma dirección que aquella en la que avanza el pulso, determina que la rapidez del pulso de sonido es, con respecto a él, de 340 − 40 = 300 m/s. Por el mismo razonamiento, si un observador viaja hacia la fuente con la misma rapidez, el pulso avanza con un ritmo, con respecto a él, de 340 + 40 = 380 m/s. Solamente si el observador se encuentra en reposo con respecto al medio en el que se propagan las ondas de sonido, ocurre que mide una rapidez de 340 m/s.

Ahora bien, si se tuviera una situación análoga en la propagación de las ondas electromagnéticas, en primer lugar se tendría que suponer, necesariamente, un medio en el cual se propagará la luz. Este presunto medio —conocido en el pasado como *éter*— constituiría el único sistema de referencia en el que la rapidez de la luz sería c. Un observador en movimiento con respecto al éter, (por ejemplo, un observador fijo en la Tierra en su movimiento en torno al Sol) necesariamente determinaría una rapidez de la luz mayor que, o menor que, c por una cantidad igual a su rapidez con respecto del éter. Solamente si estuviera fijo con respecto del éter encontraría que la rapidez de la luz es exactamente c. En resumen, si las ondas electromagnéticas fueran como las demás ondas, si su rapidez fuera c sólo cuando la midiera un observador en reposo con respecto del medio (el éter) en el que se propagan las ondas, entonces la rapidez medida de la luz sería diferente de c cuando el observador se encontrara en movimiento con respecto al sistema de referencia único en el que el éter se hallara en reposo. Por otra parte, si la rapidez de la luz es siempre c, independientemente del observador o de la fuente luminosa, entonces la propa-

gación de las ondas electromagnéticas es fundamentalmente diferente a la de cualquier otro tipo de ondas y no hay necesidad de suponer la existencia de un éter y el postulado básico de la relatividad referente a la constancia de la rapidez de la luz, que es realmente un hecho de la naturaleza.

Debido a la gran magnitud de c (3.00×10^8 m/s) es particularmente difícil obtener una evidencia experimental de que la rapidez de la luz es en verdad independiente de cualquier circunstancia. La medición de la rapidez de la luz presenta una gran dificultad; el medir un cambio pequeño en c es en extremo difícil y requiere de procedimientos experimentales refinados. Históricamente, la primera prueba experimental significativa fue hecha por A. A. Michelson (1852-1931)* y por E. W. Morley (1838-1923) en un experimento famoso relacionado con el éter que Michelson y Morley realizaron en 1887. La base de éste y de otros experimentos equivalentes posteriores es la siguiente: si existe un éter y éste no se halla rígidamente unido con la Tierra, entonces ésta, debido a su movimiento orbital en torno al Sol con una rapidez de 3×10^4 m/s, en algún momento del año se moverá a través del éter, con esta misma rapidez. La rapidez de la luz a lo largo (o en contra) de la dirección del movimiento diferiría de c en 3×10^4 m/s, que es una parte en 10^4, en tanto que la rapidez de la luz que estuviera dirigida, en ese momento, perpendicularmente a la dirección de movimiento, no se vería afectada. En consecuencia, el tiempo de ida y vuelta de un pulso luminoso a favor y en contra del movimiento (o viceversa) diferiría del tiempo de ida y vuelta de un pulso luminoso que recorriera la misma distancia pero perpendicularmente a la dirección del movimiento (véase el Prob. 34-1). Esta pequeña diferencia en tiempos entre las dos rutas fue medida en forma indirecta por Michelson y Morley examinando los efectos de interferencia entre dos haces luminosos perpendiculares en un interferómetro de Michelson (Sec. 32-7) y recombinados posteriormente; de manera más específica, buscando un corrimiento en el patrón de interferencias proveniente de la rotación del instrumento y del intercambio correspondiente entre la ruta a favor y en contra del movimiento y la ruta perpendicular al mismo.

El experimento de Michelson y Morley resultó en un efecto nulo: no hubo efecto atribuible al éter; por lo tanto, no había necesidad de suponer la existencia de un éter. Se trata, por consiguiente, de una demostración de la constancia de la rapidez de la luz para todos los observadores —como también lo han demostrado todos los experimentos posteriores análogos, ya sea que se hayan hecho con luz visible de fuentes ordinarias o con láseres o con ondas de radio.

---

*Michelson fue el primer norteamericano ganador del premio Nóbel de física.

No sólo los experimentos confirman que el postulado de la constancia de la rapidez de la luz es correcto, sino que la teoría electromagnética también lo sugiere. Recordemos que la rapidez de la luz queda expresada, en el electromagnetismo clásico, como $c = 1/(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$ (véase la Sec. 30-3), en donde ε_0 y μ_0 son constantes fundamentales que miden, respectivamente, las intensidades de las interacciones eléctrica y magnética, en el espacio vacío, entre partículas cargadas eléctricamente. Estas constantes sólo pueden identificarse con las propiedades de un éter (de un espacio que si no fuera por el éter estaría vacío) a través de una argumentación complicada.

Para apreciar las profundas implicaciones, por no decir alarmantes, que tiene la aseveración de que la rapidez de la luz es una constante única de la naturaleza, considérese la siguiente situación: supongamos que una fuente luminosa adquiere, de alguna manera, un movimiento con una rapidez extraordinariamente grande de 0.9 c hacia un observador. Entonces, si el postulado fundamental de la teoría de la relatividad es válido el observador determina que un pulso de radiación electromagnética se acerca a él con una rapidez que no es de 1.9 c, sino que es la rapidez única c. O bien, si el observador se aleja de la fuente luminosa con una rapidez de 0.9 c, vuelve a medir que la rapidez de la luz es c con respecto a él y no $c - 0.9\,c = 0.1c$.

34—2 LA DILATACION DEL TIEMPO

Por la rapidez de una partícula, o de una señal, se quiere decir, naturalmente, el intervalo espacial que recorre dividido entre el intervalo de tiempo correspondiente, ambos medidos por el mismo observador. Pero si la luz tiene una rapidez única respecto a *todos* los observadores, entonces la constancia de c implica que los intervalos de espacio y de tiempo, cuya relación es c, no pueden tener valores únicos para todos los observadores. En otras palabras, si c es absoluta, los intervalos de espacio y de tiempo no pueden ser absolutos, sino que tendrán valores que dependerán en alguna forma del estado de movimiento de un observador.

En la física prerrelativista el carácter absoluto del espacio y del tiempo se consideró axiomático y evidente. Si un observador mide la distancia entre dos puntos separados por, digamos 1 m, los demás observadores concuerdan en que la distancia de separación es exactamente de 1 m. En forma análoga, si un observador determina con un reloj un intervalo de tiempo de, digamos 1 s, los demás observadores también medirán un intervalo de tiempo de exactamente 1 s. Pero estos hechos aparentemente obvios y que en verdad están de acuerdo con la experiencia para todas las velocidades ordinarias, se deben reexaminar a la luz de la constancia de c y, de hecho, se determinará que son fundamentalmente incorrectos.

En lo subsecuente nos referiremos a dos observadores prototipo en movimiento relativo con velocidad constante; su distancia de separación aumentará (o decrecerá) con un ritmo constante. De hecho, lo único que podemos decir es que se encuentran en movimiento *relativo* y no si uno o el otro, está en movimiento o en reposo. Tal como lo indica la ley de inercia (primera ley de Newton), aun en la física clásica no existe una distinción fundamental entre los estados de reposo y de movimiento.

Denotemos por S a un observador en un sistema de referencia inercial; el símbolo S también denotará al sistema de referencia mismo. Se denotará por (x, y, z, t) a las tres coordenadas espaciales y a la coordenada temporal necesarias para especificar un evento en este sistema de coordenadas. En forma más específica, podemos pensar que el observador S tiene una regla con la que mide la localización (x, y, z) de puntos en un sistema, con respecto a su origen y que también posee un reloj con el que determina el tiempo t de cualquier evento en este sistema de referencia. (Estrictamente se debe pensar que S consiste en un número infinito de observadores distribuidos a través de todos los puntos del espacio en el sistema de referencia S; cada uno de estos observadores tiene un reloj que registra el tiempo al cual ocurre un evento en su localización particular; los relojes de todos los observadores se sincronizan y calibran para que funcionen de manera idéntica.)

Denotemos con S' al segundo observador; las coordenadas espaciales y temporal que se registran en este sistema de referencia se denotarán con (x', y', z', t'). *No* se pueden hacer suposiciones a priori respecto a la relación entre x y x', t y t', etc. El sitema de referencia S' se mueve con velocidad constante $\mathbf{v}$ respecto a S, tal como se muestra en la Fig. 34-1*a*. (Por simplicidad, supondremos que los ejes X y Y de los dos sistemas están alineados.) Pero si S' tiene una velocidad constante hacia la derecha (a lo largo del eje X) respecto a S, de magnitud v, entonces S tiene una velocidad constante hacia la izquierda, respecto a S', que también es de magnitud v. (Véase la Fig. 34-1*b*.)

Se desea obtener la relación de los intervalos de tiempo que ocurren entre el mismo par de eventos según las medidas de S y de S'. Considérese el siguiente experimento hipotético. El observador S tiene un tubo de longitud H que se encuentra en reposo y alineado con el eje Y (perpendicularmente a la dirección del movimiento relativo entre S y S'). El observador S envía un pulso luminoso desde la base del tubo, a lo largo de su eje, hasta que llega a un espejo en el extremo superior que entonces lo refleja hacia la base. Véase la Fig. 34-2. Así, la emisión del pulso luminoso y su regreso posterior a la base ocurren en *el mismo* sitio en el marco de referencia S. Para resaltar el hecho de que el intervalo de tiempo transcurrido desde la partida hasta el regreso del pulso luminoso es medido por un observador en *reposo* respecto al tubo, indicamos que el intervalo de tiempo medido por S es T_0. Como el

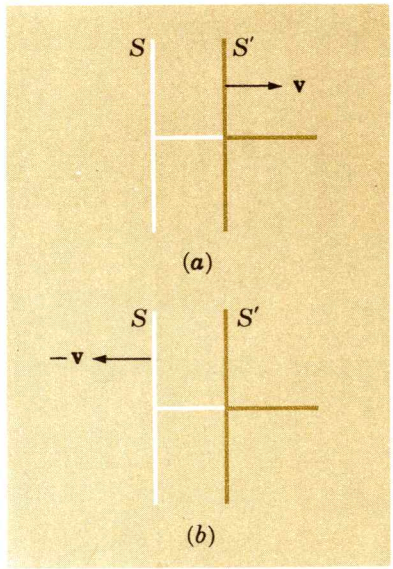


FIG. 34-1. (*a*) El sistema de referencia S' tiene una velocidad v con respecto a S; (*b*) el sistema de referencia S tiene una velocidad $-\mathbf{v}$ con respecto a S'.

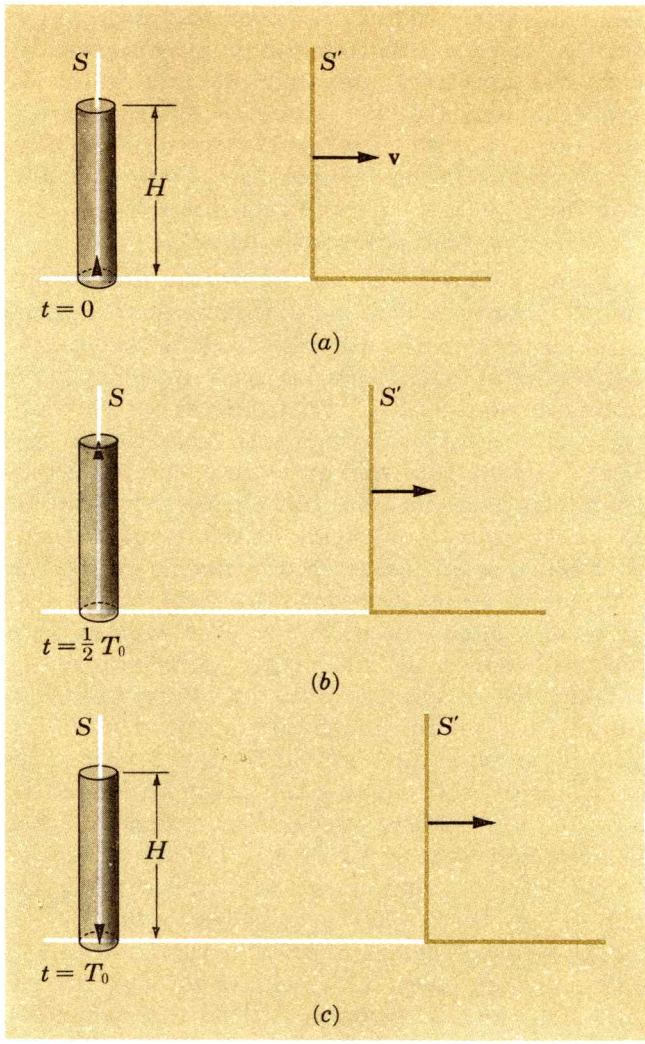


FIG. 34-2. Un pulso luminoso viaja verticalmente hacia arriba y después hacia abajo, a lo largo de un tubo de altura H en reposo en el sistema de referencia S. El pulso (*a*) es emitido en la base en $t = 0$, (*b*) llega al extremo superior en $t = \frac{1}{2}T_0$ y (*c*) regresa a la base en $t = T_0$.

pulso luminoso recorre la distancia ($2H$) de ida y vuelta en un intervalo T_0 con una rapidez c, entonces

$$c = \frac{2H}{T_0} \tag{34-1}$$

Ahora consideremos los mismos eventos según los mira el observador S'. Con respecto a S', el sistema de referencia S y el tubo viajan hacia la izquierda con una rapidez v. La trayectoria seguida por el pulso luminoso consiste ahora de dos líneas oblicuas. (Ver la Fig. 34-3.) Tal como lo observa S' el pulso no regresa al mismo sitio en *su* sistema de referencia. De hecho, la longitud total de la trayectoria observada por S' es *mayor* que la observada por S' ($2H$). Pero la rapidez del pulso luminoso debe ser *la misma* para

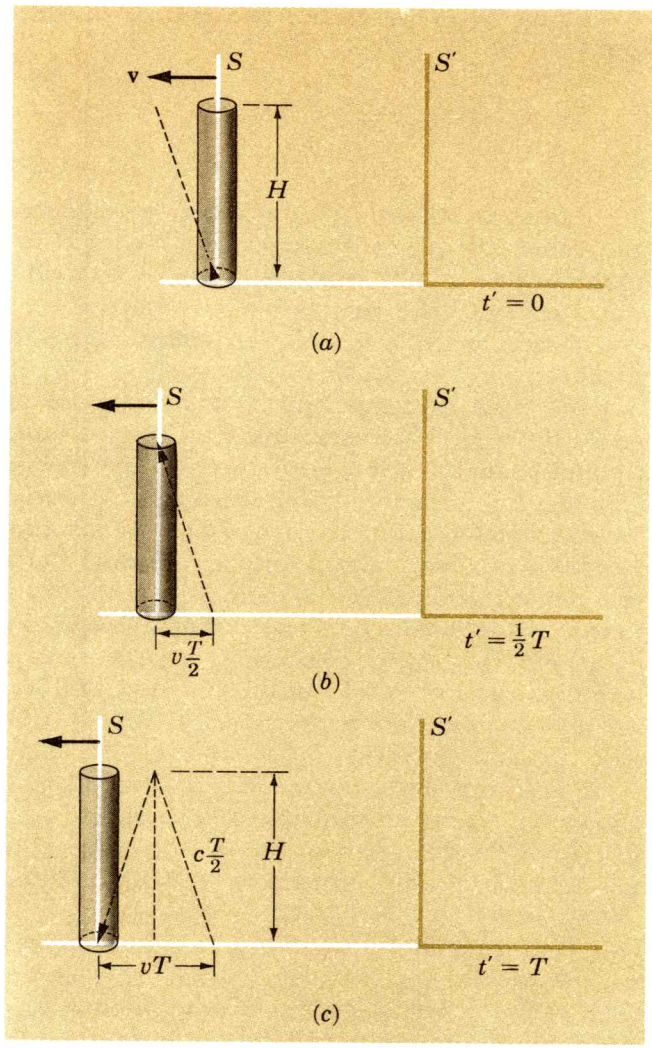


FIG. 34-3. Los mismos eventos de la Fig. 34-2, pero ahora observados en el marco de referencia S'. El pulso (*a*) parte de la base en $t' = 0$ (*b*) llega a la parte superior en $t' = \frac{1}{2}T$ y (*c*) regresa a la base en $t' = T$, todos estos registros según el reloj del observador S'. Durante el recorrido de ida y vuelta, el tubo avanza hacia la izquierda, con respecto a S', una distancia vT. La rapidez del pulso luminoso en las dos trayectorias oblicuas también es c respecto a S'.

los dos observadores. Se sigue entonces, de inmediato, que el intervalo de tiempo T registrado por S', desde la salida hasta el regreso del pulso a la base del tubo, debe ser *mayor* que T_0. Tal como lo muestra la Fig. 34-3, el tubo se mueve hacia la izquierda una distancia total vT en el intervalo T, o una distancia $vT/2$ en el intervalo $T/2$. Durante el medio intervalo de tiempo $T/2$, el pulso luminoso cubre la distancia oblicua $cT/2$. Por lo tanto, de la geometría del triángulo de la Fig. 34-3, las distancias están relacionadas por

$$H^2 + \left(\frac{vT}{2}\right)^2 = \left(\frac{cT}{2}\right)^2$$

Al utilizar (34-1) para eliminar a H* de la ecuación anterior, se obtiene

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{34-2}$$

Esta es la ecuación fundamental de la *dilatación del tiempo*. Es primordial que se entienda claramente el significado de los términos que en ella ocurren. T_0 es el intervalo de tiempo que transcurre entre dos eventos que ocurren en el *mismo sitio*, medido por el reloj de un observador en reposo en ese sitio; T_0 recibe el nombre de *tiempo propio* (o tiempo en reposo). Por otra parte, T es el intervalo de tiempo entre el *mismo par de eventos* registrado en el reloj de un observador que viaja con una rapidez v respecto al sitio en el cual ocurren los eventos (y que, por lo tanto, observa que los dos eventos ocurren en sitios *diferentes* respecto a su sistema de referencia). Los relojes de los observadores, comparados *en reposo* relativo, indican lecturas *idénticas*. La Ec. (34-2) muestra que, en general, $T > T_0$; respecto a un observador en movimiento, los intervalos de tiempo aumentan o se dilatan. Este efecto es un resultado de la constancia de la rapidez de la luz; no es atribuible a una causa física, sino que refleja las propiedades relativistas del tiempo (y del espacio). Por lo tanto, a este fenómeno se le llama dilatación del *tiempo*.

Los efectos de la dilatación del tiempo son importantes sólo cuando la rapidez se aproxima a la de la luz. Por ejemplo, si $v = 0.1c$ (una rapidez aproximadamente 4000 veces mayor que la de un satélite que orbita en torno a la Tierra), entonces $T = T_0/[1 - (0.1)^2]^{1/2} = T_0/\sqrt{0.99} = 1.005T_0$, y T es mayor que T_0 solo en 1/2%. Sin embargo, cuando la rapidez se aproxima a c, los efectos son dramáticos. Supongamos que $v = 0.98c$, entonces $T = T_0/[1 - (0.98)^2]^{1/2} = T_0/\sqrt{0.04} = 5T_0$, y T es mayor que T_0 por un factor de cinco. En esta forma, si se coloca el mecanismo de tiempo de una bomba (cuando se encuentra en reposo) para que explote en una hora y a continuación se desplaza con una rapidez de $0.98c$, entonces un observador que la ve pasar con esta rapidez encontrará que, tal como la mide su reloj (y los relojes de todos los observadores estacionados en su marco de referencia), la bomba tardará 5 h en explotar.

Nadie ha observado efectos de dilatación del tiempo en bombas que se muevan con gran rapidez. Pero *se ha* observado un efecto exactamente análogo y con ello se ha confirmado el efecto de la dilatación del tiempo, en experimentos con partículas suba-

*Se supone que la distancia vertical H, perpendicular a la dirección del movimiento relativo de los dos marcos de referencia, es la misma para los dos observadores. Aunque se verá que los intervalos espaciales a lo largo de la dirección del movimiento relativo no son los mismos para todos los observadores (Sec. 34-3), las distancias transversales permanecen inalteradas.

tómicas inestables que se mueven con gran rapidez, tales como los muones. Un muón se crea (nace) cuando decae otra partícula inestable (el pión); un muón decae (muere) a su vez en un electrón (además de dos partículas sin carga y sin masa llamadas neutrinos). No se puede especificar cuándo nace o muere un muón, pero sí se puede indicar con bastante precisión la vida *promedio* de un número *grande* de muones. La vida media de un muón es de 1.52×10^{-6} s. Esto significa que si en un instante inicial dado existe un número grande de muones en reposo, después de transcurrido un tiempo de 1.52×10^{-6} s habrán sobrevivido exactamente la mitad de ellos, en tanto que la otra mitad habrá decaído. Por otra parte, si un gran número de muones (digamos unos 10 000) se encuentran en movimiento con una rapidez $v = 0.98c$, entonces el número de muones sobrevivientes es de 5 000 sólo después de que el tiempo transcurrido sea de $T = 5T_0 = 5(1.52 \times 10^{-6}\ \text{s}) = 7.60 \times 10^{-6}$ s. Los muones en movimiento con gran rapidez viven notablemente más que los muones en reposo. El aumento en el tiempo de vida, proveniente de la dilatación del tiempo, puede medirse directamente notando que si los muones rápidos viven más que los muones en reposo, viajarán distancias correspondientemente mayores antes de decaer*.

Como el tiempo de vida aumentado de una partícula inestable en movimiento con una gran rapidez refleja las propiedades del tiempo mismo y no las de algún mecanismo físico, la dilatación del tiempo se aplica a cualquier proceso que ocurra en el tiempo, incluyendo los que ocurren en los sistemas bioquímicos. Considérese la famosa paradoja de las gemelas presentada por primera vez, por Einstein. Supongamos que existen dos gemelas idénticas. Una de ellas permanece en tierra en tanto que la otra realiza un viaje de ida y vuelta, en una nave espacial, a algún punto distante con una rapidez suficientemente grande como para que los efectos de la dilatación del tiempo sean importantes y, finalmente, se reúne con su gemela. El tiempo de la gemela viajera se dilata y cuando las hermanas, al reunirse, comparan sus edades, concuerdan en que la que permaneció en tierra es mayor que la gemela viajera, ya que, para esta última, el efecto de dilatación del tiempo ha producido un periodo más corto de tiempo transcurrido. (Sin embargo, este efecto *no* es recíproco; la gemela que permanece en tierra ha tenido una historia tranquila, en tanto que la viajera experimenta tres impactos fuertes: el primero, en el despegue súbito de la nave espacial; el segundo, al quedar repentinamente en reposo al llegar a su destino distante y de inmediato reacelerar para iniciar el viaje de regreso; el tercero, cuando la nave llega a la Tierra y súbitamente queda en reposo.)

*En realidad, debido al fenómeno de dilatación del tiempo, se puede observar un considerable número de muones rápidos a nivel del mar, creados en las regiones superiores de la atmósfera terrestre cuando algunas partículas energéticas del espacio exterior (rayos cósmicos) inciden en la Tierra. Sin este efecto, la mayoría de los muones no habrían sobrevivido al decaimiento tanto como para llegar al fondo de la atmósfera al nivel del mar.

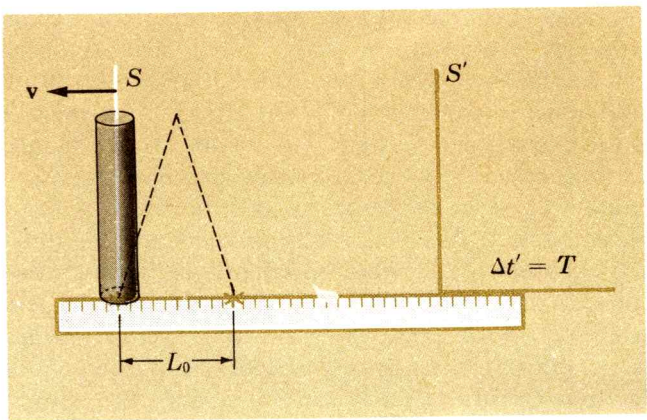


FIG. 34-4. El pulso luminoso de la Fig. 34-2 produce quemaduras visibles sobre una regla sujeta al marco de referencia S' cuando parte y cuando regresa a la base del tubo. La distancia de separación es L_0 y el intervalo de tiempo trasncurrido es T, con respecto a S'.

34—3 LA CONTRACCION DEL ESPACIO

En la misma forma en la que el intervalo de tiempo entre dos eventos depende del estado de movimiento de un observador, un intervalo espacial o longitud, también puede depender del estado de movimiento del observador, debido a la constancia de c.

Utilizaremos el mismo argumento anterior (Figs. 34-2 y 34-3) para analizar el efecto de la contracción del espacio. En el sistema de referencia S se encuentra un tubo, en reposo, a través del cual viaja, de ida y vuelta, un pulso luminoso. Tal como lo observa S', el tubo y el observador S viajan hacia la izquierda con una rapidez v (Fig. 34-4). Para especificar más estos eventos, supongamos que el observador S' coloca su regla a lo largo de su eje X' y que el pulso luminoso deja una marca en la regla, cuando parte de la base del tubo y hace una segunda marca cuando regresa a la misma. Designemos por L_0 a la distancia entre estas dos marcas sobre la regla. El subíndice cero se utiliza para resaltar el hecho de que esta longitud la mide el observador S', que está en *reposo* relativo con respecto a su regla.

Como se indicó anteriormente, el intervalo de tiempo transcurrido entre los instantes en los que se producen las marcas, medido por S', es el tiempo dilatado T. Como el marco de referencia S se mueve hacia la izquierda, con una rapidez v, una distancia L_0 en el intervalo de tiempo T, según las medidas de S', entonces

$$v = \frac{L_0}{T}$$

Ahora consideremos la distancia entre las dos marcas en la regla de S', pero medida por S. El observador S ve que S' y su regla se mueven hacia la derecha con una rapidez v, como se muestra en la Fig. 34-5. Denotemos por L a la distancia entre las dos marcas de la regla móvil, según las medidas de S. (Al medir la longitud de un

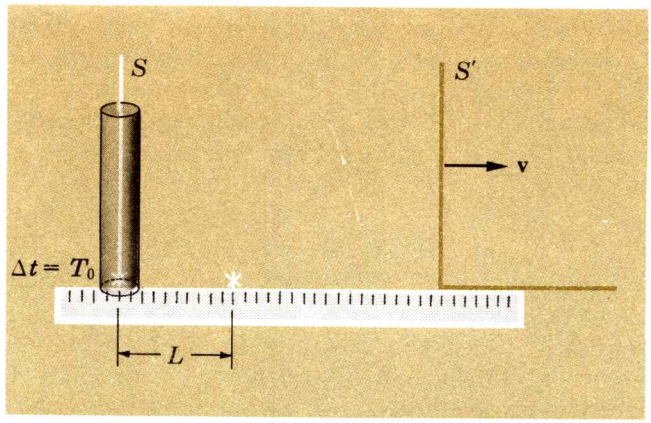


FIG. 34-5. La situación de la Fig. 34-4, pero tal como la observa *S*, que utiliza *su* regla para medir la distancia *L* entre las dos marcas en la regla de *S'*. Según el observador *S*, el sistema de referencia *S'* avanza una distancia *L* en el intervalo de tiempo Io.

objeto en movimiento con su regla, el observador *S* debe estar seguro de marcar *simultáneamente* la localización de las dos marcas.) Con respecto a *S*, el marco de referencia *S'* se desplaza una distancia *L* hacia la derecha con rapidez *v;* más aún, esto ocurre en el intervalo de tiempo *no dilatado* T_0 que transcurre entre los instantes en los que se producen las dos marcas. Por lo tanto, para el observador *S*

$$v = \frac{L}{T_0}$$

Al eliminar a *v* de las dos ecuaciones anteriores resulta

$$L = L_0 \frac{T_0}{T}$$

y al utilizar la expresión (34-2) de la dilatación del tiempo se obtiene, finalmente

$$L = L_0 \frac{T_0\sqrt{1 - (v/c)^2}}{T_0}$$

o

$$L = L_0\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad (34\text{-}3)$$

La Ec. (34-3) es la expresión básica de la *contracción del espacio*. El significado de los términos que en ella aparecen es el siguiente: L_0 es la separación espacial o *longitud propia* entre dos puntos (que se encuentran a lo largo de la línea de movimiento relativo de *S* y *S'*), medida por un observador en reposo con respecto a estos puntos. La longitud contraída *L* es la distancia entre estos mismos puntos medida por un observador que se mueve con una rapidez *v* con respecto a estos puntos. Debe notarse,

nuevamente, que si ha de medirse con propiedad la longitud de un objeto en movimiento, se deben marcar en forma simultánea sus dos extremos. Aunque las longitudes se contraen en la dirección del movimiento relativo, *no* hay contracción espacial en la dirección *perpendicular* a la dirección del movimiento relativo.

Como lo indica la Ec. (34-3), en general, $L < L_0$. La contracción de la longitud es importante sólo a altas velocidades; por ejemplo, si $v = 0.98\ c$, $L = \frac{1}{5}L_0$. En el límite de bajas velocidades ($v/c \to 0$), los intervalos espaciales y temporales relativos de la física relativista se transforman efectivamente en los intervalos espaciales y temporales absolutos de la física clásica: $L = L_0$ y $T = T_0$.

Se utiliza el término contracción del *espacio* para resaltar el hecho de que el efecto no se debe a una causa física —esto es, disminución de la dimensiones del objeto debido a una presión externa o a una disminución de la temperatura—, sino que refleja el carácter diferente de los intervalos espaciales y temporales impuesto por la necesidad fundamental de que todos los observadores midan la misma rapidez de propagación de la luz en el vacío.

34—4 LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ DE LAS COORDENADAS

Según el observador S, las cuatro coordenadas espaciotemporales de un evento son (x, y, z, t); para el observador S', en movimiento relativo a S con rapidez v, las cuatro coordenadas espaciotemporales del *mismo evento* son (x', y', z', t'). ¿Cómo están relacionadas (x, y, z, t) con (x', y', z', t')?

Las ecuaciones adecuadas son las relaciones relativistas de transformación de coordenadas de Lorentz (llamadas así en honor de H. A. Lorentz, quien primero las formuló en 1903). Para simplificar su forma, supondremos que: (1) XYZ y $X'Y'Z'$ son mutuamente paralelos; (2) la velocidad v de S' con respecto a S se encuentra a lo largo del eje X(o X') y (3) cuando los dos orígenes coinciden, los dos relojes marcan cero (esto es, $x = x' = 0$ cuando $t = t' = 0$).

Un análisis detallado, basado en la constancia supuesta de c, conduce a las transformaciones de Lorentz de las coordenadas*

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$
$$y' = y \qquad (34\text{-}4)$$
$$z' = z$$

*Para una derivación de las transformaciones de Lorentz a partir de primeros principios, véase *Elementary Modern Physics*, de R. T. Weidner y R. L. Sells, 2ª Ed. alternativa, Sec. 2-5, Allyn and Bacon, 1973.

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Estas ecuaciones establecen a las cuatro coordenadas de S' en términos de las de S. Para obtener las ecuaciones inversas se podría, naturalmente, resolver este sistema de ecuaciones para obtener a x, y, z y t. Sin embargo, otro tipo de consideraciones conduce inmediatamente a estas ecuaciones sin manipulaciones algebraicas: Si la velocidad de S' respecto a S es v, la velocidad de S con respecto a S' es $-v$. Por lo tanto, las ecuaciones inversas se obtienen simplemente intercambiando a las coordenadas primadas por las no primadas en la Ec. (34-4) y, simultáneamente, reemplazando a v por $-v$ en todos los sitios en los que aparezca. Con esta base, la primera de las cuatro relaciones de (34-4) se transforma en $x = (x' + vt')/[1 - (v/c)^2]^{1/2}$.

Se puede demostrar fácilmente que las ecuaciones anteriores conducen, como debe ser, a las relaciones habituales aplicables cuando la rapidez es pequeña —las llamadas ecuaciones de transformación galileanas (Sec. 6-3)— tomando el límite cuando la rapidez es pequeña, $v/c \to 0$ (o en forma equivalente, imaginando que la rapidez de la luz es, efectivamente, infinita). Las Ecs. (34-4) adquieren entonces la forma

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad \text{y} \qquad t' = t \qquad (6\text{-}7), (34\text{-}4a)$$

La única ecuación no trivial es la primera y su significado resulta claro de la Fig. 34-6. Las transformaciones galileanas expresan en términos matemáticos formales la suposición del carácter absoluto del espacio y del tiempo de la física clásica.

Sin embargo, en general, las transformaciones de Lorentz están caracterizadas por la aparición del factor $\sqrt{1 - (v/c)^2}$, que se conserva real y no imaginario, sólo si $v < c$. Como las coordenadas espaciales y temporal tienen significado sólo si son reales, se implica que la rapidez de la luz c no sólo es la rapidez única de propagación de la radiación electromagnética, sino que también es el límite superior universal de la rapidez. Ninguna partícula o señal puede sobrepasar esta rapidez*.

Naturalmente que las relaciones de la dilatación del tiempo y de la contracción del espacio se pueden obtener directamente de 34-4; véanse los Probs. 34-13 y 34-12, respectivamente.

Nótese la implicación extraordinaria contenida en la cuarta (la del tiempo), de las Ecs. (34-4). Resulta que $t' \neq t$, no sólo por el denominador (que está relacionado con el efecto de dilatación del

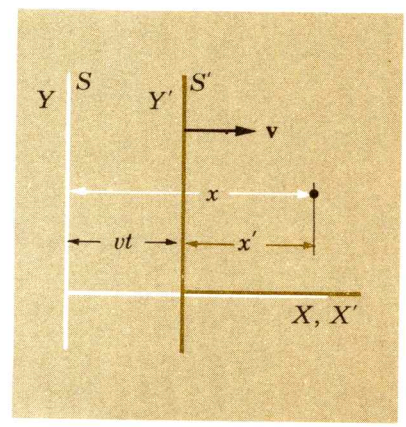


FIG. 34-6. En el límite, cuando la rapidez es pequeña, de las transformaciones galileanas de las coordenadas, las coordenadas x y x' en los marcos de referencia S y S', respectivamente, están relacionadas por $x' = x - vt$.

*La teoría de la relatividad no excluye la existencia de partículas, llamadas *taquiones*, cuya rapidez *siempre es superior* a c. Aunque se ha conjeturado sobre la posible existencia de tales partículas, no se ha obtenido aún evidencia experimental de su existencia.

tiempo) sino que también por la presencia, en el numerador, del término $-(v/c^2)x$. Esto establece que, en efecto el tiempo t' depende no sólo del tiempo t y de la relación de velocidades v/c, sino que también depende de la *coordenada espacial* x. En la relatividad, el espacio y el tiempo se entremezclan en lo que, propiamente, podría llamarse un continuo tetradimensional espaciotemporal. Como consecuencia fundamental, que Einstein consideró como la más profunda, resulta la *relatividad de los eventos simultáneos.*

Esta se puede entender de la siguiente forma: Supongamos que un observador S determina que dos eventos que ocurren en diferentes sitios (por ejemplo: dos explosiones) son simultáneos según su reloj. Estos mismos eventos *no pueden* ser simultáneos al registrarlos en el reloj de otro observador S' en movimiento; las dos explosiones, conforme al segundo observador, ocurren en secuencia. En forma más específica, supongamos que los eventos A y B son simultáneos para el observador S y que ambos ocurren en $t = 0$ y en sus respectivos sitios $x = 0$ y $x = x$. Entonces, los tiempos t' de ocurrencia de los eventos A y B observados por S' se pueden calcular de (34-4) y se indican a continuación:

Evento	*Con respecto a S*		*Con respecto a S'*
	x	t	t'
A	0	0	0
B	x	0	$-\dfrac{(v/c^2)x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

El evento B ocurre en un tiempo negativo t'; el evento A ocurre en $t' = 0$. Esto es, con respecto a S', el evento B ocurre antes que el evento A.

34—5 LAS RELACIONES RELATIVISTAS DE LA VELOCIDAD

En la física clásica, no relativista, la regla que relaciona a las velocidades de un objeto observado en dos sistemas de referencia diferentes, que se mueven con una velocidad relativa constante, es simple: Los vectores velocidad se suman como vectores (Sec. 6-3). En forma aún más simple, cuando todas las velocidades se encuentran sobre la misma línea recta, se tratan simplemente como cantidades algebraicas. Por ejemplo, supóngase que una partícula se mueve hacia el este con 24 m/s respecto a la Tierra. La partícula es observada desde un tren que se mueve hacia el oeste con una rapidez de 15 m/s. Entonces, respecto al observador en el tren, la velocidad de la partícula es de 24 + 15 = 39 m/s hacia el este. En términos más formales, las reglas para combinar velocida-

des que sean mucho menores que c se basan en un supuesto carácter absoluto del espacio y del tiempo y en las relaciones de transformación galileanas que expresan matemáticamente estas suposiciones.

Sin embargo, como ya hemos visto, los intervalos de espacio y de tiempo no son absolutos y las coordenadas espaciales y temporales de eventos registrados por observadores desde dos sistemas de referencia diferentes, están relacionadas por las ecuaciones de transformación de Lorentz. Por lo tanto, las relaciones de transformación de las velocidades, que son aplicables a cualquier velocidad y que son compatibles con los requisitos de la teoría de la relatividad, pueden obtenerse de las ecuaciones de Lorentz para la transformación de las coordenadas.

Denotemos por $\dot{x}$ a la componente X de la velocidad observada en el sistema de referencia S. Por definición, $\dot{x}$ es la relación entre el desplazamiento Δx y el intervalo de tiempo Δt correspondiente en donde Δx se mide, por así decirlo, con la regla de S y Δt se registra en su reloj. La componente X de la velocidad observada en el sistema de referencia S' se denota por $\dot{x}'$, en donde, por definición, $\dot{x}' \equiv \Delta x'/\Delta t'$. En este caso $\Delta x'$ es el desplazamiento medido con la regla del observador S' y $\Delta t'$ es el intervalo de tiempo registrado por su reloj.

Al diferenciar ambos lados de las Ecs. (34-4) resulta

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\,\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta z' = \Delta z$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (v/c^2)\,\Delta x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

(Se ha utilizado el símbolo Δ, por el de diferencial.)

Al dividir las primeras tres expresiones anteriores entre la cuarta se obtienen las relaciones entre las velocidades:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{(\Delta x/\Delta t) - v}{1-(v/c^2)(\Delta x/\Delta t)}$$

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{(\Delta y/\Delta t)\sqrt{1-(v/c)^2}}{1-(v/c^2)(\Delta x/\Delta t)}$$

$$\frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{(\Delta z/\Delta t)\sqrt{1-(v/c)^2}}{1-(v/c^2)(\Delta x/\Delta t)}$$

Estas ecuaciones se simplifican al emplear las definiciones $\dot{x}' \equiv \Delta x'/\Delta t'$, $\dot{x} \equiv \Delta x/\Delta t$; $\dot{y}' \equiv (\Delta y'/\Delta t')$, etc.:

$$\dot{x}' = \frac{\dot{x} - v}{1 - (v/c^2)\dot{x}}$$

$$\dot{y}' = \frac{\dot{y}\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - (v/c^2)\dot{x}} \qquad (34\text{-}5)$$

$$\dot{z}' = \frac{\dot{z}\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - (v/c^2)\dot{x}}$$

Las Ecs. (34-5) son las ecuaciones de transformación de Lorentz para las componentes de la velocidad*. Un resultado sorprendente implícito en las Ecs. (34-5), es que las componentes Y y Z de la velocidad de una partícula medidas por S' ¡dependen de la componente X de la velocidad medida por S! Las Ecs. (34-5) establecen a las cantidades en S' (miembros izquierdos) en términos de las cantidades en S (miembros derechos). Como en el caso de las ecuaciones de transformación de las coordenadas, podemos obtener las ecuaciones de transformación inversas (con las cantidades en S a la izquierda y en S' a la derecha) simplemente por el intercambio de estas cantidades y, simultáneamente, reemplazando a v, en dondequiera que aparezca, por $-v$.

Ejemplo 34-1

Demostrar que las relaciones de transformación de Lorentz para las velocidades conducen, como debe ser, al resultado de que todos los observadores miden la misma rapidez c de la luz.

Por simplicidad, supondremos que un haz de luz se dirige a lo largo del eje X y que, consecuentemente, sus componentes de velocidad en el sistema S son

$$\dot{x} = c \qquad \dot{y} = 0 \qquad \dot{z} = 0$$

De las Ecs. (34-5) se obtiene

$$\dot{x}' = \frac{\dot{x} - v}{1 - (v/c^2)\dot{x}} = \frac{c - v}{1 - (v/c^2)c} = \frac{c - v}{c - v}\,c = c$$

$$\dot{y}' = 0$$

$$\dot{z}' = 0$$

*Nótese que a velocidades suficientemente pequeñas comparadas con c podemos imaginar que $v/c \to 0$ y las ecuaciones de transformación de Lorentz para las velocidades se reducen, como debe ser, a las ecuaciones de transformación galileanas de las componentes de la velocidad.

$$\dot{x}' = \dot{x} - v \qquad \dot{y}' = \dot{y} \qquad \text{y} \qquad \dot{z}' = \dot{z} \qquad (6\text{-}9)$$

El observador S', viajando a *cualquier* velocidad v (menor que c) también mide que la rapidez de la luz es c.

Ejemplo 34-2

Una partícula se mueve hacia el este con una rapidez de 24×10^7 m/s ($= 0.8\ c$) con respecto a la Tierra. ¿Cuál es la rapidez de la partícula medida por un observador en una nave espacial que viaja hacia el oeste con una rapidez de 15×10^7 m/s ($= 0.5c$) con respecto a la Tierra? (La situación en este ejemplo es semejante a la planteada en el párrafo introductorio de esta sección, pero las velocidades se han aumentado por un factor de 10^7.)

Sea S un sistema de referencia fijo en la Tierra y S' un sistema de referencia fijo en la nave espacial. Sabemos que

$$\dot{x} = 0.8c$$

$$v = -0.5c$$

Por lo tanto, de las Ecs. (34-5) obtenemos

$$\dot{x}' = \frac{\dot{x} - v}{1 - (v/c^2)\dot{x}} = \frac{(0.8 + 0.5)c}{1 + (0.5)(0.8)} = \frac{1.3c}{1.4} = 0.93c$$

o

$$\dot{x}' = 28 \times 10^7 \text{ m/s}$$

Nótese que mientras que la regla de combinación clásica de las velocidades (inaplicable) hubiera predicho una rapidez de la partícula de $0.8c + 0.5c = 1.3c$, que es una rapidez *mayor* que la de la luz, la relación relativista asegura que la rapidez de la partícula no puede ser superior a c (en este caso es de 93% de c).

RESUMEN

El postulado fundamental de la teoría de la relatividad: que la rapidez de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores, independientemente del movimiento de la fuente luminosa o del observador, es un hecho de la naturaleza.

El intervalo de tiempo dilatado T está relacionado con el intervalo de tiempo propio T_0 por

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \qquad (34\text{-}2)$$

en donde v es la rapidez de un observador (que mide T) con respecto al sitio en el que ocurren los dos eventos que marcan el inicio y el final de T_0.

La longitud contraída L está relacionada con la longitud propia L_0 mediante

$$L = L_0\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{34-3}$$

en donde L es la medida de un observador que viaja con una rapidez v con respecto al marco de referencia en el que la longitud es L_0 y a lo largo de la dirección del movimiento relativo.

Los componentes de la velocidad medidas en $S'(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$, que viaja a lo largo de la dirección X con una rapidez v con respecto a $S(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, están dadas por las relaciones (relativistas) de Lorentz de transformación de velocidades

$$\dot{x}' = \frac{\dot{x} - v}{1 - (v/c^2)\dot{x}}$$

$$\dot{y}' = \frac{\dot{y}\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - (v/c^2)\dot{x}} \tag{34-5}$$

$$\dot{z}' = \frac{\dot{z}\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - (v/c^2)\dot{x}}$$

PROBLEMAS

34-1. Para ver la forma en que el experimento de Michelson y Morley revelaría la existencia de un marco único de referencia, o éter, para la propagación de la luz, (*a*) supóngase que un observador en movimiento con respecto al éter emite un pulso luminoso a lo largo de un tubo, como en la Fig. 34-3, orientado perpendicularmente a la dirección de movimiento del tubo con respecto al éter y demuéstrese que el tiempo de un viaje de ida y vuelta en un tubo de longitud H con esta orientación es $(2H/c)/[1 - (v/c)^2]^{1/2}$. (*b*) Supóngase que, a continuación se reorienta al tubo, de tal forma que ahora se encuentra a lo largo del eje X del observador; esto es, a lo largo de la dirección del movimiento relativo con respecto al éter. Entonces, la rapidez del pulso luminoso a lo largo del tubo es $c + v$ en el sentido del movimiento, con respecto al éter y c-v en el sentido en contra del movimiento. Demostrar que el tiempo del viaje de ida y vuelta es ahora $(2H/c)/[1 - (v/c)^2]$. (*c*) Demostrar que la diferencia en los intervalos de tiempo de los viajes de ida y vuelta de las partes (*a*) y (*b*) es aproximadamente Hv^2/c^3. (*d*) Demostrar que si la rapidez v es 3.0×10^4 m/s, que es la rapidez orbital de la Tierra en torno al Sol, la diferencia *fraccional* de los tiempos de los viajes de ida y vuelta es igual a 5 partes en 10^9 (un cambio detectable en el experimento original de Michelson y Morley).

34-2. Supóngase que en el experimento de Michelson y Morley (véase el Prob. 34-1) la longitud de los cilindros es de 10.0 m y la longitud de onda de la luz es de 5000 Å. (*a*) Si la rapidez de la Tierra a través del éter es de 3.0×10^4 m/s, ¿qué fracción de la longitud de onda se habrá corrido cuando los dos haces se recombinen? (*b*) ¿Con qué rapidez se debe mover el aparato a través del éter para que los dos haces se recombinen 180° fuera de fase?

34-3. Un observador ve pasar muones inestables, cuya vida media es de 1.52×10^{-6} s en el marco de referencia en el que los muones están en reposo, con una rapidez de $0.98c$. ¿Qué tan lejos viajarán los muones respecto a este observador antes de que su número disminuya a (*a*) la mitad y (*b*) la cuarta parte de su número inicial?

34-4. ¿Con qué rapidez se debe mover un reloj respecto a un observador para que sus pulsaciones (clics) sean detectadas por éste (y por todos los observadores en reposo en su marco de referencia) cada segundo, en vez de cada medio segundo?

34-5. (*a*) ¿Con qué rapidez debe viajar un reloj, respecto a un observador en la Tierra, para retrasarse 0.5 s en un año $(3.16 \times 10^7$ s)? (*b*) Comparar esta

rapidez con la de un satélite que orbita en torno a la Tierra, cerca de su superficie, con una rapidez de 7900 m/s.

34-6. Se ha realizado una prueba experimental directa de la paradoja de las gemelas utilizando muones inestables que se lanzan con gran rapidez en torno a un acelerador anular y que regresan a su punto de partida. Se encontró que los muones viajeros vivieron 12 veces más que los muones en reposo. ¿Cuál era la rapidez de los muones viajeros?

34-7. Una nave espacial debe viajar 6×10^{12} m para llegar a su destino. Los sistemas de supervivencia de la nave durarán un tiempo adicional de 20 h. ¿Cuál es la rapidez mínima de la nave, con respecto al planeta de su destino, si la tripulación ha de sobrevivir al viaje?

34-8. El gemelo A permanece en tierra, en tanto que el gemelo B realiza un viaje de ida y vuelta, siempre con una rapidez de $0.98c$, a un punto distante 10 años luz (un año luz es la distancia recorrida por la luz en un periodo de un año). En el momento de la partida de B, ambos gemelos tienen 20 años. (*a*) ¿Cuál es la edad de A cuando B regresa a la Tierra? (*b*) ¿Cuál es la edad de B en ese momento?

34-9. En una prueba experimental reciente del fenómeno de la dilatación del tiempo, en reloj atómico transportado por un jet en un viaje redondo de costa a costa, se comparó con el intervalo de tiempo registrado por un reloj atómico que permaneció en reposo sobre la Tierra. Determinar el número aproximado de segundos que se retrasa el reloj en movimiento con respecto al reloj fijo, si la distancia de ida (o de vuelta) es de 4000 km y el avión viaja con una rapidez constante de 1000 km/s. (En realidad, el cálculo es más complejo debido al hecho que la Tierra se encuentra en movimiento orbital en torno al Sol y en movimiento rotacional en torno a su eje.)

34-10. Con respecto a un observador rápido que se mueve hacia una esfera, ésta aparece aplastada debido al fenómeno de contracción del espacio. ¿Con qué rapidez se debe acercar un observador a la Tierra para que su "espesor", medido a lo largo de la dirección de movimiento del observador, sea de una quinta parte de su diámetro?

34-11. Una varilla rígida está orientada a un ángulo θ_1 con respecto al eje X_1. ¿Cuál es la orientación θ_2 de la varilla medida por un observador que viaja con una rapidez v a lo largo de la dirección positiva del eje X_1?

34-12. Obtener la relación de la contracción del espacio, Ec. (34-3), a partir de las relaciones de Lorentz de transformación de coordenadas, Ecs. (34-4). (*Sugerencia:* Considérese la primera de las Ecs. (34-4), que puede escribirse en forma diferencial como $\Delta x' = (\Delta x - v\,\Delta t)/[1 - (v/c)^2]^{1/2}$. Recuérdese que la longitud de un objeto en movimiento debe medirse marcando *simultáneamente* ambos extremos del mismo. Si se toma a Δt como cero, ¿cuál de los intervalos Δx o $\Delta x'$ es L_0 y cuál es L?)

34-13. Obtener la relación de la dilatación del tiempo, Ec. (34-2), a partir de las relaciones de Lorentz de transformación de coordenadas, Ecs. (34-4). (*Sugerencia:* Considérese la cuarta de las Ecs. (34-4), que puede escribirse en forma diferencial como $\Delta t' = [\Delta t - (v/c^2)\,\Delta x]/[1 - (v/c)^2]^{1/2}$. Recuérdese que el intervalo de tiempo propio T_0 se mide en un marco de referencia en el que los eventos que indican el inicio y el término del intervalo, ocurren en la *misma localización*. Si se toma a Δx como cero, ¿cuál de los intervalos, Δt o $\Delta t'$ es T_0 y cuál es T?)

34-14. La longitud de los lados de un cubo luminoso es L_0 cuando está en reposo. Una cámara fotografía al cubo cuando éste viaja con una gran rapidez v con respecto a ella. La cámara se encuentra alejada del cubo que se mueve perpendicularmente a la línea que lo une con ella; véase la Fig. P34-14*a*. Nos concentraremos en la luz que proviene de las aristas A, B y C y que penetra en la cámara durante el pequeño intervalo de tiempo que permanece abierto el obturador para producir la imagen fotográfica. Los pulsos luminosos que parten de los puntos A, B y C simultáneamente (en el marco de referencia de la cámara) *no* llegan simultáneamente a la cámara. La luz tiene una rapidez finita y viaja una distancia mayor desde A que desde B o C y, en consecuencia, durante el breve tiempo que permanece abierto el obturador de la cámara, la luz de la arista alejada A entra en ella al mismo tiempo que la luz emitida por las aristas B y C en un instante *posterior*. Al revelar la fotografía, ésta aparece como se muestra en la Fig. P34-14*b*; la cara posterior AB (posterior con respecto al movimiento del cubo) es visible, en tanto que la cara lateral BC se acorta por la contracción del espacio. Demostrar que si una persona examina la fotografía podría inferir que el cubo no se movía con una gran

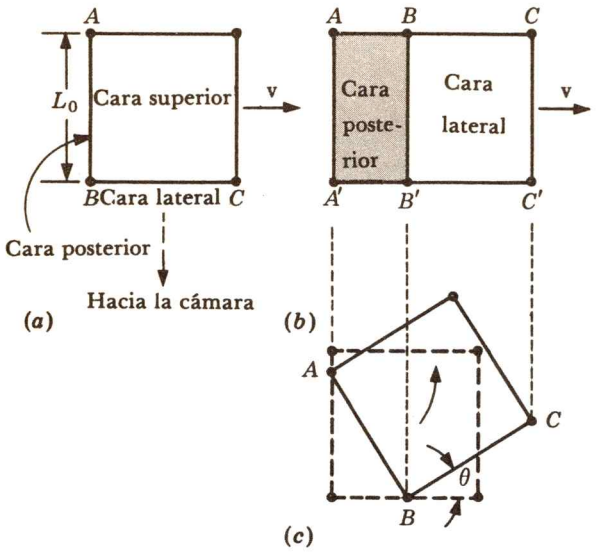


FIG. P34-14. Un cubo en movimiento fotografiado perpendicularmente a la dirección de su movimiento: (*a*) visto desde arriba (*b*) la fotografía del lado del cubo; (*c*) una interpretación de (*b*) en la que se ha girado al cubo.

rapidez perpendicularmente a la cámara, si no que, más bien, se encontraba en reposo, girado un ángulo θ, tal como se muestra en la Fig. P34-14*c*, en donde sen $\theta = v/c$. Este ejemplo ilustra un efecto general: un objeto que se mueve con una gran rapidez perpendicularmente al punto de observación, aparece *girado*.

34-15. ¿Cuál es el error en el siguiente argumento?: Una regla *B* se encuentra en movimiento con respecto a una regla *A* de tal forma que, con respecto a *A*, la longitud de *B* se ha contraído. Pero la regla *A* también está en movimiento con respecto a la regla *B*, así que *A* se ha contraído con respecto a *B*. ¿Cómo puede ser que la regla *A* sea mayor y menor que la regla *B*? (*Sugerencia:* ¿Cuáles son los requisitos para medir con propiedad la longitud de un objeto en movimiento? ¿Son simultáneos para todos los observadores dos eventos separados espacialmente?

34-16. Resolver algebraicamente las Ecs. (34-4) para obtener x, y z y t en términos de x', y', z' y t'. En esta forma se comprueba que las transformaciones inversas de Lorentz resultan de cambiar a v por $-v$ y de intercambiar los subíndices.

34-17. Dos naves espaciales, que se mueven una hacia la otra en una ruta de colisión frontal, están separadas una distancia de 4.0×10^{10} m, según un observador en la Tierra. En ese momento, según el observador, una de las naves espaciales coincide con la Tierra. Con respecto al sistema de la Tierra las dos naves viajan con la misma rapidez de $0.98c$. (*a*) Según el observador terrestre, ¿cuánto tardan en chocar las naves? (*b*) Según un observador en la nave coincedente con la Tierra en el momento inicial, ¿cuánto tardan en chocar las naves?

34-18. Un haz de protones abandona a un acelerador de partículas con una rapidez de $0.8c$ y viajan a través de un tubo al que se le ha hecho el vacío de 1.0 m de longitud, según un observador fijo en el laboratorio, y llegan finalmente a un dispositivo detector. (*a*) Según un observador que viaja con los protones, ¿cuánto tiempo les toma a éstos realizar el viaje de un extremo al otro del tubo? (*b*) ¿Cuál es la longitud del tubo según un observador que viaja con los protones?

34-19. Una nave espacial se mueve con respecto a una galaxia cercana con una rapidez de $0.98c$. Los observadores de la nave determinan que les toma 6×10^{-8} s pasar a través de una pequeña marca espacial que se encuentra en reposo con respecto a la galaxia. (*a*) Según los observadores de la nave, ¿cuál es la longitud de ésta? (*b*) ¿Cuál es la longitud de la nave según un observador en reposo con respecto a la marca espacial?

34-20. Un tren rápido viaja con una rapidez de $0.8c$ y pasa junto a dos postes fijos en tierra junto a la vía. Los postes están separados 125 m, medidos por un observador en tierra. Los observadores terrestres determinan que el frente y el extremo final del tren coinciden simultáneamente con los postes, a medida que el tren pasa. (*a*) Según un observador que viaja en el tren, ¿cuál es la longitud de éste? (*b*) Según un observador en tierra, ¿cuánto tiempo le toma al tren pasar por un poste? (*c*) ¿Cuál es el intervalo de tiempo, según un observador que se encuentra en algún punto sobre el tren, que le toma a éste pasar del primero al segundo poste? (*d*) Según los observadores en el tren, ¿cuál es la distancia entre los postes? (*e*) La coincidencia de los extremos del tren con los postes fue simultánea desde el punto de vista de un observador fijo en tierra. Según un observador en el tren, ¿cuál de los extremos del tren coincidió primero con un poste?, ¿el frontal o el posterior?

34-21. Una nave espacial larga pasa junto a un observador que se encuentra sobre un poste fijo en la

Tierra. La nave viaja con una rapidez de $0.80c$ con respecto al observador en el poste, que determina que la parte posterior de la nave pasa por el poste 4.0×10^{-5} s después de que pasó la parte frontal. (*a*) Según los observadores en reposo con respecto a la nave, ¿cuál es el intervalo de tiempo que transcurre entre el instante en el que la parte frontal de la nave coincide con el poste y el instante en el que la parte posterior coincide con el mismo? (*b*) Según los observadores en la nave, ¿cuál es la longitud de ésta? (*c*) Según los observadores en tierra, ¿cuál es la longitud de la nave?

34-22. A través de una rendija pasa luz monocromática y produce un patrón de difracción en una pantalla distante. La fuente luminosa, la rendija y la pantalla se encuentran en reposo con respecto a un observador, que marca la localización de los ceros de intensidad sobre la pantalla. Supóngase que un segundo observador se encuentra en movimiento con una gran rapidez a lo largo de la línea en la que viaja la luz de la fuente hacia la rendija. (*a*) Para este observador, ¿estarán los ceros de intensidad sobre las marcas hechas por el primer observador? (*b*) ¿Cambia la distancia entre la rendija y la pantalla de observación? Ahora un tercer observador viaja con una gran rapidez a lo largo del plano que contiene a la rendija. (*c*) Para este observador, ¿estarán los ceros de intensidad en los sitios marcados por el primer observador? (*d*) ¿Cambia el ancho de la rendija para este tercer observador?

34-23. Un muón es una partícula inestable con una vida promedio de 2.20×10^{-6} s (desde el momento de su creación hasta el momento en que decae) medida por un observador en reposo con respecto a ella. (*a*) Si un muón promedio viaja una distancia de 600 m durante su tiempo de vida, según un observador en el laboratorio, ¿cuál es la rapidez del muón? (*b*) Según un observador en el laboratorio, ¿cuánto tiempo vivió el muón? (*c*) Según un observador que viaja con el muón, ¿que distancia viajó este último entre su nacimiento y su muerte?

34-24. Con respecto a una estación, el tren A viaja hacia el este con $0.80\ c$ y el tren B viaja hacia el norte con $0.80\ c$. Encontrar la velocidad del tren A con respecto a B.

34-25. Un tren rápido se mueve con una rapidez de $0.8\ c$ con respecto a la tierra. Dentro del tren se desplaza rápidamente un corredor con una rapidez de $0.8\ c$ con respecto al tren. Supóngase que las direcciones de las dos velocidades son iguales. ¿Cuál es la rapidez del corredor con respecto a la tierra?

34-26. En el Ej. 34-1 se demostró que si un observador S emite un haz luminoso a lo largo de su eje X, cualquier observador S' también mide que la rapidez de la luz es c a lo largo del eje X'. Supóngase, en vez de esto, que el haz de luz se emite a lo largo de la dirección positiva del eje Y, en el marco de referencia de S. (*a*) Demostrar que la rapidez medida por todos los demás observadores S' también es c. (*b*) ¿En qué dirección viaja el haz luminoso con respecto a la dirección positiva del eje Y' del observador S'?

34-27. La densidad lineal (el número por unidad de longitud) de electrones en un alambre conductor es λ_0 cuando no existe una corriente eléctrica en el alambre y los electrones pueden imaginarse en reposo. Cuando una corriente se establece en el alambre, los electrones se mueven a lo largo del mismo con una rapidez de arrastre v. Determinar la densidad lineal λ de los electrones en movimiento en el alambre en términos de λ_0, v y c, medidas por un observador en reposo con respecto al alambre.

34-28. Una varilla de 1.25 m de longitud debe pasar a través de una ventana de 1.00 m de ancho. En forma más precisa, la varilla cuya longitud en reposo es de 1.25 m, que está en movimiento como se muestra en la Fig. P34-28, pasa a través de una abertura que tiene 1.00 m entre sus orillas, cuando la mide un observador en reposo con respecto a la ventana. La rapidez de la varilla es tal que los dos extremos de ella coinciden simultáneamente con las dos orillas de la ventana, según un observador en el marco de referencia en el que la ventana está en reposo. (*a*) ¿Cuál es la rapidez de la varilla? (*b*) Ahora considérense los eventos desde el punto de vista del observador que viaja con la varilla. ¿Cuál es el ancho de la abertura de la ventana con respecto a este observador? (*c*) Desde el punto de vista de un obserdor que viaja con la varilla, ¿coinciden simultáneamente los dos extremos de la varilla con las dos orillas de la ventana y, de no ser así, cuál extremo de

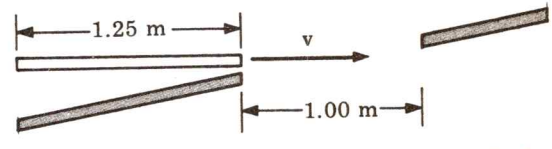


FIG. P34-28. Una varilla que pasa a través de una ventana.

la varilla, el frontal o el posterior, coincide primero con una orilla de la ventana? (*d*) ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre las dos coincidencias, medido por el observador que viaja con la varilla?

34-29. (*a*) Según un observador *S*, una explosión ocurre en la localización $x = 0$ en el tiempo $t = 0$. Posteriormente ocurre una segunda explosión en una localización vecina, en $x = 1.0$ km y en $t = 1.0 \times 10^{-6}$ s. ¿Cuál debe ser la velocidad de un segundo observador *S'* con respecto a *S* que observa ambas explosiones simultáneamente? (*b*) El observador *S'* ve un segundo conjunto de explosiones de la siguiente manera: una explosión en $x' = 0$ y en $t' = 0$ y la segunda en $x' = 1.0$ km y en $t' = 1.0 \times 10^{-6}$ s. ¿Cuándo y en dónde son observados estos eventos por S?

34-30. Existen ciertas cantidades físicas que, dentro de una región aislada del espacio, se conservan; esto es, desde ciertos sistemas inerciales la magnitud de la cantidad física en la región siempre permanece con el mismo valor. Un ejemplo familiar de una cantidad que se conserva es la carga eléctrica. Considérese un volumen aislado en el que dos cargas iguales, pero opuestas, se encuentran separadas una distancia *d* en reposo. Ahora bien, en este sistema inercial no hay violación de la conservación de la carga total si las dos cargas desaparecen (se aniquilan) *simultáneamente*. En cualquier instante, la carga total dentro del volumen siempre ha sido la misma; esto es, cero. Demuéstrese que, si la carga total debe conservarse *en todos los sistemas inerciales*, las dos cargas deben encontrarse juntas ($d = 0$) en el instante de la aniquilación. Este es un ejemplo de un principio general relacionado con cualquier cantidad que se conserva; si una cantidad debe conservarse en todos los sistemas inerciales, entonces se debe conservar localmente (conservarse dentro de un volumen arbitrariamente pequeño).

Capítulo

35

LA DINAMICA RELATIVISTA: EL IMPETU Y LA ENERGIA

En el capítulo anterior se consideraron aspectos estrictamente cinemáticos de la relatividad especial: de cómo la constancia de la rapidez de la luz implica cambios radicales en los conceptos mismos del espacio y del tiempo y en las relaciones cinemáticas asociadas. En este capítulo se extenderá el tratamiento a la dinámica relativista; en particular, deseamos encontrar las formas apropiadas de las cantidades dinámicas básicas, tales como el ímpetu, la masa, la fuerza y la energía, las cuales, como las cantidades cinemáticas, también difieren significativamente de sus contrapartes clásicas.

35—1 LA INVARIANCIA DE LAS LEYES DE LA FISICA

La constancia de c, que es un postulado de la teoría de la relatividad especial y es un hecho experimental sólidamente establecido, implica que las reglas de combinación de las velocidades se alteran en la física relativista. Pero, algunas de las cantidades mecánicas básicas, tales como el ímpetu y la energía cinética de una partícula, incluyen a la velocidad de ésta, de tal manera que tales cantidades también se ven alteradas a altas velocidades. ¿Cómo se pueden obtener las formas relativistas apropiadas?

El punto de partida es un segundo postulado de la teoría de la relatividad especial. Por lo general, este postulado, que también es fundamental en la mecánica clásica, se ignora o no se establece explícitamente, no porque sea muy sutil, sino porque es evidentemente obvio. El postulado dice que: *Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.* Establecido de manera más formal, las leyes de la física son invariantes* en

*Algunas veces se dice que la rapidez de la luz es *invariante*; esto es, que tiene la *misma magnitud* para todos los observadores, en tanto que las leyes de la física son *covariantes*, esto es, que tienen la misma *forma matemática* para todos los observadores inerciales.

todos los marcos de referencia inerciales.

Naturalmente que un sistema inercial es un sistema de referencia en el que se cumple la ley de inercia o primera ley de Newton: En un marco inercial, un objeto no perturbado tiene una velocidad constante*. Ahora bien, la invariancia de las leyes de la física en todos los marcos inerciales significa lo siguiente: Si ciertas proposiciones fundamentales, tales como las leyes de movimiento de Newton, el principio de la conservación del ímpetu y el principio de la conservación de la energía, han de ser verdaderas *leyes* de la física —proposiciones con una validez universal— entonces, estas proposiciones no pueden depender de un marco inercial particular en el cual sean aplicables. Un marco inercial debe ser igualmente bueno que otro.

Veamos lo que esto significa cuando se expresa en términos más específicos. Supongamos que estudiamos la colisión a bajas velocidades entre esferas elásticas en un juego de billar. Un observador determina que tal colisión queda descrita por el principio de conservación del ímpetu y el principio de conservación de la energía. Entonces *todos* los observadores en marcos inerciales deben concordar en que el ímpetu y la energía se conservan, sin importar el estado de movimiento relativo de los observadores. Así, si la mesa de billar se encuentra en un tren que se mueve en una línea recta con rapidez constante con respecto a la Tierra, un observador en el tren dirá que el ímpetu y la energía se conservan. También lo dirá un observador en reposo sobre la Tierra, que estudia las mismas colisiones, aunque, para este segundo observador, la rapidez verdadera de cada una de las bolas de billar, antes y después de la colisión, será diferente de los valores correspondientes medidos por el observador en el tren.

Resulta sencillo demostrar que el principio de conservación del ímpetu de la mecánica clásica se aplica igualmente en todos los marcos inerciales cuando se utilizan las relaciones de transformación (las transformaciones galileanas, Sec. 6-3) que describen adecuadamente los fenómenos a bajas velocidades. Supongamos que ocurre una colisión frontal entre dos partículas de masas m y M. En el marco inercial S, las velocidades de la partícula m antes y después de la colisión son, respectivamente, $\dot{x}_b$ y $\dot{x}_a$, en tanto que las velocidades correspondientes de la partícula M son $\dot{X}_b$ y $\dot{X}_a$.

Entonces, el principio de la conservación del ímpetu, según el cual el ímpetu total de un sistema aislado es el mismo antes y después de la colisión, conduce, cuando el observador S lo aplica a esta colisión, a

$$m\dot{x}_b + M\dot{X}_b = m\dot{x}_a + M\dot{X}_a \qquad (35\text{-}1)$$

*La teoría *especial* de la relatividad está restringida a marcos *inerciales* de referencia; la teoría *general* de la relatividad incluye también a marcos de referencia *acelerados*.

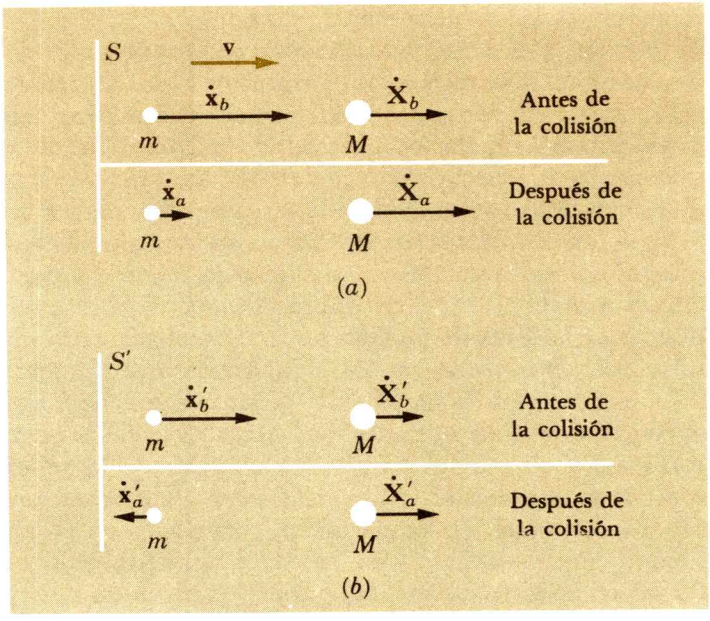


FIG. 35-1. Colisión frontal de dos partículas vistas por dos observadores que se mueven con una velocidad relativa constante v.

Con respecto al observador S', que está en movimiento con una velocidad constante v a lo largo de la dirección X con respecto a S, las velocidades de la partícula son

$$\dot{x}'_b = \dot{x}_b - v \qquad \dot{X}'_b = \dot{X}_b - v$$
$$\dot{x}'_a = \dot{x}_a - v \qquad \dot{X}'_a = \dot{X}_a - v$$

en donde se han utilizado las transformaciones galileanas de las velocidades (Ec. (6-9)) que son aplicables a bajas velocidades. Véase la Fig. 35-1.

Al sustituir estas ecuaciones en la Ec. (35-1) se obtiene

$$m(\dot{x}'_b + v) + M(X'_b + v) = m(\dot{x}'_a + v) + M(\dot{X}'_a + v)$$

o

$$m\dot{x}'_b + M\dot{X}'_b = m\dot{x}'_a + M\dot{X}'_a \qquad (35\text{-}2)$$

Los términos que incluyen a v se cancelan y se encuentra que la forma matemática de (35-2) es idéntica a la de (35-1); una ecuación tiene a las velocidades primadas (para el observador S') y la otra no las tiene (las del observador S). Es decir, los observadores S' y S concuerdan en que el ímpetu total antes de la colisión es igual al ímpetu total después de la colisión.

Lo que se ha demostrado es que el principio de conservación del ímpetu clásico es una ley aceptable de la física en bajas velocidades: se aplica por igual a todos los observadores inerciales.

Argumentos exactamente análogos demuestran que la segunda ley de Newton y el principio clásico de la conservación de la energía son también invariantes ante transformaciones galileanas de las velocidades. En resumen, toda la mecánica clásica cumple con el requisito básico de la invariancia de las leyes de la mecánica. Pero sabemos que sólo las ecuaciones de transformación de Lorentz describen de manera apropiada las interrelaciones entre los intervalos de espacio, los intervalos de tiempo y las velocidades observadas en marcos inerciales en movimiento relativo a *cualquier* rapidez. Seguramente que las formas *clásicas* de las leyes mecánicas básicas de la física no pueden ser invariantes cuando se utilizan las relaciones de transformación relativistas, universalmente correctas.

La estrategia general será la siguiente: encontrar la forma apropiada de las cantidades dinámicas relativistas cuando se aplican los dos postulados básicos de la teoría de la relatividad, que son: (1) *la rapidez de la luz es la misma constante para todos los observadores* (con las consecuencias asociadas en el espacio, en el tiempo, en la velocidad y en las relaciones de transformación) y (2) *las layes de la física son las mismas para todos los observadores inerciales.*

35—2 LA MASA Y EL IMPETU RELATIVISTA

Primero consideremos al ímpetu relativista **p** de una partícula que, por analogía con la relación clásica del ímpetu, suponemos que queda expresado por

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{35-3}$$

en donde m es la, así llamada, masa relativista. Entonces *por definición,* la masa relativista m de una partícula es aquella cantidad física por la que se debe multiplicar la velocidad **v** de la partícula para obtener la cantidad vectorial **p,** tal que el ímpetu total $\Sigma\mathbf{p}$ de un sistema aislado se conserve. Aunque podría esperarse que la forma relativista del ímpetu difiera de la relación clásica, sabemos que cuando la rapidez es pequeña, el ímpetu relativista debe reducirse a la forma familiar m_0v, en donde m_0 representa a la masa de la partícula cuando su rapidez es cero o, cuando menos, a una rapidez v mucho menor que c, que es la rapidez de la luz. En forma más general, la dinámica relativista *debe* reducirse, cuando la rapidez de la partícula es mucho menor que c, a la dinámica newtoniana clásica.

La estrategia específica será la siguiente: Consideraremos primero una colisión elástica entre dos objetos idénticos, que sea tan simétrica que podamos asegurar el cumplimiento de la ley de la conservación del ímpetu. Entonces, examinaremos la misma colisión desde el punto de vista de otro observador inercial y exigiremos que, desde su punto de vista, la colisión también quede descrita por la ley de la conservación del ímpetu.

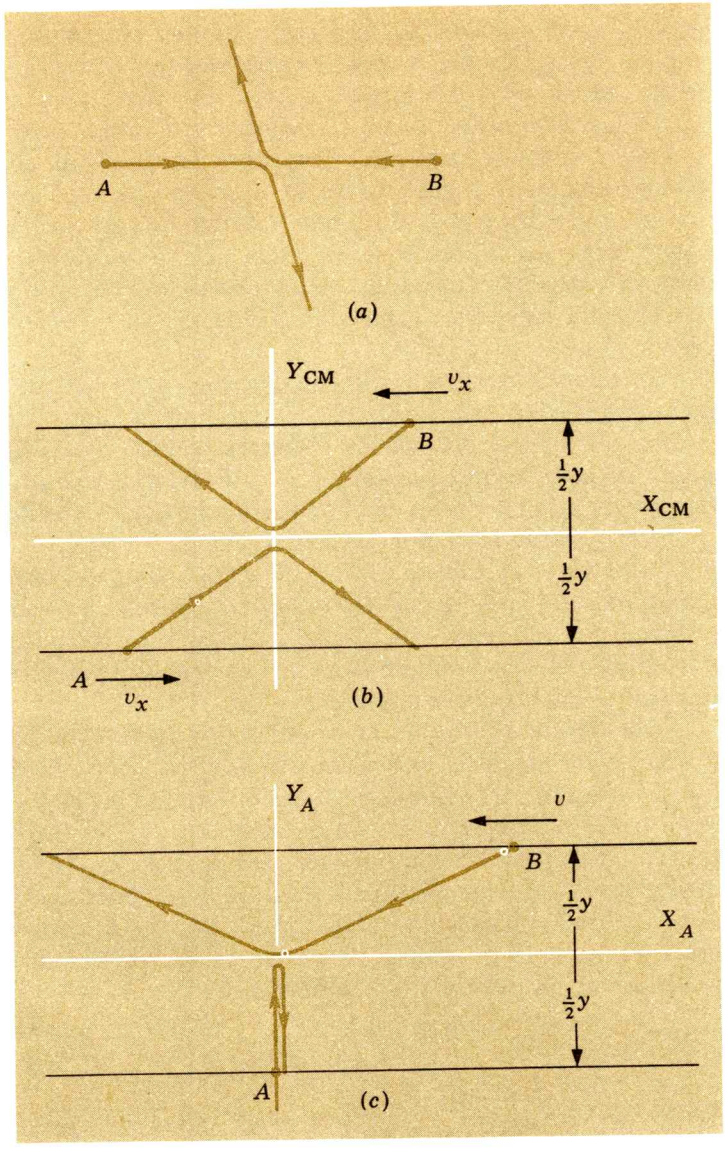


FIG. 35-2. Dos partículas idénticas A y B con igual rapidez, que chocan elásticamente: (a) vistas por un observador en el marco de referencia del centro de masas; (b) lo mismo que en (a) pero con los ejes X_{CM} y Y_{CM} orientados de tal forma que hacen que la colisión sea completamente simétrica para un observador en el marco de referencia del centro de masas (c) vista por un observador que se mueve a lo largo del eje X de A.

Supongamos que tenemos dos partículas A y B con la misma masa m_0, al compararlas en reposo. Las partículas se lanzan una contra la otra, en direcciones opuestas, con la misma rapidez y la colisión es elástica (ver la Fig. 35-2a). Las velocidades de las partículas son iguales en magnitud, pero opuestas en dirección, tanto antes como después de la colisión. Debido a la simetría de la colisión, podemos asegurar que ésta se observará simétrica en el marco de referencia del centro de masas, que es el marco inercial en el que el ímpetu total del sistema es cero en todo tiempo (Sec. 6-5). La colisión se ve aún más simétrica si giramos los ejes coordenados, como se muestra en la Fig. 35-2b, de tal forma que

las velocidades de las dos partículas formen el mismo ángulo con respecto a los ejes X_{CM} y Y_{CM}. Denotemos por vx a la componente de la velocidad a lo largo de X_{CM} de cualquiera de las dos partículas. Entonces, podemos imaginar que la partícula A ha sido lanzada y después capturada por un observador, al que también llamaremos A, que viaja hacia la derecha con una rapidez v_x y que se encuentra a una distancia $y/2$ por debajo del eje X_{CM}. En forma semejante, podemos imaginar que la partícula B ha sido lanzada y después atrapada por un observador B, que viaja hacia la izquierda con una rapidez v_x, a una distancia $y/2$ por encima del eje X_{CM}.

Un tercer observador fijo con respecto al marco de referencia inercial del centro de masas $X_{CM}Y_{CM}$ y por lo tanto, diferente de los observadores A y B, puede entonces asegurar, en base sólo a la simetría, que las dos partículas A y B fueron lanzadas *simultáneamente,* que chocaron en el origen y entonces fueron capturadas *en forma simultánea* por los observadores respectivos. En otras palabras, el *intervalo de tiempo* T_{CM}, *tal como se observa en el marco de referencia del centro de masas,* entre el momento en que se lanza y el momento en que se captura a la particula A, es el *mismo* que el intervalo de tiempo que transcurre entre el lanzamiento y la captura de la partícula B.

Más aún, un obsevador en el sistema de referencia del centro de masas puede asegurar que el ímpetu se conserva en la colisión; de hecho, el vector del ímpetu total del sistema de las dos partículas a lo largo de cualquier dirección debe ser cero. Esto implica que el cambio Δp_{yA} en la componente del ímpetu a lo largo de la dirección Y_{CM} en la partícula A antes y después de la colisión, debe ser igual, en magnitud, al cambio Δp_{yB} en la componente del ímpetu a lo largo de Y_{CM} de la partícula B. Por lo tanto, la ley de la conservación del ímpetu requiere que

$$\Delta p_{yA} = \Delta p_{yB} \tag{35-4}$$

La partícula A viaja una distancia $y/2$ a lo largo de Y_{CM} antes, y vuelve a viajar $y/2$ después, de la colisión; esto es, viaja una distancia y en el intervalo de tiempo T_{CM}, de tal forma que la componente Y de la velocidad de la partícula A es y/T_{CM}. El *cambio* de ímpetu a lo largo de Y_{CM} es dos veces la magnitud de la componente del ímpetu a lo largo de Y_{CM}, antes o después de la colisión. Por lo tanto,

$$\Delta p_{yA} = \frac{2m_A y}{T_{CM}}$$

en donde m_A es la masa relativista de la partícula A. En forma análoga,

$$\Delta p_{yB} = \frac{2m_B y}{T_{CM}}$$

en donde m_B es la masa relativista de la partícula B. La Ec. (35-4) se transforma, entonces, para un observador en el marco inercial del centro de masas, en

$$\frac{m_A y}{T_{CM}} = \frac{m_B y}{T_{CM}}$$

Debido a la simetría de la colisión sabemos que las dos partículas tienen la misma masa relativista: $m_A = m_B$.

Ahora bien, si la conservación relativista del ímpetu debe cumplirse para *todos* los marcos inerciales, entonces (35-4) debe satisfacerse en cualquier otro sistema inercial que se mueva con velocidad constante respecto al sistema del centro de masa. Por conveniencia, examinaremos a la colisión desde un marco inercial en el que el observador A se encuentra en reposo; ver la Fig. 35-2*c*. Las diferencias son las siguientes: El observador A determina que su partícula A viaja de ida y vuelta a lo largo del eje Y_A en tanto que la partícula B sigue una trayectoria oblicua antes y después de la colisión. Denotemos por v a la velocidad del observador B con respecto al observador A. El observador A, que está estacionado en el punto $y/2$ por debajo del eje X_A determina que el observador B viaja hacia la izquierda con una rapidez v a una distancia $y/2$ por encima del eje X_A. Nótese que la distancia transversal y entre los dos observadores A y B es la misma en el nuevo marco de referencia $X_A Y_A$ que en el marco de referencia anterior $X_{CM} Y_{CM}$, debido a que *no hay contracción del espacio* perpendicularmente a la dirección del movimiento relativo.

Sin embargo, *según las medidas del observador A,* los intervalos de tiempo entre los lanzamientos y las capturas de las dos partículas *no* son iguales: La partícula A se lanza y se captura en la *misma* localización en el marco de referencia $X_A Y_A$, pero la partícula B se lanza en un sitio a la derecha y posteriormente se captura en un sitio a la izquierda. Recordemos el aspecto relativista general de los intervalos de tiempo: Si dos eventos ocurren en el mismo sitio en el marco de referencia de un observador, entonces el intervalo de tiempo entre ellos es el intervalo propio T_0; pero si estos mismos dos eventos se observan desde un marco de referencia que viaja con una rapidez v, entonces el intervalo de tiempo entre ellos es mayor (dilatado) y está dado por

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \qquad (34\text{-}2), (35\text{-}5)$$

Así si consideramos que el intervalo de tiempo entre el lanzamiento y la captura de la partícula A, como la observa A, es T_0,

entonces el intervalo de tiempo entre el lanzamiento y la captura de la partícula B, según lo *observa* A, es T, que es un intervalo *mayor*.

Según el observador A, los eventos ocurren en la siguiente secuencia: Primero, B lanza a la partícula B, a continuación A lanza a la A, después las partículas chocan; entonces, A captura a la partícula A y, finalmente, B captura a la B. Aquí tenemos un ejemplo de la regla general de que los eventos que son simultáneos en un marco de referencia (el lanzamiento y la captura de las partículas A y B en el marco de referencia $X_{CM}Y_{CM}$) no lo son en un segundo marco de referencia, que se mueve con respecto al primero.

Los cambios del ímpetu a lo largo de Y_A, en el marco de referencia $X_A Y_A$ mostrado en la Fig. 35-2*c*, son entonces

$$\Delta p_{yA} = \frac{2m_A y}{T_0} \qquad \text{y} \qquad \Delta p_{yB} = \frac{2m_B y}{T}$$

Sustituyendo estas relaciones en (35-4), que garantiza que la conservación del ímpetu aún es aplicable, se obtiene

$$\frac{m_A y}{T_0} = \frac{m_B y}{T}$$

que, al utilizar (35-5), resulta en

$$m_B = \frac{m_A}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{35-6}$$

en donde m_A y m_B son las masas de las partículas respectivas, observadas en el marco de referencia $X_A Y_A$ y v es la rapidez del observador B con respecto al observador A. Es claro que esta ecuación sólo puede satisfacerse si m_A y m_B son diferentes. Como las dos masas eran iguales al medirse en reposo con respecto a un observador, resulta claro, tal como lo anticipamos, que la masa relativista de una partícula debe depender de alguna forma de su rapidez.

En la colisión mostrada en la Fig. 35-2*c*, las *dos* partículas están en movimiento. Para determinar la forma en que la masa de una partícula depende de su movimiento con respecto a un observador, consideraremos la colisión especial que ocurre cuando la partícula A se encuentra en reposo en el marco de referencia $X_A Y_A$. Esto es, suponemos que las componentes Y de la rapidez de las dos partículas A y B se aproximan a cero. La partícula A se encuentra entonces en reposo con respecto al marco de referencia $X_A Y_A$ y denotaremos a su masa por m_0, que es la *masa en reposo*. En este caso, el observador en reposo en $X_A Y_A$ observa que la partícula B

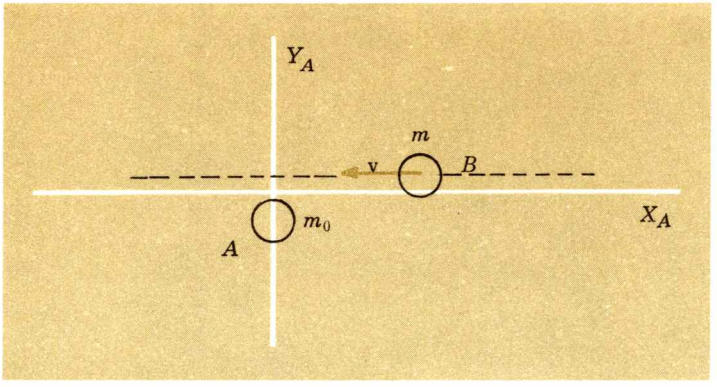


FIG. 35-3. La colisión de una partícula B en movimiento con una partícula A en reposo, vista por el observador A; la colisión se deriva de aquella mostrada en la Fig. 35-1*c* en el caso límite en el que la componente transversal de la velocidad es cero.

realiza una colisión razante con la partícula A en tanto que la partícula B se aproxima y después retrocede a lo largo de una línea efectivamente recta. Ver la Fig. 35-3. Entonces, la rapidez de la partícula B es, justamente la rapidez v del observador B (con respecto al cual, se encuentra ahora en reposo). Cuando estaba en reposo, la masa de la partícula B también era m_0, pero ahora, cuando se mueve con una rapidez v con respecto al observador en X_AY_A, su masa es diferente; la denotaremos por m. En la colisión razante con $m_A = m_0$ y $m_B = m$, la Ec. 35-6 toma la forma

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{35-7}$$

Siguiendo el mismo argumento, el observador B mira a su partícula B en reposo, con una masa m_0 y a la partícula A en movimiento, con una rapidez v y con una masa m. Entonces, cualquiera de los dos observadores determina que si una partícula tiene una masa en reposo m_0, cuando la mide en reposo con respecto a él, su masa cuando está en movimiento con una rapidez v es $m_0[1 - (v/c)^2]^{-1/2}$.

La Fig. 35-4 muestra a la masa relativista de la partícula graficada como una función de su rapidez, según la Ec. 35-7. Resulta claro que m difiere en forma marcada de m_0 sólo cuando la rapidez de la partícula es comparable a la de la luz; por ejemplo, con $v/c = \frac{1}{10}$, m es mayor que m_0 solamente en un 0.5%.

Recordemos ahora la definición fundamental de la masa relativista m. Cuando se dice que la masa de una partícula depende de su rapidez, lo que se está implicando básicamente es que el ímpetu relativista $\mathbf{p}$ de una partícula con velocidad $\mathbf{v}$ está dado por la relación

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{35-8}$$

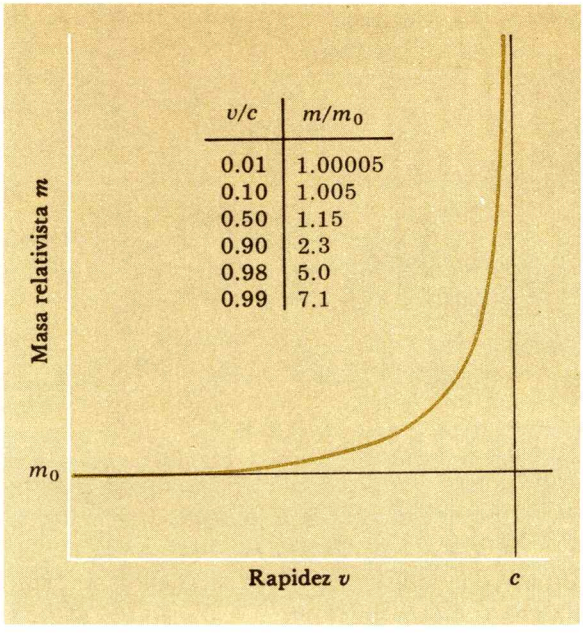


FIG. 35-4. Variación de la masa relativista con la rapidez.

en donde m_0 es una constante, independiente de la rapidez. Los experimentos realizados con partículas viajeras con una rapidez que se aproxima a la de la luz demuestran, en forma concluyente, que la Ec. 35-8 expresa correctamente al ímpetu de la partícula cuando ésta se mueve con cualquier rapidez menor que c. Naturalmente, cuando las partículas se mueven con una rapidez pequeña, con $v/c \ll 1$, el ímpetu relativista se reduce a su forma clásica, $\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}$. Mientras que en la física prerrelativista los intervalos de espacio, los intervalos de tiempo y las masas se consideraban como absolutos y la rapidez de la luz se consideraba como relativa a algún marco inercial único (el éter), la física relativista de Einstein requiere que, debido a que la rapidez de la luz es absoluta y que las leyes de la física son invariantes, los intervalos de espacio, los intervalos de tiempo y la masa (definida como la relación entre el ímpetu y la velocidad), sean relativas y dependan del movimiento relativo entre un objeto y el observador.

En la dinámica relativista se considera que la fuerza **F** sobre un objeto, es el ritmo de cambio en el tiempo de este ímpetu relativista. Por lo tanto, la segunda ley de Newton se escribe como

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{dm}{dt} \qquad (35\text{-}9)$$

En la mecánica clásica, donde la masa de cualquier objeto es constante, $dm/dt = 0$; entonces las dos formas de la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = (d/dt)m\mathbf{v}$ y $\mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt = m\mathbf{a}$, son equivalentes. Sin

embargo, en la dinámica relativista las dos formas no son generalmente equivalentes; la masa m varía con la rapidez de la partícula, así que si la *rapidez* cambia con el tiempo, también lo hace la masa y $dm/dt \neq 0$. La forma general, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, siempre es correcta.

Una situación muy importante, en la que la rapidez de la partícula es constante aunque su velocidad cambia, es la de una partícula que se mueve en un arco circular. La partícula debe estar bajo la influencia de una fuerza hacia el centro del arco. Debido a que la fuerza es radial y perpendicular al movimiento de la partícula, esta viaja con una rapidez constante pero con una velocidad que cambia continuamente de dirección.

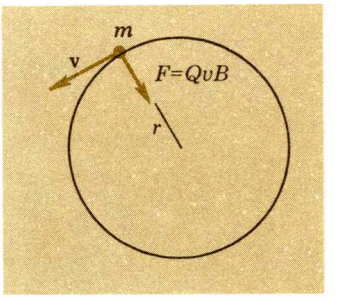


FIG. 35-5. Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme transversal.

Consideremos a una partícula de masa relativista m y carga eléctrica Q que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}$ perpendicularmente a un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$. La fuerza magnética, que es perpendicular a la velocidad y que, por lo tanto, produce un movimiento circular en la partícula, tiene una magnitud de

$$F = QvB \tag{26-3}$$

Debido a que la partícula se mueve con una rapidez constante, su masa relativista es constante y, por lo tanto, $dm/dt = 0$. La Ec. 35-9 toma entonces la forma $\mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt = m\mathbf{a}$, en donde $\mathbf{a}$ es la aceleración centrípeta, cuya magnitud es v^2/r y en donde r es el radio de la trayectoria circular (ver la Fig. 35-5). Utilizando la relación de la fuerza magnética, resulta

$$QvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$p = mv = QBr \tag{35-10}$$

Se debe notar, de modo especial que, aunque esta ecuación es exactamente de la misma forma que la obtenida por los métodos de la mecánica clásica, la masa m que en ella ocurre es la masa *relativista* y no la masa en reposo.

La Ec. 35-10 es la base de un método simple para determinar el ímpetu relativista de una partícula cargada, ya que si se conoce Q y se miden B y r, entonces p se puede calcular a partir de esta ecuación. Más aún, la velocidad v de la partícula cargada se puede medir utilizando campos eléctricos y magnéticos transversales (Sec. 26-4), de tal forma que se puede calcular la masa relativista a partir de las medidas del ímpetu $p = mv$ y la velocidad v. Este método fue utilizado por primera vez por A. H. Bucherer, en 1909, para verificar la variación de la masa relativista con la rapidez.

Ejemplo 35-1

Una partícula cuya masa en reposo es m_0 se mueve inicialmente con una rapidez de $0.40c$. Si se duplica la rapidez de la partícula, ¿cómo se compara su nuevo ímpetu con su ímpetu inicial?

El ímpetu inicial esta dado por la Ec. (35-8):

$$p_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - (v_i/c)^2}} = \frac{0.40 m_0 c}{\sqrt{1 - (0.40)^2}} = 0.44 m_0 c$$

Cuando se duplica la rapidez, la partícula se mueve con una rapidez $v = 2(0.40c) = 0.80c$ y su ímpetu es

$$p = \frac{m_0(2v)}{\sqrt{1 - (0.80)^2}} = 1.33 m_0 c$$

Aunque la relación de la rapidez final a la rapidez inicial es 2.0, la relación entre el ímpetu final y el ímpetu inicial es 3.0.

35—3 LA ENERGIA RELATIVISTA

Ya contamos con expresiones para la masa relativista, Ec. (35-7), para el ímpetu relativista, Ec. (35-8) y la forma correcta de la segunda ley de movimiento de Newton, Ec. (35-9) Ahora nos preguntamos, ¿cuál es la energía cinética relativista E_k? Podríamos considerar que la energía cinética es, como en la física clásica, el trabajo total realizado por una partícula al llevarla desde el reposo hasta una rapidez final v bajo la acción de una fuerza constante F:

$$E_k = \int_0^s F\, ds = \int_0^s \frac{d}{dt}(mv)\, ds = \int_0^t \frac{d}{dt}(mv)\, v\, dt$$

$$= \int v\, d(mv) = \int (v^2\, dm + mv\, dv)$$

Al integrar, debemos reconocer que tanto m como v son variables y que la dependencia de una con la otra está dada por la Ec. (35-7). Encontraremos que es más simple expresar a v en términos de m e integrar respecto a la variable m. Las expresiones de v y de dv se pueden obtener reescribiendo (35-7) en la forma

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2}{m^2}$$

Diferenciando, obtenemos

$$-2v\, \frac{dv}{c^2} = -2m_0^2\, \frac{dm}{m^3}$$

Combinando las dos ecuaciones, resulta

$$mv\,dv = (c^2 - v^2)\,dm$$

Sustituyendo a $mv\,dv$ en la ecuación de la energía cinética E_k, obtenemos

$$E_k = \int_{m_0}^{m} [v^2\,dm + (c^2 - v^2)\,dm] = c^2 \int_{m_0}^{m} dm = mc^2 - m_0c^2$$

$$E_k = (m - m_0)\,c^2 \tag{35-11}$$

En consecuencia, la energía cinética relativista es el aumento en masa, proveniente del movimiento de la partícula, multiplicada por c^2. Cuando la rapidez es grande, la energía cinética relativista es notablemente diferente de la energía cinética clásica. Como lo demuestra la Ec. (35-11), decir en la física relativista que la partícula tiene una energía cinética es decir que su masa excede a su masa en reposo. Por supuesto, la energía cinética relativista se debe reducir a la energía cinética clásica, $\frac{1}{2}m_0v^2$ cuando $v/c \ll 1$ y para demostrar que esto es cierto, se desarrolla (35-11) por teorema binomial:

$$E_k = m_0c^2 \left\{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2} - 1\right\}$$

$$= m_0c^2 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \cdots - 1\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}m_0v^2 \left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \cdots\right]$$

o

$$\lim_{v/c \to 0} E_k = \lim_{v/c \to 0} (m - m_0)\,c^2 = \tfrac{1}{2}m_0v^2$$

Nótese que la energía cinética relativista *no* está dada por $\frac{1}{2}mv^2$, en donde m es la masa relativista.

Hemos visto que un aumento en la energía cinética de la partícula corresponde a un aumento en su masa. En general, esto es cierto con respecto a la energía: Un cambio en la energía total del sistema corresponde a un cambio en la masa del sistema. La Ec. (35-11) puede escribirse, en forma más general, como

$$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 \tag{35-12}$$

en donde E representa a la *energía total* de la partícula,

$$E = mc^2 \tag{35-13}$$

y E_0 es la *energía en reposo* de la partícula

$$E_0 = m_0 c^2 \tag{35-14}$$

En un sistema de partículas, la energía en reposo E_0 y la masa en reposo m_0 son la energía total y la masa total del *sistema* cuando su centro de masas está en reposo.

La Ec. (35-13) es la famosa relación de Einstein. Implica la equivalencia de la masa y de la energía. La masa y la energía pueden interpretarse como manifestaciones diferentes de la misma entidad física. Una partícula en reposo respecto a un observador tiene una masa en reposo m_0 y una energía en reposo m_0c^2; en movimiento, la masa y la energía son m y mc^2, respectivamente. Debido a que la masa y la energía pueden considerarse como equivalentes e intercambiables, ya no existen leyes separadas de la conservación de la masa y de la conservación de la energía; en vez de esto, la física relativista combina a estas dos leyes en una ley simple: la conservación de la masa-energía que se cumple en cualquier sistema inercial.

En la física, el ímpetu de una partícula generalmente es una cantidad con mayor significado que su velocidad (se tiene una ley de la conservación del ímpetu, pero no una ley de la conservación de la velocidad). Por lo tanto, con frecuencia resulta conveniente expresar a la energía E en términos de p, en vez de hacerlos en términos de v. Podemos eliminar a v de la siguiente manera: elevando al cuadrado (35-7) y multiplicando ambos miembros por $c^4[1 - (v/c)^2]$ se obtiene

$$m^2c^4 - m^2v^2c^2 = m_0{}^2c^4$$

Sustituyendo (35-8), (35-13) y (35-14) por mv, mc^2 y m_0c^2 en esta ecuación, se obtiene inmediatamente la relación buscada entre E y p:

$$E^2 = (pc)^2 + E_0{}^2 \tag{35-15}$$

Examinemos las ecuaciones relativistas en dos condiciones límites: muy baja rapidez y muy alta rapidez.

$v \ll c$. Esta es la región clásica. La mecánica newtoniana es adecuada y las cantidades relativistas se reducen a sus formas clásicas familiares; esto es,

$$m \approx m_0$$

$$p \approx m_0 v$$

$$E_k \approx \tfrac{1}{2} m_0 v^2$$

En el dominio de las bajas velocidades, la energía cinética de una partícula es mucho menor que su energía en reposo; esto es,

$$E_k \ll E_0$$

porque

$$\frac{E_k}{E_0} = \frac{\frac{1}{2}m_0v^2}{m_0c^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$$

$v \approx c$. Esta es la región relativista extrema. Por lo tanto, (35-7), (35-12) y (35-15) se transforman en

$$m \gg m_0$$
$$E \gg E_0$$
$$p \approx \frac{E}{c}$$
$$E_k \approx E$$

Si una partícula tiene energía e ímpetu, pero tiene una masa *en reposo* cero (una posibilidad que no tiene sentido desde el punto de vista clásico, pero es admisible en la teoría de la relatividad), entonces las ecuaciones anteriores son *exactamente ciertas* y una partícula cuya masa en reposo es cero debe viajar, de manera necesaria, con la rapidez de la luz. Esto es, para una partícula cuya masa en reposo es cero:

$$m_0 = 0 \qquad E = pc \qquad E_k = E \qquad v = c \qquad (35\text{-}16)$$

A la inversa, si una partícula con una energía diferente de cero viaja con la rapidez de la luz, *debe* tener una masa en reposo cero. La masa relativista m de tal partícula, está dada por $m = E/c^2$, que puede ser diferente de cero aunque m_0 sea cero. En la Fig. 35-6 se muestran como función de la rapidez, las variaciones en la energía (y por lo tanto, en la masa, porque $E = mc^2$) de un protón, un electrón y una partícula de masa en reposo cero. Tal como lo indica la figura, la energía relativista E de una partícula de masa en reposo cero, tiene un valor diferente de cero sólo si la partícula se mueve con una rapidez *única c;* pero a esta rapidez, su energía (y su masa) puede tener cualquier valor, desde cero hasta infinito. Como una partícula de masa en reposo cero tiene una energía en reposo cero, su energía total es puramente cinética.

En la Fig. 35-7 se muestra a la energía relativista total E como función del ímpetu relativista p, según la ecuación

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \qquad (35\text{-}15)$$

Cuando la rapidez es pequeña, o $v \ll c$, se aplican las relaciones $m \approx m_0$ y $p \approx p_0 \approx m_0v$. Por lo tanto, en esta región clásica, la energía total es, aproximadamente

$$E \approx \frac{p_0^2}{2m} + E_0 = \frac{1}{2}m_0v^2 + E_0$$

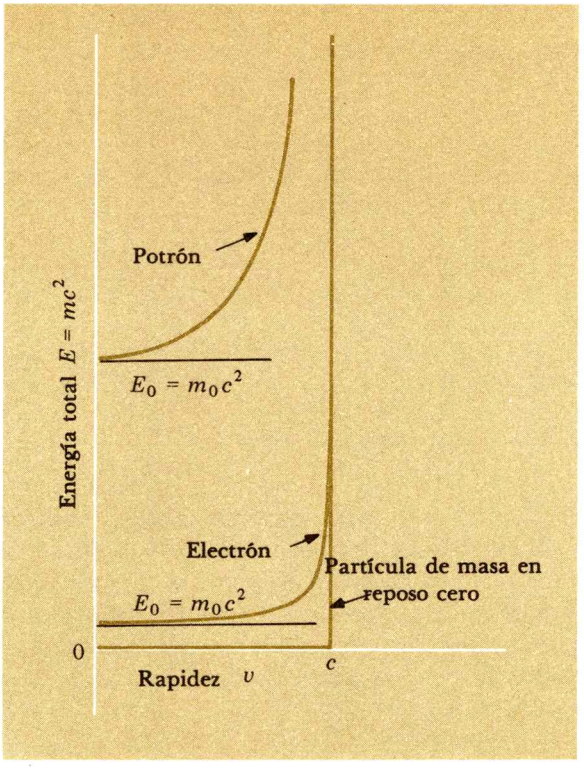


FIG. 35-6. La energía relativista total como función de la rapidez para tres partículas con diferente masa en reposo. (Las energías de reposo no están a escala relativa.)

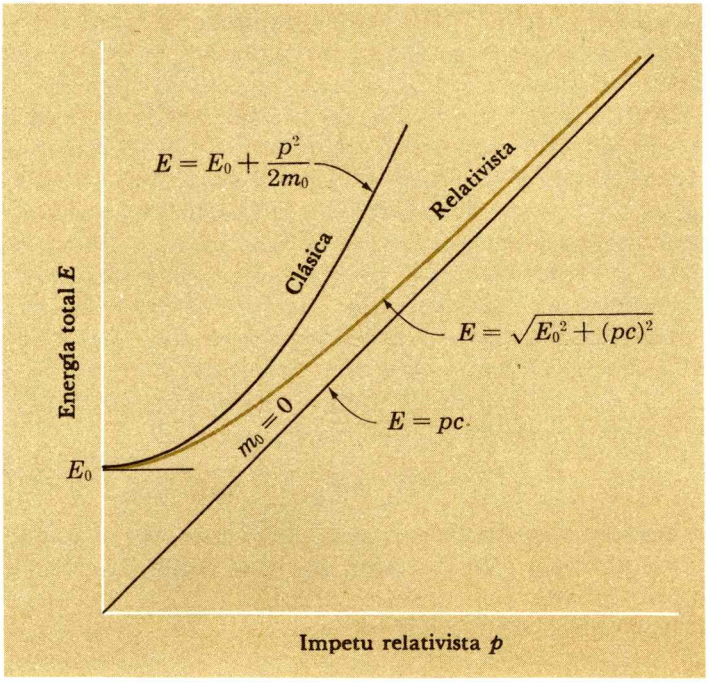


FIG. 35-7. La energía relativista total como función del ímpetu relativista de una partícula.

en tanto que para una gran rapidez se cumple la relación $E \approx pc$, en la región clásica la energía cinética $E - E_0$ varía con el *cuadrado* del ímpetu; en la región relativista extrema, la energía cinética ($\approx E$) varía *linealmente* con el ímpetu.

35—4 LA EQUIVALENCIA ENTRE LA MASA Y LA ENERGIA Y LOS SISTEMAS LIGADOS

Para ilustrar el significado de la equivalencia entre la masa y la energía y la ley de la conservación de la masa-energía, analizaremos dos situaciones: *Sistemas no ligados y sistemas ligados.*

Sistemas no Ligados. Consideremos una colisión entre dos partículas cuya masa en reposo es m_0. Se lanzan una contra la otra, con rapidez v respecto a un observador que se encuentra en reposo en el marco de referencia del centro de masas. Suponemos que la colisión es perfectamente inelástica; en consecuencia, las dos partículas se unen para formar una sola, cuya masa en reposo designaremos por M_0. Ahora nos preguntamos: "¿Cómo está relacionada la masa en reposo final M_0 de la partícula compuesta con la masa en reposo m_0 de cada una de las partículas incidentes?" Desde el punto de vista de la física clásica, M_0 es igual a $2m_0$; sin embargo, relativistamente, éste no es el caso.

Por la conservación del ímpetu lineal sabemos que el ímpetu total del sistema debe ser cero. El ímpetu total es inicialmente cero, ya que las dos partículas tienen, antes de la colisión, ímpetus iguales pero opuestos; después de la colisión, la partícula amalgamada debe de estar en reposo.

La energía total de las dos partículas antes de la colisión es $2mc^2$, en donde mc^2 es la energía en reposo más la energía cinética de cada una de las partículas. Para estar de acuerdo con el principio de la conservación de la energía, la energía total de las dos partículas antes de la colisión debe ser igual a la energía total M_0c^2 de la partícula compuesta después de la colisión. Nótese que la energía total de la partícula compuesta es completamente energía en reposo, ya que el centro de masas está en reposo. Así, lo que ahora podemos caracterizar como la conservación de la masa-energía resulta

$$M_0c^2 = 2mc^2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

o

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (35\text{-}17)$$

La masa en reposo M_0 del objeto compuesto después de la colisión excede a la masa en reposo $2m_0$ de las partículas incidentes. Esto ocurre porque la energía que observamos como energía cinética inicial de las dos partículas se convierte en parte de la energía en reposo de la partícula compuesta después de la colisión.

Aunque la colisión en este ejemplo fue observada desde el marco de referencia en el cual el centro de masas está en reposo, un observador en cualquier sistema inercial encontraría que el ímpetu relativista total de un sistema se conserva y que la energía-masa total también se conserva.

Ejemplo 35-2

Dos satélites, cada uno con una masa en reposo de 4,000 kg, viajan en una órbita, pero en direcciones opuestas, con una rapidez de 8.0 km/s con respecto a un observador en Tierra y chocan uniéndose. Encontrar el aumento en la masa en reposo total del sistema.

Debido a que los satélites tienen ímpetus iguales pero opuestos, el ímpetu total es cero; por lo tanto, después de la colisión el objeto compuesto queda en reposo. Como la energía total se conserva, la energía cinética de los satélites incidentes se convierte en masa en reposo y

$$\text{aumento en la masa en reposo} = \Delta m = \frac{2E_k}{c^2}$$

en donde E_k es la energía cinética inicial de cada satélite. La rapidez de cada satélite (8.0 km/s) es mucho menor que la rapidez de la luz y podemos utilizar la expresión clásica de la energía cinética, $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$. Por lo tanto,

$$\Delta m = \frac{2E_k}{c^2} = \frac{2(\frac{1}{2}m_0v^2)}{c^2} = m_0\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$= (4{,}000 \text{ kg})\left(\frac{8.0 \times 10^3 \text{ m/s}}{3.0 \times 10^8 \text{ m/s}}\right)^2 = 2.8 \times 10^{-6} \text{ kg} = 2.8 \text{ mg}$$

Sistemas Ligados. Una de las consecuencias más importantes de la teoría de la relatividad de Einstein ocurre en la unión, mediante algún tipo de fuerza atractiva, de dos partículas A y B para formar un sistema. Para disociar al sistema en sus componentes separadas, se necesita hacer trabajo; esto es, se necesita entregar energía al sistema. Sea M_0 la masa en reposo del sistema compuesto y m_{0A} y m_{0B} las masas en reposo de las partículas individuales. Observamos al sistema ligado y a la descomposición posterior en A y B, desde el marco de referencia del centro de masas.

La disosiación del sistema ligado se muestra simbólicamente en la Fig. 35-8, en donde E_b es la energía que debe entregarse al sistema para separar por completo a las partículas. Debido a que

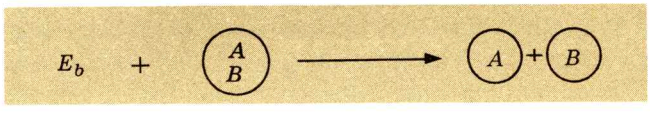


FIG. 35-8. Representación simbólica de la separación de dos partículas ligadas.

la energía necesaria para separar al sistema es exactamente igual a la energía de amarre del sistema, E_b es llamada *energía de amarre*.

Aplicando la conservación de la masa-energía a esta situación, tenemos

$$M_0 + \frac{E_b}{c^2} = m_{0A} + m_{0B} \tag{35-18}$$

Claramente, si el sistema esta ligado y $E_b > 0$, entonces, de esta ecuación se sigue que $M_0 < m_{0A} + m_{0B}$. Esto es, la masa en reposo del sistema ligado debe ser *menor* que la suma de las masas en reposo de las partículas individuales cuando están separadas. (Esto es un contraste con respecto a la situación de sistemas no ligados, en los que la masa en reposo del sistema compuesto es mayor que las masas en reposo de las partículas separadas.) Entonces, en principio es posible calcular la energía de amarre E_b si conocemos las masas en reposo del sistema como un todo y las masas en reposo de sus constituyentes. Sin embargo, sólo en el caso de fuerzas nucleares muy intensas ocurre que la energía de amarre entre las partículas es suficientemente grande como para producir una diferencia de masas medible.

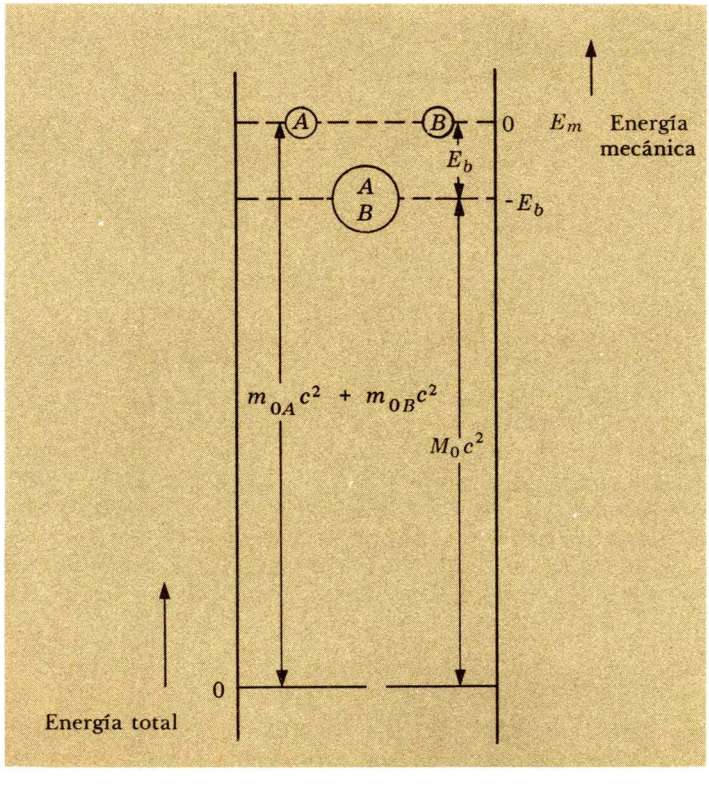


FIG. 35-9. Diagrama de niveles de energía en el que se muestra la energía de dos partículas cuando están mutuamente ligadas y cuando están por completo separadas y en reposo. La energía relativista total se grafica a la izquierda; la energía mecánica a la derecha.

Existe la libertad para escoger al cero de *energía cinética* y *potencial total* del sistema de partículas —lo que podría llamarse la energía mecánica total E_m— en cualquier valor conveniente. La forma más adecuada de escoger este cero, en el caso de partículas que se atraen una a la otra, es cuando éstas se encuentran separadas por una distancia infinita y están en reposo.

Cuando las partículas están mutuamente *ligadas,* la energía E_m del sistema ligado es *negativa.* Se debe de entregar energía al sistema ligado para separar por completo a las partículas y llevar la energía del sistema hasta el valor cero. La Fig. 35-9 muestra las relaciones entre las masas en reposo, la energía relativista total, la energía de amarre y la energía mecánica.

Ejemplo 35-3

Experimentalmente se sabe que la energía de amarre de un electrón con un protón, para formar un átomo de hidrógeno estable, es de 13.6 eV. Se llama energía de ionización, ya que se necesita entregar esta energía al átomo de hidrógeno para separarlo en las dos partículas de cargas opuestas. En otras palabras, la energía mecánica total del átomo de hidrógeno es −13.6 eV. Utilizando la Ec. (35-18), es posible calcular la diferencia entre las masas del átomo de hidrógeno $M_{0_H} = 1.67 \times 10^{-27}$ kg y la suma de las masas en reposo del electrón, m_{0_e} y del protón, m_{0_p} por separado:

$$m_{0_e} + m_{0_p} - M_{0_H} = \frac{E_b}{c^2} = \frac{13.6 \text{ eV}}{c^2}$$

El cambio fraccional en la masa es

$$\frac{E_b/c^2}{M_0} = \frac{(13.6 \text{ eV})(1.60 \times 10^{-19} \text{J/eV})}{(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^2}$$

$$\frac{E_b}{M_0 c^2} = 1.53 \times 10^{-8}$$

Esta diferencia fraccional de masa, ligeramente mayor que una parte en 100 millones, es mucho menor que el error fraccional en la medida de las masas del átomo de hidrógeno, del protón y del electrón. Por lo tanto, en una reacción en la que la energía de amarre es de *varios electrón volts* y todas las reacciones *químicas* son de este orden de magnitud, es imposible detectar directamente un cambio en la masa total del sistema. Sin embargo, se puede medir un cambio en la masa en las reacciones *nucleares,* en las que la energía de amarre típica es de *varios millones de electrón volts.*

35—5 CALCULOS Y UNIDADES EN LA MECANICA RELATIVISTA

Las ecuaciones clásicas del ímpetu y de la energía cinética de una partícula sólo pueden utilizarse cuando la rapidez de la

Tabla 35-1

	Para la condición	*El error en la relación siguiente es menor que el 1 por ciento.*
Región clásica	$E_k/E_0 < 0.01$ o $v/c < 0.1$	$E_k \approx \frac{1}{2}m_0v^2$ y $p \approx m_0v$
Región relativista extrema	$E/E_0 > 7$ o $E_k/E_0 > 6$ o $v/c > 0.99$	$E \approx pc$

partícula es mucho menor que la rapidez de la luz; cuando la rapidez es grande, se debe apelar a las relaciones relativistas. Resulta útil tener una regla para determinar cuándo un cálculo de un problema puede hacerse, en forma segura, clásica o relativistamente. La Tabla 35-1 muestra las condiciones para las cuales, si se cumplen, se llega a errores no mayores que el 1 por ciento en el ímpetu y en la energía calculadas. Si la energía cinética de una partícula es una fracción muy pequeña de la energía en reposo, se aplica la mecánica clásica; por otra parte, si la energía total o la energía cinética exceden en mucho a la energía en reposo de la partícula, entonces se aplica la relación relativista extrema $E = pc$ (que se cumple estrictamente si $m_0 = 0$).

Una unidad conveniente de la energía para partículas atómicas y subatómicas es el electrón volt, o múltiplos de él:

$$\text{Kiloelectrón volt} = 1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}$$
$$\text{Megaelectrón volt} = 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$
$$\text{Gigaelectrón volt*} = 1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$$

De la Ec. (35-15), la unidad correspondiente del ímpetu es el electrón volt dividido por la rapidez de la luz, eV/c. Cuando el ímpetu se expresa en esta unidad, la unidad de pc es justamente el electrón-volt eV. Resulta más conveniente expresar a la rapidez de una partícula átomica en términos de unidades de la rapidez de la luz; esto es, como v/c. En estas unidades, la rapidez de cualquier partícula debe encontrarse entre 0 y 1. Estas unidades particulares

*La unidad de energía BeV (un billón de electrón-volts) también se utiliza para denotar 10^9 eV. Sin embargo, se prefiere el GeV debido a que en Europa, un billón designa a un millón de millones (10^{12}), y no mil millones (10^9).

(eV para la energía, eV/c para el ímpetu y v/c para la rapidez) simplifican los cálculos en problemas tanto clásicos como relativistas.

Las relaciones clásicas de la energía cinética y del ímpetu pueden escribirse, en términos de la energía en reposo de la partícula $E_0 = m_0c^2$, de su rapidez v/c y de la constante c, de la siguiente forma

$$E_k \text{ (clásica)} = \tfrac{1}{2}m_0v^2 = \tfrac{1}{2}(m_0c^2)\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \tfrac{1}{2}E_0\left(\frac{v}{c}\right)^2 \qquad (35\text{-}19)$$

$$p \text{ (clásica)} = m_0v = \frac{(m_0c^2)(v/c)}{c} = \frac{E_0(v/c)}{c} \qquad (35\text{-}20)$$

Por ejemplo, la energía cinética y el ímpetu de un electrón (energía en reposo, $E_0 = 0.51$ MeV) que se mueve con una rapidez de $\frac{1}{100}c$, para la cual se aplican las relaciones clásicas, se encuentran fácilmente y son:

$$E_k = \tfrac{1}{2}E_0\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \tfrac{1}{2}(0.51 \text{ MeV})(10^{-2})^2 = 0.26 \times 10^{-4} \text{ MeV} = 26 \text{ eV}$$

$$p = \frac{E_0(v/c)}{c} = \frac{(0.51 \text{ MeV})(10^{-2})}{c} = \frac{0.51 \times 10^{-2} \text{ MeV}}{c} = 5.1 \text{ keV}/c$$

Las masas de las partículas en la física atómica frecuentemente se dan en unidades llamadas *unidades de masa atómica* (unificada), o "u". *Una unidad de masa atómica se define como la doceava parte de la masa de un átomo de carbón neutro (el isótopo 12).* El número de Avogadro, 6.02217×10^{23}, indica el número de átomos en 12 g de carbón atómico. Por lo tanto,

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12}\left(\frac{12 \text{ g}}{6.02217 \times 10^{23}}\right) = 1.661 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

La relación entre la unidad de masa atómica, u, y la unidad de energía, MeV, es particularmente útil. Esta relación se determina de la relación general de la masa-energía, $E = mc^2$,

$$\begin{aligned} E = mc^2 &= (1 \text{ u})c^2 \\ &= \frac{(1.661 \times 10^{-27} \text{ kg})(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})^2}{(1.602 \times 10^{-19} \text{ J/eV})(10^6 \text{ eV/MeV})} \\ &= 931.5 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Por lo tanto,
1 unidad de masa atómica unificada $= 1\ \text{u} = 931.5\ \text{MeV}/c^2$

Se puede considerar que esta relación da el factor de conversión básico entre las unidades de masa y de energía. Las energías en reposo del electrón y del protón son:

Energía en reposo del electrón $= 0.51100\ \text{MeV} = 0.00055\ \text{u-}c^2$

Energía en reposo del protón $= 938.26\ \text{MeV} = 1.00728\ \text{u-}c^2$

Conviene memorizar que la energía en reposo de un electrón es aproximadamente medio mega electrón volt, $\frac{1}{2}$ MeV, y que la energía en reposo de un protón se aproxima a un giga electrón volt, 1 GeV. Por convención, cuando se describe a una partícula diciendo que es una partícula de 3.0 MeV, por ejemplo, esto significa que ésa es su energía *cinética* y no su energía total E.

Ejemplo 35-4
¿Cuál es la rapidez de un electrón de 2.0 MeV? La energía cinética E_k es de 2.0 MeV y la energía en reposo E_0 es 0.51 MeV. Como $E_k > E_0/100$, debe realizarse un cálculo relativista. La Ec. (35-7) muestra que

$$mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad (35\text{-}21)$$

Frecuentemente esta ecuación es útil en los cálculos relativistas. Resolviendo a v/c, resulta

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{E_0^2}{E^2}} = \sqrt{1-\frac{E_0^2}{(E_k+E_0)^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{0.51}{2.51}\right)^2} = 0.98$$

Ejemplo 35-5
¿Cuál es el ímpetu de un electrón de 20.0 GeV? La Tabla 35-1 muestra que, debido a que $E_k/E_0 = 20{,}000/0.51 \approx 40{,}000$, podemos utilizar a $E = pc$ con un error mucho menor que el 1%; por lo tanto,

$$p = \frac{E}{c} = \frac{E_k+E_0}{c} = \frac{(20.0+0.0005)\ \text{GeV}}{c} \approx 20\ \text{GeV}/c$$

RESUMEN

El ímpetu relativista de una partícula es

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad \text{en donde} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{35-8}$$

En la dinámica relativista la energía total y la masa relativista de una partícula están relacionadas por la ecuación de Einstein

$$E = mc^2 \tag{35-13}$$

La energía cinética de una partícula está dada por

$$E_k = E - E_0 \tag{35-11}$$

en donde $E_0 = m_0c^2$ es la energía en reposo de la partícula.

La energía y el ímpetu relativistas están relacionados de la siguiente manera

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2 \tag{35-15}$$

La masa en reposo de un sistema ligado de partículas es menor que la masa total de las partes por separado en E_b/c^2, en donde E_b es la energía de amarre total.

PROBLEMAS

35-1. Siguiendo una analogía con las Ecs. (35-1) y (35-2), que determinan la invariancia de la conservación del ímpetu clásico ante transformaciones galileanas de la velocidad, demostrar que la ley de la conservación de la energía clásica es invariante ante transformaciones galileanas de la velocidad. Suponer que la colisión es frontal y perfectamente elástica.

35-2. (*a*) Calculando la aceleración medida en dos marcos inerciales que tienen una velocidad relativa constante, demostrar que la segunda ley de movimiento de Newton es invariante ante las relaciones de transformación galileanas. (*b*) ¿Qué forma toma la segunda ley de Newton si un marco de referencia está *acelerado* con respecto a un marco de referencia inercial?

35-3. Inicialmente una partícula se mueve con una rapidez de $0.4c$ y aumenta su rapidez hasta que su ímpetu ha aumentado por un factor 10. (*a*) ¿Por qué factor aumentó la rapidez? (*b*) ¿Cuál es la rapidez final?

35-4. Un haz de protones polienergéticos entra perpendicularmente en un campo magnético uniforme de 1.50 Wb/m^2. Se encuentra que el gas se separa en un espectro cuyo intervalo de radios varía de 10.0 a 1.00 m. (*a*) ¿Cuál es el intervalo en los valores del ímpetu (en unidades de GeV/c) en el haz de protones? (*b*) ¿Cuál es el intervalo en los valores de la energía cinética (en unidades de GeV)?

35-5. (*a*) ¿Cuál es el radio de curvatura de un haz de electrones de 20 GeV que se introduce perpendicularmente en un campo magnético uniforme de 2.0 Wb/m^2? (*b*) ¿Cuál sería el radio de curvatura predicho por la física no relativista? (*c*) ¿Cuál será el radio de curvatura de un haz de protones de 20 GeV que se introduce en el mismo campo?

35-6. Un haz de partículas cargadas con carga q pasa sin deflectarse a través de una región en donde hay un campo eléctrico y un campo magnético transversales, de magnitudes $\mathscr{E}$ y B, respectivamente. Cuando se elimina al campo eléctrico, el haz se deflecta en un

arco circular de radio r. Demostrar que la masa relativista de cada partícula está dada por $qB^2r/\mathscr{E}$.

35-7. En el acelerador de altas energías de Batavia, Illinois, los protones pueden acelerarse a energías hasta de 500 GeV. (*a*) Determinar la rapidez de tales protones. (*b*) Si la intensidad final del haz de protones es de 10^{14} protones/s, ¿cuál es la potencia mínima (en watts) necesaria para acelerar a los protones?

35-8. Actualmente es posible acelerar electrones a energías de 20 GeV. (*a*) ¿Por qué factor debe aumentar la masa relativista de tales electrones? (*b*) ¿Cuál es la diferencia porcentual entre la rapidez de la luz y la rapidez de los electrones de 20 GeV?

35-9. A través de una diferencia de potencial de 500 kV, se acelera a un electrón y a un protón que estaban inicialmente en reposo. ¿Cuál es la relación entre (*a*) la energía cinética, (*b*) el ímpetu y (*c*) la rapidez final del electrón y del protón?

35-10. Debido a que la magnitud de la carga eléctrica de un electrón y de un protón es la misma, las energías cinéticas de un electrón y de un protón que son acelerados a través de la *misma* diferencia de potencial eléctrica son siempre exactamente iguales, sin importar las diferencias en la rapidez del electrón y del protón. ¿A través de qué diferencia de potencial mínima se debe acelerar a un electrón y a un protón, partiendo del reposo, para que sus ímpetus sean iguales dentro de 1 parte en 10?

35-11. ¿Cuáles son (*a*) la energía cinética (en eV) y (*b*) el ímpetu (en eV/c) de una partícula cuya energía en reposo es de 100 MeV que se mueve con una rapidez de $v/c = \frac{1}{100}$?

35-12. La relación entre la energía total E de una partícula (cuya energía en reposo es E_0,) y su ímpetu p puede representarse en un triángulo cuyos lados sean pc, E_0 y E. Dibujar este triángulo y marcar la energía cinética de la partícula cuando (*a*) $v/c \ll 1$ y (*b*) $v/c \approx 1$.

35-13. Una partícula que incialmente se mueve con una rapidez de $0.6c$ aumenta ésta en un tercio. ¿Por qué factor aumenta (*a*) el ímpetu y (*b*) la energía cinética de la partícula?

35-14. Demostrar que los dominios clásico y relativista extremo pueden caracterizarse de la siguiente manera: En el límite de bajas velocidades, cuando el ímpetu de la partícula aumenta por un factor F, la energía cinética de la partícula aumenta por un factor F^2; en el límite de grandes velocidades, cuando el ímpetu de la partícula aumenta por un factor F, la energía cinética también aumenta por un factor F.

35-15. Un protón tiene una rapidez de $\frac{1}{20}c$. ¿Cuál es (*a*) su energía cinética (en MeV) y (*b*) su ímpetu (en MeV/c)?

35-16. Un electrón tiene un ímpetu de 10 MeV/c: ¿Cuáles son (*a*) su energía cinética y (*b*) su rapidez? Un protón tiene un ímpetu de 10 MeV/c: ¿Cuáles son (*c*) su energía cinética y (*d*) su rapidez?

35-17. ¿Cuáles son (*a*) la energía cinética y (*b*) la rapidez de un electrón que tiene un ímpetu de 200 KeV/c?

35-18. Demostrar que, en general, la derivada dE/dp es igual a la velocidad de la partícula, en donde E y p son la energía y el ímpetu de la partícula.

35-19. ¿Cuáles son los ímpetus de (*a*) un electrón de 1.0 GeV (energía cinética) y (*b*) un átomo de carbón, cuya energía en reposo es $\approx$ 12 GeV, de 1.0 GeV (energía cinética).

35-20. La energía cinética de una partícula es 10 veces su energía en reposo E_0. ¿Cuáles son (*a*) su ímpetu y (*b*) su rapidez, expresados en términos de E_0 y c?

35-21. Un acelerador de alta energía acelera a un haz de electrones a través de una diferencia de potencial total de 2×10^{10} V. El número promedio de electrones que inciden en un blanco es de 15×10^{13} por segundo. (*a*) ¿Cuál es la corriente promedio de electrones? (*b*) ¿Cuál es la fuerza promedio ejercida sobre el blanco por el haz electrónico a medida que los electrones llegan al reposo?

35-22. (*a*) ¿Cuál es la máxima rapidez posible de una partícula cuya energía cinética puede escribirse como $\frac{1}{2}m_0v^2$ con un error en la energía cinética no mayor que el 1%? (*b*) ¿Cuál es la energía cinética de un electrón que se mueve con esta rapidez? (*c*) ¿Cuál es la energía cinética de un protón que se mueve con esta rapidez?

35-23. (*a*) ¿Cuál es la rapidez mínima de una partícula cuya energía cinética puede expresarse como su energía total E y, por lo tanto, como pc con un error en la energía total no mayor que el 1 por ciento? (*b*) En estas condiciones, ¿cuál es la energía cinética de un electrón? (*c*) ¿Y de un protón?

35-24. La intensidad total de la radiación del Sol en la superficie de la Tierra es de 8.0 J/cm ^{2}-min. Calcular la pérdida por segundo en la masa del Sol y la pérdida fraccional en la masa del Sol en 10^9 años (aproximadamente un décimo de la edad del universo) que resulta de esta radiación. La distancia del Sol a la Tierra es de 1.49×10^{11} m y la masa actual del Sol es de 2.0×10^{30} kg.

35-25. Una nave espacial tiene una masa en reposo final de 6×10^4 kg y se acelera hasta una rapidez de 0.95 c. ¿Cuál es la energía mínima necesaria para acelerar a la nave espacial hasta esta rapidez? (*b*) ¿Qué tanta masa equivalente adicional representa esta energía? (*c*) ¿Qué cantidad de combustible nuclear (suponiendo una conversión de masa en energía del 1%) será necesaria para alcanzar esta rapidez?

35-26. (*a*) Demostrar que el ímpetu de una partícula puede escribirse como $p = (1/c)(E_k^2 + 2E_0E_k)^{1/2}$. (*b*) Demostrar que esta expresión se reduce a m_0v en el límite clásico y a E/c en la región relativista extrema.

35-27. Un electrón de 10.2 MeV sufre una colisión frontal con un protón que está en reposo. Demostrar que el protón adquiere una rapidez aproximadamente igual a $(2E_e/E_p)c$ y que la energía fraccional transferida del electrón al protón es $2E_e/E_p$, en donde E_e es la energía *total* del electrón y E_p es la energía en *reposo* del protón. (Sugerencia: (*a*) Como la energía del electrón es mucho mayor que su energía en reposo, se puede considerar a la partícula en el extremo relativista y (*b*) como la energía en reposo del protón es mucho mayor que la energía *total* del electrón, el protón puede tratarse clásicamente.)

35-28. Para separar a una molécula de monóxido de carbono (CO), en un átomo de carbón y un átomo de oxígeno se necesitan 11.00 eV. (*a*) ¿Cuál es el cambio fraccional en la masa de la molécula de CO cuando se disocia en un átomo de C y uno de O? (*b*) ¿Cuál es la energía de amarre (en eV) por molécula?

35-29. Indicar, en las siguientes circunstancias, si la masa del sistema aumenta o disminuye y en qué proporción: (*a*) Una pila seca de 1,25 V y 450 mAh cargada, se descarga completamente; (*b*) la temperatura de 5.0 kg de agua aumenta en 20°C; (*c*) un cuerpo de 1.0 kg de hielo a 0°C se licua (el calor latente de fusión del agua es de 80 cal/g).

35-30. En el sistema inercial S una partícula de masa en reposo m_0 se observa moviéndose con una rapidez constante de $0.80c$ a lo largo de la dirección positiva del eje Y. (*a*) Determinar el ímpetu y la energía total de la partícula observados en un segundo sistema inercial S' que se mueve a lo largo de la dirección positiva del eje X con una rapidez de $0.50c$. (*b*) ¿En cuál de los dos sistemas es mínima la energía total de la partícula?

Capítulo
36

LOS EFECTOS CUANTICOS: LOS ASPECTOS CORPUSCULARES DE LA RADIACION ELECTROMAGNETICA

36—1 LA CUANTIZACION EN LA FISICA CLASICA

La teoría de la relatividad y la teoría cuántica constituyen los dos grandes fundamentos teóricos de la física del siglo XX. De la misma forma que la teoría de la relatividad conduce a nuevos aspectos en la naturaleza del espacio y del tiempo y a consecuencias profundas en la mecánica y en el electromagnetismo, también la teoría cuántica conduce a modos de pensamiento drásticamente nuevos, que están basados en el entendimiento de las estructuras atómica y nuclear.

En el estudio del mundo físico encontramos dos tipos generales de cantidades físicas: cantidades que tienen un continuo de valores y cantidades que están *cuantizadas*. Estas últimas son cantidades que están restringidas a ciertos valores discretos; ocasionalmente se dice que tales cantidades poseen "atomicidad" o "granulidad".

Como ejemplos de cantidades físicas clásicas continuas, o no cuantizadas, se tienen (1) la magnitud del ímpetu de una partícula, el ímpetu angular y la energía, que pueden tomar cualquier valor desde cero hasta infinito; (2) la energía de un sistema de dos partículas, que puede tomar cualquier valor negativo cuando las partículas están ligadas; y (3) el ángulo entre la dirección de un momento dipolar magnético y un campo magnético externo.

La Fig. 36-1 muestra diferentes ejemplos de cantidades físicas cuantizadas:

a. Las masas en reposo de los átomos, que no ocurren en un intervalo continuo, sino que *casi* ocurren como relaciones entre números enteros.

b. La carga eléctrica, cuya cuantización se manifiesta en el hecho de que la carga total de cualquier objeto es justo un multiplo entero, ya sea positivo o negativo, de la carga electrónica fundamentel e.

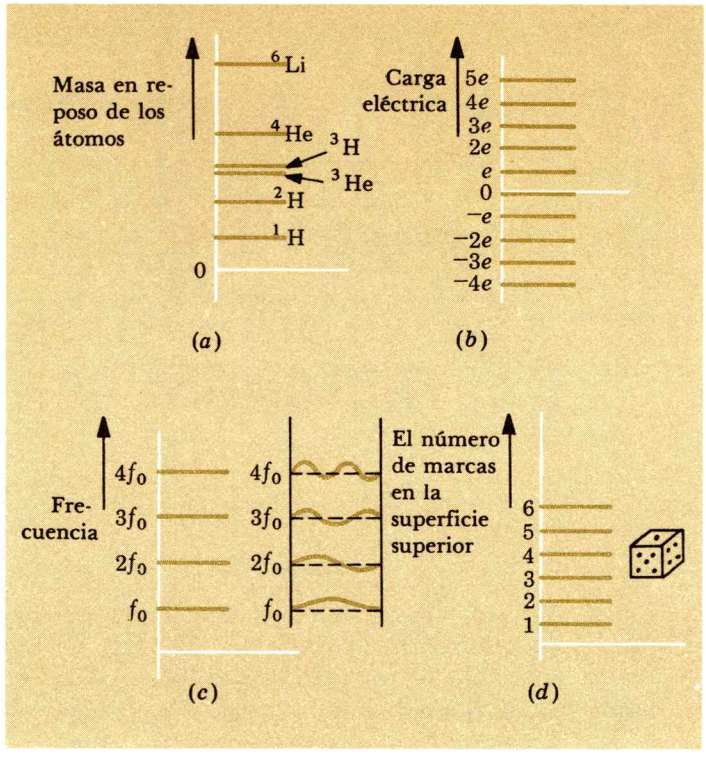


FIG. 36-1. Algunos ejemplos de cantidades físicas clásicas que tienen valores cuantizados.

c. Las ondas estacionarias y la resonancia son manifestaciones particularmente impresionantes de la cuantización en la física clásica. La frecuencia de oscilación de una cuerda vibrante en resonancia, fija en sus dos extremos, sólo puede ser un múltiplo entero de la frecuencia más baja, o fundamental, de oscilación f_0. Se puede pensar que la onda en la cuerda se refleja repetidas veces en sus fronteras, o extremos fijos, e interfiere en forma constructiva con ella misma, para producir ondas estacionarias. La resonancia ocurre cuando la distancia entre los puntos extremos es precisamente un múltiplo entero de media longitud de onda.

d. Un dado que se lanza y que sólo puede mostrar en su superficie superior 1, 2, 3, 4, 5 y 6 manchas. Otros ejemplos cotidianos de cantidades cuantizadas son las caras de una moneda, las personas y el número de centavos.

La teoría cuántica está basada, en gran medida, en el descubrimiento de ciertas cantidades que en la física clásica se habían considerado como continuas, pero que, de hecho, están cuantizadas. Históricamente tuvo su origen en la interpretación teórica de la radiación electromagnética de un cuerpo negro (un absorbedor y radiador perfecto). Hacia finales del siglo XIX se encontró que la variación de la intensidad con la longitud de onda de la radiación electromagnética de un cuerpo negro estaba en desa-

cuerdo con la explicación teórica del electromagnetismo clásico. En 1900, Max Planck, que fue el formulador de la teoría cuántica, demostró que una revisión de las ideas clásicas, a través del concepto de la cuantización de la energía, conducía a un acuerdo satisfactorio entre el experimento y la teoría. Debido a que un análisis detallado de la radiación del cuerpo negro involucra argumentos muy sofisticados, introduciremos los conceptos cuánticos a través de consideraciones más simples, y en muchos aspectos más precisas, que ocurren en el fenómeno del efecto fotoeléctrico.

36—2 EL EFECTO FOTOELECTRICO

Resulta una ironía histórica que el efecto fotoeléctrico fuera descubierto por Heinrich Hertz en 1887 durante la realización de los experimentos que confirmaron las predicciones teóricas de Maxwell (1864) referentes a la existencia de las ondas electromagnéticas clásicas producidas por corrientes eléctricas oscilantes.

El efecto fotoeléctrico es uno de varios procesos mediante los cuales los electrones pueden abandonar la superficie de una sustancia. Ocurre cuando la radiación electromagnética ilumina una superficie metálica limpia y los electrones la abandonan. Los electrones de valencia en un metal tienen una libertad relativa de movimiento en el interior del mismo, pero están ligados al metal como un todo. Estos electrones, relativamente libres, se pueden convertir en fotoelectrones. En el efecto fotoeléctrico, un haz de radiación suministra a los electrones una energía que iguala o sobrepasa a la energía que los mantiene ligados con la superficie y, por lo tanto, permite que los electrones escapen. Una descripción más detallada del efecto fotoeléctrico requiere del conocimiento, basado en el experimento, de la relación entre las diferentes variables que intervienen en la emisión fotoeléctrica. Estas variables son la frecuencia ν de la luz, la intensidad I del haz luminoso, la corriente fotoeléctrica i, la energía cinética $\frac{1}{2}m_0v^2$ (dentro de poco veremos que la fórmula de la energía cinética clásica es la apropiada) y la identidad química de la superficie de la cual emergen los electrones.

La Fig. 36-2 muestra un diagrama esquemático de la disposición experimental para estudiar los aspectos importantes del efecto fotoeléctrico. Sobre la superficie del metal (el ánodo), que se encuentra en un tubo al vacío (eliminando así las colisiones entre los fotoelectrones y las moléculas de gas), incide luz monocromática. Cuando se emiten los fotoelectrones, algunos viajan hacia el cátodo y al llegar establecen una corriente que fluye en un circuito. Los fotoelectrones abandonan al ánodo con diferentes energías cinéticas. El cátodo, cargado negativamente, tiende a repelerlas. Cuando el trabajo realizado sobre un fotoelectrón por el campo eléctrostático retardador, cuya diferencia de potencial es V, es igual a la energía cinética inicial del fotoelectrón, éste queda en reposo justamente enfrente del cátodo. Por lo tanto $eV = \frac{1}{2}m_0v^2$, en

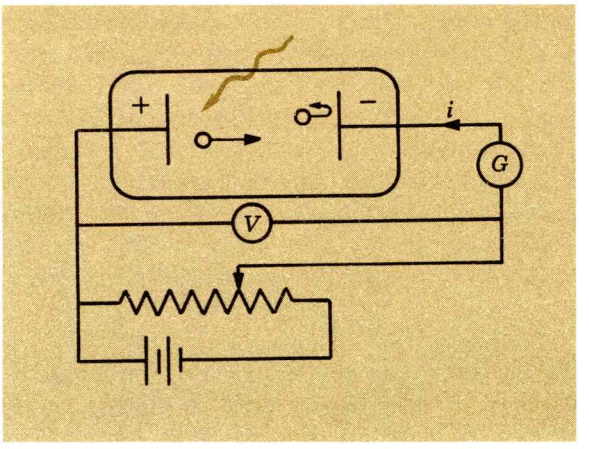


FIG. 36-2. Arreglo experimental esquemático para estudiar el efecto fotoeléctrico. *V* voltimetro; G galvanómetro.

donde v es la rapidez del fotoelectrón en el momento de abandonar a la superficie del ánodo y V es la diferencia de potencial que detiene al fotoelectrón, cuya masa en reposo es m_0 y cuya carga es e. Cuando los fotoelectrones más energéticos, cuya rapidez es $v_{máx}$, quedan en reposo enfrente del cátodo, debido a una diferencia de potencial bastante grande V_0, todos los demás fotoelectrones son, naturalmente, frenados y no existe fotocorriente: $i = 0$. Entonces

$$eV_0 = \tfrac{1}{2}m_0 v_{máx}^2 \tag{36-1}$$

Si la diferencia de potencial retardadora es mayor, todos los fotoelectrones *regresan* antes de llegar al cátodo.

A continuación enlistaremos los resultados experimentales y entonces daremos los resultados que podrían esperarse en base a la teoría electromagnética clásica. Se verá que los resultados experimentales están en fuerte desacuerdo con las predicciones clásicas. Finalmente, veremos cómo el efecto fotoeléctrico puede entenderse en base a una interpretación cuántica.

Resultados Experimentales del Efecto Fotoeléctrico. Los resultados experimentales del efecto fotoeléctrico se resumen en la Fig. 36-3. Los consideraremos en el orden en el que aparecen en la figura.

a. La fotocorriente se inicia *casi instantáneamente,* aunque el haz luminoso tenga una densidad tan pequeña como 10^{-10} W/m^2. El tiempo de retraso, desde el instante en el que el haz ilumina por primera vez a la superficie hasta que se emite el fotoelectrón, no es mayor que 10^{-9} s.

b. A una frecuencia y a un potencial retardador fijos, la *fotocorriente i* es directamente *proporcional a la intensidad I* del haz luminoso. Dado que la fotocorriente es una medida del número de fotoelectrones desprendidos por unidad de tiempo en el ánodo y colectados en

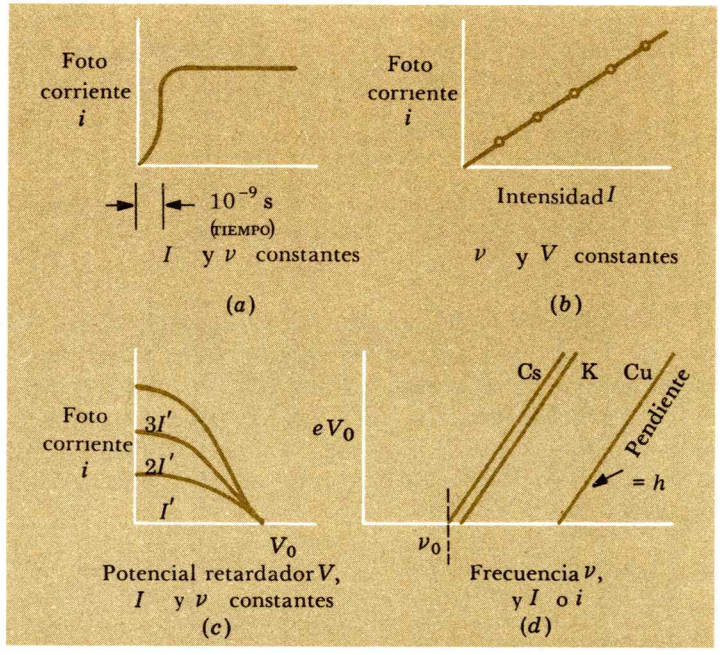


Fig. 36-3. Resultados experimentales de la emisión fotoeléctrica.

el cátodo, esta relación significa que el número de fotoelectrones que son emitidos por unidad de tiempo es proporcional a la intensidad luminosa (la variación de la fotocorriente con la intensidad se utiliza en dispositivos fotoelectricos prácticos).

c. Para una frecuencia ν y una intensidad luminosa I constantes, *la fotocorriente disminuye con el aumento del potencial retardador* V y finalmente *alcanza el valor 0 cuando* V *es igual a* V_0 [ver la Ec. (36-1)]. Con un potencial retardador pequeño, los fotoelectrones de baja velocidad, y de baja energía, quedan en reposo; cuando el potencial retardador es igual a V_0, aun los más energéticos de los fotoelectrones llegan al reposo y entonces $i = 0$.

d. En una superficie particular, el valor del *potencial retardador* V_0 *depende de la frecuencia de la luz, pero es independiente de la intensidad luminosa* y, por lo tanto, por (*b*), también es independiente de la fotocorriente. La Fig. 36-3*d* muestra los resultados experimentales en los siguientes tres metales: cesio, potasio y cobre. En cada uno de ellos existe una frecuencia ν_0, bien definida, la *frecuencia umbral,* que debe ser sobrepasada para que ocurra la fotoemisión; esto es, no se producen fotoelectrones, sin importar qué tan grande sea la intensidad luminosa, a menos que $\nu > \nu_0$. En la mayoría de los metales, la frecuencia umbral se encuentra en la región de la luz ultravioleta. Un potencial retardador típico es de varios volts. Los fotoelectrones emitidos tienen energías de varios electrón volts; por lo tanto, existe una justificación al usar la fórmula de la energía cinética clásica para describir a los fotoelectrones.

Independientemente del tipo del metal, los resultados experimentales de la Fig. 36-3*d* pueden representarse por la ecuación de una línea recta

$$eV_0 = h\nu - h\nu_0$$

en donde h, que representa a la pendiente de la línea recta, es la *misma* para *todos* los metales y ν_0 es la frecuencia umbral del metal particular. Rearreglando los términos y utilizando (36-1) se obtiene

$$h\nu = \tfrac{1}{2}m_0 v^2_{\text{máx}} + h\nu_0 \qquad (36\text{-}2)$$

Como $\frac{1}{2}m_0 v^2_{\text{máx}}$ tiene dimensiones de energía, los términos $h\nu$ y $h\nu_0$ también deben tener dimensiones de energía.

Interpretación Clásica del efecto Fotoeléctrico. Ahora consideraremos los efectos que han de esperarse, en base a las propiedades clásicas de una onda electromagnética, en cada uno de los resultados experimentales del efecto fotoeléctrico mencionados en los párrafos anteriores. Como antes, los discutiremos en el mismo orden que el de la Fig. 36-3 y con respecto a ella.

a. Debido a la naturaleza aparentemente continua de las ondas luminosas, esperaríamos que la energía se absorba en la superficie fotoeléctrica de manera proporcional a la intensidad del haz luminoso (la potencia por unidad de área), al área iluminada y al tiempo de iluminación. Todos los electrones ligados a la superficie del metal con la misma energía deben considerarse como equivalentes y cualquier electrón podría abandonar la superficie solamente después de que el haz luminoso haya estado lo suficiente como para suministrar la energía de amarre del electrón. Más aún, como cualquier electrón es equivalente a cualquier otro electrón ligado con la misma energía, esperaríamos que cuando un electrón haya acumulado energía suficiente como para liberarse, también lo habrán hecho un cierto número de electrones. Experimentos independientes demuestran que, en un metal típico, la energía mínima con la que está ligado un electrón a la superficie es de unos cuantos electrón volts. Un cálculo conservador (ver el Prob. 36-7) demuestra que en el caso de una intensidad del orden de 10^{-10} W/m^2, para la cual no se han observado tiempos de retraso mayores que 10^{-9} no se esperaría fotoemisión ¡hasta después de transcurridas varios cientos de horas! Resulta claro que la teoría clásica no puede explicar la emisión fotoeléctrica esencialmente instantánea.

b. La teoría clásica predice que, a medida que la intensidad luminosa aumenta, también lo hace la energía absorbida por los electrones en la superficie; por lo tanto, el número de fotoelectrones emitidos, o fotocorriente, debe aumentar proporcionalmente con la intensidad luminosa. En este caso, la teoría clásica concuerda con el resultado experimental.

c. Los resultados de estas observaciones demuestran que existe una distribución en la rapidez, o en la energía, de los fotoelectrones emitidos; la distribución misma no es incompatible con la teoría clásica, porque se puede atribuir a un grado variable de ligadura de los electrones en la superficie. Sin embargo, el hecho de que exista un potencial retardador V_0 muy bien definido para una frecuencia dada, independientemente de la intensidad, indica que la energía

máxima de los electrones emitidos no depende, en forma alguna, de la cantidad total de energía que llega a la superficie por unidad de tiempo. La teoría clásica no predice tal efecto.

d. La existencia de una frecuencia umbral en un metal dado (una frecuencia por debajo de la cual no ocurre la emisión fotoeléctrica), sin importar qué tan grande sea la intensidad luminosa, es totalmente inexplicable en términos clásicos. Desde el punto de vista clásico, la circunstancia primaria que determina si ha de ocurrir o no la fotoemisión es la energía que llega a la superficie por unidad de tiempo (o la intensidad), pero *no* la frecuencia. Más aún, la aparición de una sola constante h que relaciona, a través de (36-2), a la energía máxima de los fotoelectrones con la frecuencia en cualquier material, no puede entenderse en términos de las constantes del electromagnetismo clásico.

Resumiendo, *el electromagnetismo clásico no puede dar una base razonable para entender los resultados experimentales ilustrados en la Fig. 36-3a, c y d.*

Interpretación Cuántica del Efecto Fotoeléctrico. El efecto fotoeléctrico sólo puede entenderse con la teoría cuántica. Albert Einstein aplicó, por primera vez, la teoría cuántica a la naturaleza electromagnética de la radiación en 1905 y esto condujo a una explicación satisfactoria del efecto fotoeléctrico.

Según la teoría cuántica, las ondas electromagnéticas, aparentemente continuas, están cuantizadas y consisten de *cuantos* discretos llamados *fotones*. Cada fotón tiene una energía E, que depende sólo de la frecuencia (o de la longitud de onda) y que está determinada por

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \tag{36-3}$$

La constante h es, de hecho, la misma constante h que aparece en (36-2). Esta constante fundamental de la teoría cuántica se llama *constante de Planck* porque su valor y significado fueron determinados por primera vez por Planck en 1900 en su interpretación de la radiación del cuerpo negro. El valor de la constante de Planck se determina experimentalmente y es

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J-s}$$

Según la teoría cuántica, un haz luminoso de frecuencia ν consiste de fotones (cierto tipo de partículas), con energía $h\nu$. Un fotón puede interaccionar con un electrón en la superficie del metal del fotoemisor; no puede repartir su energía entre varios electrones. Dado que los fotones viajan con la rapidez de la luz, deben tener, en base a la teoría de la relatividad, una masa en reposo igual a cero y una energía que es totalmente cinética.

Cuando una partícula de masa en reposo cero deja de moverse con la rapidez c, deja de existir; mientras exista, se mueve con la rapidez de la luz. Por lo tanto, cuando un fotón incide sobre un electrón ligado en un metal y deja de moverse a la rapidez única c, cede *toda* su energía $h\nu$ al electrón sobre el cual incide. Si la energía del electrón ligado, que adquiere del fotón, sobrepasa a la energía de amarre, abandona a la superficie y la energía adicional se manifiesta como energía cinética del fotoelectrón.

Ya se tienen los elementos para interpretar los resultados experimentales del efecto fotoeléctrico en base a la teoría cuántica y los consideraremos ahora, por conveniencia, en el orden inverso al que aparecen en la Fig. 36-3.

d. Los términos en la Ec. (36-2) permiten una interpretación simple de las energías del fotón y del fotoelectrón

$$h\nu = \tfrac{1}{2}m_0 v_{\text{máx}}^2 + h\nu_0 \tag{36-2}$$

El miembro izquierdo de esta ecuación es la energía transportada por el fotón y suministrada al electrón ligado. Aquellos electrones que están ligados más débilmente abandonan a la superficie con la mayor de las energías cinéticas. El miembro derecho de (36-2) es la energía ganada por el electrón a partir del fotón; esto es, la energía cinética y la energía de amarre. La energía de amarre del electrón menos ligado a la superficie de metal se llama *función de trabajo* ϕ; representa el trabajo que ha de realizarse para extraer al electrón menos ligado. Por lo tanto,

$$\phi = h\nu_0 \tag{36-4}$$

y (36-2) puede escribirse en la forma

$$h\nu = \tfrac{1}{2}m_0 v_{\text{máx}}^2 + \phi \tag{36-5}$$

El valor de ϕ de un material particular, determinado a partir del efecto fotoeléctrico, concuerda con el valor obtenido en experimentos independientes basado en principios físicos diferentes. Un electrón ligado con una energía ϕ puede desprenderse sólo si el fotón suministra cuando menos esta energía; esto es, si $h\nu > \phi = h\nu_0$, o si $\nu > \nu_0$. La Fig. 36-3*d* tiene ahora un nuevo significado: la ordenada se identifica con la energía del fotón, como se muestra en la Fig. 36-4.

c. Existe una energía cinética máxima, bien definida, de los fotoelectrones a una frecuencia dada, debido a que la frecuencia de la radiación electromagnética determina, en forma precisa, a la energía del fotón ($E = h\nu$).

b. La intensidad de la onda electromagnética monocromática tiene ahora un nuevo significado: Desde el punto de vista cuántico, es la energía de cada fotón multiplicada por el número de fotones que pasan a través de una área transversal unitaria por unidad de tiempo. Un aumento en la intensidad del haz luminoso significa, por

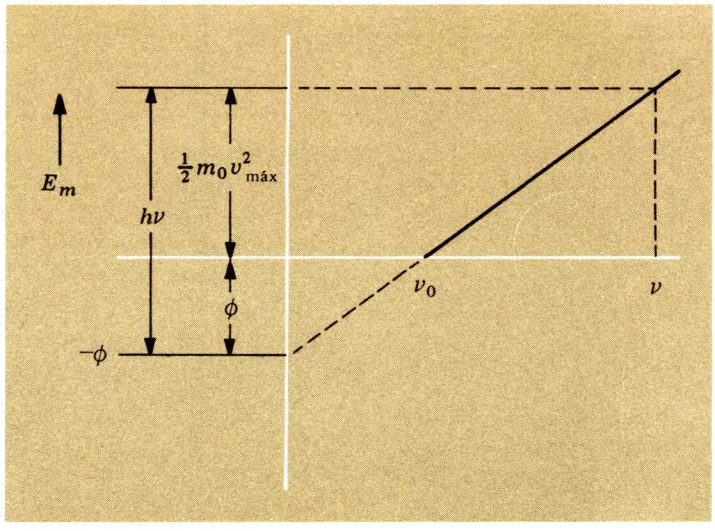


FIG. 36-4. Energía cinética máxima de los fotoelectrones como función de la frecuencia de los fotones incidentes en un material partícular.

lo tanto, un aumento proporcional en el número de fotones que inciden en la superficie del metal. Es de esperarse entonces que el número de fotoelectrones, o la fotocorriente i, sea proporcional a I.

a. La fotoemisión ocurre sin un retraso apreciable debido a que el desprendimiento de un electrón no depende, aun con la intensidad más pequeña, del acumulamiento de energía, sino del hecho de que sea tocado por un fotón, que al frenarse le ceda toda su energía.

La Tabla 36-1 resume los resultados experimentales, la interpretación clásica y la interpretación cuántica, de cada uno de los cuatro efectos mostrados en la Fig. 36-3.

El efecto fotoeléctrico puede ocurrir cuando un fotón incide sobre un electrón *ligado* con una energía suficiente como para sobrepasar a la energía de amarre del electrón (por ejemplo, un fotón que libera a un electrón ligado de un átomo). En general, la energía cinética del electrón liberado debe escribirse en la forma relativista $E - E_0$, así que la expresión más general de (36-2) es ahora

$$h\nu = (E - E_0) + E_b \tag{36-6}$$

Así, el efecto fotoeléctrico proporciona un método indirecto para medir la energía de un fotón. Supongamos que medimos la energía cinética de los fotoelectrones $E - E_0$ y que la energía de amarre E_b se conoce de alguna otra manera; entonces, $h\nu$ puede calcularse de (36-6). Inversamente, si se miden $h\nu$ y $E - E_0$ podemos determinar a E_b

El aspecto fundamental nuevo de la naturaleza de la radiación electromagnética que proporciona el efecto fotoeléctrico es la

Tabla 36-1

Efecto en la Fig. 36-3	*Experimento*	*Electromagntismo clásico*	*Teoría cuántica*
a	Fotoemisión esencialmente instantánea (10^{-9} s)	Emisión sólo después de algunos cientos de *horas* (10^{6} s) cuando la intensidad es baja	Un fotón entrega su energía a un electrón de manera esencialmente instantánea
b	$I \propto i$	Energía/área-tiempo $\propto i$	$I \propto$ número de fotones $\propto i$
c	$\frac{1}{2}m_0 v^2_{\max}$, bien definida dependiendo solamente de ν	Inexplicable	Un fotón entrega toda su energía a un electrón
d	Un umbral para la fotoemisión independiente de i: $h\nu = \frac{1}{2}m_0 v^2_{\max} + h\nu_0$	Inexplicable	Energía del fotón $= h\nu$; función de trabajo $= \phi = h\nu_0$

cuantización de las ondas electromagnéticas, o la existencia de fotones. Podemos hablar, con propiedad, de la cuantización de las ondas electromagnéticas porque la radiación puede considerarse como una colección de fotones (de cierto tipo de partículas) de energía $h\nu$. Cuando se especifica la frecuencia ν, de la radiación, el fotón puede tener una sola energía $h\nu$. La energía total de un haz de radiación electromagnética monocromática siempre es, precisamente, un múltiplo entero de la energía $h\nu$ de un fotón. (Ver la Fig. 36—5.)

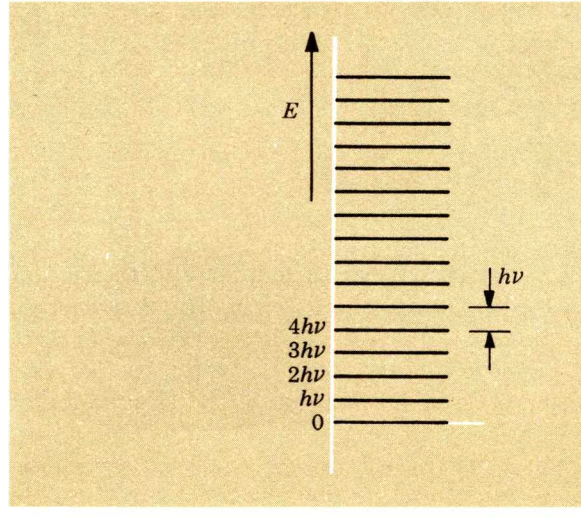


FIG. 36-5. Energías E permitidas de un haz de radiación electromagnética monocromática.

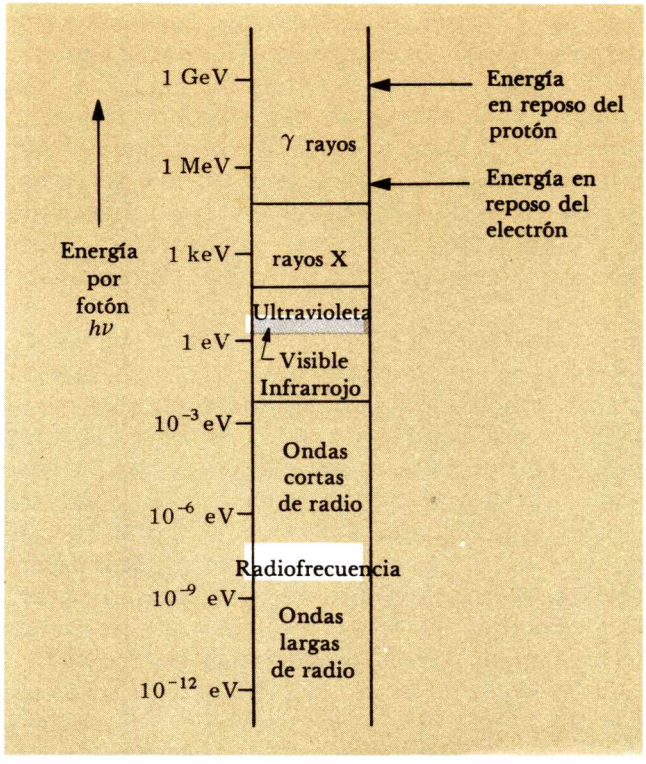


FIG. 36-6. El espectro de la radiación electromagnética en unidades de la energía del fotón.

El aspecto corpuscular de la radiación electromagnética no es notable en las observaciones ordinarias, porque la energía de cualquier fotón es muy pequeña y porque el número de fotones en un haz luminoso de intensidad moderada es enorme. La situación es más parecida a la que se encuentra en la teoría molecular: Las moléculas son tan pequeñas y su número es tan grande que la estructura molecular de toda la materia queda descubierta sólo en observaciones de considerable sutileza.

El espectro electromagnético, que generalmente se expresa en unidades de frecuencia, también puede expresarse, desde el punto de vista de la teoría cuántica, en unidades de energía por fotón, ver la Fig. 36-6.

La energía por fotón es menor para los fotones de las ondas de radio ($\approx 10^{-12}$ eV) y mayor para los fotones de los rayos γ (≈ 1 GeV). Como se muestra en la Fig. 36-6, el espectro de frecuencias de las ondas electromagnéticas corresponde exactamente al espectro de energías de una partícula con masa en reposo cero, o fotón cuya energía puede extenderse desde cero hasta infinito. También se muestran, por comparación, las energías en reposo de un electrón y de un protón.

En apariencia, las ideas de onda y de corpúsculo son incompatibles y aun contradictorias. Una partícula ideal no tiene dimensiones y está por completo localizada, en tanto que una onda ideal,

con una longitud de onda y una frecuencia perfectamente bien definidas, debe tener una extensión infinita en el espacio. El hecho de que en el efecto fotoeléctrico la luz se comporte como si estuviera constituida por corpúsculos, o fotones, no significa que podamos descartar la evidencia experimental incontrovertible de las propiedades ondulatorias de la luz; se deben aceptar ambas descripciones. Pospondremos la forma en la que se puede resolver este dilema (Sec. 37-4) hasta después de haber explorado, en forma más completa, los atributos cuánticos de la luz.

36—3 PRODUCCION DE RAYOS X Y BREMSSTRAHLUNG

En el efecto fotoeléctrico, un fotón transfiere toda su energía a un electrón ligado. El efecto inverso es aquel en el cual un electrón pierde energía cinética y, por esto, crea uno o más fotones. Este proceso queda claramente ilustrado por la producción de rayos X.

En primer lugar, consideremos lo que ocurre cuando un electrón rápido llega a las vecindades de un núcleo con carga positiva de un átomo y entonces es deflectado. El electrón se acelera. La teoría electromagnética clásica predice que cualquier carga eléctrica acelerada irradia energía electromagnética. Pero la teoría cuántica requiere que cualquier energía electromagnética radiada consista de fotones discretos. Consecuentemente, es de esperarse que un electrón deflectado, y por lo tanto acelerado, radie uno o más fotones y que el electrón abandone el sitio de la colisión con una energía cinética reducida.

La radiación producida en este tipo de colisión, por lo general, se conoce como *bremsstrahlung* (en alemán: "radiación de enfrentamiento"). En la Fig. 36-7 se muestra esquemáticamente una colisión *bremsstrahlung* en la que un electrón se aproxima a un átomo deflector con una energía cinética E_{c_1} y se aleja con una energía cinética E_{c_2} después de haber producido un fotón de energía $h\nu$. La ley de la conservación de la energía requiere que

$$E_{c1} - E_{c2} = h\nu \tag{36-7}$$

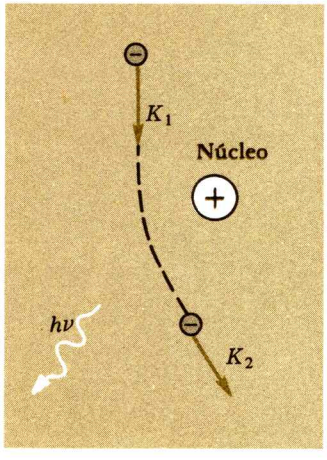


FIG. 36-7. Colisión *bremsstrahlung* entre un electrón y un núcleo cargado positivamente con la emisión de un fotón.

Debido a que la masa del átomo es, cuando menos, 2,000 veces mayor que la del electrón, podemos ignorar la pequeña energía de retroceso del átomo. Mientras que la teoría electromagnética clásica predice una radiación continua durante el tiempo en el que el electrón es acelerado, la teoría cuántica requiere de la radiación de fotones discretos y aislados. Que esto ocurre en el proceso *bremsstrahlung* queda claramente ilustrado en la producción de fotones de rayos X.

Los rayos X fueron descubiertos e investigados, por primera vez, en 1895 por Wilhem Roentgen, que les dio este nombre debido a que desconocía la verdadera naturaleza de esta radiación. Ahora se sabe que los rayos X consisten de ondas electromagnéticas, o fotones, cuya longitud de onda es cercana a 10^{-10} m = 1 Å y

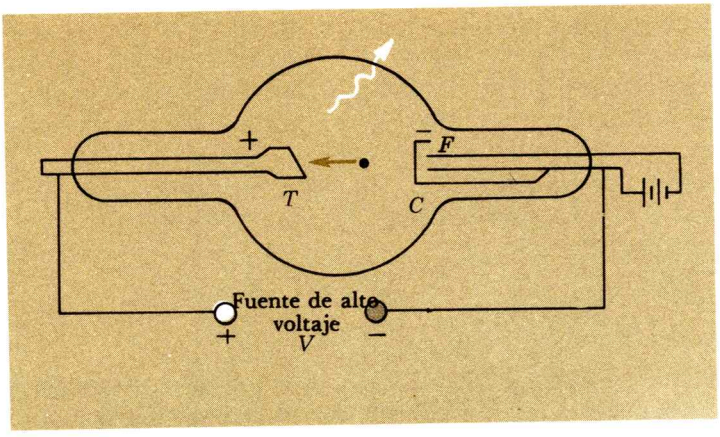


FIG. 36-8. Partes esenciales de un tubo de rayos X.

que presentan los fenómenos ondulatorios de interferencia, difracción y polarización. Los rayos X pasan fácilmente a través de materiales que son opacos a la luz visible. Debido a que la longitud de onda típica de los rayos X es mucho menor que las longitudes de onda de la luz visible, los experimentos requieren de un ingenio considerable. Sin embargo, nuestro interés principal estará relacionado con las características energéticas de la producción de los rayos X.

En la Fig. 36-8 se muestran las partes esenciales de un tubo de rayos X simple. La corriente eléctrica que pasa à través del filamento F calienta al cátodo C y entonces los electrones en el cátodo adquieren una energía suficiente como para sobrepasar la energía de amarre con la superficie del cátodo, y resultan liberados en una emisión termiónica. Los electrones son acelerados a través del vacío por una diferencia de potencial electrostática grande V, que es típicamente de varios miles de volts, e inciden en el blanco T, que es el ánodo. Al viajar del cátodo al ánodo, y antes de incidir en el blanco, cada electrón adquiere una energía cinética E_c que está dada por

$$E_c = eV$$

en donde e es la carga del electrón. Hemos ignorado la energía cinética con la que el electrón abandona al cátodo, que normalmente es mucho menor que Ve. Cuando el electrón incide en el blanco, adquiere una energía adicional, la que lo liga a la superficie del blanco, pero esta energía de amarre también es de sólo *unos cuantos* electrón volts y también puede ignorarse.

Al incidir en el blanco, los electrones se desaceleran y, debido a la colisión, quedan esencialmente al reposo. Cada electrón pierde su energía cinética $E_c = eV$ en el impacto con el blanco. La mayor parte de esta energía aparece como energía térmica en el blanco, pero existe, adicionalmente, la producción de radiación

electromagnética a través del proceso *bremsstrahlung*. Cualquier electrón que incida en el blanco puede realizar varias colisiones *bremsstrahlung* con los átomos de éste, produciendo, entonces, varios fotones. Sin embargo, los fotones *más* energéticos se producen por un electrón cuya energía cinética *total* se convierte en energía de un sólo fotón, cuando el electrón queda en reposo por efecto de una sola colisión. Así, $E_{c_1} = eV$ y $E_{c_2} = 0$, y (36-7) se convierte en

$$eV = E_c = h\nu_{\text{máx}}$$

en donde $\nu_{\text{máx}}$ es la frecuencia máxima de los fotones de los rayos X producidos. Por lo común, los electrones pierden su energía en el blanco calentándolo o produciéndo 2 o más fotones, tales que la suma de sus frecuencias será menor que $\nu_{\text{máx}}$. Es de esperarse entonces una distribución en la energía de los fotones con una frecuencia máxima bien definida $\nu_{\text{máx}}$, o una longitud de onda mínima $\lambda_{\text{mín}} = c/\nu_{\text{máx}}$ dada por

$$E_{c'} = h\nu_{\text{máx}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{mín}}} = eV \qquad (36\text{-}8)$$

Las variaciones observadas en la intensidad de los rayos X emitidos, como función de la frecuencia, indica que existen una frecuencia de corte abrupta en el límite $\nu_{\text{máx}}$ del *espectro de rayos X continuo,* y este límite está determinado solamente por el potencial acelerador V del tubo de rayos X y no por la naturaleza química del material del blanco. El valor de hc/e puede determinarse con una precisión considerable utilizando (36-8) y midiendo simultáneamente a $\lambda_{\text{mín}}$ y a V. El valor obtenido de la constante de Planck h concuerda en forma total con los valores deducidos de los experimentos del efecto fotoeléctrico y de otros experimentos.

Superpuestos al espectro continuo, existen aumentos bruscos en la intensidad (o picos), cuyas longitudes de onda son características del material del blanco; la explicación de estas líneas de rayos X características se encontrará en la descripción cuántica de la estructura atómica de los átomos del blanco.

36—4 EL EFECTO COMPTON

En el efecto fotoeléctrico, un fotón entrega (casi) toda su energía a un electrón ligado; también es posible que un fotón entregue sólo una parte de su energía a una partícula. Este tipo de interacción es la *dispersión* de las ondas electromagnéticas por partículas cargadas. La teoría cuántica de la dispersión de ondas electromagnéticas se conoce como el *efecto Compton*. Primero revisaremos brevemente la teoría clásica de la dispersión de las ondas electromagnéticas por partículas cargadas.

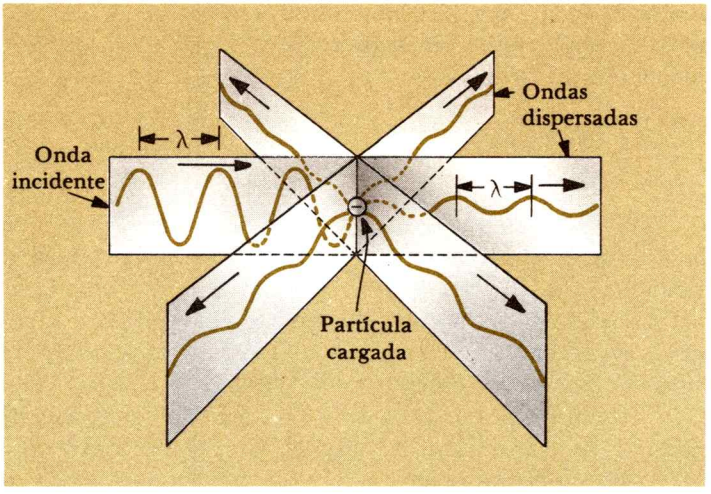


FIG. 36-9. Dispersión clásica de la radiación electromagnética por una partícula cargada.

Cuando una onda electromagnética monocromática incide en una partícula cargada cuyo tamaño es mucho menor que el de la longitud de onda de la radiación, la partícula cargada se ve afectada principalmente por el campo eléctrico variable de la onda sinusoidal. Debido a la influencia de esta fuerza eléctrica variable, la partícula oscila en un movimiento armónico simple con la misma frecuencia que la de la radiación incidente (ver Fig. 36-9). Como la partícula cargada se acelera continuamente, radia una onda electromagnética de la *misma* frecuencia en todas las direcciones (Sec. 30-6) con una intensidad mayor en el plano perpendicular a la línea de oscilación y con una intensidad cero a lo largo de esta línea. La teoría clásica predice que la radiación dispersada tiene la *misma* frecuencia que la radiación incidente. La partícula cargada juega el papel de agente de transferencia, absorbiendo energía del haz incidente para emitirla después con la misma frecuencia (o longitud de onda) pero dispersándola en todas direcciones. La partícula dispersadora no gana ni pierde energía, ya que reirradia con el mismo ritmo con el cual absorbe. La teoría de la dispersión clásica concuerda con los resultados experimentales cuando se utiliza luz visible, y en otras regiones, de mayor longitud de onda. Un ejemplo simple de que la frecuencia no se altera en la dispersión coherente de la radiación lo constituye: la luz reflejada por un espejo (una colección de dispersores) que no presenta un cambio aparente en la frecuencia.

El campo magnético de una onda electromagnética incidente también afecta a la partícula cargada. Una partícula que se mueve en el campo magnético transversal de la onda electromagnética es accionada por una fuerza magnética *a lo largo* de la dirección de propagación de la onda (Sec. 30-5). Cuando se completa la absorción, el efecto producido es el de una fuerza de radiación F_r en la partícula cargada dada por $F_r = P/c$, en donde P es la

potencia de la onda incidente. Más aún, como la onda electromagnética puede ejercer una fuerza en el centro dispersor, podemos asociarle un ímpetu p,

$$p = \frac{E}{c} \tag{30-32}$$

en donde E representa a la energía electromagnética de la onda incidente.

Ahora consideremos la dispersión desde el punto de vista de la teoría cuántica. Utilizando la exitosa interpretación fotónica de Einstein del efecto fotoeléctrico, Arthur H. Compton utilizó, en 1922, la naturaleza cuántica de la radiación electromagnética para explicar la dispersión de rayos X. En la teoría cuántica, la radiación electromagnética consiste de fotones, cada uno de los cuales tiene una energía dada por $E = h\nu$. Debido a que el fotón se puede considerar como una partícula con masa en reposo igual a cero, que se mueve con una rapidez c, la Ec. (35-16) establece que la magnitud de su ímpetu lineal **p** está dada por E/c en concordancia con los resultados clásicos. Escribiendo al ímpetu del fotón en términos de su energía, de su frecuencia y de su longitud de onda, tenemos

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{36-9}$$

Cada fotón en un haz de radiación electromagnética monocromática de longitud de onda λ tiene un ímpetu igual a h/λ. La Ec. (36-9) establece que el ímpetu del fotón queda especificado con precisión cuando se conocen su longitud de onda, su frecuencia o su energía. La dirección de **p** es a lo largo de la dirección de propagación de la onda.

En la misma forma en la que la energía del fotón aumenta con la frecuencia, también lo hace el ímpetu. Por lo tanto, el ímpetu de un fotón de alta frecuencia (o de alta energía), tal como los rayos γ excederá por mucho al ímpetu de un fotón de baja frecuencia (y baja energía) tal como un fotón de radio.

El aspecto distintivo, introducido por la teoría cuántica, es el siguiente: En ondas monocromáticas, el ímpetu electromagnético ocurre, no en cantidades arbitrarias, sino sólo en múltiplos enteros del ímpetu h/λ transportado por un solo fotón.

Cuando consideramos que un haz electromagnético monocromático consiste de una colección de fotones, cada uno con una energía y un ímpetu definidos precisamente, la dispersión de la radiación electromagnética se convierte, en efecto, en un problema de la colisión de un fotón con una partícula cargada. Este problema puede resolverse con sólo aplicar las leyes de la conservación de

la energía y del ímpetu. La Fig. 36-10 *a* y *b* muestra al fotón y a una partícula libre antes y después de la colisión. Naturalmente que al aplicar las leyes de conservación debemos considerar, no los detalles de la interacción entre el fotón y la partícula durante la colisión, sino sólo la energía y el ímpetu totales antes y después de la colisión.

En forma contraria a lo que ocurre con la dispersión clásica de ondas electromagnéticas, en la que se supone que la partícula no ha ganado energía después de la colisión, el tratamiento cuántico requiere de un aumento tanto en la energía como en el ímpetu. Debido a que estas cantidades son muy grandes, se debe tratar a la colisión desde el punto de vista relativista.

Consideramos a la partícula de masa en reposo m_0 y energía en reposo $E_0 = m_0c^2$, como una partícula libre inicialmente en reposo. Aplicando la conservación de la energía a la colisión de la Fig. 36-10, obtenemos

$$h\nu + E_0 = h\nu' + E \tag{36-10}$$

En donde E es la energía de la *partícula* en retroceso después de la colisión y $h\nu$ y $h\nu'$ son las energías de los fotones incidente y dispersado, respectivamente. Como la energía final E (energía en reposo más energía cinética) de la partícula en retroceso debe ser superior a su energía inicial E_0, vemos de inmediato, de (36-10), que $h\nu' < h\nu$. El fotón dispersado tiene *menor* energía (y menor frecuencia) y mayor longitud de onda que el fotón incidente. Esto está en desacuerdo, naturalmente, con la predicción clásica de que la frecuencia no cambia en la dispersión. Debido a que los fotones incidente y dispersado tienen frecuencias diferentes, este último *no* se debe interpretar sólo como el fotón incidente moviéndose en una dirección diferente con menor energía; más bien, el fotón incidente se aniquila y se crea el fotón dispersado.

En el triángulo vectorial de la Fig. 36-10*c* está implícita la conservación del ímpetu lineal, en donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ es el ímpetu relativista de la partícula que recula y las magnitudes de los ímpetus de los fotones incidente y dispersado son, respectivamente, $p_\lambda = h\nu/c = h/\lambda$ y $p_{\lambda'} = h\nu'/c = h/\lambda'$. El ángulo de dispersión θ es el ángulo entre las direcciones de $\mathbf{p}_\lambda$ y $\mathbf{p}_{\lambda'}$, que son las direcciones de los fotones incidente y dispersado.

Deseamos obtener el cambio en la longitud de onda $\lambda' - \lambda = \Delta\lambda$ en términos de θ. Aplicando la ley de los cosenos al triángulo de la Fig. 36-10*c*, obtenemos

$$p_\lambda{}^2 + p_{\lambda'}{}^2 - 2p_\lambda p_{\lambda'} \cos\theta = p^2 \tag{36-11}$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por c^2 y recordando que, en un fotón, $pc = h\nu$, obtenemos

$$h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' \cos\theta = p^2c^2 \tag{36-12}$$

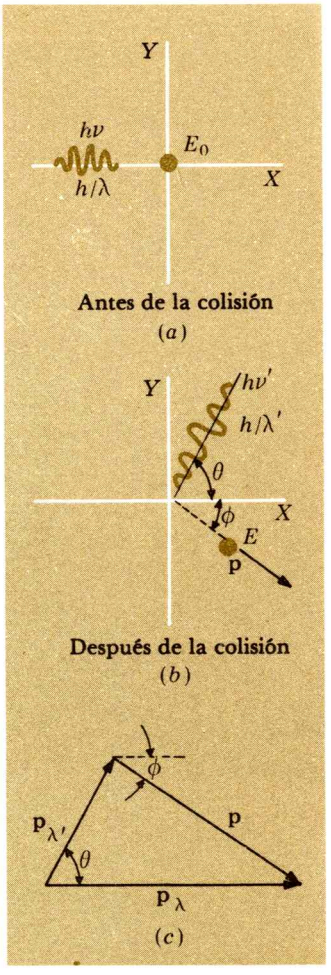


FIG. 36-10. Colisión de un fotón y de una partícula inicialmente en reposo.

Podemos obtener una expresión semejante utilizando (36-10). En uno de los lados de (36-10) colocamos $h\nu$ y $h\nu'$ y del otro lado ponemos E y E_0 elevando al cuadrado esta ecuación, obtenemos,

$$h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' = E^2 + E_0^2 - 2EE_0 = 2E_0^2 + p^2c^2 - 2EE_0 \tag{36-13}$$

en donde se ha remplazado a E^2 por $E_0^2 + p^2c^2$, utilizando la Ec. (35-15). Sustrayendo (36-12) de (36-13), obtenemos

$$-2h^2\nu\nu'(1 - \cos\theta) = 2E_0^2 - 2EE_0$$

$$h^2\nu\nu'(1 - \cos\theta) = E_0(E - E_0) = m_0c^2(h\nu - h\nu')$$

$$\frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) = c\frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \lambda' - \lambda$$

El aumento en la longitud de onda es, entonces,

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) \tag{36-14}$$

Esta es la ecuación básica del efecto Compton. Determina el aumento $\Delta\lambda$ de la longitud de onda del fotón dispersado con respecto al fotón incidente. Vemos que $\Delta\lambda$ depende sólo de la masa en reposo m_0 de la partícula en retroceso, de la constante de Planck h, de la rapidez de la luz c y del ángulo de dispersión θ. Es probable que, resulte sorprendente encontrar que $\Delta\lambda$ es *independiente* de la longitud de onda λ del fotón incidente. La cantidad h/m_0c, que aparece en el miembro derecho de (36-14), y que tiene dimensiones de longitud, se conoce como la *longitud de onda de Compton*. Aunque el ángulo de dispersión θ determina, de manera inequívoca, el aumento en la longitud $\Delta\lambda$, no se puede predecir el ángulo al cual va a emerger un fotón dado.

Si la partícula en retroceso es un electrón libre dentro del material dispersor, entonces $m_0 = 9.11 \times 10^{-31}$ kg y $h/m_0c = 0.02426$ Å. Cuando emerge el fotón a, por ejemplo, $\theta = 90°$, el cambio en la longitud de onda, por (36-14), es de 0.024 Å. Cuando θ es 180°, en cuyo caso el fotón dispersado viaja en dirección contraria a la incidencia y el electrón que recula viaja en la misma dirección que el fotón incidente, y la colisión es efectivamente frontal, el cambio en la longitud de onda es máximo y es igual a 0.049 Å. En tal colisión, la energía cinética del electrón también es máxima.

En una dispersión de 90° por electrones libres, con radiación incidente en la región visible (por ejemplo de 4000 Å), el aumento *fraccional* en la longitud de onda $\Delta\lambda/\lambda$, es sólo de 0.0006%. En este caso, tal corrimiento en la longitud de onda queda completa-

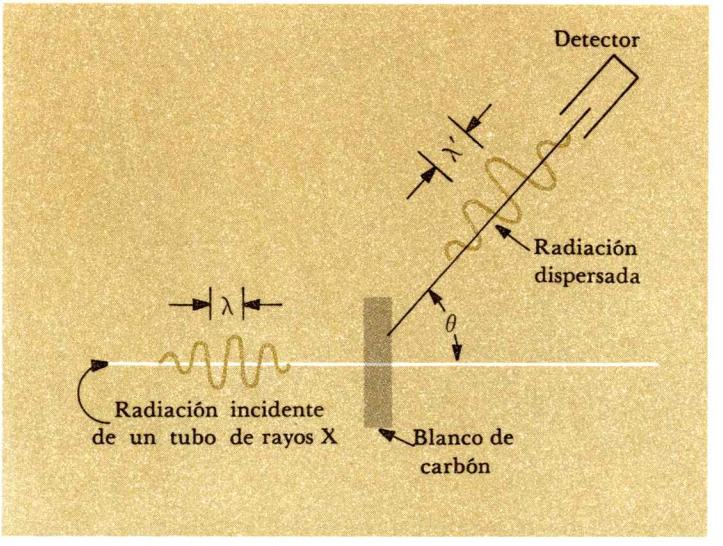


FIG. 36-11. Representación esquemática del arreglo experimental del efecto Compton.

mente enmascarado por el hecho de que los electrones en un material dispersor ordinario no están en reposo sino que tienen movimiento térmico. Se puede obtener un corrimiento observable de, digamos, $\Delta\lambda/\lambda = 2\%$ utilizando radiación incidente con una longitud de onda $\lambda = 1$ Å; entonces $\Delta\lambda = 0.024$ Å. Esto significa que el corrimiento se observa en forma sencilla en fotones de rayos X y en fotones de menor longitud de onda. En los fotones de longitud de onda grande, el cambio fraccional en la longitud de onda es muy pequeño y la radiación dispersada tiene practicamente la misma longitud de onda y frecuencia que la radiación incidente. En sentido clásico, las longitudes de onda de la radiación incidente y dispersada son esencialmente iguales; por lo tanto, la dispersión de Compton concuerda con la dispersión clásica en la región en la que $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$.

En 1922 A.H. Compton demostró, por primera vez, que la dispersión de rayos X concuerda con el modelo del fotón. La Fig. 36-11 muestra un arreglo experimental esquemático de rayos X que inciden en un blanco de carbón, que es una sustancia que tiene muchos electrones libres (efectivamente libres). En cualquier ángulo fijo θ el detector de rayos X mide la intensidad de la radiación dispersada como función de la longitud de onda. La Fig. 36-12 muestra la intensidad de la radiación dispersada como función de la longitud de onda dispersada a diferentes ángulos.

Para un ángulo de dispersión θ dado, existen *dos* longitudes de onda predominantes en la radiación dispersa: Una de la misma longitud de onda λ que la del haz incidente (*la onda no modificada*), y una segunda, cuya longitud de onda λ', es mayor (*la onda modificada*) y que está dada por la ecuación de Compton (36-14). La longitud de onda no modificada resulta de la dispersión

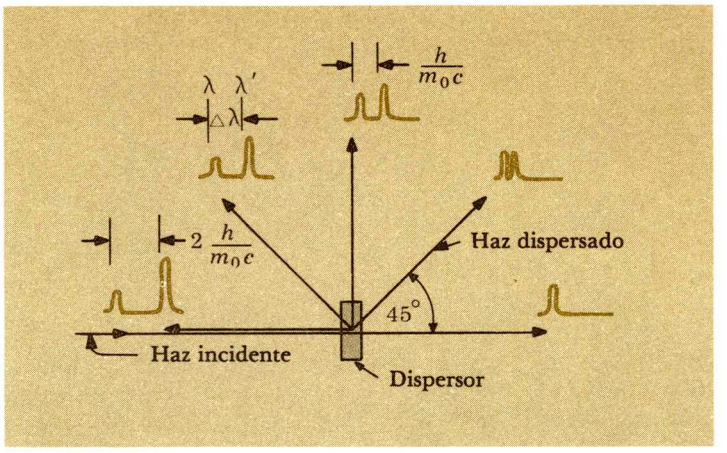


FIG. 36-12. Intensidad de la radiación dispersada como función de la longitud de onda de la radiación dispersada a diferentes ángulos.

coherente de la radiación que incide por los electrones internos de los átomos; estos electrones están tan fuertemente ligados a los átomos, que el fotón no puede incidir en ellos sin, al mismo tiempo, mover al átomo completo. La masa m_0 de un electrón ligado con fuerza es, entonces, *efectivamente* la masa M_0 del átomo. Por lo tanto, en una colisión Compton entre un fotón y un electrón fuertemente ligado, el cambio $\Delta\lambda$ en la longitud de onda es $(h/M_0c)(1 - \cos\theta) \approx 0$, porque M_0 es varios miles de veces mayor que m_0.

El efecto Compton proporciona un método simple para determinar la energía de un fotón. De (36-10) tenemos

$$E_k = E - E_0 = h\nu - h\nu'$$

Como $\nu = c/\lambda$ y $\nu' = c/\lambda' = c/(\lambda + \Delta\lambda)$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$E_k = h\nu \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} \tag{36-15}$$

en donde $\Delta\lambda$ depende del ángulo de dispersión θ y está dado por (36-14). La energía cinética del electrón que recula es máxima $E_{c,\,\text{máx}}$, cuando ocurre una colisión frontal; entonces el electrón recula en la dirección del fotón incidente y el fotón dispersado viaja en sentido contrario. En tal colisión, $\theta = 180°$ y $\Delta\lambda = 2h/m_0c$, y (36-15) adquiere la forma

$$E_{k,\,\text{máx}} = h\nu \frac{2h\nu/m_0c^2}{1 + 2h\nu/m_0c^2} \tag{36-16}$$

Por lo tanto, midiendo la energía de los electrones más energéticos se puede calcular la energía del fotón incidente a partir de (36-16), e inversamente.

El efecto Compton ilustra con claridad los aspectos corpusculares de la radiación electromagnética: No sólo se puede asignar una energía precisa $h\nu$ a los fotones, sino que también se les puede asignar un ímpetu preciso h/λ. El ímpetu total del haz de radiación electromagnética en una dirección dada, *no* puede asumir cualquier valor, sino que debe ser exactamente un múltiplo entero del ímpetu lineal de un fotón a lo largo de esa dirección. En este sentido, el ímpetu (al igual que la energía) de la radiación electromagnética está cuantizado.

36—5 PRODUCCION Y ANIQUILAMIENTO DE PARES

El efecto fotoeléctrico, el proceso *bremsstrahlung* y el efecto Compton, son ejemplos de la conversión de energía electromagnética de los fotones en energía cinética y en energía potencial de partículas materiales, y viceversa. Resulta natural preguntarse si es posible convertir la energía de un fotón en masa en *reposo;* esto es, crear materia pura a partir de energía pura, o, por otra parte, convertir energía en reposo en energía electromagnética. La respuesta es afirmativa, siempre y cuando tal conversión no viole las leyes de conservación de la energía, del ímpetu y de la carga eléctrica.

Producción de Pares. Consideremos primero la energía mínima necesaria para crear una partícula material. La creación de un electrón requiere la menor energía puesto que, de todas las partículas conocidas, es la que tiene menor masa en reposo. Pero un fotón tiene una carga eléctrica igual a cero; así que la ley de la conservación de la carga eléctrica prohíbe la creación de *un solo* electrón a partir de un fotón. Sin embargo, es posible la creación de un par electrónico, que consiste de dos partículas con carga eléctrica opuesta. La partícula cargada positivamente, llamada *positrón,* recibe el nombre de *antipartícula* del electrón. El electrón y el positrón son semejantes en todo, excepto en el signo de sus cargas, $-e$ y $+e$ (y los efectos debidos a esta diferencia). La energía mínima $h\nu_{\text{mín}}$ necesaria para crear un par electrón-positrón es, por la conservación de la energía,

$$h\nu_{\text{mín}} = 2m_0c^2$$

Como la energía en reposo m_0c^2 de un electrón o de un positrón es 0.51 MeV, la energía umbral $2m_0c^2$ para la producción de un par es de 1.02 MeV. La longitud de onda del fotón que corresponde a este umbral es de 0.012 Å; por lo tanto, el par electrónico puede producirse sólo con fotones de rayos γ o con fotones de rayos X de longitud de onda muy corta. El fenómeno mediante el cual se crea a una partícula y a su antipartícula a partir de radiación electromagnética se llama *producción de pares.* Esta es la demostración más notoria de la interconvertibilidad de la masa y la energía.

Si la energía de un fotón sobrepasa a la energía umbral $2m_0c^2$, el exceso de energía ocurre como energía cinética del par creado. Aplicando la conservación de la energía a la producción de pares, se obtiene

$$h\nu = m^+c^2 + m^-c^2 = (m_0c^2 + E_c{}^+) + (m_0c^2 + E_c{}^-)$$
$$h\nu = 2m_0c^2 + (E_c{}^+ + E_c{}^-) \qquad (36\text{-}17)$$

en donde ν es la frecuencia del fotón incidente, $E_c{}^+$ y $E_c{}^-$ son las energías cinéticas de las partículas creadas. La energía mínima $h\nu$ mín justamente suficiente para producir el par se obtiene, por supuesto, haciendo cero las energías cinéticas de las partículas creadas: $E_c{}^+ + E_c{}^- = 0$.

La producción de pares no puede ocurrir en el espacio vacío. Se puede demostrar con facilidad que no se pueden conservar simultáneamente la energía y el ímpetu, en la producción de una partícula y de una antipartícula, a menos que el fotón se encuentre en las vecindades de una partícula masiva, tal como un núcleo atómico. Para aclarar el argumento, supongamos que el par se produce en el espacio vacío y que el observador se encuentra en reposo con respecto al centro de masa del sistema de las dos partículas. Entonces, el ímpetu total del par producido es cero. Pero el fotón que crea el par tiene, en este sistema de referencia, un ímpetu diferente de cero, ya que el fotón siempre se mueve con una rapidez c, independientemente del sistema de referencia. En esta producción de pares imaginaria en el espacio vacío, se tendría un fotón con ímpetu antes de la colisión, pero un ímpetu cero después de ella, que es una violación de la ley de la conservación del ímpetu. En resumen, un fotón no puede decaer de manera espontánea en un par electrón-positrón en el espacio vacío; el proceso sólo puede ocurrir si el fotón se encuentra a una partícula masiva que adquiere el ímpetu necesario, aunque ignorable ($E_c = p^2/2M \approx 0$ cuando M es grande).

La Fig. 36-13 es una representación esquemática de la producción de pares y la Fig. 36-14 es una fotografía en una cámara de burbujas en la que se muestra la creación de un par electrón-positrón. La trayectoria de las partículas cargadas son visibles debido a que, a medida que viajan a través del líquido, producen burbujas por efecto de la ionización de éste; las trayectorias de las partículas cargadas con carga opuesta (con energías cinéticas aproximadamente iguales) muestran curvaturas opuestas. Las partículas se deflectan en arcos circulares con direcciones opuestas mediante un campo magnético uniforme.

La energía de un fotón que produce un par electrón-positrón puede calcularse mediante (36-17), si se miden las energías cinéticas del electrón y del positrón. Estas energías pueden determinarse de una fotografía como la de la Fig. 36-14, si se miden la magnitud del campo B y el radio de curvatura r de las trayecto-

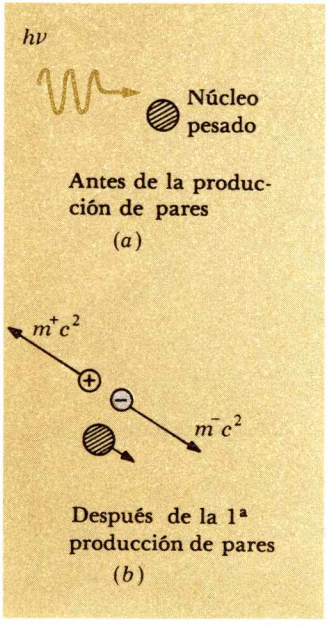


FIG. 36-13. Diagrama esquemático de la producción de pares.

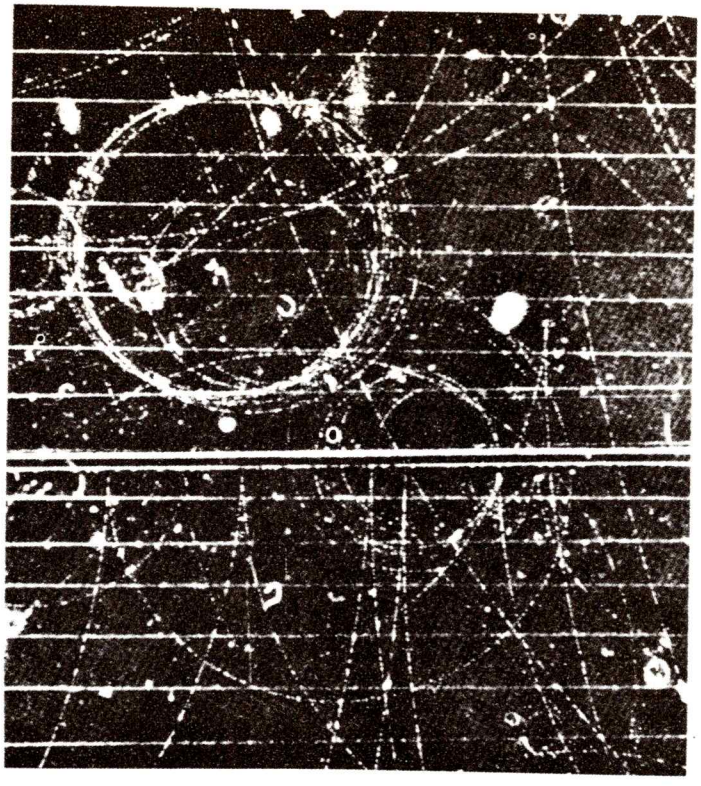


FIG. 36-14. Fotografía en una cámara de burbujas en la que se muestra la creación de pares electrón-positrón. Los fotones, de aproximadamente 200 MeV, que no producen trayectoria, inciden de la parte superior. Algunos fotones se aniquilan y se crean pares electrónicos en la lámina de plomo delgada, horizontal; por encima de la lámina, y hacia la derecha, se produce un par por la colisión de un fotón y una molécula de gas. El campo magnético externo, cuya densidad de flujo es de 1 Wb/m^2, altera las trayectorias de los electrones y de los positrones en curvaturas opuestas. (Tomado de: *The Cloud Chamber Photographs of the Cosmic Radiation*, G. D. Rochester and J. G. Wilson, Pergamon Press, Ltd, 1952. Cortesía de Pergamon Press, Ltd.)

rias. El ímpetu relativista p de cada partícula está dado por

$$p = mv = QBr \qquad (35\text{-}10)$$

y la energía total E, o la energía cinética $E - E_0$ de la partícula puede calcularse utilizando la Ec. (35-15), $E^2 = E_0^2 + (pc)^2$.

La existencia de positrones fue predicha teóricamente por P.A.M. Dirac en 1928. Cuatro años después, C.D. Anderson observó e identificó a los positrones durante sus estudios con radiación cósmica. En la actualidad los pares electrón-positrón son un fenómeno observado comúnmente en la interacción de fotones de alta energía con materia. Los pares protón-antiprotón y neutrón-antineutrón fueron creados por primera vez en un laboratorio en 1955. Sus energías umbral son de varios GeV (las masas del protón y del neutrón son, más o menos, iguales a 1 GeV y, por lo tanto, se necesitan máquinas aceleradoras de muy alta energía).

Aniquilación de Pares. El proceso inverso al de la creación de pares es el de la aniquilación de pares, que consiste en la aniquilación de una partícula y de su antipartícula con la creación correspondiente de fotones. Considérese la aniquilación de materia

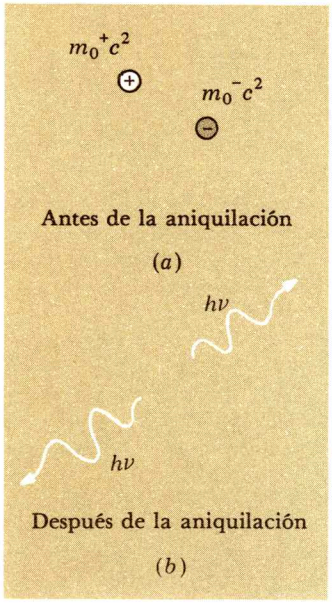


FIG. 36-15. Aniquilación de pares y la creación de dos fotones.

y la creación de energía electromagnética que puede ocurrir cuando un electrón y un positrón se encuentran próximos y esencialmente en reposo. El ímpetu lineal de las dos partículas es, al inicio, cero; por lo tanto, cuando las partículas se unen y se aniquilan, no se puede crear un *solo* fotón, debido a que esto violaría la conservación del ímpetu. Sin embargo, el ímpetu se puede conservar cuando se crean *dos* fotones que se mueven en direcciones opuestas con igual ímpetu. Los dos fotones tendrían la misma frecuencia y energía. (ver la Fig. 36-15). (De hecho, se pueden crear tres o más fotones, pero con *mucho* menor probabilidad que la creación de dos fotones. En forma semejante, cuando se aniquilan muchas parejas electrón-positrón en las vecindades de un núcleo, un número pequeño de estas aniquilaciones pueden producir un sólo fotón.)

La conservación de la energía implica

$$m_0^+c^2 + m_0^-c^2 = h\nu_1 + h\nu_2$$

en la que se supone que el electrón y el positrón están inicialmente en reposo. Pero $m_0^+ = m_0^-$, y, por la conservación del ímpetu, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_{\text{mín}}$; por lo tanto,

$$2h\nu_{\text{min}} = 2m_0c^2$$
$$h\nu_{\text{min}} = m_0c^2$$

La energía mínima del fotón creado es igual a la energía mínima necesaria para crear a un electrón $h\nu = m_0c^2$, que es de 0.51 MeV.

La suerte final de los positrones es su aniquilación. Cuando aparece un positrón de alta energía, como en la producción de pares, pierde su energía cinética en colisiones a medida que pasa a través de la materia, moviéndose finalmente con una baja rapidez; entonces se combina con un electrón, formando un sistema ligado, llamado el átomo de positronio, que decae muy rápido (10^{-10} s) en dos fotones de igual energía. Por lo tanto, la muerte del positrón está acompañada por la aparición de los dos cuantos de la aniquilación (o de fotones) cada uno de $\frac{1}{2}$ MeV. La transitoriedad de los positrones es debida, no a una inestabilidad intrínseca, sino al alto riesgo de colisiones y aniquilación subsecuente con los electrones.

En nuestra región del universo existe una preponderancia de electrones, protones y neutrones; cuando se crean sus antipartículas, se combinan rápidamente con ellos en un proceso de aniquilación. Es posible, aunque en la actualidad es una simple conjetura, que exista una parte del universo en la que predominen los positrones, los antiprotones y los antineutrones.

La producción y la aniquilación de pares son ejemplos particularmente interesantes de la equivalencia entre la masa y la energía.

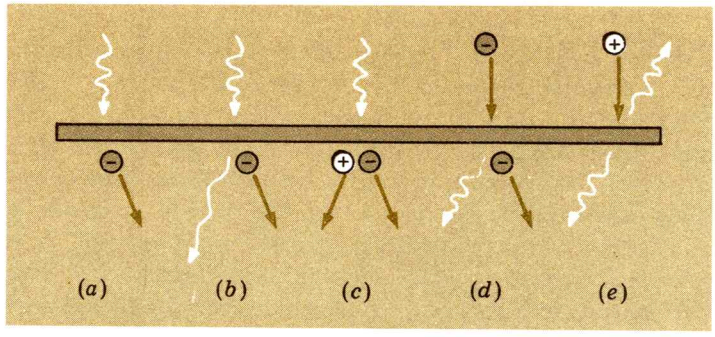


FIG. 36-16. Interacciones de electrones con fotones (*a*) el efecto fotoeléctrico, (*b*) el efecto Compton, (*c*) la producción de pares, (*d*) el *bremsstrahlung*, (*e*) la aniquilación de pares.

Proporcionan una confirmación irrefutable de la teoría de la relatividad.

36—6 INTERACCIONES ENTRE UN FOTON Y UN ELECTRON

La Fig. 36-16 resume las importantes interacciones, o colisiones, entre un fotón y un electrón discutidas en este capítulo. En cada caso se aproxima un fotón, un electrón, o un positrón, a un trozo de materia, ocurre una colisión y salen una o más partículas. Resumimos brevemente los aspectos sobresalientes de cada una de estas interacciones, tomándolas en el orden en el que aparecen en la figura:

a. El efecto fotoeléctrico: Un fotón incide sobre un electrón ligado y desaparece; como consecuencia el electrón se desliga.
b. El efecto Compton: Un fotón choca contra un electrón libre, produciendo entonces un segundo fotón de menor energía y el recule del electrón.
c. La producción de pares: Un fotón se aniquila en las vecindades de una partícula pesada y se crea un par electrón-positrón.
d. El *bremsstrahlung:* Un electrón se desvía en las vecindades de una partícula pesada y se crea un fotón.
e. La aniquilación de pares: Un positrón se combina con un electrón y se produce un par de fotones.

Como veremos en la Sec. 40-1, *todas* estas interacciones entre un electrón y un fotón pueden considerarse como ilustraciones de *una* sola interacción básica entre la partícula del campo electromagnético (el fotón) y una partícula que puede crear un campo electromagnético (un electrón o cualquier otra partícula cargada eléctricamente). Todos los efectos electromagnéticos, aun la fuerza eléctrica ordinaria (o coulombiana) entre partículas cargadas eléctricamente, pueden atribuirse al intercambio de fotones (virtuales) entre partículas cargadas.

Los aspectos principales de las colisiones entre electrones y fotones se obtuvieron con sólo aplicar las leyes de consevación de la

energía, del ímpetu y de la carga eléctrica, y suponiendo la existencia de fotones de energía $h\nu$ y de ímpetu h/λ. En ningún caso se consideraron los detalles de la interacción, o se calcularon las probabilidades de ocurrencia de cualquiera de estos procesos. Por ejemplo, en el efecto Compton, se pudo predecir la longitud de onda del fotón dispersado en cualquier dirección particular, pero este análisis no nos permite predecir la dirección de un fotón particular. Sin embargo, utilizando los métodos de la *electrodinámica cuántica,* se puede calcular con precisión la probabilidad de ocurrencia de las interacciones entre electrones y fotones.

En la atmósfera terrestre penetran partículas cargadas, de la radiación cósmica, con muy alta energía (cuando menos 10^{19} eV) Estas partículas pueden producir toda una sucesión de interacciones entre electrones y fotones de la siguiente manera. Una colisión entre una partícula de un rayo cósmico y un núcleo puede producir un rayo γ de alta energía por un *bremsstrahlung*. El rayo γ puede aniquilarse al pasar cerca de un núcleo y, de esta manera, producir un par electrón-positrón. Las partículas cargadas creadas, al tener grandes energías cinéticas, pueden chocar con, y ser deflectadas por, núcleos que encuentren en su trayectoria hacia la superficie de la Tierra; en virtud de su aceleración después de las colisiones, irradian fotones de alta energía por un proceso *bremsstrahlung*. El positrón puede combinarse con un electrón aniquilándose y se crean dos fotones. Estos fotones secundarios pueden tener energías superiores a 1.02 MeV y pueden producir más pares electrónicos. Así, por la ocurrencia repetida de producción de pares, *bremsstrahlung* y, en menor proporción, colisiones Compton y fotoeléctricas, se produce una *lluvia en cascada* de electrones, positrones y fotones, y la energía del fotón

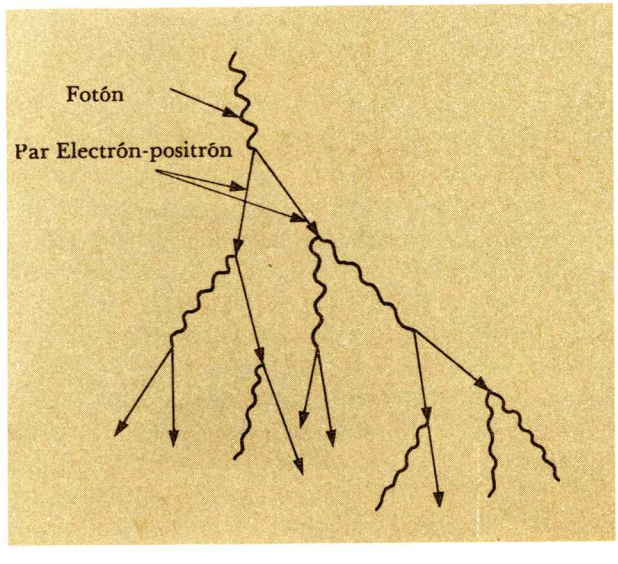


FIG. 36-17. Representación esquemática de una lluvia en cascada.

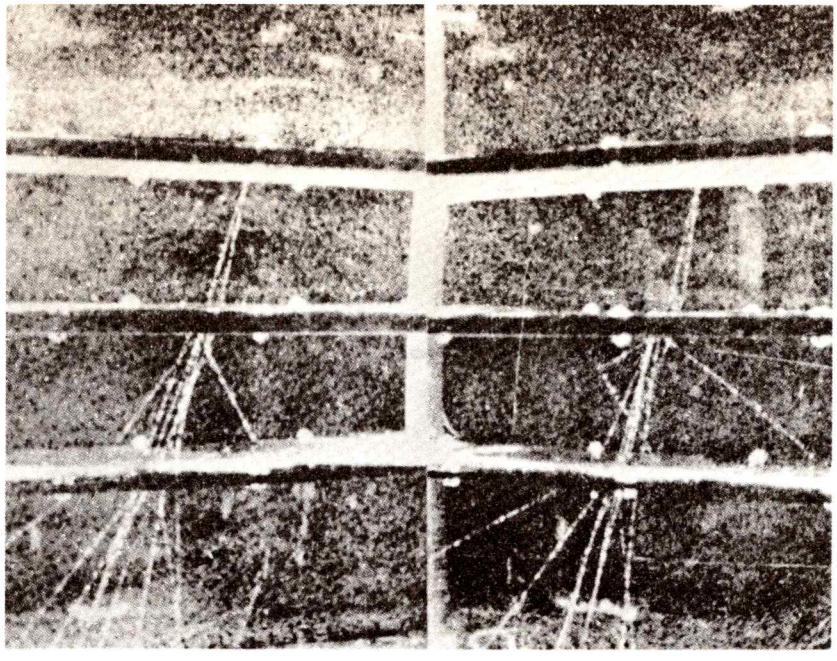


FIG. 36-18. Fotografías en una cámara de niebla de una lluvia en cascada iniciada por un fotón, tomada simultáneamente con dos cámaras para permitir un análisis tridimensional de las trayectorias. Un fotón de 700 MeV (que no produce trayectoria) penetra por la parte superior y crea un par electrón-positrón en la lámina de plomo delgada en la horizontal de la parte superior. En las placas inferiores se crean fotones por colisiones *bremsstrahlung* y estos fotones producen más pares, conduciendo a la lluvia de electrones, positrones y fotones. (Cortesía de J. C. Street, Universidad de Harvard.)

original se ha degradado y se ha repartido entre muchas partículas. La lluvia se extingue, en efecto, cuando la producción de pares se vuelve energéticamente imposible. En la Fig. 36-17 se muestra un diagrama de la interacción de electrones con fotones; las espectaculares fotografías de cámaras de niebla, tal como la mostrada en la Fig. 36-18, han confirmado los aspectos principales de las lluvias en cascada.

RESUMEN

La teoría cuántica, formulada por Max Planck en 1900, ha demostrado que muchas cantidades que superficialmente parecían tener valores continuos, sólo tienen, de hecho, valores discretos.

Se debe considerar que la radiación electromagnética consiste de fotones, cada uno de los cuales tiene una energía y un ímpetu discretos:

$$E = h\nu \qquad \text{y} \qquad p = \frac{h}{\lambda} \qquad \text{(36-3), (36-9)}$$

A continuación enlistamos las interacciones básicas entre fotones y partículas.

El efecto fotoeléctrico: la transferencia *total* de *energía electromagnética* a un *electrón ligado:*

$$h\nu = E_b + (E - E_0) \qquad \text{(36-6)}$$

en donde E_b es la energía de amarre, o función de trabajo de un electrón.

Bremsstrahlung: La *transferencia parcial* o *total* de la *energía cinética* de una partícula a *energía electromagnética*. Los fotones de máxima frecuencia (mínima longitud de onda) se producen cuando un electrón queda en reposo después de una colisión única:

$$eV = E_k = h\nu_{\text{máx}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{mín}}} \qquad (36\text{-}8)$$

El efecto Compton: La transferencia *parcial* de *energía electromagnética* a *energía cinética* de una partícula. Cuando un fotón de longitud de onda λ interactúa con una partícula (casi) libre, esencialmente en reposo, se emite un fotón a un ángulo θ (de dispersión) y la partícula recula con una energía cinética E_c:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) \qquad (36\text{-}14)$$

$$E_c = h\nu \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} \qquad (36\text{-}15)$$

en donde m_0 es la masa en reposo de la partícula que recula.

La producción y el aniquilamiento de pares: la conversión *total* de *energía electromagnética* en *energía* en *reposo* y *energía cinética* de las partículas creadas y el proceso inverso:

Producción de pares $\qquad h\nu = 2m_0c^2 + (E_{c^+} + E_{c^-}) \qquad (36\text{-}17)$

Aniquilación de pares $\qquad (m^+ + m^-)c^2 = 2h\nu$

PROBLEMAS

36-1. La longitud de onda umbral para la fotoemisión de electrones de una superficie de calcio es de 3840 Å. (*a*) Calcular la energía de amarre, o función de trabajo, ϕ (en electrón volts) de un electrón en la superficie de calcio. (*b*). ¿Cuál es la energía cinética máxima (en electrón volts) del fotoelectrón emitido de la superficie cuando sobre ella incide luz de 2000 Å?

36-2. (*a*) ¿Cuál es la rapidez máxima de los fotoelectrones emitidos de una superficie de zinc ($\phi = 4.23$ e V) cuando se utiliza luz ultravioleta de 1550 Å? (*b*) ¿Justifica esto la suposición de que $E_{c,\,\text{máx}} = \frac{1}{2}mv^2_{\text{máx}}$?

36-3. Un fotón de 13.0 eV desaloja a un electrón de un átomo, de tal forma que el electrón tiene una energía cinética de 4.0 eV. ¿Cuál era su energía de amarre en el átomo?

36-4. Un haz de luz monocromática ilumina a un fotoemisor. Cuando los fotones de energía E_1 iluminan a la superficie fotoemisora, la energía máxima de los fotoelectrones emitidos es K_1. Cuando se cambia la longitud de onda de la radiación incidente, la energía máxima de los fotoelectrones emitidos se duplica. ¿Cuál es la energía de estos últimos fotones (en términos de E_1 y de K_1)?

36-5. ¿Cuántos fotones se irradian por segundo de una fuente de 1.6 mW (*a*) de luz visible de 4,000 Å (*b*) de ondas de radio de 500 kHz, (*c*) de rayos X de 1.0 Å y (*d*) de rayos γ de 1.0 GeV.

36-6. Cuando una luz monocromática de 4046 Å de longitud de onda ilumina a cierta superficie metálica, los fotoelectrones más energéticos son detenidos por un potencial retardador de 1.60 V; cuando la longitud de onda es de 5769 Å, el potencial retardador es de 0.45 V. Suponiendo desconocidos los valores de h y de e, ¿cuáles son (*a*) la función de trabajo (en eV) en este fotoemisor y (*b*) el valor de h/e calculado a partir de estos datos?

36-7. Perpendicularmente a una superficie de plata, que tiene un electrón libre por átomo, incide luz cuya intensidad es de 1.0×10^{-10} W/m². Los átomos están separados más o menos 2.6 Å. Tratando a la radiación incidente en forma clásica (como ondas), y suponiendo que la energía se distribuye uniformemente en la superficie y que toda la luz es aborbida por los electrones de la superficie, (*a*) ¿cuánta energía adquiere cada electrón libre por segundo? (*b*) La energía de amarre de un electrón en la superficie es de 4.8 eV; ¿cuánto tiempo debe de transcurrir, una vez que el haz incide sobre la superficie, antes que un electrón adquiera suficiente energía para sobrepasar a la de amarre y desalojar al fotoelectrón? Comparar este resultado con los resultados experimentales.

36-8. Un electrón entra en un, así llamado, "radiador" de plomo (que irradia fotoelectrones) e interactúa con un electrón interno ligado a un átomo de plomo con una energía de amarre de 89.1 keV. El fotoelectrón emitido penetra entonces en un campo magnético uniforme y se determina que Br (en donde r es el radio de curvatura del electrón en el campo magnético B) es de 2.0×10^{-3} Wb/m. (*a*) ¿Cuál es el ímpetu del fotoelectrón (en MeV/c)? (*b*) ¿Cuál es la energía cinética del fotoelectrón? (*c*) ¿Cuál es la energía del fotón incidente?

36-9. La emisión fotoeléctrica puede ocurrir sólo si inicialmente el electrón está *ligado*, y no si está libre. En otras palabras, un fotón no puede ser absorbido por un electrón libre. Probar lo anterior demostrando que la absorción de un fotón por una partícula libre violaría las leyes de conservación de la energía y del ímpetu.

36-10. Un fotón de 3.10 Å incide sobre un átomo de hidrógeno en reposo, desprendiendo al electrón ligado (energía de amarre de 13.6 eV). Suponiendo que electrón se mueve en la misma dirección que la del fotón incidente, ¿cuáles son (*a*) la energía cinética y (*b*) el ímpetu del electrón? ¿Cuáles son (*c*) el ímpetu y (*d*) la energía cinética del ión que recula?

36-11. (*a*) La constante de Plank h tiene unidades de energía multiplicadas por tiempo: Demostrar que h tiene unidades de ímpetu angular. (*b*) Una onda electromagnética circularmente polarizada de energía E tiene un ímpetu angular $L = E/\omega$, en donde ω es la frecuencia angular de la onda: Demostrar que, desde el punto de vista de la teoría cuántica, tal haz consiste de fotones que tienen, cada uno, un ímpetu angular de $h/2\pi$. Se puede establecer una formulación alternativa de la condición cuántica básica $E = h\nu$, de la siguiente manera: Cada fotón, independientemente de su frecuencia, tiene el mismo ímpetu angular de magnitud $h/2\pi$.

36-12. Un ojo humano con buena acomodación es capaz de detectar fotones individuales de luz visible. ¿A qué distancia de un ojo, que tiene una pupila de 4 mm de diámetro, se tiene que colocar una fuente puntual isotrópica que irradia luz de 5000 Å igualmente en todas las direcciones con un ritmo de 1 W, para que el número de fotones que lleguen a la retina del ojo sea, en promedio, uno por segundo.

36-13. Una fuente puntual de luz monocromática irradia continuamente. ¿Cómo varía la densidad de fotones con la distancia r de la fuente en una dirección determinada?

36-14. (*a*) Demostrar que la energía de un fotón de rayos x de 1.0 Å de longitud de onda es de 12.40 keV. (*b*) Demostrar que la relación general entre la energía E de un fotón, en MeV, y su longitud de onda λ en Å es $E = (0.01240 \text{ MeV-Å})/\lambda$.

36-15. Un electrón 1 se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial V. El electrón 2 también se acelera a través de la misma diferencia de potencial y choca con un blanco, quedando en reposo y, por lo tanto, creando un fotón. ¿Cuál tiene mayor ímpetu, el electrón 1 o el fotón producido por el electrón 2?

36-16. Un haz de radiación electromagnética proviene de una fuente laser que irradia 2.0 MW en un pulso de 1.0×10^{-6} s de duración. ¿Cuál es el ímpetu total de los fotones en este haz?

36-17. A través de la lente de una cámara pasa luz visible de 4,000 Å cuando se toma una fotografía. La luz proviene de una fuente puntual que irradia uniformemente (isotrópica) con una potencia de salida de 1.0 W que se encuentra a una distancia de 1.0 km del lente de la cámara. El disparador de la cámara se coloca para realizar una exposición de (1/100) s con una abertura de $f/2$ en una cámara cuya lente tiene una distancia focal de 50 mm (el diámetro efectivo de la abertura es de 50 mm/2 = 25 mm). ¿Cuáles son (*a*) el número total de fotones que llegan a la película y (*b*) el ímpetu total transferido a la película, suponiendo una absorción completa de la luz incidente?

36-18. (*a*) Demostrar que un cohete que emite partículas de masa en reposo cero, o fotones, es más eficiente que un cohete que emite partículas cuya masa en reposo es finita, para una energía total de partículas emitidas dada. (*Sugerencia:* Escribir la relación general del ímpetu relativista de una partícula en términos de su energía total E y de su energía en reposo E_0.) (*b*) Suponer que el cohete está inicialmente en reposo e irradia energía (parte de su masa inicial) en una dirección hasta que la fracción de masa que queda es F y, en ese punto, el cohete viaja con una rapidez relativa v/c. Escribir las ecuaciones que indican la conservación de la energía y del ímpetu, y demostrar que $F = (1 - v/c)^{1/2}/(1 + v/c)^{1/2}$. (*c*) Si la rapidez final del cohete debe ser tal que los efectos de la dilatación del tiempo representen un factor de 5, demostrar que $v/c = 0.98$ y que F es, entonces, $\frac{1}{10}$.

36-19. ¿Cuál es la longitud de onda de un fotón que tiene (*a*) la misma energía y (*b*) el mismo ímpetu que un electrón de 2 eV?

36-20. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial mínima a través de la cual se deben acelerar electrones en reposo para que al incidir en un blanco produzcan fotones con un ímpetu de 1.0 KeV/c? (*b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de la cual se deben acelerar electrones en reposo para que adquieran un ímpetu de 1.0 keV/c?

36-21. Un haz de fotones monocromáticos, cada uno con una energía $h\nu$ tiene un flujo N de fotones; esto es, hay N fotones por unidad de tiempo que atraviesan a una área unitaria perpendicularmente a la dirección del haz. La intensidad del haz es I, en donde I es la energía electromagnética que atraviesa a una área unitaria perpendicular a la dirección del haz por unidad de tiempo. (*a*) Demostrar que $I = Nh\nu$. (*b*) Suponer que el haz se absorbe completamente. Demostrar que la presión de radiación del haz, en el absorbedor, está dada por $I/c = Nh\nu/c$.

36-22. Un transmisor de radar produce pulsos de radiación en la región de microondas ; la potencia de cada pulso es de 10 MW y su duración es de 1.0/ μs. Considerar que la longitud de onda de la radiación emitida es de 1.0 cm. (*a*) ¿Cuál es el ímpetu total del pulso de radar emitido? (*b*) ¿Cuántos fotones se emiten por pulso?

36-23. Una fuente puntual isotrópica de radiación electromagnética de 1.0 kW se encuentra en el centro de una esfera hueca perfectamente absorbente. ¿Cuál es el valor del radio para el que la presión de radiación en la pared interna de la esfera es igual a la presión atmosférica normal (1.0×10^5 N/m^2)?

36-24. La intensidad de la radiación solar en la superficie de la Tierra es de 1,400 W/m^2. (*a*) ¿Cuál es la presión de esta radiación en la superficie de la Tierra? (*b*) Calcular la fuerza total sobre la Tierra debido a esta radiación, del Sol (el radio de la Tierra es de 6.4×10^6 m), suponiendo una absorción total.

36-25. Un conjunto de electrones libres dispersa a fotones de 0.0620 Å de longitud de onda. ¿Cuáles son las longitudes de onda de aquellos fotones cuyo ángulo de disperción es (*a*) 90° y (*b*) 180°? ¿Cuáles son las energías transferidas a los electrones libres (*c*) en la parte (*a*) y (*d*) en la parte (*b*)?

36-26. Un fotón incidente es dispersado por un electrón inicialmente en reposo. El fotón *dispersado* puede producir, después un par electrón-positrón. Demostrar que si el ángulo entre el fotón dispersado y el fotón incidente es mayor que 60°, el fotón dispersado no puede crear un par electrón-positrón, sin importar qué tan grande sea la energía del fotón incidente.

36-27. Un fotón de 1.00×10^{-5} Å de longitud de onda sufre una colisión Compton en la que el fotón dispersado sale en dirección contraria a la del fotón incidente y tiene una longitud de onda de 3.62×10^5 Å. ¿Cuál es la masa de la partícula que produce esta dispersión?

36-28. Un electrón de 5.0 keV choca frontalmente con un segundo electrón de 5.0 keV que viaja en dirección contraria, y los dos electrones quedan en

reposo después de la colisión. (*a*) ¿Cuál es el número mínimo de fotones que se pueden producir en esta colisión? (*b*) ¿Cuál es la energía máxima de los fotones?

36-29. Sobre un protón libre, originalmente en reposo, incide un fotón en una colisión Compton y el protón adquiere, entonces, una energía cinética de 5.7 MeV. ¿Cuál es la energía mínima del fotón?

36-30. Un haz monocromático de fotones incide en un cuerpo metálico y un detector registra fotones provenientes del cuerpo a 90° con respecto a la dirección del haz incidente; ver la Fig. P36-30*a*. La Fig. P36-30*b* muestra el espectro de energías de los fotones observados a 90°. Hay tres picos diferentes: en 0.36, 0.51 y en 1.24 MeV. (*a*) ¿Cuál es la energía por fotón en el haz incidente? (*b*) Explicar la base física de cada uno de los tres picos.

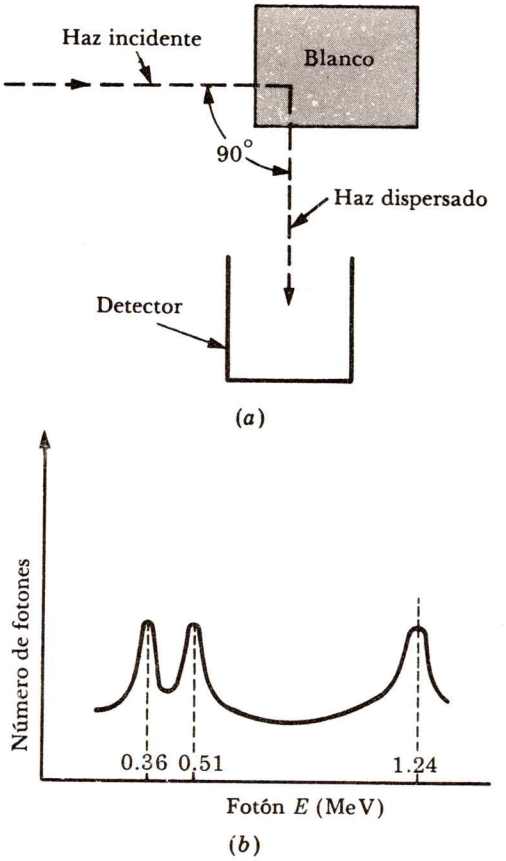


FIG. P36-30

36-31. Si los radios de curvatura de un electrón y de un positrón, creados cuando un fotón interactúa con un núcleo pesado, son de 1.0 cm cuando las partículas se desvían en un campo magnético uniforme de 0.50 Wb/m^2, ¿cuál es la longitud de onda del fotón incidente?

36-32. Un electrón y un positrón se mueven como sistema (positronio) con una rapidez de $c/2$. Si las dos partículas se aniquilan y se producen dos fotones, (*a*) ¿cuáles son la energía y el ímpetu de cada fotón? (*b*) ¿cuál es el ángulo entre la dirección de movimiento de estos dos fotones? (En 1963, D. Sadeh realizó un experimento con átomos de positronio moviéndose con $c/2$; se determinó el ángulo entre los cuantos de la aniquilación y se encontró, como era de esperarse, que es menor que 180°.)

36-33. Una lluvia en cascada se inicia con un fotón de 200 MeV de energía. ¿Cuál es el mayor número de positrones que pueden producirse?

36-34. Los fotones pueden ser absorbidos en un material (esto es, pueden eliminarse de la dirección de avance del haz incidente) mediante tres procesos: el efecto fotoeléctrico (que necesita de electrones ligados), el efecto Compton (que necesita electrones libres) y por producción de pares (que requiere núcleos atómicos masivos). ¿Cómo depende de la energía de los fotones la efectividad de la absorción de éstos, en el caso del efecto fotoeléctrico y la producción de pares?

36-35. (*a*) Una partícula de masa m se mueve con una rapidez no relativista e incide sobre otra partícula de masa m, inicialmente en reposo, en una colisión por completo inelástica y, por lo tanto, disipa una energía E. Demostrar que la energía cinética mínima de la partícula que estaba inicialmente en movimiento es $2E$, y no E. (Nota: En esta colisión se debe conservar tanto la energía como el *ímpetu*.)

(*b*) Los antiprotones se produjeron y se identificaron por primera vez en un laboratorio en 1955 (por Chamberlain, Serge, Wiegand, y Ypsilantis, utilizando el acelerador Bevatron en el laboratorio de radiación de la Universidad de California). La reacción utilizada fue $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + (p^+ + p^-)$; esto es, el protón incidente chocó con un protón en reposo y se crearon un protón y un antiprotón adicionales en la colisión. Demostrar que la energía cinética mínima del protón incidente necesaria para producir esta reacción es de 5.6 GeV o *seis* veces la energía en reposo del protón. Superficialmente, podría pensarse

que se necesita sólo *dos* veces la energía en reposo del protón para crear un protón y un antiprotón adicionales. Sin embargo, como en toda colisión se debe conservar tanto la energía como el *ímpetu* las cuatro partículas salientes de la colisión deben de tener un ímpetu total igual al del protón incidente. En consecuencia, las partículas deben salir después de la colisión con alguna energía cinética y sólo se dispone de una fracción de la energía cinética del protón incidente para crear a las dos partículas adicionales. Más aún, el cálculo requiere de la dinámica relativista.

Se puede utilizar el siguiente argumento para obtener la energía umbral. Observando desde el marco de referencia en reposo con respecto al centro de masa del sistema, el protón incidente y el protón blanco se aproximan en direcciones opuestas con iguales energías e iguales magnitudes de sus ímpetus, chocan y, si la energía es la umbral, crean cuatro partículas en reposo. Por lo tanto, visto desde el sistema de referencia del laboratorio, después de la colisión las cuatro partículas tienen el *mismo* ímpetu y éste es, por la conservación del ímpetu, justamente la cuarta parte del ímpetu del protón incidente. En esta forma se puede demostrar que la partícula incidente debe tener un ímpetu de $4(3^{1/2})Mc$, en donde M es la masa del protón. La energía cinética correspondiente para este protón incidente es $6Mc^2$.

Capítulo

37

LOS EFECTOS CUANTICOS: LOS ASPECTOS ONDULATORIOS DE LAS PARTICULAS MATERIALES

37—1 LAS ONDAS DE DE BROGLIE

La radiación electromagnética tiene dos aspectos: un aspecto ondulatorio y un aspecto corpuscular. La interferencia y la difracción de la radiación electromagnética se explican suponiendo que la radiación electromagnética consiste de ondas. Los efectos cuánticos, tales como los efectos fotoeléctrico y Compton, se explican suponiendo que la radiación electromagnética consiste de partículas llamadas fotones, cada uno con energía E e ímpetu p, especificados en forma precisa por la frecuencia ν y la longitud de onda λ de la radiación de la siguiente manera:

$$\nu = \frac{E}{h} \tag{37-1}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{37-2}$$

Nótese que en el miembro izquierdo de estas ecuaciones aparecen dos cantidades que tienen un significado claro sólo cuando se describe a una onda, y en el miembro derecho aparecen dos cantidades asociadas comúnmente con una partícula. Por lo tanto, estas relaciones fundamentales implican la dualidad onda-partícula de la radiación electromagnética y es la constante fundamental de la teoría cuántica, la constante de Planck h, la que relaciona las características ondulatorias con las de partícula. Se puede decir que las ondas electromagnéticas, en ciertas circunstancias, se comportan como partículas y que los fotones (partículas de masa en reposo cero) se comportan, en ciertas circunstancias, como ondas.

¿Tienen estas ecuaciones, que atribuyen una naturaleza tanto ondulatoria como corpuscular a la radiación electromagnética,

una generalidad mayor? ¿Se aplican a *todas* las partículas, esto es, a partículas con masa en reposo *finita* o cero? Esta pregunta fue formulada por primera vez por Louis de Broglie en 1924. El supuso que una partícula material podía exhibir propiedades ondulatorias y que las ecuaciones anteriores se aplican también a partículas materiales, tales como los electrones. Los experimentos han demostrado que la hipótesis de de Broglie es correcta y el carácter ondulatorio de las partículas materiales es en la actualidad un hecho establecido. Debido a que la longitud de onda interviene directamente en los efectos de interferencia y de difracción, concentraremos nuestra atención en la segunda relación, la Ec. (37-2).

La longitud de onda λ de una partícula con ímpetu $p = mv$, en donde m es la masa relativista de la partícula y v es su velocidad, está dada por la *relación de de Broglie*

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \tag{37-3}$$

en donde h es la constante de Planck.

Comprobar la hipótesis de de Broglie significa determinar, en base a los experimentos, si las partículas muestran o no los efectos de interferencia y de difracción. Por supuesto, la cuestión de la naturaleza física del aspecto ondulatorio de una partícula es fundamental (si un electrón es una onda, ¿qué es lo que "ondula"?); sin embargo, pospondremos este aspecto hasta después de haber discutido los experimentos que confirman la Ec. (37-3).

La naturaleza ondulatoria de los electrones fue descubierta, en 1927, cuando los experimentos de C. Davisson y L. H. Germer confirmaron la relación de de Broglie, 29 años después de que se estableció la existencia de los electrones. ¿Por qué se descubrieron las características ondulatorias de los electrones tantos años después de que se había establecido su naturaleza corpuscular? El origen de estas dificultades en su longitud de onda muy pequeña. Como lo demuestra la Ec. (37-3), una partícula de 1.0 kg que se mueve con 1.0 m/s tiene una longitud de onda de sólo 6.6×10^{-34} m $= 6.6 \times 10^{-24}$ Es claro que al lanzar pelotas de béisbol a través de una ventana abierta, no se debe esperar un patrón de difracción notable en los impactos sobre una pared distante, como tampoco se debe esperar cuando la luz visible pasa a través de una "rendija" tan ancha. La longitud de onda de una partícula ordinaria es muy pequeña comparada con las dimensiones de los objetos comunes, de tal forma que los efectos de interferencia y de difracción no son notables. Por lo tanto, si la longitud de onda de un objeto debe ser lo bastante grande como para producir efectos ondulatorios observables, su masa y su velocidad deben ser pequeñas, tal como lo indica (37-3) (con una longitud de onda grande y una rapidez pequeña, se pueden usar las relaciones no relativistas).

La rejilla de difracción con la menor distancia entre "líneas" es un cristal: un sólido en el que los átomos están localizados en un arreglo geométrico tridimensional. La distancia típica entre átomos adyacentes es del orden de 10^{-10} m, o 1 Å. Para observar la difracción de partículas, la longitud de onda de éstas debe ser comparable a este tamaño. Como $\lambda = h/mv$, para tener una λ grande se debe escoger una partícula con una m pequeña; por ejemplo, un electrón.

Calculemos la energía cinética de un electrón con una longitud de onda λ de 1.00 Å. Un electrón, cuya carga eléctrica es e, acelerado desde el reposo por una diferencia de potencial electrostática V, adquiere una energía cinética final $\frac{1}{2}mv^2$ dada por

$$eV = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}p^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$$

$$V = \frac{h^2}{2me\lambda^2} = \frac{(6.62 \times 10^{-34}\ \text{J-s})^2}{2(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.00 \times 10^{-10}\ \text{m})^2}$$

$$= 150\ \text{V}$$

Un electron de 150 eV tiene una longitud de onda de 1 Å. Como está longitud de onda es comparable con la de un fotón típico de rayos X, podemos esperar que tanto los electrones como los rayos X muestren efectos de difracción semejantes al pasar a través de un cristal.

37—2 LA LEY DE BRAGG

En 1912 Max von Laue sugirió, por primera vez, que se podría utilizar a un sólido cristalino (en el que el arreglo de los átomos sigue un patrón regular y en el que la distancia entre los átomos es aproximadamente de 1 Å) como rejilla de difracción para medir la longitud de onda de los rayos X.

Considérese un cristal de cloruro de sodio. Los átomos de sodio y de cloro están localizados en esquinas alternadas de cubos elementales idénticos, cuya arista es d.

El espaciamiento en la red entre los átomos de sodio y de cloro en un cristal de sal común es de 2.820 Å. Ver la Fig. 37-1. Esta distancia, que es una distancia típica del espaciamiento interatómico de los átomos en cualquier sólido, es comparable a la longitud de onda de los rayos X o de los electrones de 150 eV.

Cuando una onda incide en una colección de centros dispersores, tales como los átomos en un sólido cristalino, cada centro dispersor genera ondas que son irradiadas en todas las direcciones. La onda resultante de los centros dispersores, medida en cualquier dirección, depende, por supuesto, de la interferencia entre todos los centros. Los átomos que se encuentran en un plano cualquiera

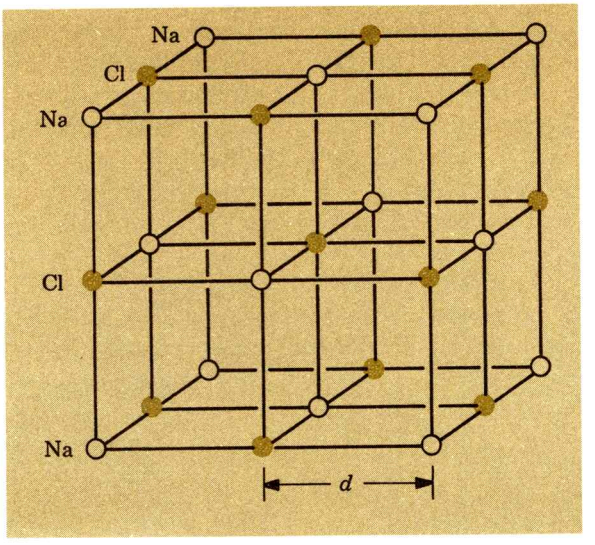


FIG. 37-1. Estructura cristalina de la sal común (NaCI)

en el cristal actúan, con respecto a las ondas incidentes, como un espejo parcialmente plateado con respecto a la luz visible; esto es, reflejan una fracción de la onda y permiten que el resto pase a través de ellos. Se llaman *planos de Bragg* y *reflexiones de Bragg* en honor a W. H. Bragg, quien, con su hijo W.L. Bragg, desarrolló la teoría fundamental de la difracción de rayos X en cristales en 1913. Dando este hecho, podemos tratar la interferencia entre las ondas reflejadas de planos de Bragg paralelos, y no con la interferencia entre las ondas generadas invididualmente por todos los centros dispersores.

Consideremos la reflexión de las ondas de dos planos de Bragg paralelos y adyacentes, como se muestra en la Fig. 37-2. La dirección de las ondas incidente y reflejada, denotada en ambos casos por θ, queda especificada por el ángulo entre la dirección de propagación de las ondas y el plano de Bragg (y *no* con la normal a los planos reflectores). En cada plano consideramos a la onda incidente transmitida parcialmente sin desviación y en parte reflejada.

El rayo incidente se refleja en parte en el primer plano de Bragg, el rayo reflejado AB forma un ángulo θ con el plano 1. Aquella parte, AC, del rayo incidente que se transmite a través del primer plano, se refleja de modo parcial en el segundo plano en la misma dirección θ. Fijemos nuestra atención en el frente de onda BD perpendicular a los dos rayos reflejados. Los rayos reflejados interferirán constructivamente en algún punto distante sólo si tienen la misma fase en los puntos BD. Los puntos B y D están en fase cuando la diferencia de caminos $ACD - AB = 2d$ sen θ es un múltiplo entero n de la longitud de onda λ. Entonces, la condición para que ocurra interferencia constructiva en las ondas reflejadas

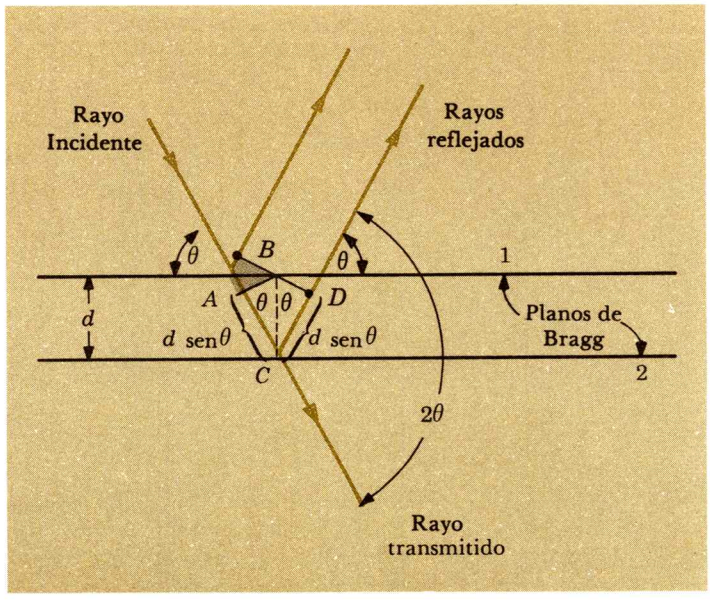


FIG. 37-2. Reflexión de ondas en dos planos de Bragg adyacentes.

de planos de Bragg adyacentes paralelos es

$$n\lambda = 2d \operatorname{sen}\theta \tag{37-4}$$

en donde n, llamado el *orden de la reflexión,* puede tomar los valores 1, 2, 3,... Esta ecuación*, llamada *ley de Bragg,* es la base de todos los efectos de difracción coherentes de rayos X y de electrones en cristales. Los rayos reflejados a ángulos diferentes de aquellos que satisfacen la ecuación de Bragg se interfieren destructivamente y el haz incidente se transmite por completo. La ley de Bragg es el método para medir longitudes de onda comparables a las distancias interatómicas, pues es claro que si se conocen a n, a d y a θ se puede calcular a λ. Nótese que en la Fig. 37-2, el ángulo entre los rayos transmitido y reflejado es 2θ y que los planos de Bragg bisectan a este ángulo.

37—3 DIFRACCION DE RAYOS X Y DE ELECTRONES

Considérese una lámina metálica delgada sobre la cual incide un haz de rayos X monocromáticos. La lámina consiste de un número grande de monocristales perfectos, orientados al azar en la lámina. Sólo aquellos microcristales que estén orientados de tal forma que se satisfaga la condición de Bragg producirán un haz de difracción intenso. Por lo tanto, el haz saliente consistirá de dos partes: un haz central intenso, sin desviación, y un haz disperso en

*La Ec. (37-4), que es la ley de Bragg, tiene cierta semejanza con la ecuación que se aplica a la rejilla de difracción ordinaria. Sin embargo, estas ecuaciones *no* son iguales.

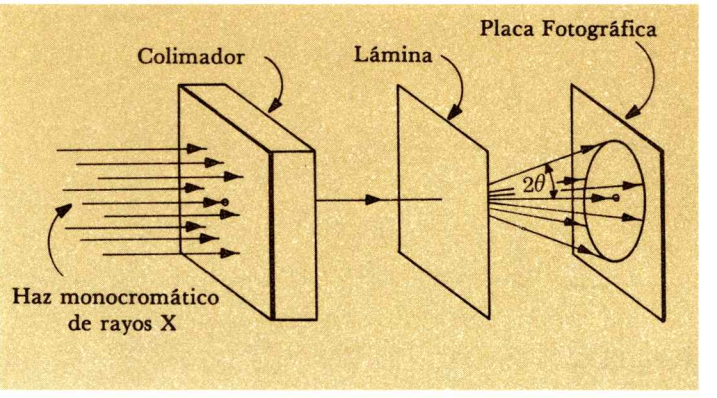


FIG. 37-3. Dispersión de rayos X monocromáticos por una lámina metálica delgada en un conjunto de planos de Bragg.

forma cónica que forma un ángulo 2θ con respecto al haz incidente, ver la Fig. 37-3. El ángulo θ queda unívocamente determinado, para un orden dado, por la relación de Bragg.

Cuando el haz dispersado incide en una placa fotográfica plana, el patrón de intensidades consiste en una mancha central intensa rodeada por un círculo. El radio del círculo se puede medir con facilidad y, si se conoce la distancia de la lámina dispersora a la placa fotográfica, se puede determinar el ángulo 2θ; por último, se puede calcular la longitud de onda de los rayos X a partir de la relación de Bragg.

En un monocristal de un cristal dado existen muchos conjuntos de planos de Bragg paralelos y no sólo uno. Un plano de Bragg es cualquier plano que contenga átomos y existen muchos de estos planos en un cristal cúbico, tal como se muestra en la Fig. 37-4.

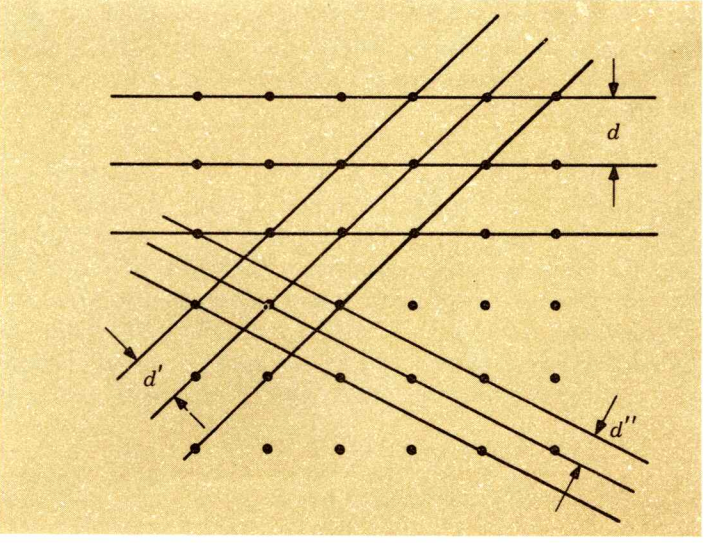


FIG. 37-4. Tres conjuntos de planos de Bragg paralelos con diferente espaciamiento de red.

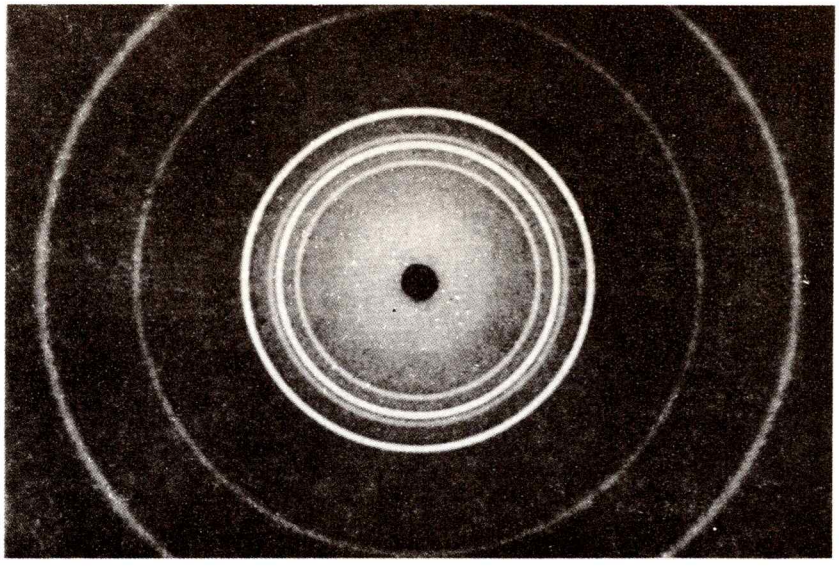


FIG. 37-5. Patrón de difracción de rayos X de aluminio policristalino. El centro aparece oscurecido por que se cortó un orificio en la placa fotográfica para permitir que el haz central intenso pasara a través de él. (Cortesía de Mrs. M. H. Read, Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, New Jersey).

Difieren en el valor del espaciamiento de red d; en consecuencia, existirán diferentes ángulos de Bragg θ, y cada uno de ellos satisface la relación de Bragg para un conjunto particular de planos de Bragg. El patrón de difracción de rayos X será, por lo tanto, más complicado que el indicado en la Fig. 37-3; consiste de un cierto número de círculos concéntricos, cada uno de los cuales corresponde a una difracción de un conjunto particular de planos de Bragg. La Fig. 37-5 es un patrón de difracción de rayos X de una muestra policristalina de aluminio.

Los electrones cuya energía cinética es de 150 eV, tienen la misma longitud de onda que los rayos X, (1 Å), y un haz de electrones monoenergéticos* presenta, esencialmente, los mismos efectos de difracción que los de los rayos X. La Fig. 37-6 es un patrón de difracción electrónico de una lámina metálica. Tales patrones están en concordancia completa con las relaciones de Bragg y de de Broglie. En resumen, *los experimentos de difracción electrónica confirman la relación* $\lambda = h/mv$.

Los patrones de difracción de electrones y de rayos X pueden utilizarse para medir las longitudes de onda de los electrones y de los rayos X cuando se conoce la estructura cristalina; inversamente, cuando se conoce la longitud de onda de los rayos X y de los electrones, los patrones de difracción pueden utilizarse para deducir la geometría de la estructura cristalina y del espaciamiento interatómico de los sólidos.

*Un haz monoenergético de partículas no sólo tiene una sola energía, sino que, naturalmente, también tiene una sola longitud de onda. Por lo tanto, con respecto a su aspecto ondulatorio, por lo general se alude a ellos como "monocromáticos".

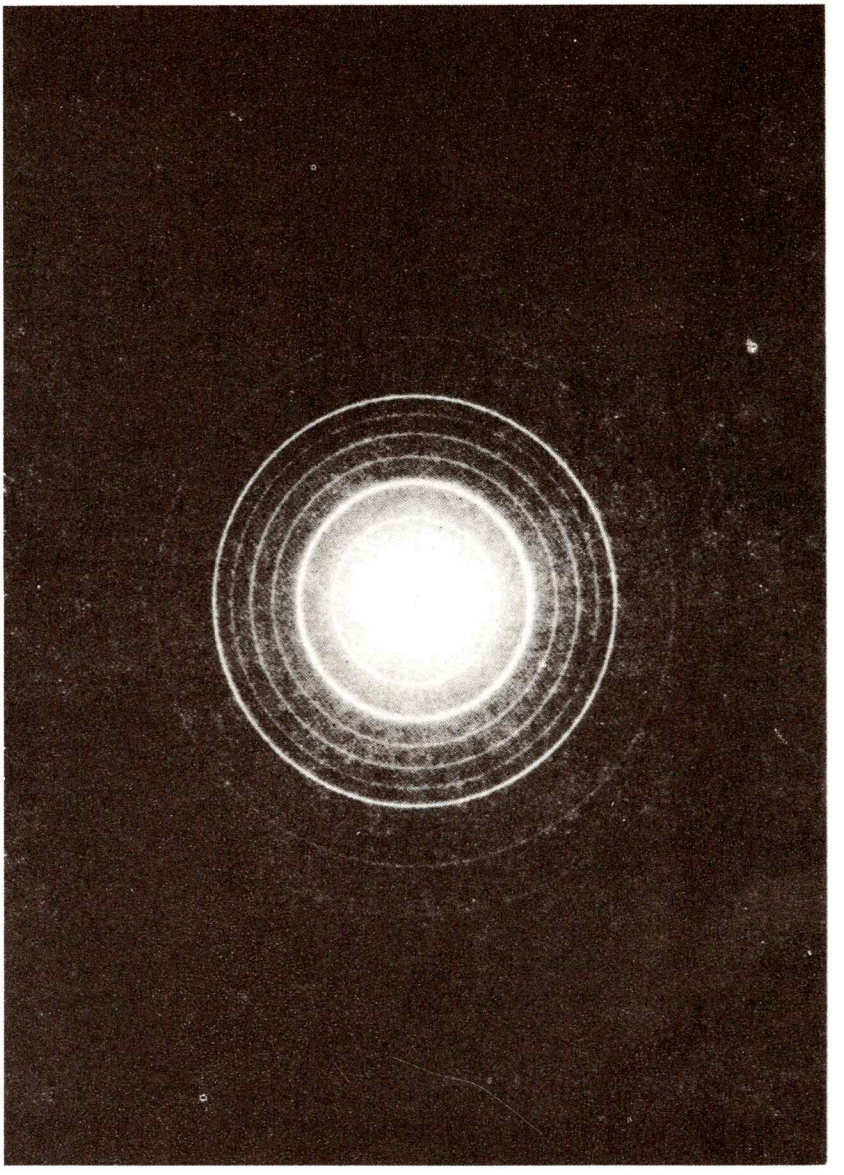


FIG. 37-6. Patrón de difracción electrónica de un policristal de cloruro de telurio. (Cortesía de RCA Laboratories, Princeton, New Jersey).

El experimento de Davisson y Germer, confirmó, por primera vez en 1927, las propiedades ondulatorias de los electrones. Como se muestra en la Fig. 37-7, el haz de electrones incidente en un monocristal de níquel se difractó por la reflexión en los planos de Bragg del cristal, produciendo un pico pronunciado, que podría atribuirse a la difracción de electrones.

El hecho de que un objeto de masa m y velocidad v tenga una longitud de onda h/mv, que se ha establecido no sólo para los electrones, sino también para los átomos, las moléculas y el

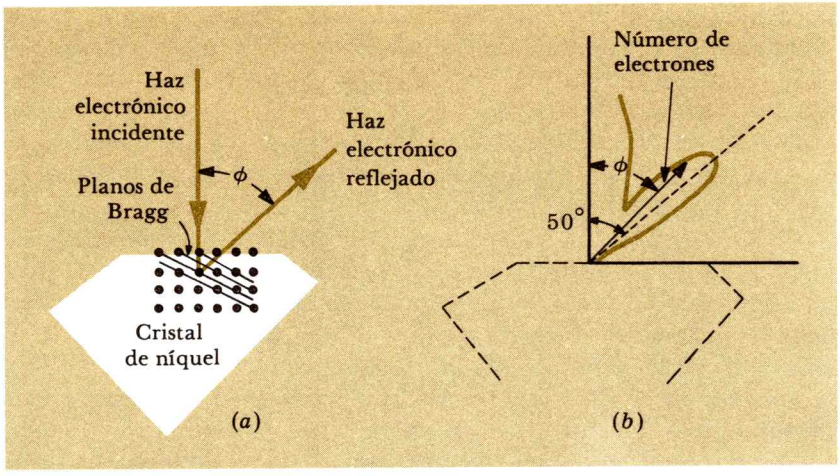


FIG. 37-7. (*a*) Reflexión de ondas electrónicas por un conjunto de planos de Bragg en un cristal de níquel. (*b*) Se muestra, en una gráfica polar, el número de electrones reflejados por un cristal de níquel como función del ángulo ϕ

neutrón (la partícula nuclear sin carga). De hecho, todos los efectos de difracción y de interferencia observados en la radiación electromagnética han sido duplicados con partículas.

37—4 EL PRINCIPIO DE COMPLEMENTARIEDAD

Hemos atribuido características ondulatorias y corpusculares a la radiación electromagnética y a las partículas materiales. A primera vista, la dualidad onda-partícula es inquietante. Examinemos el origen de esta inquietud y veamos cómo el principio de complementariedad resuelve este dilema.

Los conceptos de onda y de partícula son conceptos básicos en la física, debido a que representan las dos únicas formas de transporte de energía. Al describir, en la física clásica, los fenómenos de transferencia de energía en gran escala siempre se puede aplicar con éxito una de estas descripciones. Por ejemplo, una perturbación que viaja en la superficie de una pileta es ciertamente una onda y el lanzamiento de una pelota de béisbol ilustra el transporte de energía por una "partícula". Nunca hay duda acerca de la descripción que se debe aplicar en tales casos.

Regresemos a una ilustración menos directa del comportamiento ondulatorio y corpuscular. La propagación del sonido a través de un medio elástico puede entenderse como una perturbación ondulatoria. No "miramos" a la onda, como lo hicimos en el caso del agua; sin embargo, aplicamos con confianza la descripción ondulatoria en la propagación del sonido, porque es la única que describe la interferencia y la difracción. La propagación del sonido puede explicarse con un *modelo ondulatorio* porque concuerda con *todas* las observaciones experimentales del sonido. A continuación consideremos el comportamiento corpuscular, tal como ocurre en la teoría cinética de los gases. Nunca vemos a las moléculas, pero estamos bastante seguros de que su comporta-

miento es como el de pequeñas esferas rígidas, porque así lo demuestra una variedad de experimentos. El *modelo corpuscular* es el único procedimiento apropiado para describir su comportamiento. Cuando describimos fenómenos muy alejados de nuestra experiencia ordinaria, también aplicamos uno o el otro modelo de descripción, porque uno de ellos siempre es capaz de explicar los hechos experimentales.

Las descripciones ondulatoria y corpuscular son mutuamente incompatibles y contradictorias. Si la frecuencia (o la longitud) de una onda ha de especificarse con una precisión infinita, entonces debe tener una extensión infinita en el espacio. Por el contrario, si está restringida a una región limitada del espacio, se *asemeja* a una partícula en virtud de su localizabilidad, pero no puede caracterizarse con una sola frecuencia y una sola longitud de onda. Una onda ideal, aquella cuya frecuencia y cuya longitud de onda se conoce con certeza, es del todo incompatible con una partícula ideal, que tiene una extensión nula en el espacio.

Cualquier fenómeno de transporte de energía debe describirse en términos de onda o de partícula, pero no se puede aplicar *simultáneamente* una descripción corpuscular y una descripción ondulatoria. Se puede utilizar una o la otra, pero nunca al mismo tiempo.

Ahora bien, lo que resulta perturbador de la descripción de la radiación electromagnética y de las partículas materiales, es que se aplique *tanto* el modelo ondulatorio como el modelo corpuscular. Sin embargo, si revisamos la interpretación de los experimentos discutidos hasta ahora, encontramos que *nunca* se han aplicado estas descripciones *simultáneamente,* lo cual es, como ya hemos visto, imposible según la lógica.

Consideremos la radiación electromagnética. El modelo ondulatorio describe los experimentos de interferencia y de difracción en los que se trata con bandas luminosas alternadas con bandas oscuras que son predichas y explicadas por la teoría ondulatoria. Nunca aplicamos una descripción corpuscular en la interferencia y en la difracción. Claro que la confianza en el modelo ondulatorio de la *propagación* de la luz se fortalece por el hecho de que la teoría electromagnética clásica de Maxwell predice todos los fenómenos ondulatorios; pero sería temerario concluir que las ecuaciones de Maxwell son la última palabra en la teoría electromagnética, en virtud de la naturaleza abierta, tentativa e incompleta de toda teoría física. De hecho, el electromagnetismo clásico es incompleto en un grado tal que no puede explicar los efectos cuánticos. En resumen, utilizamos el modelo ondulatorio para describir la *propagación* de la luz; no debemos, ni podemos, aplicar el modelo corpuscular a los efectos de interferencia y de difracción.

Consideremos ahora aquellos fenómenos que necesitan del modelo corpuscular en la radiación electromagnética. Se trata de

los efectos cuánticos del Cap. 36, que resultan cuando la radiación electromagnética *interactúa* con las partículas. La radiación consiste de fotones, cada uno con una energía y un ímpetu específicos, y la *partícula* electromagnética está localizada en un punto particular del espacio: el sitio de la interacción. La interacción entre la radiación y la materia requiere de una descripción corpuscular. Tal interacción se describe más adecuadamente como una colisión. Los experimentos de interacción con fotones tienen sentido sólo cuando se supone que la radiación electromagnética consiste de partículas que sufren una colisión. En pocas palabras, cuando se visualiza a la interacción entre un electrón y un fotón se emplea un modelo *corpuscular;* no se puede, ni se debe, aplicar el modelo ondulatorio.

La radiación electromagnética muestra tanto el aspecto ondulatorio como el aspecto corpuscular, pero *no* en los mismos experimentos. Los experimentos de interferencia y de difracción requieren de una interpretación ondulatoria y es imposible aplicar a la vez la interpretación corpuscular; los experimentos de interacción de fotones requieren de una interpretación corpuscular y es imposible aplicar simultáneamente una interpretación ondulatoria. Tanto los aspectos ondulatorios como los corpusculares son características esenciales de la radiación electromagnética y los debemos aceptar. Según el *principio de complementariedad,* enunciado por Niels Bohr en 1928, *los aspectos ondulatorio y corpuscular* de la radiación electromagnética *son complementarios.* Para interpretar el comportamiento de la radiación electromagnética en cualquier experimento, debemos escoger la descripción ondulatoria o la corpuscular. Los aspectos ondulatorio y corpuscular son *complementarios* en el sentido de que el conocimiento de la radiación electromagnética es incompleto, a menos que se conozcan tanto los aspectos ondulatorios como corpusculares; pero el escoger una descripción que queda impuesta por la naturaleza del experimento, impide la selección simultánea del otro aspecto. Escogemos una descripción por la disposición experimenal. La radiación electromagnética es una entidad más compleja que lo que se puede comprender por las nociones simples y extremas de una onda y de una partícula, nociones que se toman de la experiencia directa, ordinaria, en los fenómenos de gran escala.

El principio de complementariedad también se aplica a la dualidad onda-corpúsculo de partículas tales como los electrones. Por ejemplo, los electrones en un tubo de rayos catódicos siguen trayectorias bien definidas y su colisión con una pantalla fluorescente queda delatada por pequeños destellos brillantes. Los electrones son partículas (o, con mayor propiedad, se puede utilizar un modelo corpuscular para describir su comportamiento) en un experimento de rayos catódicos, porque toda la energía, el ímpetu y la carga eléctrica del electrón se asignan, en cualquier momento, a una región pequeña del espacio. Cuando interactúan con otros

objetos, los electrones se comportan *como si* fueran partículas. La naturaleza corpuscular de los electrones queda revelada en el experimento de rayos catódicos y, por lo tanto, por el principio de complementariedad, la naturaleza ondulatoria de los electrones *debe* suprimirse.

La naturaleza ondulatoria de los electrones surge en aquellos experimentos en donde ocurra la difracción electrónica. Los electrones se propagan como ondas con una extensión indefinida en el espacio, y naturalmente, es imposible especificar la localización de un electrón cualquiera. En pocas palabras, los experimentos de difracción de electrones demuestran la naturaleza ondulatoria de los electrones y, por el principio de complementariedad, en estos experimentos se suprime necesariamente su naturaleza corpuscular.

37—5 LA INTERPRETACION PROBABILISTICA DE LAS ONDAS DE DE BROGLIE

La naturaleza ondulatoria de la radiación electromagnética queda ilustrada por los campos eléctrico y magnético oscilantes en el espacio; por lo tanto, *la onda asociada con un fotón es el campo electromagnético*. ¿Cuáles son las ondas asociadas con las partículas materiales? ¿Qué es lo que "ondula" cuando decimos que un electrón o cualquier otra partícula material muestra propiedades ondulatorias?

Consideremos una pantalla iluminada con un haz monocromático de radiación electromagnética. Cuando la intensidad es grande, la pantalla aparece iluminada de manera uniforme; en forma equivalente, una placa fotográfica colocada en la pantalla mostrará, después de haber sido expuesta y revelada, un oscurecimiento uniforme. Cuando la intensidad de la luz es grande, el número de fotones que llegan a la pantalla es tan grande que la naturaleza esencialmente granular y discreta de la radiación electromagnética queda enmascarada por el gran número de fotones y los diferentes destellos brillantes, dispuestos al azar, aparecen como un continuo y una iluminación constante.

La intensidad I del haz electromagnético, que es la energía por unidad de área transversal por unidad de tiempo, está dada por

$$I = \varepsilon_0 \mathscr{E}^2 c$$

en donde $\mathscr{E}$ es la magnitud del campo eléctrico instantáneo en un punto de la pantalla y ε_0 es la permitividad eléctrica del espacio vacío (ver la Sec. 30-4). Supongamos que la intensidad del haz se hace extremadamente débil. En vez de tener una área iluminada de modo uniforme, tenemos una colección de destellos brillantes distintos dispuestos al azar sobre la placa y cada destello corres-

ponde a la llegada de un solo fotón*. No se puede predecir ni la posición ni el instante en el que cada fotón incide en la pantalla. La distribución de fotones es completamente azarosa. Pero se puede predecir el número *promedio* de fotones que llegan por unidad de área y por unidad de tiempo; este número es el flujo N de fotones. Como $h\nu$ es la energía por fotón, la intensidad del haz monocromático puede expresarse en términos del flujo de fotones como sigue

$$I = (h\nu)N$$

En vez de aumentar la intensidad para obtener una iluminación uniforme en la pantalla, podría utilizarse un haz muy débil y registrar la posición de cada destello conforme *ocurre*. Entonces se podría determinar que, después de que ha transcurrido un tiempo grande, la pantalla vuelve a estar cubierta de modo uniforme.

Esta situación es más parecida a la que ocurre en la teoría cinética de los gases: uno atribuye la presión de un gas, aparentemente continua, a los efectos combinados de muchos impactos moleculares individuales en las paredes del recipiente. La llegada de las moléculas es azarosa y discreta, pero debido a su enorme número, el efecto total es de una presión continua.

Consideremos un haz de luz monocromática de muy baja intensidad: 1.00×10^{-13} W/m^2 (aproximadamente una cienmillonésima de la intensidad de la luz estelar en la superficie de la Tierra). Supongamos que consiste de fotones ultravioleta, cada uno con una energía de 5.00 eV $= 8.00 \times 10^{-19}$ J. Entonces, el flujo de fotones es

$$N = \frac{I}{h\nu} = \frac{1.00 \times 10^{-13}\ \text{W/m}^2}{8.00 \times 10^{-19}\ \text{J/fotón}} = 1.25 \times 10^5\ \text{fotón/m}^2\text{-s}$$

$$= 12.5\ \text{fotón/cm}^2\text{-s}$$

Esto significa que se observarán 12.5 destellos brillantes en una área de 1 cm^2 durante un periodo de 1 s. Por supuesto que, es imposible observar una fracción de fotón, así que nunca se observarán 12.5 fotones; en ciertas ocasiones se observarán 12 destellos y en otras 13, y asi sucesivamente, de tal forma que el promedio será 12.5. Más aún, la distribución espacial de los fotones en una área de 1 cm^2 *no* será la misma en todos los intervalos de 1 s. Los destellos se distribuirán al azar y tenderán a una distribución uniforme sólo después de transcurrido un periodo grande de tiempo. *El flujo de fotones no indica el tiempo y la localización*

*De hecho, ciertos instrumentos sofisticados, y no el ojo o una placa fotográfica, pueden detectar la llegada de fotones individuales.

precisos de algún fotón, sino que indica sólo la probabilidad de observar a un fotón.

$$N \propto \text{probabilidad de observar a un fotón}$$

La intensidad de la radiación electromagnética monocromática puede expresarse, ya sea utilizando la descripción ondulatoria ($I = \varepsilon_0 \mathscr{E}^2 c$), o la descripción corpuscular ($I = h\nu N$). En ambas descripciones aparece, en la intensidad, una cantidad que tiene un significado preciso. La intensidad es un puente entre los dos modelos dispares.

Se puede dar un nuevo significado al cuadrado del campo eléctrico, $\mathscr{E}^2$, a través de la descripción fotónica de la luz. Igualando las dos expresiones de la intensidad, se tiene

$$I = h\nu N = \varepsilon_0 \mathscr{E}^2 c$$

Por lo tanto,

$$N \propto \mathscr{E}^2$$

y

$$\mathscr{E}^2 \propto \text{probabilidad de observar al fotón}$$

La probabilidad de observar a un fotón en cualquier punto del espacio es proporcional al cuadrado del campo eléctrico en ese punto.

Desde el punto de vista de la teoría cuántica, el campo eléctrico es una cantidad o función cuyo cuadrado da la probabilidad de observar al fotón en un sitio dado.

Se puede asignar un significado a la naturaleza ondulatoria de una partícula, tal como el electrón, de la siguiente manera. Suponemos que la relación entre la probabilidad de observar a una partícula y el cuadrado de la amplitud de su onda corresponde exactamente a la relación entre la probabilidad de observar a un fotón y el cuadrado de la amplitud de su onda (el campo eléctrico). La amplitud de la onda asociada con una partícula se representa por ψ, llamada simplemente la *función de ondas.*

La función de ondas ψ es aquella cantidad cuyo cuadrado, ψ^2, es proporcional a la probabilidad de observar a una partícula material.

Por lo tanto, si ψ representa la función de ondas en la localización x, la probabilidad de observar a la partícula entre x y $x + dx$ está dada por $\psi(x)^2\, dx$:

Probabilidad de observar a una partícula en el intervalo $dx \propto \psi^2\, dx$

Entonces, la función de ondas de una partícula es análoga al campo eléctrico de un fotón. En la misma forma en la que $\mathscr{E}$ es, en general, una función tanto de la posición como del tiempo, así también, en general, lo será la función de ondas ψ.

Es imposible especificar con certeza la localización particular de un fotón en un instante particular, pero sí es posible especificar la probabilidad $\mathscr{E}^2$ de observarlo. En forma semejante, es imposible especificar con certeza la localización específica de una partícula en un tiempo dado, pero sí es posible especificar la probabilidad ψ^2 de observar a la partícula. En resumen, la función de ondas de una partícula da lugar a una *interpretación probabilística* de la localización de la partícula.

La interpretación de ondas asociadas con partículas a través de probabilidades fue enunciada por primera vez en 1926 por Max Born. La rama de la física cuántica que trata con el problema de encontrar los valores de ψ se conoce como *mecánica ondulatoria* o *mecánica cuántica*. Los originadores principales de la mecánica ondulatoria de las partículas fueron Erwin Schrödinger (1926) y Werner Heisenberg (en 1925), que formularon independientemente la mecánica cuántica en formas matemáticas diferentes pero equivalentes.

En la misma forma en que la teoría eléctromagnética de Maxwell se resume en las ecuaciones de Maxwell, que son la base para calcular los valores de $\mathscr{E}$, la mecánica ondulatoria de la materia esta gobernada por la *ecuación de Schrödinger,* que es la base para calcular los valores de ψ en cualquier problema de la física cuántica. Sin embargo, hasta aquí han de llegar los paralelismos. Mientras que el campo eléctrico, que tiene su origen en las cargas eléctricas, da no sólo la probabilidad de observar a un fotón, sino que también da la fuerza eléctrica por unidad de carga eléctrica positiva, la función de onda de la ecuación de Schrödinger tiene un significado físico *sólo* en términos de la interpretación probabilística: *No* indica algún tipo de fuerza. La función de ondas no es directamente medible u observable; sin embargo, da la mayor cantidad de información que uno puede obtener relacionada con un sistema de objetos y a partir de ella se pueden obtener *todas* las cantidades medibles, tales como la energía y el ímpetu, al igual que la probabilidad de localización.

Consideremos los efectos de interferencia que ocurren al pasar ondas a través de dos rendijas paralelas. Cuando se obstruye alguna de las dos rendijas, el patrón resultante es un patrón de difracción típico de un sola rendija: Un máximo central flanqueado por máximos secundarios más débiles, como se muestra en la Fig. 32-22. Cuando las dos rendijas se encuentran abiertas, el patrón es como el mostrado en la Fig. 37-8: una estructura fina de interferencia en una envolvente de difracción. El patrón *no es* simplemente el patrón de difracción de dos rendijas superpuesto; la interferencia entre las ondas viajeras a través de *las dos* rendijas es responsable de las rápidas variaciones en la intensidad. En pocas palabras, en el caso en el que las ondas (partículas) puedan tomar

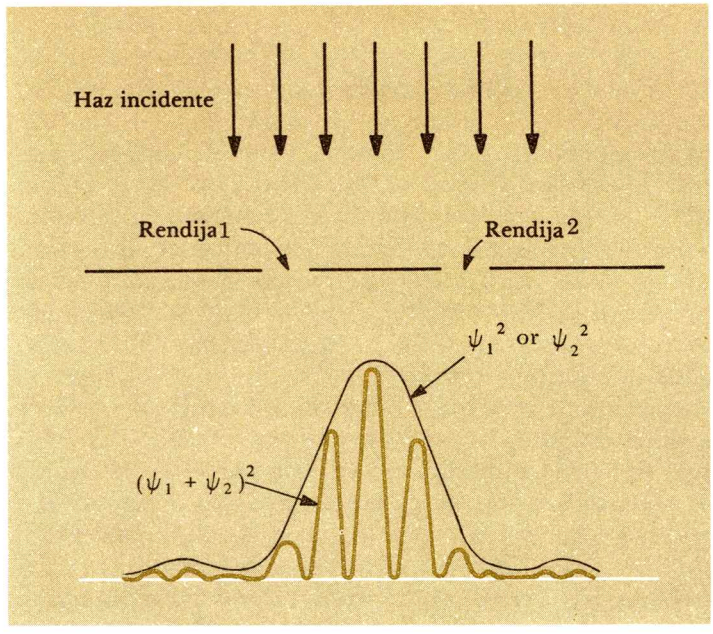


FIG. 37-8. Difracción de partículas por dos rendijas. Las funciones de ondas ψ_1 y ψ_2 dan el patrón de difracción cuando cualquiera de las dos rendijas está abierta; la función de onda superpuesta $\psi_1 + \psi_2$ da el patrón cuando las dos rendijas están abiertas. (La distancia entre las rendijas se ha exagerado en esta figura).

dos o más trayectorias desde la fuente hasta el punto de observación, resolvemos el problema superponiendo primero las funciones de ondas (o campos eléctricos) de las trayectorias separadas para encontrar la función de ondas resultante (o campo eléctrico) y después la elevamos al cuadrado para obtener la probabilidad (o intensidad). Esto es, si ψ_1 y ψ_2 representan a las funciones de onda que describen el paso a través de las rendijas 1 y 2 por separado, entonces $(\psi_1 + \psi_2)^2$, y no $\psi_1^2 + \psi_2^2$, indica la probabilidad de observar a la partícula en la pantalla. Consecuentemente, si un electrón y un fotón se dirigen hacia un par de rendijas, no podemos decir a través de cuál de éstas pasa; debemos de hablar en el lenguaje de las ondas y decir que, en efecto, pasa a través de las *dos* rendijas.

37—6 EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

Es imposible, como lo indica el principio de complementariedad, aplicar en forma simultánea las descripciones ondulatoria y corpuscular a objetos tales como los electrones y como la radiación electromagnética. Por ejemplo, si un objeto esta localizado en una región pequeña del espacio (esto es, si la función de ondas es grande en una región restringida del espacio y pequeña en cualquier otra parte) entonces se dice que el objeto se asemeja a una partícula. Pero en estas circunstancias, no se puede asignar un significado preciso a la frecuencia o a la longitud de onda del objeto, ya que para hacerlo se necesita una onda estrictamente sinusoidal, una onda con extensión *infinita*. Por el contrario, si la

frecuencia y la longitud de onda de un objeto se especifica con precisión y, por lo tanto, la función de ondas tiene una extensión infinita en el espacio y una duración infinita en el tiempo, entonces no se puede hablar significativamente de la localización de un objeto en un instante de tiempo. En resumen, uno no puede referirse al objeto como si fuera una partícula.

Se *puede* especificar la localización de un objeto con una precisión infinita, de tal forma que la incertidumbre en su posición a lo largo de, digamos, el eje X sea $\Delta x = 0$. Pero no se puede especificar *simultáneamente* con precisión, la longitud de onda del objeto, como el ímpetu del objeto está relacionado con su longitud de onda mediante $p = h/\lambda$, la incertidumbre en la longitud de onda implica una incertidumbre correspondiente en la componente del ímpetu del objeto Δp_x a lo largo del eje X. Si $\Delta x = 0$, $\Delta p_x = \infty$. En forma semejante, la incertidumbre en el tiempo de observación Δt implica una incertidumbre en la frecuencia $\Delta \nu$; Como $E = h\nu$, la incertidumbre en la frecuencia implica una incertidumbre en la energía ΔE. Con $\Delta t = 0$, $\Delta E = \infty$.

Estos ejemplos extremos de las incertidumbres intrínsecas en la especificación simultánea del ímpetu y la posición, y de la energía y el tiempo, son ilustraciones de un *principio de incertidumbre* general, o principio de indeterminación. Este aspecto característico y fundamental de la teoría cuántica fue introducido por primera vez, en 1927, por Werner Heisenberg.

Se puede obtener una formulación apropiada del principio de incertidumbre considerando primero la forma en que la incertidumbre en la frecuencia $\Delta \nu$ de una onda está relacionada con un periodo finito de tiempo Δt en el cual se observa a la onda y se mide su frecuencia. Se debe reconocer, en primer lugar, que una onda estrictamente sinusoidal es una onda con una extensión *infinita* en el espacio. Por otra parte, una onda restringida a una región finita del espacio no puede caracterizarse con una frecuencia o una longitud de onda bien definida. En vez de esto, se debe superponer un cierto número de ondas sinusoidales que difieren en frecuencia y en longitud de onda, una de la otra, para obtener una onda resultante acotada (o lo que a menudo se llama un "paquete de ondas").

Supongamos que un observador desea medir la frecuencia de una onda incidente observando a la onda durante un intervalo de tiempo *finito* Δt. El observador puede estar razonablemente seguro de la frecuencia ν_1 de la onda incidente o de su periodo $T_1 = 1/\nu_1$, sólo si el periodo de observación Δt es, cuando menos, igual al tiempo T_1 de un ciclo completo. Esto es, $\Delta t \geq T_1 = 1/\nu_1$. Para ondas con un periodo mayor que T_1, o con frecuencias menores que ν_1, el observador no puede observar un ciclo completo y la incerteza en las frecuencias de todas aquellas componentes de bajas frecuencias es muy grande. Por lo tanto, podemos considerar la incertidumbre en la

frecuencia $\Delta\nu$ igual a ν_1, cuando menos en forma aproximada. Entonces se tiene

$$\Delta t \geq T_1 = \frac{1}{\nu_1} = \frac{1}{\Delta\nu}$$

o

$$\Delta t\, \Delta\nu \geq 1 \tag{37-5}$$

que indica que las observaciones en un tiempo finito Δt corresponden a una incerteza en la frecuencia medida de, cuando menos, $1/\Delta t$.

Se puede obtener una relación análoga entre la incertidumbre $\Delta\lambda$ en la longitud de onda medida y la extensión espacial finita Δx en la que se realizan las observaciones de la longitud de onda. Como $\lambda = v/\nu$, en donde v es la rapidez de la onda, se obtiene, después de diferenciar esta expresión,

$$\Delta\lambda = \frac{v}{\nu^2}\,\Delta\nu \tag{37-6}$$

(Ignoramos el signo negativo en esta relación porque nos interesa sólo la magnitud de las incertidumbres.) Las incertidumbres en la localización espacial y el tiempo están relacionadas por $\Delta x = v\,\Delta t$. Utilizando esta relación junto con las Ecs. (37-5) y (37-6), obtenemos por último

$$\Delta\lambda\, \Delta x \geq \lambda^2 \tag{37-7}$$

Cuando se toma la diferencial de las relaciones cuánticas básicas $E = h\nu$ y $p = h/\lambda$, obtenemos (ignorando de nuevo los signos negativos)

$$\Delta E = h\,\Delta\nu$$

y

$$\Delta p_x = \frac{h\,\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

Cuando se sustituyen estas relaciones en las Ecs. (37-5) y (37-7) se obtiene

$$\Delta E\, \Delta t \geq h \tag{37-8}$$

$$\Delta p_x\, \Delta x \geq h \tag{37-9}$$

que son las formulaciones básicas del principio de incertidumbre. El producto de las incertidumbres en la componente del ímpetu y en la localización a lo largo de la misma dirección, $\Delta p_x\, \Delta x$, no puede ser infinitesimalmente pequeño, sino que su magnitud debe

ser igual, cuando menos, a la constante de Planck h*. En igual forma, el producto de las incertidumbres en la energía de una partícula o de un sistema de partículas, y el tiempo de observación, $\Delta E\,\Delta t$, debe ser, cuando menos, tan grande como h.

La limitación fundamental de la incertidumbre de las medidas de la energía y del tiempo, o de la posición y el ímpetu, esta en armonía con el principio de complementariedad. Si la naturaleza corpuscular de, digamos, un electrón ha de exhibirse perfectamente, entonces tanto Δx como Δt deben ser cero. Por lo tanto, cuando se escoge el aspecto corpuscular, el aspecto ondulatorio queda necesariamente suprimido. Las cantidades ν, E, λ, y p son entonces del todo inciertas. Por otra parte, si se definen por completo las características ondulatorias de una partícula material, o de la radiación electromagnética, esto es, si $\Delta\nu = 0$ y $\Delta\lambda = 0$ (también $\Delta E = 0$ y $\Delta p = 0$), entonces, por el principio de complementariedad o por el principio de incertidumbre, no podemos especificar la característica esencialmente corpuscular de la localización precisa en el espacio y en el tiempo, y x y t son del todo inciertos.

Supongamos que se desea representar a un electrón por sus propiedades ondulatorias y, aun en este caso, localizarlo en el espacio hasta cierto grado. No se puede utilizar una sola onda sinusoidal: Este tipo de onda se extiende hasta el infinito y ciertamente no está localizada. Sin embargo, se puede superponer un cierto número de ondas sinusoidales que difieren en frecuencia en un intervalo de frecuencias $\Delta\nu$ y así formar un *paquete de ondas*. Las ondas componentes interfieren constructivamente en una región limitada del espacio Δx, identificada como la localización, hasta cierto punto incierta, de la "partícula" y se obtiene una función de ondas ψ del tipo mostrado en la Fig. 37-9. Debido a que existe un intervalo de frecuencias y un intervalo de longitudes

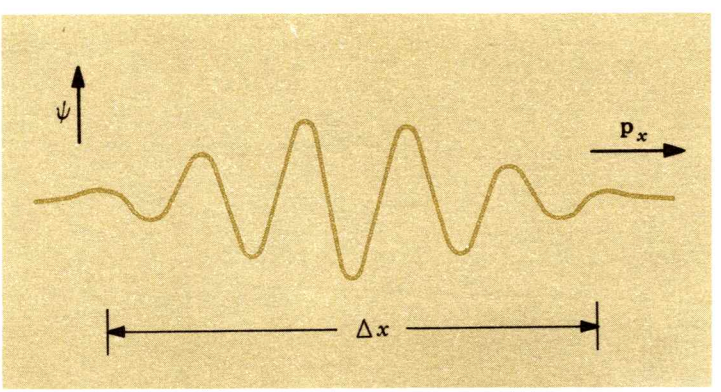


FIG. 37-9. La función de ondas de un paquete de ondas.

*El valor de la constante en el miembro derecho de las Ecs. (37-8) y (37-9) depende de una definición precisa de la incertidumbre. Utilizando una convención más bien conservadora y aproximada, esta constante es h; pero si Δp_x y Δx representan los valores cuadráticos medios de un número de medidas independientes, entonces la constante resulta $h/4\pi$.

de onda, $\Delta\nu$ y $\Delta\lambda$, el ímpetu y la energía asociados son necesariamente inciertos y es imposible predecir con precisión adónde y cuándo llegará el paquete de ondas a otro punto y qué ímpetu y energía tendrá entonces.

Como la relación de incertidumbre implica una incerteza en la energía, de una magnitud de cuando menos $h/\Delta t$ en el intervalo de tiempo Δt, también implica que la ley de la conservación de la energía puede, de hecho, violarse, por una cantidad $\Delta E = h/\Delta t$, pero sólo durante el intervalo de tiempo Δt. Entre mayor sea la cantidad de energía "prestada" o "descartada", menor será el intervalo de tiempo en el que puede ocurrir la no conservación de la energía. En forma semejante, la incerteza mínima en el ímpetu de una partícula $h/\Delta x$, implica que la ley de la conservación del ímpetu puede violarse, pero sólo por una cantidad $\Delta p = h/\Delta x$, en una región del espacio de Δx.

Consideremos la difracción de ondas por una rendija de orillas paralelas como un ejemplo del principio de incertidumbre en una situación específica. Una onda plana monocromática incide en la rendija de ancho w y se forma el patrón de difracción en una pantalla distante, tal como lo muestra la Fig. 37-10. La localización de los puntos de intensidad cero está dada por la ecuación (Sec. 32-9)

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{n\lambda}{w}$$

en donde λ es la longitud de onda y n puede tomar los valores 1, 2, 3, ... A la región central del patrón de difracción llegan aproximadamente las tres cuartas partes de la energía que pasa a través de la rendija. Sus límites están dados por la ecuación anterior con $n = 1$:

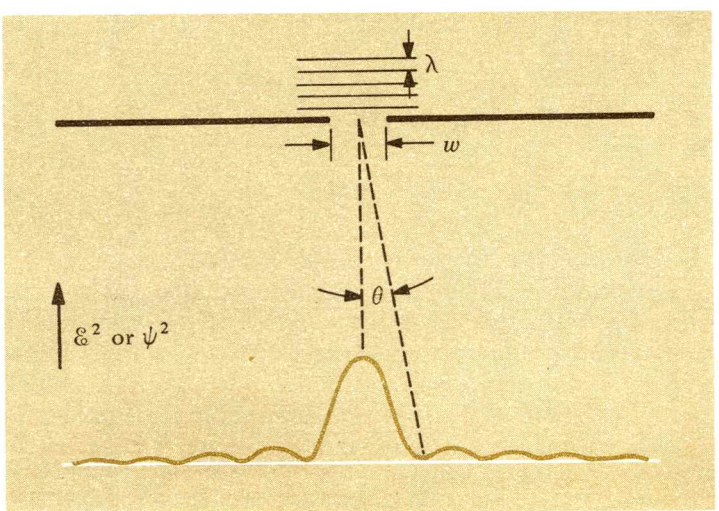


FIG. 37-10. Patrón de difracción de una onda plana monocromática que incide en una rendija de ancho w.

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\lambda}{w} \qquad (37\text{-}10)$$

Todavía no se ha especificado el tipo de onda que pasa a través de la rendija. Si es radiación electromagnética, la intensidad del patrón de difracción es proporcional a $\mathscr{E}^2$, que es el cuadrado del campo eléctrico en la pantalla. Por otra parte, si la onda consiste de un haz de electrones monoenergéticos, la intensidad es proporcional a ψ^2, que es el cuadrado de la función de ondas electrónica en la pantalla e indica la probabilidad de encontrar al electrón en cualquier punto a lo largo de la pantalla. Cualquiera que sea el tipo de onda, los efectos de difracción son pronunciados sólo cuando la longitud de onda es comparable con el ancho de la rendija; en el límite en el que la longitud de onda tiende a cero, el patrón de intensidades en la pantalla corresponde a la sombra geométrica producida por las orillas de la rendija.

Supongamos que se reduce drásticamente la cantidad de radiación incidente o el número de electrones, según sea el caso. Entonces, en la pantalla no se observan ya variaciones suaves, sino que, en su lugar, se observan a los fotones o a los electrones que a ella llegan. Como la intensidad está dada por $\mathscr{E}^2$ en el caso de los fotones y por ψ^2 en el caso de los electrones, la cantidad graficada en la Fig. 37-10 representa la *probabilidad* de que una partícula incida en cierto punto en la pantalla. La probabilidad de que la partícula incida en algún sitio en la región central del patrón de difracción es del 75%. Cuando existe una iluminación muy baja, ocurren destellos brillantes en un área grande de la pantalla. Conforme transcurre el tiempo, se acumulan más y más partículas en la pantalla y los destellos brillantes distintos surgen y forman al patrón de intensidades, que varía suavemente, predicho por la teoría ondulatoria.

No existe una forma para predecir de antemano adónde llegará un electrón o un fotón en la pantalla. Todo lo que la mecánica ondulatoria permite saber es la probabilidad de que una partícula incida en un punto. Antes de que las partículas pasen a través de la rendija, se conoce su ímpetu con una precisión completa, tanto en magnitud (onda monocromática) como en dirección (en este caso verticalmente hacia abajo). Cuando pasan a través de la rendija, su localización a lo largo de la línea en la dirección X, que antes de llegar a la rendija era del todo incierta, ahora se conoce con una incertidumbre $\Delta x = w$, que es el ancho de la rendija. Sin embargo, lo que no se sabe con precisión es dónde incidirá una partícula en la pantalla. Cualquier partícula tiene aproximadamente un 75% de probabilidad de llegar a la región central, cuyas fronteras están dadas por la Ec. (37-10). Existirá una incertidumbre en la componente X del ímpetu p, que es, *cuando menos,* tan grande como p sen θ, como puede deducirse con facilidad de la Fig. 37-11. Por lo tanto, podemos escribir

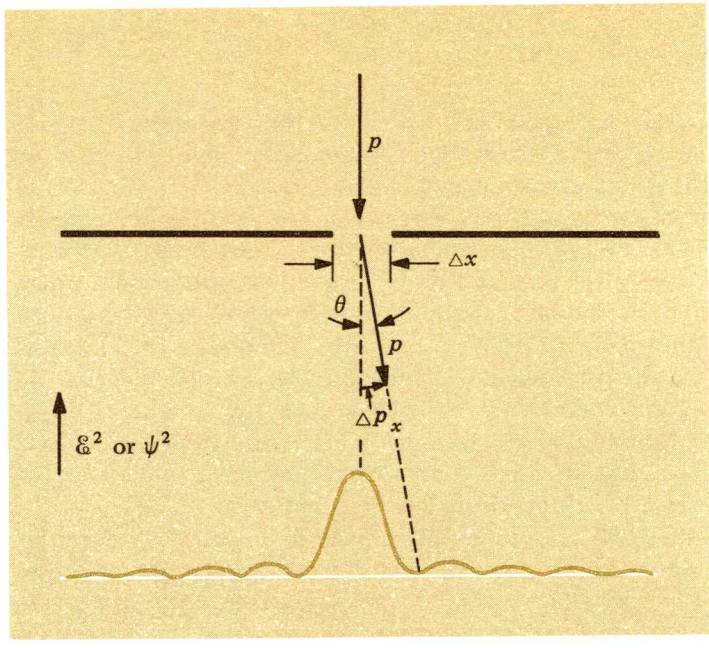


FIG. 37-11. Una ilustración de la incertidumbre en el ímpetu de una partícula que a pasado a través de una rendija.

$$\Delta p_x \geq p \operatorname{sen} \theta$$

Utilizando (37-10) obtenemos

$$\Delta p_x \geq \frac{p\lambda}{\Delta x}$$

y como $p = h/\lambda$, tenemos

$$\Delta p_x \, \Delta x \geq h$$

que es la *relación de incertidumbre de Heisenberg.*

Supongamos ahora que el valor de Δx de nuestro ejemplo es muy grande. La rendija es, entonces, muy ancha y aumenta la incertidumbre en la posición. Tenemos menos certeza de la localización del electrón a lo largo de X. Pero esto reduce correspondientemente la incertidumbre en el ímpetu: El patrón de difracción se hace menor y, en el límite, casi todos los electrones llegan a la región de la sombra geométrica. Por el contrario, si se reduce el ancho de la rendija, y Δx se hace muy pequeña, el patrón de difracción se expande en la pantalla. Por aumentar la certeza en la posición del electrón debemos pagar con una incerteza correspondientemente mayor en el ímpetu del electrón.

Vemos que cuando el ancho de la rendija es mucho mayor que la longitud de onda, las partículas pasan a través de la rendija sin sufrir desviación para llegar dentro de la sombra geométrica. Esto

está de acuerdo con la mecánica clásica, en donde se ignora el aspecto ondulatorio de las partículas materiales. Por lo tanto, existe un paralelismo cercano en la relación entre la óptica ondulatoria y la óptica geométrica y la mecánica ondulatoria y la mecánica clásica. La óptica geométrica es una buena aproximación de la óptica ondulatoria en aquellos casos en los que la longitud de onda es mucho menor que las dimensiones de los obstáculos o de las aberturas que encuentra la luz en su camino; en forma semejante la mecánica clásica es una buena aproximación de la mecánica ondulatoria, siempre que la longitud de onda de la partícula sea mucho menor que las dimensiones de los obstáculos o de las aberturas encontradas por las partículas materiales. En forma simbólica podemos escribir

$$\lim_{\lambda/w \to 0} (\text{óptica ondulatoria}) = \text{óptica geométrica}$$

$$\lim_{\lambda/w \to 0} (\text{óptica ondulatoria}) = \text{mecánica clásica}$$

Ningún ingenioso artificio de diseño del experimento de difracción eliminara la incerteza básica. En este caso *no* se tiene, como en el caso de los fenómenos en gran escala de la física clásica, una situación en la que la perturbación en el objeto medido pueda hacerse indefinidamente pequeña con un cuidado suficiente. En este caso, la limitación se encuentra en la naturaleza cuántica fundamental de los electrones y de los fotones; es intrínseca a sus aspectos complementarios de onda y de corpúsculo.

Ejemplo 37-1

Calcularemos, como una ilustración del principio de incertidumbre, la incerteza en el ímpetu de un electrón de 1 000 eV cuya posición es incierta en no más de 1 Å $= 1.0 \times 10^{-10}$ m, que es el tamaño aproximado de los átomos. A partir de $\Delta p_x \geq h/\Delta x$ se sigue que $\Delta p_x = 6.6 \times 10^{-24}$ kg-m/s. Comparemos esta incertidumbre del ímpetu con el ímpetu mismo $p_x = (2mE_c)^{1/2} = 17 \times 10^{-24}$ kg-m/s. Por lo tanto, la incerteza fraccional en el ímpetu es $\Delta p_x/p_x = 6.6/17$, ¡alrededor de 40%! Debido al principio de incertidumbre, es imposible especificar el ímpetu de un electrón restringido a las dimensiones atómicas aun con una precisión moderada.

Consideremos ahora la incertidumbre involucrada cuando se mueve un cuerpo de 10.0 g con una rapidez de 10.0 cm/s; esto es, un objeto de tamaño ordinario que se mueve con una rapidez ordinaria. Supongamos que la posición del objeto es incierta en no más de 1.0×10^{-3} mm. Deseamos encontrar la incerteza en el ímpetu y, más específicamente, la incerteza fraccional en el ímpetu. Efectuando los cálculos obtenemos $\Delta p_x = 6.6 \times 10^{-23}$ kg-m/s y $p_x = 1.0 \times 10^{-3}$ kg-m/s; por lo tanto, ¡ $\Delta p_x/p_x = 6.6 \times 10^{-25}$! La incerteza fraccional en el ímpetu de un cuerpo macroscópico es tan

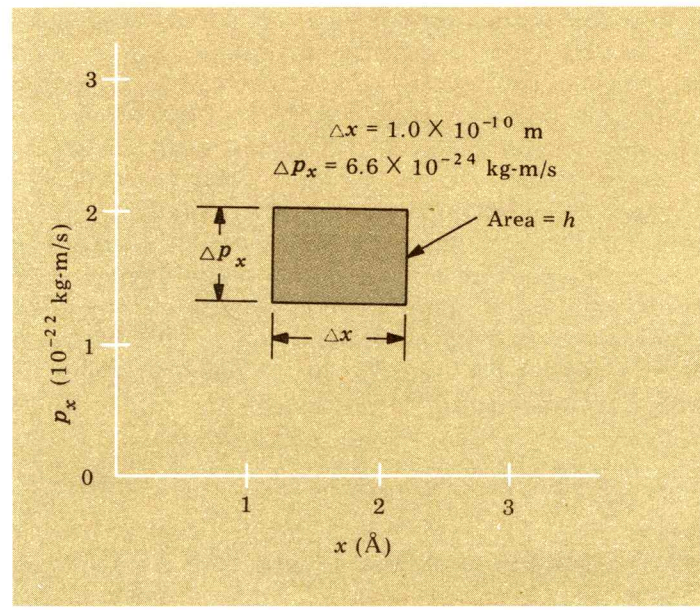


FIG. 37-12. Incertidumbres en las medidas simultáneas de la posición y del ímpetu de un electrón.

extraordinariamente pequeña, que puede ignorarse, en comparación con las posibles limitaciones experimentales. El principio de incertidumbre impone un límite importante en la certeza de las medidas sólo en el dominio microscópico. En el dominio macroscópico las incertezas son, en efecto, triviales.

La Fig. 37-12 muestra al ímpetu p_x del electrón del efecto anterior graficado como función de su posición x. El principio de incertidumbre requiere que el área sombreada de esta figura, que es el producto de las incertidumbres del ímpetu y de la posición, sea igual (en magnitud) a la constante de Planck h. Si se conoce la posición con precisión, el ímpetu tiene una gran incertidumbre; si se especifica al ímpetu con alta certeza, la posición necesariamente tendrá una alta incertidumbre. Por lo tanto, es imposible predecir y seguir en detalle la trayectoria futura de un electrón restringido a dimensiones esencialmente atómicas. En este caso, no se pueden aplicar las leyes de movimiento de Newton, que son por completo satisfactorias para describir las trayectorias de partículas de gran tamaño. Para predecir el curso futuro de cualquier partícula, es necesario saber no sólo las fuerzas que actúan sobre la partícula, sino también su posición y su ímpetu iniciales. Como no se pueden conocer simultáneamente *tanto* a la posición como al ímpetu sin incerteza, no es posible predecir en detalle la trayectoria futura de una partícula. En lugar de esto, se debe utilizar la *mecánica ondulatoria* para determinar la probabilidad de localizar a una partícula en un tiempo futuro.

Consideremos de nuevo el cuerpo de 10.0 g que se mueve con rapidez de 10.0 cm/s. La Fig. 37-13 muestra su ímpetu y su posición. El área h, que representa el producto de las incertezas en

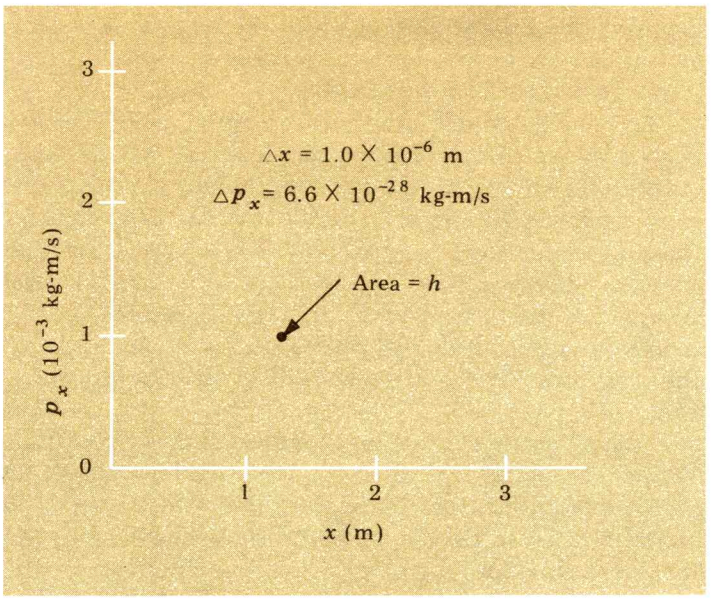


FIG. 37-13. Incertidumbre en las medidas simultáneas de la posición y del ímpetu de una partícula de 10g. (En la escala de este diagrama, la incerteza, que es el área h, se ha exagerado por un factor de 10^{26}.)

el ímpetu y en la posición, es tan extraordinariamente pequeña en esta circunstancia macroscópica, que aparece como un punto infinitesimal en la figura. En este caso se aplican las leyes de la mecánica clásica sin ocasionar una incerteza apreciable.

El *tamaño finito* de la constante de Planck es muy pequeña, pero no cero. Recordemos que los efectos relativistas son sutiles porque la rapidez de la luz es muy grande, pero no infinita. Si de alguna forma la constante de Planck fuera cero, los efectos cuánticos desaparecerían. Por lo tanto, se puede pensar que la física clásica es el límite de la física cuántica cuando h tiende a cero. Simbólicamente,

$$\lim_{h \to 0} (\text{física cuántica}) = \text{física clásica}$$

37—7 LA DESCRIPCION CUANTICA DE UNA PARTICULA ENCERRADA

Según la primera ley de Newton, una partícula libre por completo de influencias externas se moverá en una línea recta con un ímpetu constante. En el lenguaje de la mecánica ondulatoria, una partícula que tiene un ímpetu constante bien definido, se representa por una onda sinusoidal monocromática con una longitud de onda bien definida. Si la longitud de onda se define en forma precisa, la onda debe tener una extensión infinita en el espacio. De acuerdo con el principio de incertidumbre, cuando la

longitud de onda y, por lo tanto, el ímpetu de una partícula se especifican en forma precisa, la posición de la partícula es totalmente incierta e indeterminada.

En la Fig. 36-1*c* vimos un ejemplo de la física clásica con longitudes de onda bien definidas y que, sin embargo, estaban restringidas en una región limitada del espacio: Las ondas estacionarias resultantes en una cuerda con sus dos extremos fijos. La onda en la cuerda se refleja repetidas veces en las fronteras, que son sus extremos fijos, e interfiere constructivamente con ella misma. La resonancia se alcanza sólo cuando la longitud de la cuerda es algún múltiplo entero de media longitud de onda; en este caso aparece el patrón de ondas estacionarias entre las fronteras.

Consideremos el problema elemental de la mecánica ondulatoria, que es análogo al de las ondas estacionarias en una cuerda. Suponemos que la partícula se mueve con libertad, de ida y de vuelta, a lo largo del eje X, pero que se encuentra con una pared dura (infinitamente dura) en $x = 0$ y con otra en $x = L$; entonces está restringida entre estas dos fronteras. Las paredes de dureza infinita corresponden a una energía potencial V infinita para todos los valores de x menores que cero y mayores que L. Debido a que la partícula tiene libertad entre cero y L, la energía potencial V en esta región es constante. Por conveniencia, escogemos a la energía potencial constante como cero. La situación que hemos descrito es la de una *partícula en una caja unidimensional,* o la de una partícula en un pozo potencial infinitamente profundo. Debido a que las paredes tienen dureza infinita, la partícula no les comunica su energía cinética y su energía total permanece constante. Su movimiento de ida y vuelta entre las paredes ocurre sin cambios energéticos.

Desde el punto de vista de la mecánica ondulatoria decimos que, si la partícula está restringida entre los límites establecidos, entonces la probabilidad de encontrarla fuera de estos límites es cero. Por lo tanto, la función de ondas ψ, cuyo cuadrado representa a esta probabilidad, debe ser cero para $x \leq 0$ y para $x \geq L$.

Matemáticamente, resumimos las condiciones del problema de la siguiente manera:

$$V = \infty \quad \text{para } x < 0, x > L$$
$$V = 0 \quad \text{para } 0 < x < L$$
$$\psi = 0 \quad \text{para } x \leq 0, x \geq L$$

Sólo están permitidas aquellas funciones de onda que satisfagan las condiciones en la frontera. Como se trata de una partícula libre, la magnitud de su ímpetu es constante y sabemos que queda representada por una onda sinusoidal. Las condiciones en la frontera son satisfechas sólo por aquellas ondas cuya longitud de onda sea

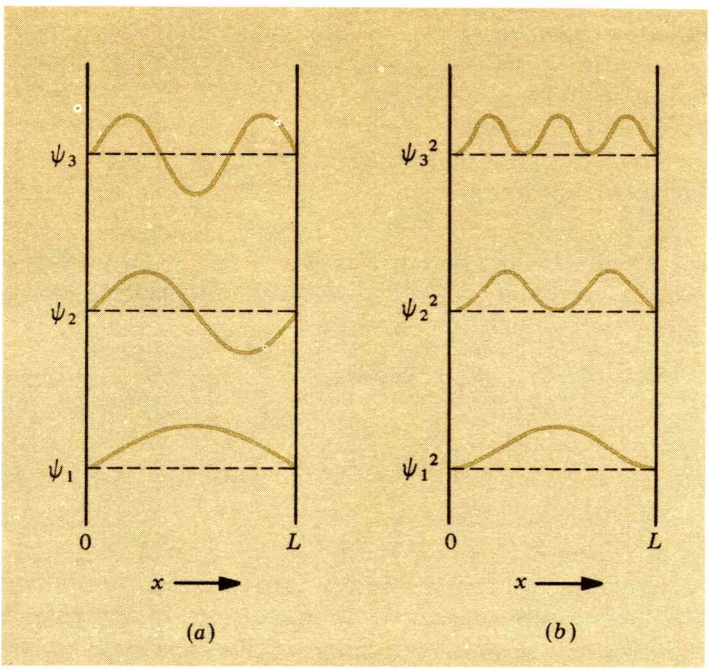


FIG. 37-14. Los tres primeros estados estacionarios de una partícula en una caja unidimensional con paredes laterales infinitas: (*a*) las funciones de onda y (*b*) las distribuciones de probabilidad.

tal que entre $x = 0$ y $x = L$ ocurra un número entero de medias longitudes de onda. La condición para la existencia de ondas *estacionarias* es, entonces,

$$L = n\frac{\lambda}{2} \tag{37-11}$$

en donde λ es la longitud de onda y n es el *número cuántico* cuyos posibles valores son: 1, 2, 3, etc.

La Fig. 37-14 muestra al pozo de potencial, a la función de ondas ψ y a la probabilidad ψ^2 graficados como función de x, para los tres primeros *estados estacionarios* posibles de la partícula en la caja. Nótese que mientras que ψ puede ser negativa o positiva, ψ^2 siempre es positiva.

La distribución de probabilidad es tal que ψ^2 siempre es cero en las fronteras. Para el primer estado, $n = 1$, la localización más probable de la partícula es en el punto medio entre las dos paredes: en $x = L/2$; sin embargo, para el segundo estado ($n = 2$), este punto es el de menor probabilidad y, de hecho, $\psi^2 = 0$, es decir, ¡que es imposible encontrar a la partícula en ese sitio!

La imposición de las condiciones en la frontera sobre ψ, (esto es, el ajustar a las ondas entre las paredes) ha restringido a las longitudes de onda de la partícula a los valores dados por la Ec. (37-11). Ahora bien, si sólo están permitidas ciertas longitudes de

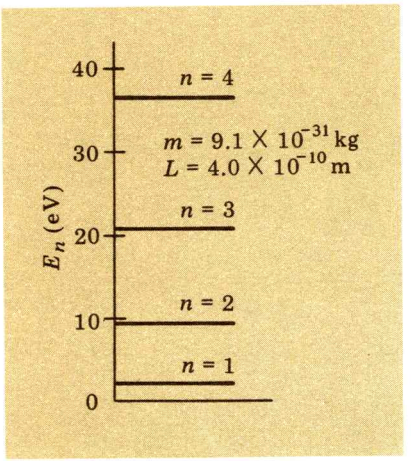


FIG. 37-15. Energías permitidas de un electrón restringido en una caja unidimensional de dimensiones atómicas.

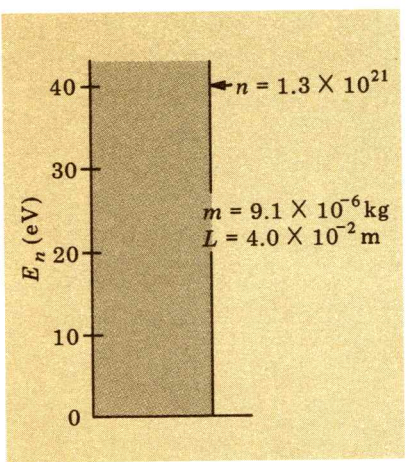


FIG. 37-16. Energías permitidas de una partícula de 9.1 mg restringida en una caja unidimensional de 4 cm.

onda, las magnitudes del ímpetu también están restringidas a ciertos valores, ya que $p = h/\lambda$. Por lo tanto, los ímpetus permitidos están dados por

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hn}{2L}$$

Por último, la energía cinética E_c (y, por lo tanto, la energía total E de la partícula, ya que la energía potencial es cero) está dada por

$$E_c = E = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{(hn/2L)^2}{2m}$$

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2} \qquad (37\text{-}12)$$

en donde m es la masa de la partícula (esta ecuación se cumple sólo cuando la rapidez es no relativista). El subíndice n significa que los posibles valores de la energía dependen sólo del número cuántico n para valores fijos de m y de L. De esta ecuación resulta que la *energía* de la partícula en la caja unidimensional esta *cuantizada*. La partícula no puede tener cualquier energía, sino que sólo puede tener aquellos valores particulares de energía, y de rapidez, que satisfacen las condiciones en la frontera impuestas a la función de onda. La cuantización de la energía es análoga a la cuantización clásica de las frecuencias de las ondas en una cuerda fija en ambos extremos.

Calculemos los valores de la energía suponiendo que un electrón, con $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg está restringido a moverse de ida y vuelta dentro de las dimensiones $L = 4$ Å, o 4×10^{-10} m. Introduciendo estos valores en la Ec. (37-12), resulta que la energía del primer estado, $n = 1$, es $E_1 = 2.3$ eV. Como $E_n = n^2(h^2/8mL^2) = n^2E_1$, las siguientes energías posibles de la partícula son $4E_1$, $9E_1$, $16E_1$, ... Las energías permitidas del electrón en una caja de 4-Å se muestran en la Fig. 37-15, que se llama *diagrama de niveles*. Resulta significativo, en relación con la estructura atómica, que cuando un electrón está restringido a distancias casi iguales a las del diámetro de un átomo, las energías posibles se encuentran en el intervalo de unos cuantos electron-volts, comparables con las energías de amarre de los electrones en los átomos.

Ahora consideremos las energías permitidas de un objeto relativamente grande restringido en una caja relativamente grande; supongamos que $m = 9.1$ mg $= 9.1 \times 10^{-6}$ kg y que $L = 4$ cm $= 4 \times 10^{-2}$ m. La Ec. (37-12) muestra que, con estos valores, $E_1 = 2.3 \times 10^{-41}$ eV, ¡que es una cantidad de energía fantásticamente pequeña! La Fig. 37-16 es el diagrama de niveles de energía en estas circunstancias, y la energía se ha graficado en

la misma escala que en la Fig. 37-15. En tales condiciones macroscópicas, el espaciamiento entre niveles contiguos en el diagrama de energía es tan pequeño que la energía es, en efecto, continua. Por eso es que nunca observamos manifestaciones obvias de la cuantización de la energía en una partícula macroscópica. La cuantización está presente, pero es tan fina que no se puede discriminar. Este resultado concuerda, por supuesto, con el requisito clásico de que las energías (que de hecho son discretas) de los sistemas ligados aparezcan como un continuo en los fenómenos a gran escala.

El valor más bajo de la energía de una partícula en un pozo infinito no es cero, si no que es E_1. Esto concuerda con el principio de incertidumbre. Si la energía de la partícula fuera cero, estando la partícula en reposo en algún sitio en la caja, ($\Delta x = L$), tanto el ímpetu p como la incerteza en el ímpetu Δp_x serían cero. Pero esto violaría la relación de incertidumbre, ya que el producto $\Delta p_x \Delta x$ sería $(0)(L) = 0$, y no h. Si $x = L$, la incerteza en el ímpetu está dada por $\Delta p_x = h/\Delta x = h/L$.[2] Entonces, el ímpetu p_x de la partícula en una dirección debe ser, cuando menos, tan grande como la incerteza Δp_x. Más aún, no podemos saber si la partícula viaja hacia la izquierda o hacia la derecha, de tal forma que, en resumen, $\Delta p_x = 2p_x$. En estas condiciones la energía de la partícula es $E = p_x^2/2m = (\Delta p_x/2)^2/2m$. Con $\Delta p_x = h/L$ se tiene $E = h^2/8mL$, exactamente la energía del primer estado permitido, dada por (37-12).'

Si un electrón está restringido a las dimensiones atómicas, la energía en el estado de menor energía, o *estado básico,* es de unos cuantos electron-volts. El electrón nunca está en reposo, sino que viaja de ida y vuelta entre las paredes que lo limitan con su energía más baja posible, la llamada *energía del punto cero.* Por supuesto, esto es cierto para cualquier partícula encerrada. Calculemos la rapidez mínima de una partícula de 9.1 mg restringida a 4 cm, como en el ejemplo. Como $E_1 = 2.3 \times 10^{-41}$ eV $= mv^2 2$, encontramos que $v = 9.0 \times 10^{-28}$ m/s, o algo así como 10^{-7} Å por milenio. En efecto, la partícula está en reposo.

El problema de la partícula en la caja es algo artificial, ya que no existe tal cosa como una energía potencial de magnitud infinita, y una partícula no puede estar por completo libre de toda influencia externa al estar encerrada; sin embargo, el problema es importante, porque revela la cuantización de la energía. La cuantización de la energía ocurre, básicamente, porque sólo pueden caber ciertos valores discretos de la longitud de onda entre las fronteras.

Si la partícula tiene una energía cinética constante E_c, su longitud de onda es constante, y la función de ondas es sinusoidal. En forma más general, la energía cinética de una partícula encerrada no es constante y, por lo tanto, su longitud de onda puede diferir de punto a punto. Consideremos a una partícula de masa m que interactúa con sus alrededores (de masa infinita) a

través de una función de energía potencial $V(x)$. Entonces la energía total de la partícula E es constante y está dada por

$$E = E_c + V = \frac{p^2}{2m} + V$$

de donde resulta que p, que es el ímpetu de la partícula a lo largo de la dirección X, es

$$p = \sqrt{2m(E - V)}$$

Como la longitud de onda λ de la partícula es, en general h/p, podemos escribir a la longitud de onda como

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{(2m)[E - V(x)]}} \qquad (37\text{-}13)$$

La Ec. (37-13) demuestra que la longitud de onda de la partícula depende de la posición x de la partícula en el mismo grado en el que lo hace la energía potencial del sistema. Más específicamente, cuando la energía potencial V aumenta, también lo hace la longitud de onda y viceversa. La Fig. 37-17 muestra a una función de ondas para un pozo de potencial con paredes infinitas pero con una base escalonada. La función de ondas es suave a través de toda la región, se hace cero en las paredes, y es sinusoidal en donde el potencial V es constante.

Supongamos que el pozo potencial que restringe a la partícula no es de altura infinita. Clásicamente, no tiene sentido decir que la

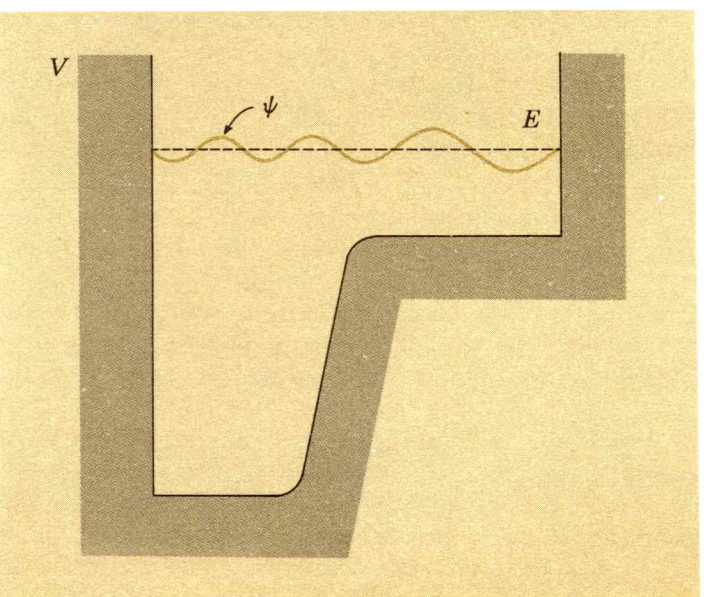


FIG. 37-17. Un pozo de potencial con paredes infinitas y una base escalonada, junto con una de las funciones de onda permitidas.

partícula se encuentra en un sitio en el que la energía total E es menor que la energía potencial V; esto implicaría una energía cinética negativa o, de la Ec. (37-13), una longitud de onda imaginaria. Pero en la mecánica ondulatoria, la partícula *puede* encontrarse fuera de los límites definidos por la mecánica clásica. Las soluciones de la ecuación de Schrödinger demuestran que la función de ondas disminuye en forma exponencial en las regiones en las que $V > E$. Las funciones de ondas de los dos primeros estados permitidos de una partícula en un pozo potencial finito se muestran en la Fig. 37-18; las funciones de onda son sinusoidales dentro del pozo, se unen con suavidad a las funciones de onda que decaen exponencialmente a partir de las fronteras.

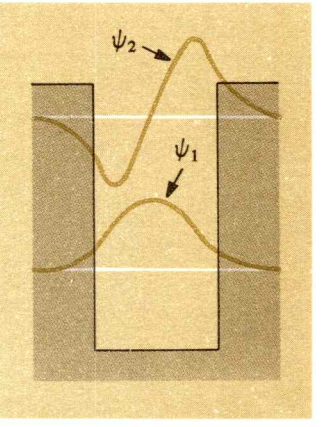


FIG. 37-18 Funciones de ondas de los dos primeros estados de una partícula en un pozo potencial de profundidad finita.

Como en la mecánica cuántica una partícula puede salirse de sus confines clásicos, se presenta una posibilidad curiosa cuando se encuentra con una pared potencial de *ancho* y alto finitos, como en la Fig. 37-19. En la física clásica, una partícula cuya energía cinética es menor que la altura de la pared de potencial nunca puede pasar al otro lado, simplemente por la conservación de la energía. En la mecánica ondulatoria existe la posibilidad de que esto ocurra. La función de ondas decae en forma exponencial cuando la energía potencial es mayor que la energía total. Por lo tanto, la función de ondas de una partícula que se acerca por la izquierda a una pared, es sinusoidal a la izquierda de ella, exponencial a través de la pared y sinusoidal, aunque de una amplitud mucho menor, hacia la derecha de la pared. Existe una posibilidad pequeña, pero finita, de que la partícula que se aproxima por la izquierda se encuentre en la *derecha*. En otras palabras, la partícula tiene una alta probabilidad de encontrarse a la izquierda, una probabilidad más pequeña de encontrarse dentro de la pared y una probabilidad aún más pequeña de encontrarse a la derecha. La partícula, (o, con más propiedad, la onda) puede penetrar, o hacer un tunel, en la barrera clásicamente impenetrable. La probabilidad de este *efecto túnel* es muy pequeña, excepto

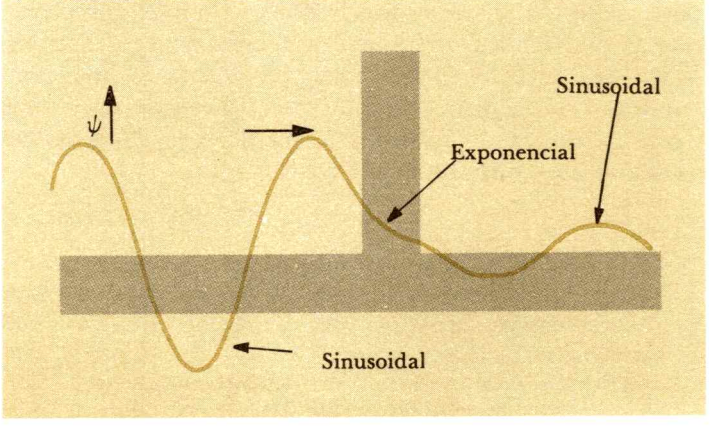


FIG. 37-19. Función de ondas de una partícula que incide por la izquierda en una barrera de altura y de ancho finitos.

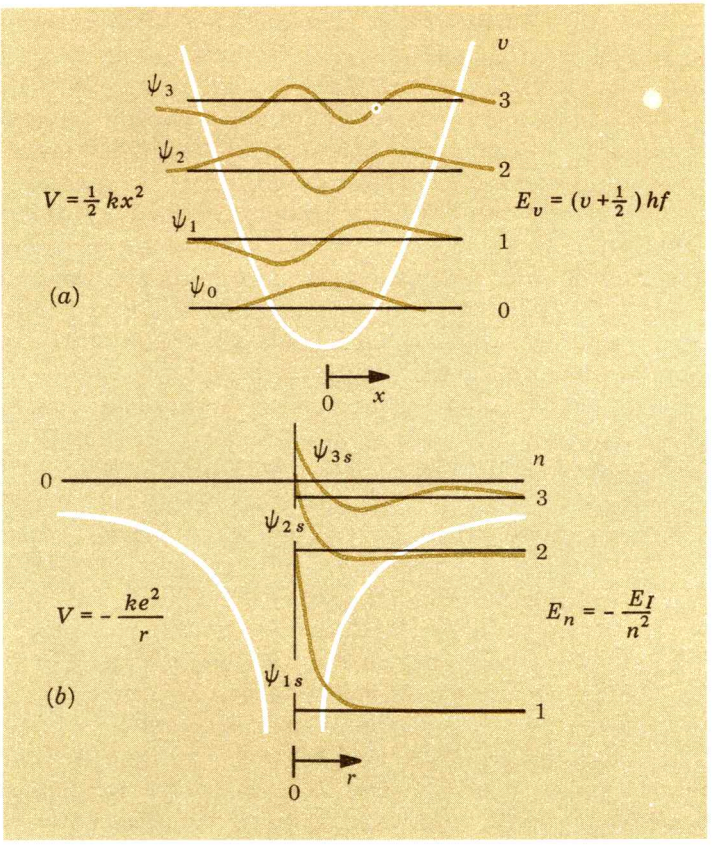


FIG. 37-20. Funciones de energía potencial, funciones de onda y energías permitidas en (*a*) un oscilador armónico simple y (*b*) una fuerza atractiva que varía inversamente con el cuadrado de la distancia (átomo de hidrógeno).

a niveles atómico y nuclear; sin embargo, el efecto se observa en el comportamiento de ciertos dispositivos semiconductores (diodos túnel) y en la emisión de partículas xi de núcleos inestables pesados.

En la Fig. 37-20 se muestran dos funciones de energía potencial importantes, junto con las funciones de onda y las energías permitidas: (*a*) el oscilador armónico simple unidimensional en el que la partícula está ligada a través de una función potencial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ y (*b*) la fuerza atractiva que varía inversamente con el cuadrado de la distancia $V(r) = -ke^2/r$, en donde r es la distancia desde el centro de fuerza y $V(r)$ es la función potencial que se aplica al átomo de hidrógeno.

a. En el oscilador armónico, que es más simple, los niveles de energía estan igualmente espaciados y las energías permitidas quedan expresadas por $E_v = (v + \frac{1}{2})hf$, en donde el número cuántico vibracional $v = 0, 1, 2, \ldots$ y $f = (1/2\pi)(k/m)^{1/2}$, f es la frecuencia clásica de oscilación. Nótese que las funciones de onda se extienden más allá de las regiones clásicas del pozo potencial. Al pasar del nivel de energía

más bajo hacia las energías permitidas más altas, el número de medias longitudes de onda que ocupan las fronteras que limitan al potencial son 1, 2, 3, ...

b. En el caso de la fuerza atractiva que varía inversamente con el cuadrado de la distancia, sólo se muestran aquellas funciones de ondas que tienen simetría esférica y que, por lo tanto, dependen de la distancia radial r (los llamados estados s). Las energías permitidas negativas, como tienen que ser en sistemas ligados, y están dadas por $E_n = -E_I/n^2$, en donde el número cuántico principal $n = 1, 2, 3, \ldots$ y E_I (que es la energía de ionización) está dada por $E_I = 2\pi^2k^2e^4m/h^2$. De nuevo ocurre que la función de ondas sobrepasa los límites clásicos y que el número de ceros de la función de ondas aumenta en números enteros a medida que se desplaza hacia las energías mayores permitidas.

Ejemplo 37-2

Dibujar la función de ondas de un estado excitado de una partícula que se mueve en el potencial mostrado en la Fig. 37-21. Se trata nada menos que de la versión de la mecánica ondulatoria de un ejemplo típico de la mecánica elemental: Una partícula que resbala en un plano inclinado sin fricción (en este caso, con una pared de altura infinita en el fondo del plano inclinado). Resolver el problema con todo el detalle analítico representaría encontrar las soluciones de la ecuación de Schrödinger en el caso de una energía potencial que se hace infinita en $x = 0$ y aumenta en forma continua con x, a través de la relación $V = ax$, para $x > 0$, pero podemos demostrar, aun sin análisis detallado, los aspectos generales de la solución de la mecánica ondulatoria.

Como el potencial aumenta hasta el infinito en $x = 0$, la función de onda debe de ser cero en ese sitio. En el otro extremo, en donde la partícula se puede localizar fuera del límite superior clásico, la función de ondas debe decaer a cero. Entre estos dos extremos, la partícula tiene una energía cinética diferente de cero, de tal forma que la función de ondas es, en esa región, ondulatoria.

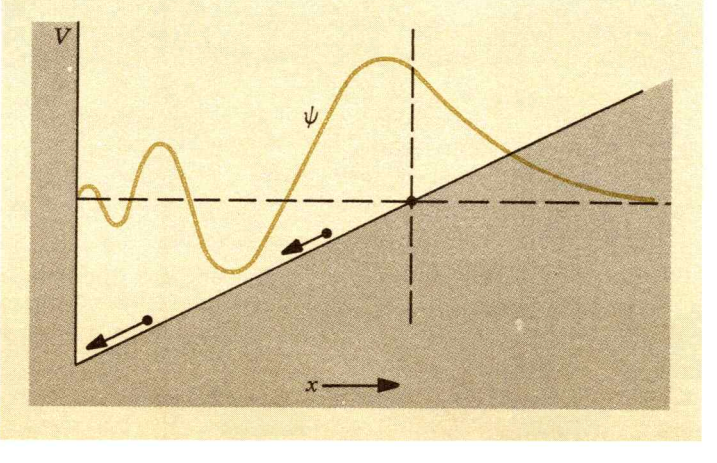


FIG. 37-21. El plano inclinado de la mecánica cuántica: la función de energía potencial y la función de ondas del quinto estado permitido.

Más aún, en el caso de un estado excitado relativamente alto, los aspectos de la solución de la mecánica cuántica deben tender hacia los aspectos clásicos de una partícula que resbala sobre un plano inclinado y choca con la pared dura del fondo. Como la partícula se mueve con una rapidez mayor en la base del plano inclinado que en la parte superior, la longitud de onda de la función de ondas debe ser menor cerca de la base y aumentar conforme se acerca hacia la parte superior. Más aún, la alta rapidez clásica de la base y la baja rapidez de la parte superior implican que es más probable encontrar a la partícula en la parte superior que en la parte inferior. Dados todos estos aspectos, sabemos que la solución de la mecánica ondulatoria de un estado excitado es como la mostrada en la Fig. 37-21.

En el estado de energía superior siguiente, encontraríamos una media longitud de onda adicional ajustada entre los extremos izquierdo y derecho, y en el siguiente estado inferior se encontraría media longitud de onda de menos. En el estado más bajo se encontraría un solo rizo de ψ entre los extremos izquierdo y derecho.

RESUMEN

Cada partícula, independientemente de que tenga una masa en reposo finita o cero, tiene asociada una frecuencia y una longitud de onda dadas por

$$\nu = \frac{E}{h} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{h}{p} \qquad (37\text{-}1),\ (37\text{-}2)$$

Los espaciamientos interatómicos, las longitudes de onda de los electrones de 150 eV y de los rayos x, son del orden de 1 Å.

Cuando sobre un conjunto de planos de Bragg paralelos separados una distancia d inciden ondas, se produce una interferencia constructiva, según la relación de Bragg, cuando

$$n\lambda = 2d \operatorname{sen}\theta \qquad (37\text{-}4)$$

Los rayos X y los electrones pueden difractarse en los sólidos cristalinos y los efectos de difracción pueden utilizarse para medir las longitudes de onda de los rayos X, o de los electrones, y los espaciamientos interatómicos.

Según el principio de complementariedad de Bohr, los aspectos corpuscular y ondulatorio de la radiación electromagnética y de las partículas materiales son complementarios, pero el uso de una descripción impide el uso de la otra en una circunstancia dada.

La descripción de la mecánica ondulatoria de las partículas materiales es semejante a la de la radiación electromagnética en

los siguientes aspectos:

La radiación electromagnética (fotones)	*Partículas materiales*
Función de ondas: el campo eléctrico $\mathscr{E}$ (o el campo magnético)	La función de ondas ψ
La probabilidad de observar a una partícula en el intervalo dx	$\mathscr{E}^2\,dx$ $\quad\psi^2\,dx$

El principio de incertidumbre de Heisenberg impone un límite en la certeza de las medidas simultáneas de la energía E y el tiempo t, y del ímpetu p_x y la posición x:

$$\Delta E\,\Delta t \geq h \tag{37-8}$$

$$\Delta p_x\,\Delta x \geq h \tag{37-9}$$

Una partícula restringida por un pozo potencial está limitada a aquellos estados en los cuales se puede colocar un número entero de la longitud de onda de la partícula entre las fronteras. Consecuentemente, la energía del sistema resulta cuantizada.

$$\text{Límite (física cuántica)} \underset{h \to 0}{=} \text{física clásica}$$

PROBLEMAS

37-1. ¿Cuáles son las longitudes de onda de (*a*) un fotón de 1.00 MeV (*b*) un electrón de 1.0 MeV (de energía cinética) y (*c*) un protón de 1.00 MeV (de energía cinética)?

37-2. Un protón y un electrón se aceleran, a partir del reposo, mediante una diferencia de potencial eléctrica de 50 kV. ¿Cuál es la relación entre las longitudes de onda del protón y del electrón?

37-3. *Un neutrón térmico* es un neutrón cuya energía cinética promedio $\frac{1}{2}mv^2$ es igual a la energía cinética traslacional promedio por partícula $\frac{3}{2}kT$ en equilibrio a la temperatura T, en donde T es la temperatura ambiente (300 K). Los neutrones térmicos en un material pueden igualmente ganar o perder energía en una colisión. Demostrar que la longitud de onda de los neutrones térmicos es 1.4 Å. La masa del neutrón es de 1.67×10^{-27} kg.

37-4. (*a*) En el Centro de Aceleración Lineal de Stanford los electrones se aceleran hasta que su energía cinética es de 20 GeV; ¿cuál es su longitud de onda a esta energía? (*b*) En el acelerador de alta energía de Batavia, Ill., los protones tienen una energía de 500 GeV; ¿cuál es su longitud de onda a esta energía?

37-5. Demostrar que la longitud de onda de una partícula de energía en reposo E_0 y energía cinética $= E_c$ esta dada por (*a*) hc/E_c cuando $E_c \gg E_0$ y por (*b*) $hc/(2E_0E_c)^{1/2}$ cuando $E_c \ll E_0$.

37-6. Demostrar que el espaciamiento de red d entre átomos adyacentes en el cristal de NaCl (ver la Fig. 37-1) es de 2.82 Å. El peso atómico del Na es de 23.00 u, el del Cl es de 35.45 u. La densidad del NaCl es de 2.163 g/cm^3. El número de átomos por gramo mol es 6.022×10^{23} átomos. (Número de Avogadro).

37-7. Sobre un monocristal de KCl inciden rayos x monocromáticos que consisten de fotones cuya energía es de 5.0 MeV; el espaciamiento de red es de 3.14

Å. ¿Cuál es el ángulo, con respecto al haz incidente, que se observaría en la reflexión de Bragg de primer orden?

37-8. En un monocristal de NaCl, cuyo espaciamiento de red es de 2.82 Å. incide un haz de neutrones térmicos. (*a*) ¿Cuál es el ángulo, con respecto al haz incidente, al que se deben de orientar los planos de Bragg para producir una difracción de primer orden intensa cuando los neutrones tienen una energía cinética de 0.050 eV? (*b*) ¿Cuál es, en este caso, el ángulo entre los haces incidente y refractado?

37-9. Se puede hacer un modelo en gran escala de una red cristalina mediante un conjunto de pequeñas esferas colocadas en los vértices de un conjunto de cubos adyacentes con aristas de 10 centímetros de longitud. El "cristal" se irradia con microondas de 3.0 cm. ¿Cuáles deben ser los ángulos a los cuales se debe girar el modelo cristalino para producir difracciones de Bragg intensas? Las rotaciones se miden con respecto a la configuración en la que el haz incidente es perpendicular a la cara de los elementos cúbicos.

37-10. Dos rejillas formadas por un conjunto de alambres paralelos se separan 0.20 m. Un haz monocromático de ondas de radio incide sobre las rejillas y ocurre una fuerte difracción de Bragg de primer orden cuando el ángulo entre los haces incidentes y difractado es de 30°. ¿Cuál es la frecuencia de las ondas de radio?

37-11. Como la frecuencia ν y la longitud de onda λ asociados con una partícula están dadas por $\nu = E/h$ y por $\lambda = h/p$, su producto $\nu\lambda$, que es la *velocidad de fase* vf de las ondas de de Broglie, es igual a E/p. La rapidez v de la partícula, que es la rapidez con la que avanzan la energía y el ímpetu a través del espacio, está dada por $v = pc^2/E$, en donde $m = E/c^2$. (*a*) Demostrar que la velocidad de fase vf y la rapidez v de la partícula están relacionadas por $vf = c^2/v$. (*b*) Demostrar que, para cualquier partícula, excepto aquella que tenga una masa en reposo igual a cero, la rapidez de fase *es mayor* que la rapidez de la luz. (*c*) ¿Cuál es la rapidez de fase de las ondas electromagnéticas a través del vacío?

37-12. ¿Cuál debe ser la intensidad de un haz de rayos γ que consiste de fotones de 5.0 MeV, que corresponde a un flujo de fotones de 1.0 fotones /mm²-s?

37-13. ¿Cómo se comparan las energías permitidas de una partícula en un pozo potencial unidimensional de altura finita, con las energías correspondientes de una partícula en un pozo potencial de altura infinita? Comparar las Figs. 37-14 y 37-18.

37-14. Una partícula de 1-μg se mueve a lo largo del eje X; su rapidez tiene una incertidumbre de 6.6×10^{-6} m/s. ¿Cuáles son las incertidumbres en su posición a lo largo de (*a*) el eje *X* y (*b*) el eje *Y*? A lo largo del eje *X* se mueve un electrón que tiene esta misma incertidumbre en la rapidez; ¿cuáles son las incertidumbres en su posición a lo largo de (*c*) el eje *X* y (*d*) el eje *Y*?

37-15. El virus es el objeto más pequeño que puede "mirarse" en un microscopio electrónico. Supongamos que un virus pequeño con un tamaño de 10 Å, y una densidad igual a la del agua (1 g/cm³) esta localizado en una región del espacio igual a su volumen. ¿Cuál es la rapidez mínima del virus?

37-16. La componente del ímpetu a lo largo de la dirección de movimiento de un electrón de 1.02 MeV tiene una incertidumbre de una parte en 10^2. ¿Cuál es la región mínima del espacio en la que se encuentra el electrón?

37-17. Una cámara que tiene un disparador rápido toma una fotografía durante una exposición de 1.0×10^{-5} s. (*a*) ¿Cuál es la incertidumbre en la energía de cualquiera de los fotones que pasa a través de la lente? ¿Cuál es la incertidumbre fraccional correspondiente en la longitud de onda de (*b*) un fotón de 2 eV de luz visible, (*c*) un fotón de 2 GeV de rayos x?

37-18. ¿Cuál es la energía cinética mínima de (*a*) un electrón y (*b*) un protón restringidos a una región del espacio del tamaño de un núcleo (alrededor de 10^{-14} m? (*c*) Se sabe que las partículas dentro del núcleo atómico tienen energías de varios MeV y que la energía potencial atractiva entre un par de partículas nucleares es del mismo orden; ¿qué partículas (los electrones o los protones) se puden encontrar dentro del núcleo atómico?

37-19. La longitud de onda de un fotón se mide con una precisión de una parte en 10^8 ($\Delta\lambda/\lambda = 10^{-8}$). ¿Cuál es la incertidumbre Δx en la localización simultánea de (*a*) un fotón de luz visible de 6000-Å de longitud de onda, (*b*) un fotón de radio de 100 kHz de frecuencia, (*c*) un fotón de rayos x de 1.0-Å de longitud de onda y (*d*) un fotón de rayos γ de 12.4 GeV de energía?

37-20. Una partícula está restringida en una región que tiene las dimensiones del núcleo atómico (alrededor de 2×10^{-15} m). (*a*) Utilizar la relación de incertidumbre para calcular aproximadamente su ímpetu. (*b*) Si la energía cinética de la partícula es de unos cuantos MeV, ¿cuál es su masa en reposo? (*c*) ¿Qué partícula común cumple con los requisitos de las partes (*a*) y (*b*)?

37-21. ¿Cuál es la energía cinética mínima de un protón encerrado en un pozo potencial unidimensional de altura infinita de ancho 1.0 Å?

37-22. En el microscopio electrónico, el haz luminoso es reemplazado por un haz de electrones y las lentes refractoras se reemplazan por campos de enfoque eléctricos y magnéticos. La menor distancia que puede resolverse con cualquier microscopio en condiciones óptimas (su poder separador) es casi igual a la longitud de onda utilizada en el microscopio. (*a*) Un microscopio electrónico típico puede usar electrones de 50 keV; calcular la distancia mínima que puede resolverse en tal microscopio. (*b*) ¿Cuál es el factor por el que el poder separador real, que es de aproximadamente 20 Å, en microscopios electrónicos bien diseñados, sobrepasa al poder separador teórico (separación mínima entre dos objetos puntuales que sean distinguidos como dos objetos distintos) que está limitado por las propiedades ondulatorias de los electrones?

37-23. El poder separador teórico (ver el Prob. 37-22) de cualquier microscopio depende sólo de la longitud de onda utilizada. Supongamos que se desea estudiar un objeto que tiene una dimesión de 0.50 Å; ¿cuáles son la energía y el ímpetu mínimos si se utilizan (*a*) electrones y (*b*) fotones? (*c*) ¿Por qué un microscopio electrónico es preferible a un microscopio de rayos γ-?

37-24. (*a*) Una partícula de masa m está encerrada en una caja tridimensional de dimensiones a, b y c. Demostrar, imponiendo las condiciones en la frontera a la función de ondas en cada una de las tres dimensiones, que las energías permitidas de la partícula están dadas por

$$E = \left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\right)\left[\left(\frac{n_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{c}\right)^2\right]$$

en donde los números cuánticos n_1, n_2, n_3 pueden tomar los valores enteros 1,2,3, ... (*b*) Una bola de billar de masa m está encerrada en una caja bidimensional (una mesa de billar) de dimensiones L y W. ¿Cuáles son las energías permitidas de la bola de billar? (*c*) ¿Cuál es la energía cinética mínima de la bola de billar (de una bola de masa 0.14 kg en una mesa de 3.7 x 1.9 m)?

37-25. La Fig. 37-17 muestra una de las funciones de ondas permitidas en un pozo potencial escalonado unidimensional. La energía potencial en la izquierda es cero; en la derecha es V_r. La energía E de la función de ondas mostrada es $E = \frac{4}{3}V_r$. (*a*) Demostrar que la longitud de onda de la partícula en la derecha es el doble que en la izquierda. (*b*) ¿Por qué es que la amplitud de la función de ondas en la derecha es mayor que en la izquierda?

37-26. Un pequeño abalorio de masa m resbala en una varilla recta sin fricción, de longitud L, cuyos extremos están sujetos a objetos de masa infinita. ¿Cuáles son las energías permitidas del abalorio?

37-27. Un pequeño abalorio de masa m resbala libremente en un anillo circular de radio R. (*a*) ¿Cuáles son las energías permitidas del abalorio? (*b*) Cuáles son los ímpetus angulares permitidos?

37-28. Demostrar que en el límite (clásico) de números cuánticos muy grandes, la probabilidad de que una partícula se encuentre en un intervalo pequeño pero finito Δx en una caja unidimensional, es independiente de su posición en la caja. Este resultado concuerda con la predicción clásica de que la probabilidad de encontrar a una partícula que se mueve con rapidez constante en una caja unidimensional es la misma en todos los puntos.

37-29. (*a*) Utilizar el hecho de que la función de ondas de una partícula es ondulatoria en las regiones del espacio en las que su energía total es mayor que la energía potencial, aunque decae en aquellas regiones en las que $(E - V) < 0$ para dibujar las primeras funciones de onda de una partícula sometida a un potencial parabólico (de un oscilador armónico simple). (*b*) Dibujar la función de ondas de un estado altamente excitado utilizando el hecho de que la probabilidad, de la mecánica ondulatoria, de encontrar a la partícula en cuanquier punto en el espacio debe, en el límite de números cuánticos grandes, aproximarse bastante a la probabilidad clásica correspondiente.

37-30. Las energías permitidas en un oscilador armónico simple, cuya frecuencia de oscilación clásica es f, están dadas por $E_v = (v + \frac{1}{2})hf$, en donde el número cuántico vibracional v puede tomar los valores enteros $v = 0, 1, 2, \ldots$. Consecuentemente, la energía mínima de un oscilador armónico simple no es cero, sino $E_0 = \frac{1}{2}hf$, que es la llamada energía vibracional del punto cero. (*a*) ¿Cuál es la energía mínima de un péndulo simple con una masa de 1.0 kg y de 1.0 m de longitud? (*b*) ¿Cuál es el desplazamiento angular correspondiente de la cuerda a partir de la configuración de equilibrio (la vertical)?

37-31. Ver el Prob. 37-30. Demostrar que cuando ocurren las transiciones entre niveles de energía *adyacentes* en el oscilador armónico simple, los fotones emitidos tienen la misma frecuencia que la del oscilador clásico equivalente.

37-32. El ímpetu angular de un objeto, tal como el de una mancuerna que gira en torno a un eje perpendicular a la varilla, sin masa, que conecta a las dos masas, está dado por $L = [J(J + 1)]^{1/2}\hbar$, en donde el número cuántico rotacional J puede tomar los valores enteros $J = 0, 1, 2, \ldots$ y $\hbar$ representa a $h/2\pi$. La energía cinética rotacional de tal rotor está dada por $E_r = \frac{1}{2}I\omega^2 = (I\omega)^2/2I = L^2/2I$, en donde ω es la velocidad angular e I es el momento de inercia en torno al eje de rotación. (*a*) Demostrar que las energías permitidas del rotor están restringidas a los valores dados por $E_r = J(J + 1)\hbar^2/2I$. (*b*) ¿Cuál es la energía rotacional mínima de un rotor que consiste de dos masas de 10 g unidas a los extremos de una varilla de 10 cm de longitud cuando el eje de rotación es perpendicular al punto medio de la varilla?

37-33. La distancia interatómica en las moléculas diatómicas es típicamente del orden de varios Å. Utilizando los resultados del Prob. 37-32, demostrar que el espectro de líneas emitido, o absorbido, por las moléculas diatómicas que sufren transiciones cuánticas en sus estados rotacionales (*el espectro rotacional puro*) se encuentran en el infrarrojo alejado o en la región de microondas del espectro electromagnético. Las transiciones permitidas siguen una regla que consiste en que el número J sólo puede cambiar en *uno*.

37-34. La energía potencial atractiva entre una cierta sustancia sólida y los electrones que penetran en su superficie es de 10 eV. Supongamos que a la superficie de este sólido penetran electrones de 20 eV con un ángulo de incidencia (con respecto a la normal a la superficie) de 30°. (*a*) ¿Cuál es el ángulo de refracción de los electrones en el material?, (*b*) ¿cuál es la longitud de onda de los electrones dentro del material?

37-35. Según el Prob. 36-14, la longitud de onda de un fotón de energía E queda expresada por $\lambda = (0.0124 \text{ MeV-Å})/E$. Demostrar que esta misma relación sirve para encontrar la longitud de onda de una partícula cuya masa en reposo es diferente de cero, cuando la energía total de la partícula E excede en mucho a su energía en reposo E_0.

Capítulo

38

LA ESTRUCTURA ATOMICA

38—1 LA DISPERSION DE LAS PARTICULAS

La concepción moderna de la estructura de un átomo contempla los siguientes aspectos esenciales: Un *núcleo* que ocupa una región muy pequeña del espacio, en la que están concentradas la carga positiva y casi toda la masa del átomo, rodeado por electrones con carga negativa. Examinemos la evidencia de este concepto de la estructura atómica, que fue propuesto por primera vez por Ernest Rutherford en 1911.

Hacia finales del siglo XIX se sabía que la carga eléctrica negativa de un átomo era transportada por los electrones, cuya masa era una fracción pequeña de la masa total del átomo. Debido a la neutralidad eléctrica de los átomos como un todo, se sigue que si, se extrajeran los electrones de los átomos, lo que quedaría contendría toda la carga eléctrica positiva y esencialmente toda la masa. Entonces, la pregunta es, ¿"cómo están distribuidas la masa y la carga positiva en el volumen atómico"? Con base en todo un conjunto de experimentos, se sabe que los átomos tienen un "tamaño" (díametro) del orden de 1 Å, y debido a que la carga positiva y la masa están restringidas, cuando menos, a esta pequeña región, es imposible, mediante medidas directas, observar cualquier detalle de la estructura atómica. Se debe recurrir a una medición indirecta. Uno de los métodos más poderosos para estudiar la distribución de la materia o de la carga eléctrica, es el de la *dispersión* y fue mediante experimentos de dispersión de partículas, sugeridos por Rutherford, que se estableció la existencia de los núcleos atómicos.

Primero, consideremos un ejemplo simple de un experimento de dispersión. Supongamos que nos presentan una gran caja negra; se nos pide que, sin mirar en el interior para examinar su estructura interna, determinemos la forma en que la masa está

distribuida en el interior de la caja. Por ejemplo, la caja puede estar llena por completo con algun material de una densidad relativamente baja, tal como la madera, o puede estar llena sólo en parte con un material de alta densidad. Podemos utilizar un recurso muy simple para determinar cuál de estas dos posibilidades representa la ditribución verdadera del material en la caja: disparar balas a la caja para ver qué es lo que les ocurre. Si encontramos que las balas salen de la caja con una rapidez reducida, podríamos inferir que la caja está llena con un material que desvía muy poco a las balas a medida que éstas lo cruzan. Por otra parte, si encontramos algunas cuantas balas desviadas fuertemente de sus trayectorias originales, podríamos suponer que han chocado con objetos pequeños duros y masivos que se encuentran distribuidos en la caja. Nótese que *no* es necesario apuntar las balas; los disparos pueden hacerse al azar sobre el frente de la caja. Esta es la esencia de los experimentos de dispersión de partículas en la física atómica y nuclear.

Rutherford sugirió que la masa y la carga positiva de un átomo son esencialmente una carga puntual y una masa puntual, llamadas *núcleo*. También sugirió que su hipótesis podría corroborarse disparando partículas de alta velocidad con carga positiva (las balas) a través de una lámina metálica delgada (la caja negra) y examinando la distribución de las partículas dispersadas. En el tiempo en que Rutherford hizo esta sugerencia, las únicas partículas cargadas disponibles y aceptables eran las partículas α (cuyas energías eran de varios millones de electron-volts) de materiales radiactivos. Rutherford había demostrado que una partícula α es un átomo de helio doblemente ionizado; por lo tanto, tiene una carga eléctrica positiva que es dos veces la magnitud de la carga del electrón y una masa que es varios miles de veces mayor que la masa del electrón, pero considerablemente menor que la masa de átomos tan pesados como el oro. Para confirmar la hipótesis nuclear de Rutherford, H. Geiger y E. Marsden, en 1913 dispersaron partículas α en láminas delgadas de oro.

Las partes esenciales del aparato de dispersión se muestran en la Fig. 38-1. Un haz colimado de partículas incide en una lámina delgada del material dispersor y un detector, que puede girar, cuenta el número de partículas dispersadas a un ángulo de dispersión θ con respecto a la dirección de incidencia. El experimento consiste en la medida del número relativo de partículas dispersadas a diferentes ángulos de dispersión θ.

Considérense las trayectorias de las partículas α que cruzan el interior de la lámina dispersora. Podemos desechar, por no tener consecuencias, cualquiera de los encuentros de la partícula α con los electrones del material, debido a que, como la masa de la partícula α es mucho mayor que la del electrón, la partícula casi no se desvía en la colisión y sólo se transfiere una fracción insignificante de su energía al electrón. Por lo tanto, las partículas

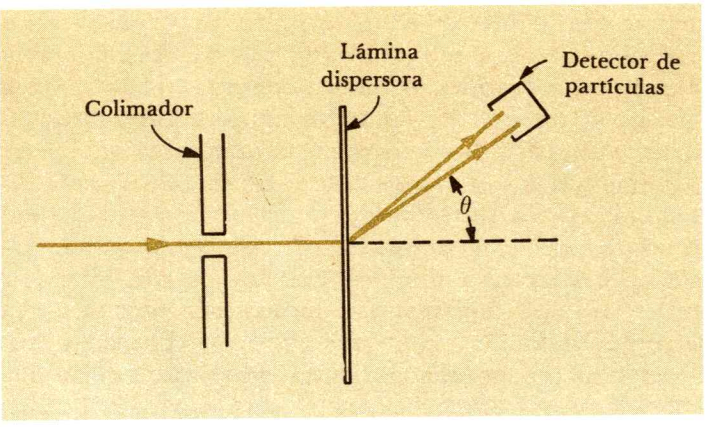


FIG. 38-1. Disposición de un experimento de dispersión simple: colimador, lámina dispersora y detector.

α se devían y dispersan apreciablemente sólo por los encuentros cercanos con el núcleo. La masa del núcleo del átomo de oro es mucho mayor (50 veces) que la de la partícula α; por consiguiente, en la colisión el núcleo casi no recula y se puede suponer que permanece en reposo. Como las partículas α y el núcleo tienen carga positiva, se repelen entre sí. Rutherford supuso que la *única* fuerza que actúa entre el núcleo y la partícula α, considerados ambos como cargas puntuales, era la fuerza electrostática coulombiana. Como ya sabemos, esa fuerza varía inversamente con el cuadrado de la distancia entre las cargas; por lo tanto, aunque nunca es cero (excepto para una distancia de separación infinita entre las cargas), la partícula es actuada por una fuerza repulsiva *fuerte* sólo cuando se acerca suficientemente al núcleo.

La Fig. 38-2 muestra un cierto número de trayectorias de partículas α a medida que se mueven a través del interior de la lámina dispersora. La mayoría de las partículas pasan a través de ella sufriendo una desviación muy pequeña con respecto a su trayectoria original; la posibilidad de un encuentro cercano con un núcleo o centro dispersor, es bastante remota. Pero las pocas partículas α que sufren una colisión casi frontal se desvían a

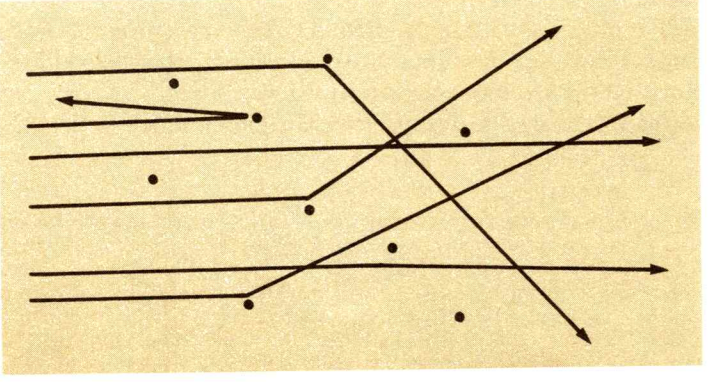


FIG. 38-2. La dispersión de partículas α por un núcleo de material (el número de partículas dispersadas a ángulos medibles se ha exagerado mucho).

ángulos considerables y aquellas, extremadamente raras, que tienen una colisión frontal se desvían 180°; esto es, llegan por un momento al reposo y después regresan por sus trayectorias de incidencia. Cuando los núcleos se consideran como cargas *puntuales*, la mayoría de las partículas incidentes se desvían muy poco; sin embargo, un número significativo de ellas se deflectan a grandes ángulos. (Si la carga positiva estuviera distribuida uniformemente en el átomo, en vez de estar concentrada en el núcleo, casi no habría partículas que se desviaran a ángulos grandes.) La hipótesis nuclear de Rutherford fue confirmada en los experimentos de Geiger y Marsden en el hecho de que la distribución medida de las partículas α, dispersadas concordaba con la distribución predicha bajo la suposición de que la dispersión era producida por una fuerza coulombiana debida a cargas puntuales, y en la que el número de partículas dispersadas variaba con el ángulo de dispersión θ según la expresión $1/\text{sen}^4(\theta/2)$.* Se confirmó la teoría de Rutherford para diferentes valores de la energía de las partículas α, diferentes materiales y diferentes espesores de las láminas.

38—2 EL ESPECTRO DEL HIDROGENO

El sistema atómico más simple es el hidrógeno; es un átomo que consiste de sólo dos partículas: un electrón y un protón, mucho más masivo, que es el núcleo, y que interactúan con una fuerza atractiva de tipo coulombiano. Por lo tanto, la descripción teórica de la estructura atómica se ha concentrado primero en el hidrógeno y en su comportamiento observado a través de la radiación electromagnética que emite y que absorbe.

Para poder observar el espectro de los átomos de hidrógeno aislados, es necesario utilizar hidrógeno atómico gaseoso, porque en él, los átomos se encuentran tan separados que cada uno actúa como un sistema aislado (el hidrógeno molecular H_2 y el hidrógeno sólido irradian espectros que reflejan algunos aspectos de los átomos de hidrógenos unidos). El espectro visible emitido por el hidrógeno puede estudiarse por un espectrómetro de prisma, o se puede utilizar una rejilla de difracción en vez del prisma para dispersar a la radiación. El gas hidrógeno se excita mediante una descarga eléctrica o mediante un calentamiento extremo y emite radiación. La radiación dispersada, separada en sus diferentes componentes de frecuencia, incide sobre una pantalla o sobre una placa fotográfica, haciendo posible la medida de las frecuencias y de las intensidades del *espectro de emisión*.

---

*Como, desde el punto de vista de la teoría cuántica, un haz de partículas monoenergéticas es, en efecto, un haz de ondas monocromáticas (Sec. 37-2), el proceso de dispersión consiste de la difracción de las ondas incidentes por los centros dispersores. Resulta un hecho notable que el tratamiento de la mecánica ondulatoria de la dispersión por una fuerza que varía inversamente con el cuadrado de la distancia conduzca justo al mismo resultado que el obtenido por un análisis estrictamente clásico. Sin embargo, en otro tipo de fuerzas los resultados clásicos y de la mécanica cuántica difieren.

Cualquier instrumento que disperse y mida las diferentes longitudes de onda en un haz de radiación electromagnética se llama *espectrómetro*. Un instrumento que dispersa la luz y fotografía el espectro se conoce como *espectrógrafo;* un instrumento que haga visible el espectro se llama *espectroscopio*. Los espectrómetros se diseñan para estudiar cada una de las diferentes regiones del espectro electromagnético, tales como la radiofrecuencia, los rayos X y los rayos gamma. La rama de la física que trata con el estudio de la radiación electromagnética emitida o absorbida por sustancias se llama *espectroscopía*. La espectroscopia representa un método poderoso para obtener información de la estructura atómica o molecular; se caracteriza por la muy alta precisión (las frecuencias y las longitudes de onda se miden hasta en una parte de diez millones) y por una gran sensibilidad (se obtiene emisión o absorción de muestras tan pequeñas como de fracciones de microgramo).

El espectro emitido por el hidrógeno atómico consiste de un conjunto de líneas brillantes, discretas, bien definidas, en un fondo oscuro. De hecho, el espectro de todos los elementos químicos en forma gaseosa monoatómica está compuesto por este tipo de líneas brillantes y cada espectro es característico de un elemento particular. El espectro se conoce con el nombre de *espectro de líneas. El espectro de emisión* del hidrógeno atómico resulta, entonces, en un espectro de líneas brillantes característico del hidrógeno. Como cada elemento químico tiene su propio espectro de líneas característico, la espectroscopia es un método particulamente sensible para identificar a los elementos.

En la Fig. 38-3 se muestra el espectro de líneas del hidrógeno atómico en la región visible. Las líneas se denotan por H_α, H_β, etc., en el orden en que aumenta la frecuencia y disminuye la longitud de onda. Comúnmente, la línea H_α es más intensa que la H_β, que a su vez es más intensa que la H_γ, y así sucesivamente. El espaciamiento entre líneas adyacentes se hace menor a medida que aumenta la frecuencia y las líneas discretas se aproximan al *límite de la serie,* por encima del cual aparece un espectro continuo débil. Este conjunto de líneas del hidrógeno que aparece en la región visible del espectro electromagnético, se conoce como la *serie de Balmer,* porque en 1855 J.J. Balmer encontró una fórmula empírica simple a partir de la cual se podían calcular todas las longitudes de onda observadas en el grupo. La fórmula de Balmer, que da la longitud de onda λ de todas las líneas espectrales en la serie puede escribirse como

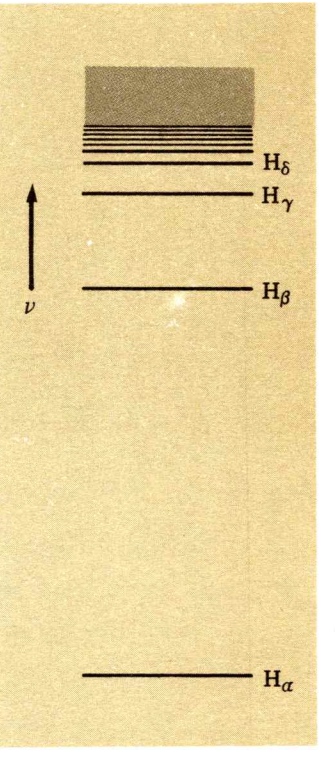


FIG. 38-3. Distribución de frecuencias de la radiación del hidrógeno atómico en la región visible. Este grupo particular de líneas es la serie de Balmer.

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (38\text{-}1)$$

en donde

$$R = 1.0967758 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \approx 1.0968 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}$$

y n es un entero que tiene los valores 3, 4, 5, ...

Haciendo $n = 3$ en esta fórmula se obtiene $\lambda = 6564.7$ Å, que corresponde a la línea H_α; en forma semejante, haciendo $n = 4$ se obtiene $\lambda = 4862.7$ Å, que corresponde a la línea H_β, y así sucesivamente hasta llegar al límite de la serie ($n = \infty$). La constante R se conoce como la *constante de Rydberg;* su valor se ajusta por ensayos para que se obtenga el mejor valor de las longitudes de onda medidas. En la espectroscopia atómica las líneas espectrales típicas se especifican mediante su longitud de onda, y no mediante su frecuencia, debido a que lo que se mide es la longitud de onda.

Además de la serie de Balmer de la región visible, el hidrógeno emite una serie de líneas en la región ultravioleta y varias series de líneas en el infrarrojo. Cada serie se puede representar por una fórmula semejante a la ecuación de Balmer. De hecho, se puede escribir una fórmula general a partir de la cual pueden calcularse *todas* las líneas espectrales del hidrógeno. Se conoce como la *ecuación de Rydberg* y se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_n^2}\right) \tag{38-2}$$

en donde

$n_l = 1$ y $n_u = 2, 3, 4, \ldots$		Serie Lyman, región ultravioleta
$n_l = 2$ y $n_u = 3, 4, 5, \ldots$		Serie de Balmer, región visible
$n_l = 3$ y $n_u = 4, 5, 6, \ldots$		Serie de Paschen, región infrarroja

y así sucesivamente hasta llegar a series que se encuentran en el infrarrojo alejado. El valor de la constante de Rydberg en esta ecuación es *precisamente* el mismo valor que el de la Ec. (38-1); de hecho, la Ec. (38-2) se transforma en la (38-1) cuando n_l se hace igual a 2. La forma de escoger la u y la l en los subíndices de los enteros de la fórmula de Rydberg se aclarará en la Sec. 38-3. Las diferentes series de líneas del hidrógeno reciben el nombre de sus descubridores. Aunque la fórmula tiene un éxito admirable al resumir las longitudes de onda emitidas por el hidrógeno atómico, debe reconocerse que es sólo una relación empírica, que no proporciona, por sí misma, información sobre la estructura del hidrógeno. Por otra parte, una teoría verdaderamente exitosa del átomo de hidrógeno debe ser capaz de predecir las líneas espectrales; esto es, la fórmula de Rydberg debe obtenerse como un resultado.

Hemos estado relacionados con el espectro dado por el hidrógeno cuando se excita mediante una descarga eléctrica o mediante un calentamiento excesivo. Por sí mismo, el hidrógeno atómico a temperatura ambiente *no* emite, en forma apreciable, radiación electromagnética; pero a la temperatura ambiente puede absor-

berse selectivamente a la radiación electromagnética, obteniéndose un *espectro de absorción*. El espectro de absorción del hidrógeno atómico se observa cuando un haz de luz blanca (en el que existen todas las frecuencias) pasa a través de un gas de hidrógeno atómico y se examina, en un espectrómetro, el espectro de la luz transmitida. Lo que se encuentra es una serie de líneas oscuras superpuestas en el espectro de la luz blanca; se conoce con el nombre de *espectro de líneas oscuras*. El gas es transparente a las ondas de todas las frecuencias, excepto aquellas que corresponden a las líneas oscuras, para el cual es opaco; esto es, los átomos absorben a las ondas que tienen ciertas frecuencias discretas, bien definidas, a partir del continuo de ondas que pasa a través del gas. La energía absorbida es irradiada de inmediato por el átomo excitado en *todas las direcciones* y no sólo en la dirección de incidencia. Las líneas oscuras en el espectro de absorción del hidrógeno tienen precisamente las mismas frecuencias que las de las líneas brillantes en el espectro de emisión, como se muestra de manera equemática en la Fig. 38-4, en donde la intensidad se grafica como función de la frecuencia. El hidrógeno es un emisor de radiación electromagnética sólo en aquellas frecuencias específicas o longitudes de onda, dadas por la fórmula de Rydberg; es un absorbedor de radiación sólo para estas mismas frecuencias.

Lo que se ha discutido en relación con los espectros de emisión y de absorción del hidrógeno atómico se mantiene también para los espectros de líneas de todos los elementos. Cuando los átomos irradian energía, se emite un conjunto característico de frecuencias; el mismo conjunto de frecuencias se absorbe en los átomos cuando a través del gas pasa una banda continua de frecuencias de radiación electromagnética.

El espectro observado del hidrógeno no puede explicarse en base a la mecánica y al electromagnetismo clásicos. Si el átomo de hidrógeno fuera tan sólo, un sistema solar en miniatura, con el electrón orbitando en torno al núcleo en la misma forma que un planeta lo hace en torno al Sol, entonces el electrón cargado

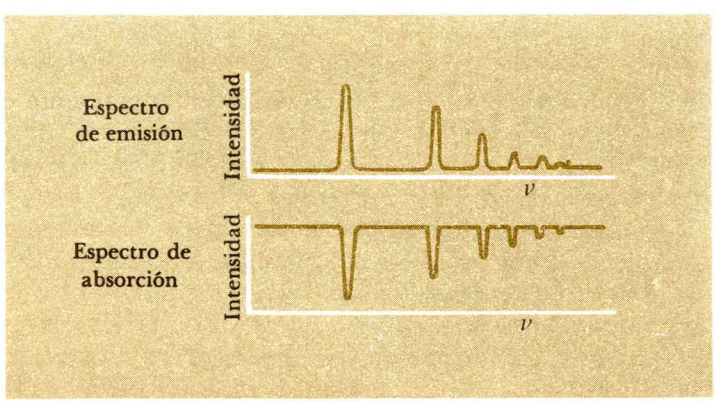


FIG. 38-4. Variación de la intensidad con la frecuencia en los espectros de emisión y de absorción del hidrógeno.

eléctricamente, al estar en aceleración continua, radiaría en forma continua (Sec. 30-6) con su frecuencia orbital. Pero si el átomo pierde energía continuamente por la emisión de radiación, la energía total del átomo debe disminuir en forma continua, y el electrón giraría en torno al núcleo en órbitas cada vez más grandes; en otras palabras, el átomo colapsaría rápidamente después de irradiar un espectro continuo.

Que la física clásica resulta impotente para explicar la estructura atómica también es obvio de las consideraciones del carácter ondulatorio de los electrones. Cierta evidencia demuestra que el "tamaño" del átomo de hidrógeno es de alrededor de 1 Å. Pero en la Sec. 37-7 vimos que un electrón restringido a tales dimensiones tiene una energía cinética mínima de unos cuantos electron-volts. Si se quisiera localizar al electrón *dentro* de un átomo, (esto es, restringido a una región del espacio bastante menor que 1 Å) su energía cinética, debido al principio de incertidumbre, sería necesariamente mucho mayor que algunos cuantos electron-volts. Sin embargo, la evidencia experimental indica que las energías atómicas son del orden de unos cuantos electron- volts, que es la energía cinética que debería tener un electrón en un átomo como el de hidrógeno. En resumen, es de esperarse que sólo el tratamiento cuántico de la estructura atómica, que toma en cuenta la naturaleza ondulatoria de las partículas, esté de acuerdo con las observaciones.

38—3 LA TEORIA DE BOHR DEL ATOMO DE HIDROGENO

La primera teoría cuántica del átomo de hidrógeno fue desarrollada en 1913 por Niels Bohr, que era un estudiante de Rutherford. Ya se había establecido la naturaleza fotónica de la radiación electromagnética, pero los aspectos ondulatorios de las partículas materiales no se reconocerían hasta 1924. El modelo de Bohr del átomo fue el primer paso dado hacia un tratamiento eficaz de la mecánica ondulatoria a la estructura atómica. Sin embargo, debe comprenderse desde el principio que la teoría de Bohr tiene una aplicación limitada. Retiene suficientes aspectos clásicos en la estructura atómica como para visualizarse rápidamente en términos de un modelo corpuscular e introduce suficientes aspectos cuánticos como para hacer una descripción precisa de la estructura atómica del hidrógeno. Por lo tanto, la teoría de Bohr es una transición entre la mecánica clásica y la mecánica ondulatoria, desarrollada durante la década de 1920.

Al igual que en un modelo estrictamente clásico del hidrógeno, la teoría de Bohr supone que el protón se encuentra en reposo y que el electrón se mueve en una órbita circular en torno a él. La fuerza que mantiene al electrón en su órbita es la fuerza electrostática atractiva de Coulomb entre el electrón y el protón. Para un electrón de masa m y carga e que se mueve con una rapidez v en

una órbita de radio r en torno al núcleo, que también tiene una carga e y una masa efectivamente infinita, se tiene, de la segunda ley de Newton

$$F = ma$$

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \tag{38-3}$$

en donde k es la constante de la ley de Coulomb.

La energía total E del átomo es la suma de la energía cinética del electrón y de la energía potencial del sistema

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{ke^2}{r}$$

Utilizando (38-3) en la ecuación anterior, podemos escribir la energía total como

$$E = \frac{\frac{1}{2}ke^2}{r} - \frac{ke^2}{r}$$

$$E = -\frac{ke^2}{2r} \tag{38-4}$$

La energía total del sistema de dos partículas es negativa cuando las dos partículas están ligadas. Cuando el radio del electrón orbital se hace infinito y el átomo se disocia en dos partículas separadas, $E = 0$. Como se ha medido que la energía de ionización del átomo de hidrógeno es 13.6 eV, la energía total del átomo de hidrógeno en su estado normal es $E = -13.6$ eV. Sustituyendo este valor en la Ec. (38-4) se obtiene $r = 0.53$ Å.

Una forma de imponer las condiciones cuánticas en las energías permitidas y, por lo tanto, en los radios electrónicos permitidos, es utilizar la regla de que el ímpetu angular orbital del electrón, a medida que orbita en torno al núcleo, es un múltiplo entero de la constante de Planck h dividido entre 2π. Como el ímpetu angular de una partícula con un ímpetu lineal mv en una órbita circular de radio r es mvr (Sec. 11-3), la regla de cuantización del ímpetu angular puede escribirse como

$$mvr = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar \tag{38-5}$$

en donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $\hbar$, que se llama "hache barra", representa a $h/2\pi$. La Ec. (38-5) implica que sólo están permitidas aquellas órbitas electrónicas para las cuales el ímpetu angular es un múltiplo entero de $\hbar$. Más aún, debemos suponer que, independientemente del electromagnetismo clásico, el electrón en tal estado estacionario, estable, permitido, *no* emite radiación electromagnética.

La Ec. (38-5) puede ponerse en una forma diferente, que conduce a una interpretación simple de las órbitas electrónicas permitidas. Se tiene que

$$n\frac{h}{mv} = 2\pi r$$

La cantidad h/mv es la longitud de onda de de Broglie λ del electrón, de tal forma que la ecuación anterior puede escribirse como

$$n\lambda = 2\pi r \tag{38-6}$$

La Ec. (38-6) implica que al recorrer la distancia $2\pi r$ alrededor de la circunferencia de la órbita electrónica circular, deben ajustarse un número entero $n\lambda$ de longitudes de onda del electrón; esto es, el estado permitido es aquél en el que un electrón, considerado como una onda ajustada en torno a un círculo completo, no se cancela a sí misma mediante interferencia destructiva. Sin embargo, este último enunciado es físicamente incorrecto, debido a que no se puede considerar que un electrón que rodea al núcleo de un átomo se encuentra en una órbita circular bien definida. El electrón se extiende en tres dimensiones. Por lo tanto, se debe considerar a la Ec. (38-6) como una regla mnemotécnica y no como una aplicación rigurosa de la mecánica cuántica.

Al considerar a la Ec. (38-5), o su equivalente, la Ec. (38-6), como la regla de los estados estacionarios permitidos del átomo de hidrógeno, se pueden encontrar los radios orbitales permitidos y, de la Ec. (38-4), las energías permitidas*. Despejando a v en la Ec. (38-5) y sustituyéndola en la Ec. (38-3), obtenemos

$$m\left(\frac{n\hbar}{mr_n}\right)^2 = \frac{ke^2}{r_n} \tag{38-7}$$

en donde se ha añadido el subíndice n al radio r para indicar que el valor de r_n depende del número cuántico $n = 1, 2, 3, \ldots$

Resolviendo la Ec. (38-7) para r_n obtenemos

---

*En la teoría original del hidrógeno, Bohr no usó las reglas de cuantización del ímpetu angular ni las ondas que contienen un número entero de ondas de de Broglie en el recorrido de la circunferencia. En vez de esto, su argumentación estaba basada en el *principio de correspondencia*: cualquier teoría nueva (más general) en la física, debe conducir a los mismos resultados que los obtenidos en la teoría bien establecida (menos general) cuando la teoría más general se aplica bajo la circunstancia para la cual se sabe que es válida la teoría menos general; o, cuando las circunstancias corresponden, los resultados también corresponden. Aplicado a la teoría cuántica, el principio de correspondencia implica que la teoría cuántica debe conducir a los mismos resultados que la física clásica cuando la teoría cuántica se aplica a los fenómenos macroscópicos. En forma más específica, aplicada a la estructura del átomo de hidrógeno, el principio de correspondencia requiere que la frecuencia del fotón emitido en la transición cuántica, para valores muy grandes del número cuántico n (para el cual el radio orbital se aproxima al tamaño macroscópico) debe ser igual que la frecuencia clásica con la que el electrón orbita al núcleo. (Ver el Prob. 38-16.)

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{kme^2} \tag{38-8}$$

El más pequeño de los radios permitidos, el llamado radio de la primera órbita de Bohr, está dado por

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0.529 \text{ Å} \tag{38-9}$$

en el que se han usado los valores de las constantes conocidas. El modelo de Bohr predice, entonces, que el tamaño del átomo de hidrógeno con la órbita estacionaria más pequeña es del orden de 1 Å, que está en concordancia con las determinaciones experimentales. Podemos expresar a todos los radios permitidos en una forma simple sustituyendo la Ec. (38-9) en la Ec. (38-8):

$$r_n = n^2 r_1 \tag{38-10}$$

Los radios de las órbitas estacionarias son, por lo tanto, r_1, $4r_1$, $9r_1$, ...

Los valores permitidos de la energía total (excluyendo las energías en reposo del protón y del electrón) del átomo de hidrógeno pueden determinarse fácilmente de las Ecs. (38-4) y (38-10).

$$E_n = -\frac{ke^2}{2r_n} = -\frac{1}{n^2}\frac{ke^2}{2r_1} \tag{38-11}$$

Si representamos a la cantidad $ke^2/2r_1$ por E_I, esta ecuación se transforma en

$$E_n = -\frac{E_I}{n^2} \tag{38-12}$$

Por lo tanto, las únicas energías posibles del sistema ligado del electrón y del protón que constituyen al átomo de hidrógeno, son $-E_I$, $-E_I/4$, $-E_I/9$, ... Las energías permitidas son discretas y, por lo tanto, *la energía está cuantizada*. La menor energía (esto es, la más negativa de las energías), corresponde al estado en el que el número cuántico principal n es igual a 1, llamado el *estado básico*. En el estado básico, la energía es $E_1 = -E_I$ y su valor, calculado de las Ecs. (38-11) y (38-9), es

$$E_n = -\frac{k^2e^4m}{2n^2\hbar^2} \tag{38-13}$$

$$E_1 = -E_I = -13.60 \text{ eV} \tag{38-14}$$

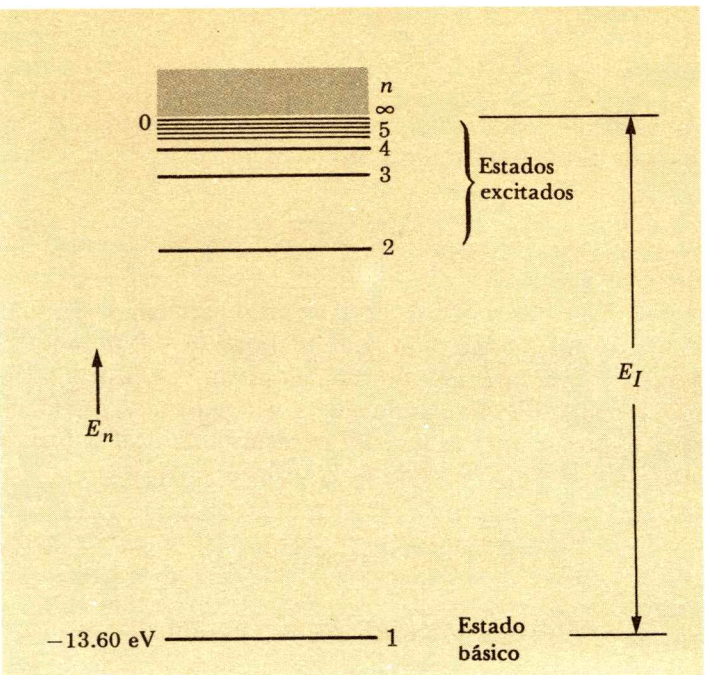


FIG. 38-5. Diagrama de niveles de energía del átomo de hidrógeno.

La Fig. 38-5 muestra un diagrama de los niveles de energía del hidrógeno. Notamos, de la Ec. (38-12), que para los estados ligados, E es menor que cero y sólo están permitidas energías discretas. A medida que n tiende a infinito, la diferencia de energías entre dos niveles energéticos adyacentes se aproxima a cero. Cuando n es igual a infinito, E_n es igual a cero y el átomo de hidrógeno puede disociarse en un eléctrón y un protón separados una distancia infinita y ambos en reposo. En esta condición se dice que el átomo está ionizado y la energía que se le debe suministrar, cuando se encuentra en su estado más bajo, o básico ($n = 1$), para que su energía sea $E_n = 0$, es justo E_I, que recibe el nombre de energía de ionización. El valor predicho por la teoría de Bohr, $E_I = 13.60$ eV, concuerda perfectamente con el valor obtenido en los experimentos. Cuando la energía total del sistema es positiva y el electrón y el protón se encuentran desligados, *todas* las energías posibles están permitidas y hay un continuo de niveles de energía para $E > 0$.

Cada una de las energías permitidas, o cuantizadas, de la Fig. 38-5 corresponde a un estado estacionario en el que el átomo puede existir sin irradiar. Los estados estacionarios por encima del estado básico ($n = 2, 3, 4, \ldots$) se llaman *estados excitados;* un átomo en uno de estos estados tiende a realizar una transición a uno de los estados estacionarios inferiores. En la transición hacia abajo, el electrón brinca súbitamente de una órbita a una órbita menor. Cuando el átomo se encuentra en un estado excitado y tiene una

energía E_n, la cantidad de energía por la que este estado excede a la energía del estado básico se llama *energía de excitación.* El término *energía de amarre* denota a la energía que se debe suministrar al átomo, en cualquier estado, para librar a las partículas ligadas y, por lo tanto, hacer que $E_n = 0$.

Consideremos a un átomo que se encuentra en un estado excitado superior con una energía E_u, y que realiza una transición a un estado inferior E_l. Cuando ocurre la transición, el átomo pierde una cantidad de energía $E_u - E_l$. Bohr supuso que en esta transición el átomo crea y emite un solo fotón de energía $h\nu$. Por la conservación de la energía

$$h\nu = E_u - E_l \tag{38-15}$$

Aunque la teoría de Bohr incorpora la naturaleza corpuscular de la radiación electromagnética, suponiendo que se crea un solo fotón cuando un átomo realiza una transición a un nivel inferior, no especifica los detalles del brinco cuántico del electrón o de la creación del fotón. La situación es semejante a la de la interacción entre un electrón y un fotón (efecto fotoeléctrico, efecto Compton, etc.) en el hecho de que no se trata de especificar los detalles de la interacción, sino que se aplican las leyes de la conservación a los estados anterior y posterior a la interacción.

Calculemos las frecuencias y las longitudes de onda de los fotones que, según el modelo de Bohr, puede emitir un átomo de hidrógeno. Utilizando las Ecs. (38-15) y (38-12) se tiene

$$\nu = \frac{E_u - E_l}{h} = \left(\frac{-E_I}{n_u^2 h}\right) - \left(\frac{-E_I}{n_l^2 h}\right) = \frac{E_I}{h}\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2}\right) \tag{38-16}$$

en donde n_u y n_l son los números cuánticos de los estados energéticos superior e inferior. Las longitudes de onda $\lambda = c/\nu$ de los fotones emitidos pueden expresarse como

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_I}{hc}\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2}\right)$$

Esta ecuación tiene la misma forma matemática que la fórmula empírica obtenida por Rydberg

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_u^2}\right) \tag{38-2}$$

Comparando estas dos escuaciones, podemos calcular la constante de Rydberg R de las constantes atómicas conocidas y podemos compararla con el valor determinado experimentalmente, que es de 1.0968×10^{-3} Å^{-1} en el caso del hidrógeno

$$R = \frac{E_I}{hc} = \frac{k^2 e^4 m}{4\pi\hbar^3 c} \tag{38-17}$$

Para obtener el último término de esta ecuación hemos utilizado las Ecs. (38-9) y (38-11). Especificando los valores conocidos de las constantes físicas en esta ecuación, se calcula el valor de R y se obtiene 1.0974×10^{-3} Å^{-1}, que concuerda bastante bien con el valor espectroscópico experimental. Por lo tanto, la fórmula de Rydberg, que resume los aspectos del espectro de emisión y de absorción del hidrógeno, se sigue como una *consecuencia necesaria* del modelo atómico de Bohr.

Las líneas espectrales observadas del hidrógeno pueden interpretarse, ahora, en términos del diagrama de los niveles de energía de la Fig. 38-6. Las líneas verticales representan a las transiciones entre los estados estacionarios, las longitudes de estas líneas resultan proporcionales a las correspondientes energías de los fotones y, por lo tanto, a las frecuencias. Las líneas de la serie de Lyman corresponden a aquellos fotones que se producen cuando los átomos de hidrógeno en cualquiera de los estados excitados sufren transiciones al estado básico ($n_l = 1$). Las transiciones de los estados no ligados ($E > 0$) al estado básico explican el espectro continuo

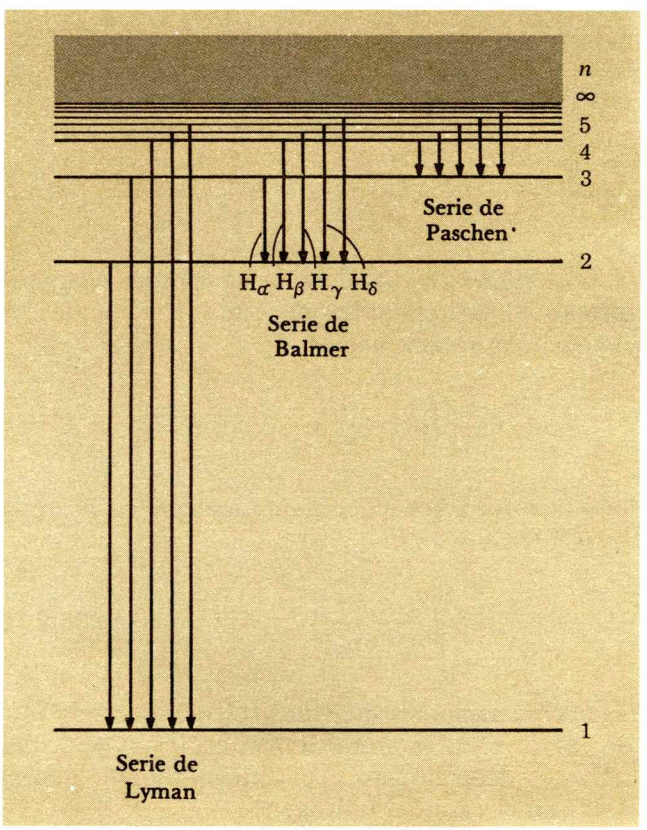


FIG. 38-6. Algunas transiciones energéticas posibles en el hidrógeno atómico.

observado más allá del límite de la serie. En forma análoga, se puede explicar la serie de Balmer, que se produce por las transiciones de los estados excitados al primer estado excitado ($n_l = 2$). Las siguientes series de emisión incluyen transiciones a los estados caracterizados por $n_l = 3$, $n_l = 4$, etc., y estas series se encuentran, progresivamente, en la región de longitud de onda cada vez mayor.

Hemos examinado la emisión de un solo átomo de hidrógeno. Un átomo puede existir sólo en *uno* de sus estados de energía cuantizados en un instante dado; cuando realiza una transición de un estado a otro estado inferior emite un *solo* fotón. Cuando el espectro de emisión completo de un gas de hidrógeno excitado, que es una colección muy grande de átomos de hidrógeno, se observa en el espectroscopio, vemos simultáneamente la emisión de muchos fotones producidos por transiciones a estados más bajos de cada uno de los estados excitados. Por lo tanto, para observar el espectro de emisión completo, se debe contar con un número muy grande de átomos de hidrógeno en cada uno de los estados excitados, y que sufren transiciones hacia estados más bajos.

Ahora contamos con una base para entender el espectro de absorción característico. Cuando la luz blanca pasa a través del gas, aquellos fotones que tienen la energía particular igual a la diferencia de energías entre los estados estacionarios son absorbidos del haz. Se aniquilan, cediendo su energía a la energía de excitación interna de los átomos. El mismo conjunto de niveles de energía cuantizados participa tanto en la emisión como en la absorción; por esta razón, las frecuencias de las líneas de emisión y de absorción son idénticas (debido a que los átomos permanecen en sus estados excitados sólo por un tiempo muy corto, la única serie observada en la absorción es la de Lyman).

Utilizamos implícitamente los postulados fundamentales de la teoría de Bohr al desarrollar el modelo del átomo de hidrógeno. Sin embargo, conviene mencionarlos de manera explícita, ya que sus formas se conservan en los tratamientos de la mecánica cuántica (más completos) de la estructura atómica:

1. *Un sistema atómico ligado puede existir sin emitir radiación solamente en ciertos estados estacionarios.*
2. *Los estados estacionarios son aquellos en los cuales el ímpetu angular orbital mvr, del átomo es un múltiplo entero de $\hbar$. (Esta cuantización del ímpetu angular puede relacionarse con las propiedades ondulatorias del electrón restringido a una órbita circular semiclásica).*
3. *Cuando un átomo sufre una transición de un estado energético superior E_u a un estado energético inferior E_l, se emite un fotón de energía $h\nu$, y la conservación de la energía requiere que $h\nu$ sea igual a $E_u - E_l$; si se absorbe un fotón, el átomo sufre una transición de un estado energético inferior a uno superior según la misma relación.*

38—4 LOS CUATRO NUMEROS CUANTICOS DE LA ESTRUCTURA ATOMICA

La teoría de Bohr del hidrógeno, aunque incorpora los aspectos cuánticos básicos, sólo es aproximadamente correcta. Predice las energías permitidas del átomo de hidrógeno y del espectro del hidrógeno en forma satisfactoria, pero no establece la relación cuántica correcta de los valores permitidos del ímpetu angular, no puede explicar las líneas ligeramente espaciadas (o estructura fina) observadas en el espectro y no puede explicar en forma satisfactoria la estructura y el espectro de los átomos de más de un electrón. Más aún, considera al electrón como una partícula semiclásica que se mueve en órbitas clásicas bien definidas y no como una onda que se extiende en el espacio tridimensional.

El hacer un análisis satisfactorio en la mecánica ondulatoria del átomo de hidrógeno requiere, como mínimo, encontrar las funciones de ondas permitidas y las energías correspondientes mediante la obtención de las soluciones completas de la ecuación ondulatoria de Schrödinger de una partícula (el electrón) sujeta a una fuerza coulombiana atractiva que varía inversamente con el cuadrado de la distancia, a partir de un centro de fuerza fijo (el núcleo). El análisis matemático es complicado y no se hará en este texto. Se indicarán, en una forma que admitimos aproximada y cualitativa, los principales resultados, en particular en su relación con los cuatro números cuánticos que caracterizan la estructura atómica.

Recordemos primero que en la solución de la mecánica ondulatoria al problema de una partícula restringida en un pozo potencial unidimensional (Sec. 37-7) se obtenía un solo número cuántico, que especificaba las funciones de onda y las energías permitidas y, de hecho, también especificaba el número de segmentos de media longitud de onda que podían ajustarse en las fronteras del pozo potencial. En este sentido, el problema era completamente análogo al de una onda en una cuerda sujeta por sus dos extremos. Los patrones de onda permitidos, que son las ondas estacionarias permitidas, son aquellos para los cuales se puede ajustar un número entero de medias longitudes de onda entre las fronteras reflectoras (Sec. 15-5).

Si una onda está restringida a dos dimensiones (por ejemplo, las ondas en el agua en la superficie de una piscina) existen dos enteros característicos, o números cuánticos, que describen los patrones ondulatorios permitidos. Sin embargo, los patrones ondulatorios permitidos son aquellos correspondientes a las ondas estacionarias que son consistentes con las condiciones en las fronteras de las orillas de la región en la cual se extienden las ondas. En una piscina rectangular existen dos números cuánticos que indican, respectivamente, el número de medias longitudes de onda que pueden ajustarse a lo largo de la longitud y del ancho de la piscina. En una piscina circular también existen dos números

cuánticos, uno de los cuales indica el número de medias longitudes de onda que se pueden ajustar en la dirección radial y del centro a la orilla y el otro está relacionado con los ceros de la función de ondas que pueden ocurrir en torno a un círculo.

En un pozo potencial tridimensional (por ejemplo, las ondas de sonido atrapadas en un paralelepípedo rectángulo, que se reflejan de los tres conjuntos de paredes paralelas) ocurren tres números característicos, cada uno de los cuales describe, en efecto, el número de medias longitudes de onda que pueden ajustarse a lo largo de las tres dimensiones. En general, la cantidad de números cuánticos característicos de una onda restringida por un pozo de potencial es igual al número de dimensiones del pozo.

Esto es lo que ocurre en el electrón del átomo de hidrógeno. En este caso tenemos una partícula en un pozo potencial tridimensional. La función de energía potencial $V = -ke^2/r$, depende de la distancia de separación r entre el electrón y el núcleo. Aunque la función de ondas del electrón puede extenderse distancias infinitas, debe ser cero en el origen. Como la energía potencial depende de la distancia hasta el centro de fuerza, la longitud de onda del electrón también dependerá de ella. De hecho, a medida que r aumenta, y por lo tanto V aumenta (se hace menos negativo), la longitud de onda del electrón debe aumentar, como queda indicado por la Ec. (37-13). Por lo tanto, la longitud de onda del electrón aumenta cuando se aleja del núcleo.

La clase más simple de funciones de ondas permitidas en el hidrógeno son aquellas que dependen sólo de la distancia radial r y, por lo tanto, son esféricamente simétricas. Las primeras tres funciones de ondas s de este tipo, se ilustran en la Fig. 37-20*b*. En estos estados, el electrón puede interpretarse como una esfera difusa centrada en el núcleo (para $n = 1$) o como un conjunto de capas esféricas concéntricas (para $n > 1$). En términos clásicos, se puede pensar que la onda electrónica se expande y se contrae radialmente, reflejándose tanto en $r = 0$ como en $r = \infty$. Sin embargo, en general las ondas electrónicas tridimensionales no tienen que tener simetría esférica y tales ondas necesitan, entonces, de tres números cuánticos para especificar su variación en el espacio.

A continuación indicamos el símbolo, el nombre, los valores permitidos, la influencia en la energía y en el ímpetu angular del átomo y algunas características geométricas de las funciones de onda asociadas con los tres números cuánticos que resultan de la función de energía potencial tridimensional del átomo del hidrógeno. Existe un cuarto número cuántico fundamental, que interviene en el tratamiento de la mecánica ondulatoria relativista del espacio-tiempo tetradimensional, el llamado número cuántico de espín, que no tiene una contraparte clásica exacta.

El Número Cuántico Principal n. Este número interviene en la relación que da la energía total aproximada del átomo según la fórmula de Bohr $E_n = -E_I/n^2$, Ec. (38-12), en donde E_I es una constante. Los valores permitidos de n son 1, 2, 3, ... y, a medida que n aumenta, la energía aumenta, aproximándose a cero cuando n tiende a infinito. La función de ondas se extiende hacia valores cada vez mayores de r a medida que n aumenta, en la misma forma que el tamaño de las órbitas planetarias clásicas aumenta con la energía.

El Número Cuántico del Impetu Angular Orbital l. La magnitud del ímpetu angular del electrón, tal como podría pensarse clásicamente en una órbita en torno al núcleo, está dada por

$$L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar \tag{38-18}$$

[La regla es diferente a la planteada en la teoría de Bohr: (38-5).]

El número cuántico l del ímpetu angular orbital puede tomar valores enteros que empiezan en cero y continúan hasta $n-1$; esto es, los valores de l están restringidos a

$$\begin{gathered} l = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots n-1 \\ s, p, d, f, g, \ldots \end{gathered} \tag{38-19}$$

Los símbolos que aparecen por debajo de los valores numéricos de l también pueden utilizarse para designar al estado electrónico. Cuando un electrón se encuentra en el estado con $n = 1$ (el estado básico) el único valor posible de l es $l = n - 1 = 1 - 1 = 0$. Con $n = 2$, el número cuántico l puede tomar los valores 0 y 1; las magnitudes correspondientes del ímpetu angular orbital son, de la Ec. (38-18), iguales a 0 y a $\sqrt{2}\,\hbar$.

Cualquier función con $l = 0$ tiene simetría esférica; el electrón no tiene ímpetu angular con respecto al núcleo (y clásicamente se puede pensar que el electrón pasa a través del centro de fuerza en una elipse excéntrica). Cuando $l \neq 0$, las funciones de onda no son esféricamente simétricas, sino que tienen una dependencia angular. La más simple de estas funciones es la del estado p, con $l = 1$. En este caso, la función de ondas es tal que la probabilidad de encontrar al electrón es alta en 2 "lóbulos" a lo largo de una línea que pasa a través del núcleo, como se muestra en la Fig. 38-7. Las funciones de ondas correspondientes a valores más altos de l muestran una dependencia angular más complicada.

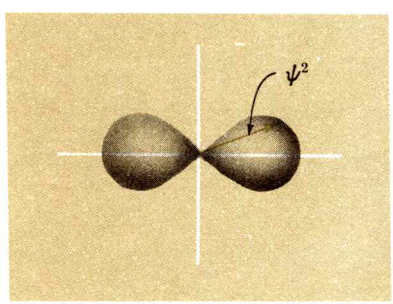


FIG. 38-7. Gráfica polar de la variación de ψ^2 con el ángulo en un estado p ($l = 1$). El patrón es simétrico con respecto a una rotación en torno al eje de simetría.

Cuando un átomo realiza una transición de uno de los estados permitidos a otro, y se emite o absorbe un fotón, el estado y la función de ondas cambian de tal forma que los valores de l cambian en 1 (o $\Delta l = \pm 1$) en las *transiciones permitidas*. En la Fig. 38-8 se muestran los niveles energéticos permitidos, separados según los valores de l, junto con las transiciones permitidas. En el hidrógeno, los diferentes niveles l posibles para una n dada tienen

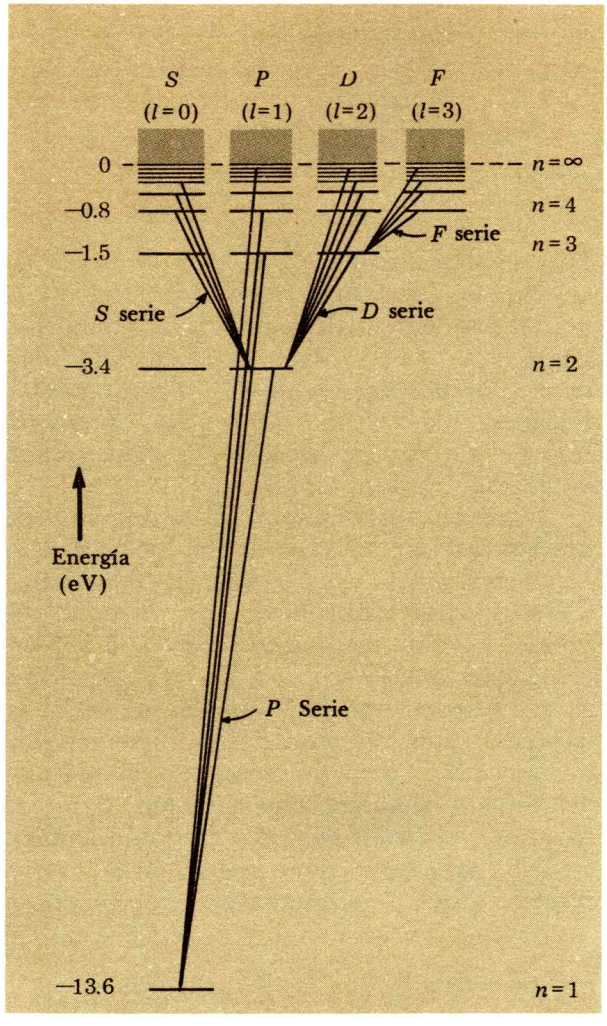


FIG. 38-8. Diagrama de los niveles de energía del hidrógeno en el que se muestran las series *S*, *P*, *D* y *F*.

la *misma* energía total; sin embargo, en los átomos en los que hay más de un electrón, los niveles *S*, *P*, *D*, *F*, ... y las series de líneas emitidas correspondientes son diferentes.

El Número Cuántico Orbital Magnético m_l. Este número cuántico puede, para una l dada, tomar valores enteros positivos y negativos en el intervalo de $+1$ a -1; esto es

$$m_l = l, l-1, l-2, \ldots 0, \ldots -l \qquad (38\text{-}20)$$

Por ejemplo, para una función de ondas *p*, con $l = 1$, los valores permitidos del número cuántico magnético orbital son 1, 0, y -1. Para un estado *d* ($l = 2$) se tiene $m_l = 2, 1, 0, -1$, o -2.

En la misma forma que el número cuántico de ímpetu angular orbital l determina la *magnitud* del ímpetu angular orbital del

electrón a través de la Ec. (38-18), el número cuántico orbital magnético m_l determina la *componente* L_z del ímpetu angular orbital del electrón a lo largo de alguna dirección Z en el espacio. La componente L_z del ímpetu angular es, de hecho,

$$L_z = m_l \hbar \tag{38-21}$$

Por lo tanto, en un estado d ($l = 2$), la magnitud del ímpetu angular es $L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar = \sqrt{2(3)}\,\hbar = \sqrt{6}\,\hbar$, y las proyecciones permitidas del ímpetu angular a lo largo del eje Z son $L_z = m_l\hbar = 2\hbar, \hbar, 0, -\hbar$ y $-2\hbar$. Para establecer una interpretación más física de m_l y de la componente del ímpetu angular asociada, podemos imaginar que el vector del ímpetu angular **L** está orientado con respecto a Z en tales direcciones que sus componentes L_z satisfacen la Ec. (38-21). Ver la Fig. (38-9).

¿Qué es lo que determina la dirección del eje Z? Esta puede quedar determinada por un campo magnético externo. El fenómeno en el que la componente del ímpetu angular está restringida a ciertos valores discretos y, por lo tanto, el vector **L** a ciertas orientaciones en el espacio con respecto a Z, se conoce en ocasiones como *cuantización espacial.* Como el electrón es una partícula con carga negativa, cuando la función de ondas electrónica indica un ímpetu angular diferente de cero debe tener un momento magnético asociado. La cuantización espacial indica que no sólo el vector del ímpetu angular, sino también el momento magnético del electrón están restringidos a ciertas orientaciones discretas en el espacio. Más aún, como la orientación relativa de un imán con respecto a un campo magnético externo controla a la energía del

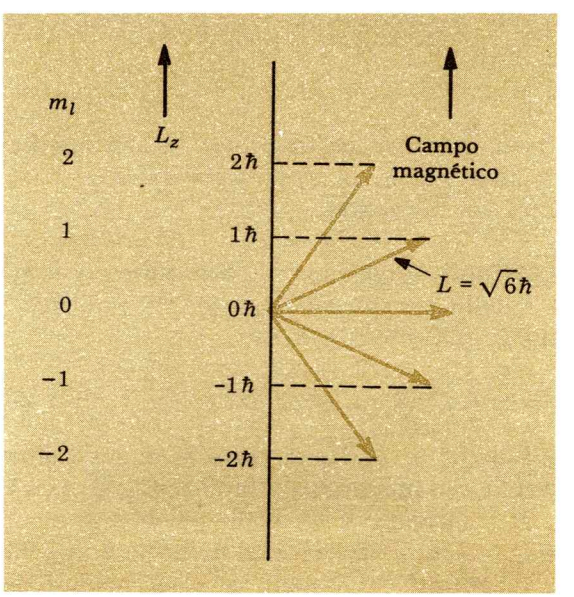


FIG. 38-9. Cuantizaciones espaciales del vector del ímpetu angular orbital L en un estado D ($l = 2$).

imán, la energía de un átomo (y de los fotones emitidos en las transiciones entre los estados permitidos) puede mostrar una multiplicidad, llamada *efecto Zeeman,* debido a su descubridor.

El Número Cuántico Magnético de Espín m_s. El cuarto número cuántico que especifica el estado y la función de ondas de un electrón es el número cuántico magnético del espín. Puede tomar sólo dos valores (para cualquier conjunto de valores de n, l o m_l):

$$m_s = +\tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad -\tfrac{1}{2} \tag{38-22}$$

El concepto de espín electrónico apareció, por primera vez, en la interpretación de la estructura fina, que consiste de parejas o tripletes muy cercanos en las líneas espectrales en sitios en los que se esperaría una sola línea. La noción de espín electrónico fue introducida, por primera vez, por S. A. Goudsmit y G. E. Uhlenbeck en 1925 para explicar este efecto. Esencialmente, se puede pensar que el electrón es una carga distribuida en una región del espacio, en rotación continua en torno a un eje interno y que el ímpetu angular de espín es adicional e independiente del ímpetu angular orbital asociado con el número cuántico l. Después P. A. M. Dirac demostró que el espín electrónico resulta como una consecuencia necesaria del tratamiento relativista de la mecánica ondulatoria. La magnitud del ímpetu angular de espín tiene un valor *único:*

$$L_s = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar = \sqrt{(\tfrac{1}{2})(\tfrac{3}{2})}\,\hbar = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\hbar \tag{38-23}$$

en donde el número cuántico de espín del electrón tiene un valor único $s = \frac{1}{2}$. El número cuántico m_s está relacionado con s en una forma análoga a la relación entre m_l y l: La componente $L_{s,z}$ del ímpetu angular de espín a lo largo de alguna dirección en el espacio está dada por

$$L_{s,z} = m_s\,\hbar = \tfrac{1}{2}\hbar \quad \text{o} \quad -\tfrac{1}{2}\hbar \tag{38-24}$$

La interpretación geométrica de $L_{s,z}$ se muestra en la Fig. 38-10.

Como una partícula cargada en rotación perpetua genera efectivamente un imán permanente absoluto, la energía de un átomo es diferente según la orientación del vector de espín $\mathbf{L}_s$ con respecto a un campo magnético.

38—5 EL PRINCIPIO DE EXCLUSION DE PAULI Y LA TABLA PERIODICA

En la teoría cuántica, el especificar el estado de un electrón en un átomo es especificar los valores de cada uno de los cuatro números cuánticos n, l, m_l y m_s. Por los procedimientos de la mecánica cuántica es posible calcular la energía del átomo, su ímpetu angular y otras de sus características medibles. De hecho,

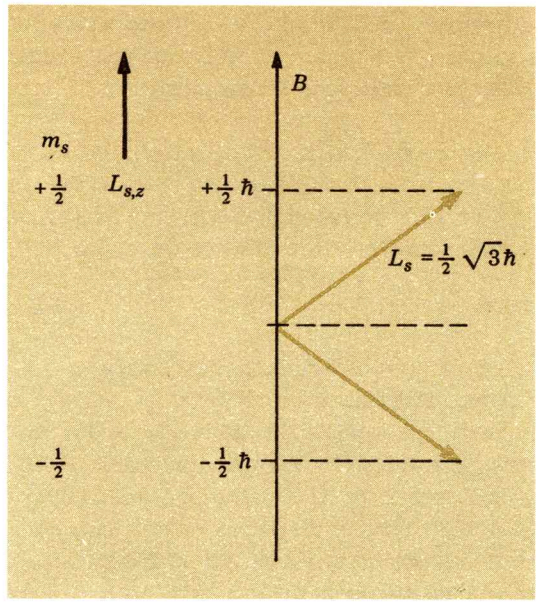


FIG. 38-10. Cuantización espacial del ímpetu angular del espín electrónico.

es posible predecir, cuando menos *en principio, todas* las propiedades químicas de los elementos. En la práctica, no resulta fácil realizar este programa, debido a las formidables dificultades matemáticas que se presentan en los sistemas con muchas partículas componentes. De hecho, mediante la teoría cuántica relativista sólo se ha resuelto completamente el problema del átomo más simple: el hidrógeno. El trabajo realizado con este átomo ha demostrado el acuerdo casi perfecto entre el experimento y la teoría.

Aunque no se conocen las soluciones exactas en los demás elementos atómicos, la teoría cuántica proporciona una gran cantidad de información relacionada con las propiedades químicas y físicas. Uno de sus grandes logros, es la base para entender a los demás elementos químicos conforme ocurren en la tabla periódica (la tabla periódica fue construida inicialmente mediante la enumeración de los elementos en el orden de sus *pesos* atómicos y, al hacerlo así se encontraron periodicidades notables en las propiedades de los elementos). La clave es un principio propuesto por W. Pauli en 1924, llamado principio de exclusión de Pauli. Este principio, junto con la teoría cuántica, puede utilizarse para predecir muchas de las propiedades físicas y químicas conocidas de los átomos.

Consideremos de nuevo a los niveles de energía disponible del electrón en el átomo de hidrógeno. Estos niveles de energía se muestran esquemáticamente (pero *no* a escala) en la Fig. 38-11. Cada línea horizontal corresponde a un conjunto de valores posible (y particular) de los números cuánticos n, l, y m_l. En cada línea

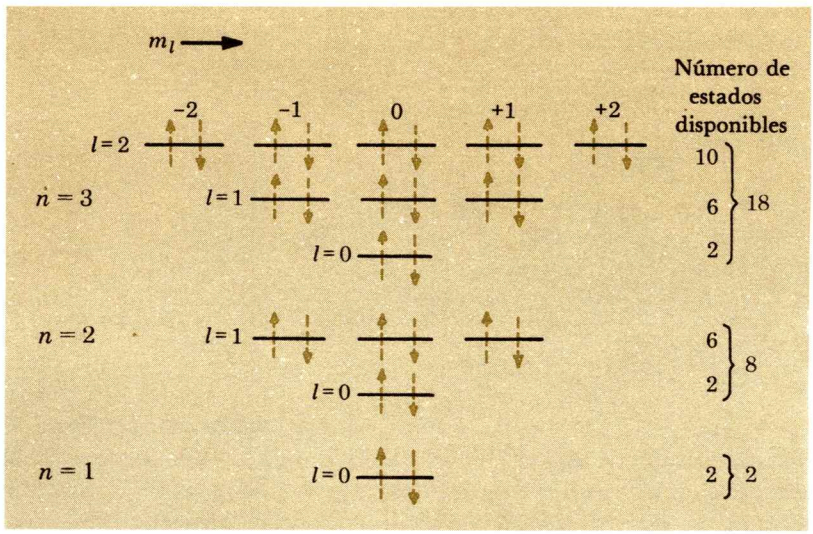


FIG. 38-11. Representación de los estados disponibles del electrón en el átomo de hidrógeno (no está a escala). Existen dos estados en línea horizontal, que corresponden a las dos orientaciones del espín electrónico.

hay dos posibles valores del número cuántico del espín electrónico $m_s = \pm\frac{1}{2}$. La ocupación de un estado disponible por un electrón queda indicada por una flecha, cuya dirección indica la orientación del espín electrónico, hacia arriba con $m_s = +\frac{1}{2}$ y hacia abajo con $m_s = -\frac{1}{2}$. Por brevedad, sólo se muestran los niveles de energía para los valores 1, 2 y 3, del número cuántico principal. Dado un valor de n, los estados con $l = 0$ son los más bajos y les siguen los estados con $l = 1$, etc. Para un valor dado del número cuántico de ímpetu angular orbital l, los valores posibles del número cuántico magnético orbital m_l se muestran en una disposición horizontal. Cada uno de los estados (dos en cada segmento) está disponible para un electrón en el átomo de hidrógeno. Algunos estados son *degenerados* y tienen la *misma energía* total; sin embargo, son distinguibles cuando se aplica un fuerte campo magnético o alguna otra influencia externa en el átomo.

Las reglas que establecen los posibles valores de los números cuánticos, y los valores posibles de los números, son:

$$\begin{aligned}
&\text{Dado un valor de } n\text{:} \quad l = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (n \text{ posibilidades})\\
&\text{Dado un valor de } l\text{:} \quad m_l = l, l-1, \ldots, 0, \ldots, -(l-1), -l \qquad (2l+1 \text{ posibilidades})\\
&\text{Dado un valor de } m_l\text{:} \quad m_s = +\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} \qquad (2 \text{ posibilidades})
\end{aligned} \tag{38-25}$$

Cuando el átomo de hidrógeno se encuentra en su estado más bajo, o estado básico, el estado del electrón está caracterizado por

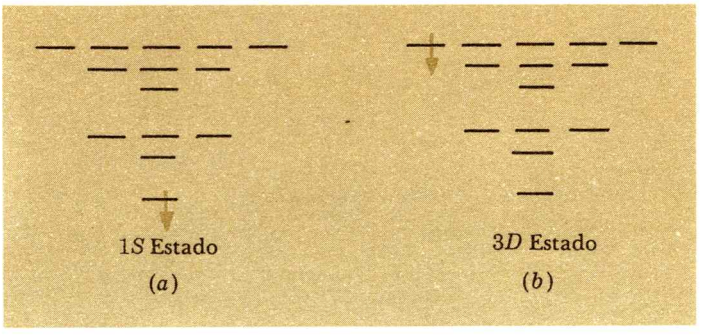


FIG. 38-12. Atomo de hidrógeno (*a*) en su estado básico y (*b*) en su estado excitado.

$n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$, y $m_s = -\frac{1}{2}$. La excitación del átomo de hidrógeno puede hacer que el electrón pase a uno de los estados energéticos superiores disponibles, a partir del cual el átomo puede decaer al estado básico en una transición descendente con la emisión de uno o más fotones. La Fig. 38-12 bosqueja a un átomo de hidrógeno en su estado básico y en un estado excitado $3D$ ($l = 2$).

Considérese el siguiente elemento: $_3$Li. Este átomo tiene tres electrones que pueden colocarse en los niveles mostrados en la Fig. 38-11. Si todos los electrones estuvieran colocados en el nivel más bajo, aquel con $n = 0$, $l = 0$ y $m_l = 0$, entonces dos electrones ocuparían el estado con $m_s = +\frac{1}{2}$ y uno ocuparía el estado con $m_s = -\frac{1}{2}$, o viceversa; esto es, cuando menos dos electrones tendrían el *mismo* conjunto de números cuánticos. Pero existe cierta evidencia, espectroscópica y directa, que demuestra que, en el litio, los tres electrones *nunca* están simultáneamente en el estado $n = 1$. La configuración de menor energía, o estado básico, del litio, es aquella en la que dos electrones se encuentran en el nivel con $n = 1$ (uno con $m_s = +\frac{1}{2}$ y el otro con $m_s = -\frac{1}{2}$), en tanto que el tercer electrón se encuentra en un estado del nivel $n = 2$ (ver la Fig. 38-13). Podemos interpretar este comportamiento de la siguiente manera. No puede ocurrir que dos de los tres electrones en el átomo del litio tengan el mismo conjunto de sus cuatro números cuánticos; esto es, dos electrones no pueden existir en el mismo estado.

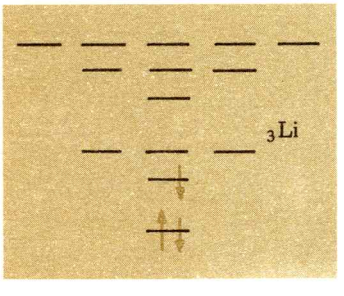


FIG. 38-13. Configuración electrónica del litio en el estado básico.

La evidencia espectroscópica de los demás elementos es semejante; demuestra que los átomos nunca se encuentran, naturalmente, con dos electrones ocupando el mismo estado. El principio de exclusión de Pauli formaliza este hecho experimental:

> *En un átomo no puede haber dos electrones con el mismo conjunto de números cuánticos n, l, m_l, y m_s, es decir, en un átomo no pueden existir dos electrones en el mismo estado.*

Nunca se han encontrado excepciones al principio de exclusión, que también se aplica a otros sistemas que no son atómicos y

a partículas diferentes a los electrones. El principio de Pauli es análogo, pero no equivalente a la aseveración clásica de que dos partículas no pueden estar en el mismo lugar al mismo tiempo (las partículas se consideran como impenetrables).

Por lo tanto, los dos electrones en el helio en el estado normal ocupan los dos estados más bajos disponibles, indicados en la Fig. 38-11. No pueden añadirse más electrones a la capa $n = 1$; la capa $n = 1$ del helio ($_2$He) está llena, o cerrada. Los espines de los electrones están alineados en forma opuesta y el átomo de helio no tiene ímpetu angular, ya sea orbital o de espín. Más aún, los dos electrones están fuertemente ligados al núcleo y se requiere una cantidad considerable de energía para excitar a uno de ellos a un estado energético superior. Es por esta razón, que el helio es químicamente inactivo.

Cuando se conocen los valores de los número cuánticos de todos y de cada uno de los electrones en el átomo, queda determinada la *configuración electrónica* del átomo. Se utiliza una convención simple para especificar la configuración electrónica, que quedará ilustrada con un ejemplo. Cuando el átomo de helio se encuentra en su estado básico, los dos electrones tienen $n = 1$ y $l = 0$, y su configuración se representa como $1s^2$. El número que antecede a la letra especifica el valor de n y la letra s designa al número cuántico orbital l de los electrones *individuales* y el exponente indica el número de electrones que tienen ese conjunto particular de valores de n y l.

El elemento litio, que tiene tres electrones, tiene una configuración electrónica $1s^22s^1$, que significa que hay dos electrones en la capa $n = 1$ completamente llena y un tercer electrón en la capa $n = 2$. Procediendo de esta manera, añadiendo un electrón conforme la carga nuclear aumenta (o el número atómico) en uno, pero siempre con la restricción de que no puede haber *dos* electrones en un átomo que tengan el mismo conjunto de números cuánticos, podemos confirmar las configuraciones del estado básico de todos los demás átomos del principio de la tabla periódica mostrada en la Tabla 38-1. De la Fig. 38-11 vemos que se pueden acomodar dos electrones en la subcapa s de la capa $n = 2$ y seis electrones en la subcapa p (o $l = 1$) después de los cuales el nivel $n = 2$ queda completamente lleno, con su cuota completa de ocho electrones. Con la configuración electrónica $1s^22s^22p^6$, que corresponde al elemento $_{10}$Ne, que es un gas raro, la función de ondas electrónica tiene simetría esférica y el átomo es químicamente inerte. En general, si la subcapa asociada con un valor dado de l está llena y los electrones ocupan los estados positivos, negativos, y cero de m_l y de m_s —, el ímpetu angular orbital y el espín total del átomo son cero y la distribución de los electrones es completamente esférica. Una subcapa cerrada es, en efecto, un casquete esférico de carga.

Tabla 38—1

Elemento	*Configuración electrónica del estado básico*					
$_{1}$H	$1s^1$					
$_{2}$He	$1s^2$					
$_{3}$Li	$1s^2$	$2s^1$				
$_{4}$Be	$1s^2$	$2s^2$				
$_{5}$B	$1s^2$	$2s^2$	$2p^1$			
$_{6}$C	$1s^2$	$2s^2$	$2p^2$			
$_{7}$N	$1s^2$	$2s^2$	$2p^3$			
$_{8}$O	$1s^2$	$2s^2$	$2p^4$			
$_{9}$F	$1s^2$	$2s^2$	$2p^5$			
$_{10}$Ne	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$			
$_{11}$Na	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^1$		
$_{12}$Mg	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^2$		
$_{13}$Al	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^2$	$3p^1$	
$_{14}$Si	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^2$	$3p^2$	
$_{15}$P	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^2$	$3p^3$	
$_{16}$S	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^2$	$3p^4$	
$_{17}$Cl	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^2$	$3p^5$	
$_{18}$Ar	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^2$	$3p^6$	
$_{19}$K	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^2$	$3p^6$	$4s^1$
$_{20}$Ca	$1s^2$	$2s^2$	$2p^6$	$3s^2$	$3p^6$	$4s^2$

Las propiedades químicas reflejan directamente las configuraciones electrónicas. Por ejemplo, $_{1}$H, $_{3}$Li, $_{11}$Na y $_{19}$K tienen un electrón *s* fuera de una subcapa cerrada; estos elementos, que son los metales alcalinos, abandonan con facilidad su último electrón *s* para convertirse en iones positivos, o contribuyen con este electrón en las combinaciones químicas y, por lo tanto, presentan una valencia de +1. Por otra parte, los elementos halógenos $_{9}$F y $_{17}$Cl, que tienen una configuración electrónica del tipo p^5, les falta un electrón para completar su capa *p;* tales elementos adquieren fácilmente un electrón adicional para convertirse en un ion negativo y formar compuestos químicos, que corresponden a una valencia de −1.

RESUMEN

Los experimentos de Rutherford de dispersión de partículas α demostraron que toda la carga positiva y, esencialmente, toda la masa de un átomo, están restringidas a una región muy pequeña del espacio, llamada núcleo.

La teoría cuántica atómica de Bohr supone (1) estados estacionarios, (2) ímpetu angular orbital igual a $n\hbar$ y (3) en las transiciones se cumple que $h\nu = E_u - E_l$.

Las energías y los radios predichos por la teoría atómica de Bohr del hidrógeno están dados por

$$E_n = -\frac{E_1}{n^2} \text{ en donde } E_1 = \frac{k^2e^4m}{2\hbar^2} = 13.60 \text{ eV} \quad (38\text{-}12)$$

$$r_n = n^2 r_1 \text{ en donde } r_1 = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0.529 \text{ Å} \quad (38\text{-}8)$$

En el tratamiento de la mecánica ondulatoria de la estructura atómica, los números y sus valores posibles son:

El número cuántico principal n:

$$n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Para una n dada:

$$l = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1 \quad (n \text{ posibles valores})$$
$$s, p, d, f, g, \ldots$$

Para una l dada:

$$m_l = l, l-1, \ldots, -(l-1), -l \quad (2l+1 \text{ valores posibles})$$

Para una m_l dada:

$$m_s = +\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} \quad (2 \text{ valores posibles})$$

El principio de exclusión de Pauli, que es la base para entender la tabla periódica de los elementos químicos, especifica que no pueden existir dos electrones en un átomo con el mismo conjunto de cuatro número cuánticos n, l, m_l, m_s.

PROBLEMAS

38-1. Un haz de protones de 8.0 MeV incide en una lámina de átomos de plata (carga nuclear de + 47 e). (*a*) ¿Cuál es la energía potencial del sistema de un protón y un núcleo de plata cuando el protón incidente ha quedado en reposo en una colisión frontal? (*b*) ¿Cuál es la distancia mínima que separa a los centros del protón y del núcleo de plata en tal colisión frontal?

38-2. ¿Cuáles son (*a*) el ímpetu y (*b*) la longitud de onda de una partícula α de 5.0 MeV?

38-3. Un haz de protones de 8 MeV incide en una lámina de plata 10^{-6} m espesor y sufre una *dispersión coulombiana,* de acuerdo con la fórmula de Rutherford. ¿Cuál es la distancia de mínimo acercamiento?

38-4. En el interior de una caja cúbica de 1.0 m de arista se distribuyen al azar veinte mil pequeñas esferas rígidas, cada una de 2.0 mm de diámetro. (*a*) Si sobre una de las caras de la caja se lanza un millón de partículas, cada una muy pequeña comparada con las esferas de la caja, ¿cuántas partículas se esperaría que se dispersaran de la dirección de incidencia por colisiones con las esferas? (*b*) Si se dispara un millón de esferas cada una de 2.0 mm de diámetro sobre las esferas de la caja, ¿cuántas de ellas serán dispersadas?

38-5. Una partícula α sufre colisiones frontales sucesivas con (*a*) un núcleo de oro, (*b*) una partícula α y (*c*) un electrón, que inicialmente estaban en reposo. ¿Qué fracción de la energía cinética inicial de la partícula α se transfiere a la partícula sobre la cual incide?

38-6. Una partícula α de 8.0 MeV sufre una colisión frontal con un electrón inicialmente en reposo. ¿Cuáles son las energías cinéticas después de la colisión de (*a*) el electrón y (*b*) la partícula α ? (*c*) ¿Cuántas colisiones frontales con electrones inicialmente en reposo se necesitan para reducir la energía cinética inicial de la partícula α en 10%?

38-7. Demostrar que una partícula con carga positiva se aproxima más a un núcleo pesado en una colisión frontal que en una colisión no frontal. (*Sugerencia*: Utilizar la conservación de la energía).

38-8. Un átomo de hidrógeno está en un estado excitado en el que la energía de *amarre* del electrón al protón es de 3.40 eV. El átomo sufre una transición a un estado cuya energía de *excitación* es 12.73 eV. (*a*) ¿Cuál es la energía del fotón asociado con esta transición? (*b*) ¿El fotón se emite o se absorbe?

38-9. Suponga que 12 000 átomos de hidrógeno se encuentran inicialmente en el estado $n = 5$. A continuación, los átomos realizan transiciones hacia los estados energéticos inferiores. (*a*) ¿Cuántas líneas espectrales diferentes serán emitidas? (*b*) Suponiendo, por simplicidad, que para un estado excitado dado todas las transiciones hacia estados inferiores son igualmente probables, ¿cuál es el número total de fotones emitidos?

38-10. (*a*) Calcular la corriente electrónica de un electrón que se mueve en la primera órbita de Bohr. (*b*) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético, en el sitio del protón, resultante del electrón orbital? (*c*) ¿Está alineado este campo magnético a favor o en contra del vector que representa al ímpetu angular orbital del electrón?

38-11. (*a*) Demostrar que la rapidez del electrón en el átomo de hidrógeno en el estado n es, según la teoría de Bohr, igual a $v_n = (ke^2/\hbar)/n$. (*b*) Demostrar que la rapidez relativa v_1/c de la primera órbita de Bohr es igual, en magnitud, a aproximadamente $\alpha = \frac{1}{137}$. De hecho, el número $\alpha = ke^2/\hbar c$, conocido como la *constante de estructura fina,* juega un papel importante en la electrodinámica cuántica, porque representa a la relación entre las constantes fundamentales del electromagnetismo (k y e), y de la teoría cuántica (h) y de la relatividad (c).

38-12. Demostrar que las energías cuantizadas del átomo de hidrógeno pueden escribirse en la forma $E_n = -\frac{1}{2}\alpha^2(mc^2)/n^2$, en donde α es la constante de estructura fina y mc^2 es la energía en reposo del electrón (ver el Prob. 38-11).

38-13. Demostrar la validez del principio de combinación de Ritz. Este principio establece que el *número de onda* de cualquier línea espectral irradiada o absorbida por un elemento es igual a las diferencias, o a las sumas, de los números de onda de otras dos líneas irradiadas por el mismo elemento. El número de onda es el recíproco de la longitud de onda.

38-14. El muón es una partícula elemental con la misma carga eléctrica que el electrón, pero con una masa 207 veces mayor. Un muón puede ser capturado por un protón (y también por otros núcleos), de tal manera que se forma un átomo "muónico". (*a*) Calcular el radio de la primera órbita de Bohr de tal átomo. (*b*) ¿Cuál es la energía de ionización de un átomo formado por un protón y por un muón? (*c*) Comparar la rapidez del muón en la primera órbita con la del electrón en la misma órbita.

Debido a que el átomo muónico tipo hidrógeno es mucho menor que el átomo de hidrógeno ordinario, un par de átomos muónicos pueden aproximarse tanto, aun a temperaturas moderadas, que los dos núcleos pueden *atraerse* debido a una fuerza nuclear entre ellos y ocurre una reacción nuclear. Para producir la reacción nuclear entre los átomos de un gas ordinario de hidrógeno se necesitan temperaturas de millones de grados. Por lo tanto, los átomos muónicos tipo hidrógeno pueden usarse en un proceso llamado "fusión fría".

38-15. La energía total del átomo de hidrógeno puede escribirse como $E = p^2/2m - ke^2/r$, en donde p es el ímpetu orbital del electrón y r es su distancia hasta el núcleo. Según el principio de incertidumbre, si un electrón está restringido en una distancia r su ímpetu tiene una incerteza de, cuando menos, una cantidad $\hbar/r$, así que el ímpetu orbital del electrón debe de ser, al menos, del orden de $\hbar/r$. Por lo tanto, la energía total del átomo puede expresarse como $E = p^2/2m - ke^2p/\hbar$, en donde p puede considerarse como una variable. (*a*) Graficar por separado los dos términos de la expresión de la energía, junto con su suma, como función de p y también como función de la distancia r. (*b*) La energía total es mínima a cierta distancia r_0. Demostrar que la distancia r_0 para la cual E es mínima, es igual al radio de la primera órbita de *Bohr*. (*c*) Demostrar que cuando r_0 se

sustituye en la expresión general de E, la energía es la del átomo de hidrógeno en el estado base.

38-16. *El principio de correspondencia.* (*a*) Demostrar que la frecuencia f del movimiento orbital del electrón en un modelo clásico del átomo de hidrógeno está dada por $f = (1/2\pi)(ke^2/mr^3)^{1/2}$. (*b*) Demostrar que la frecuencia ν emitida por un átomo de hidrógeno en una transición del estado n al estado n-1 está dada, para grandes valores de n, por $\nu = 2cR/n^3$, en donde R es la constante de Rydberg. (*c*) Según el principio de correspondencia de N. Bohr, los resultados de la teoría cuántica deben de corresponder a los del electromagnetismo clásico cuando la teoría cuántica se aplica en el dominio en el que se sabe que el electromagnetismo clásico conduce a resultados correctos; en el átomo de hidrógeno, esto implica órbitas macroscópicas (grandes valores de r y de n) y la frecuencia f orbital del electrón es igual a la frecuencia ν de la radiación electromagnética emitida. Entonces, demostrar que en el límite de la correspondencia, en el que $n \to \infty$, $f = \nu$. En su tratamiento original del átomo de hidrógeno con la teoría cuántica, Bohr utilizó el principio de correspondencia, y no la cuantización del ímpetu angular orbital, para determinar los estados cuánticos permitidos.

38-17. Un átomo de helio ionizado He^+ tiene un electrón que rodea al núcleo, cuya carga eléctrica es $+2e$. (*a*) ¿Cuáles son las energías del estado básico y de los primeros dos estados excitados del He^+? (*b*) ¿Cuál es la energía de un fotón que puede producir un átomo doblemente ionizado de helio He^{2+} cuando es absorbido por un átomo de He^+ en su estado básico?

38-18. La cuantización de la energía de un sistema atómico tal como el átomo de hidrógeno implica, a través de la equivalencia entre la masa y la energía de la teoría de relatividad, que la masa del sistema ligado está cuantizada. Indicar los valores de la masa total de un átomo de hidrógeno.

38-19. Cuando un átomo en un estado excitado, inicialmente en reposo, emite un fotón, la conservación del ímpetu implica que debe de recular. Por lo tanto, la diferencia de energía entre los dos estados estacionarios de un átomo es, estrictamente, la energía del fotón emitido más la del átomo que retrocede. (*a*) Demostrar que cuando se considera la energía del retroceso atómico, la frecuencia del fotón emitido se reduce por una fracción $h\nu/2Mc^2$, en donde ν es la frecuencia del fotón (calculada en forma aproximada) y M es la masa atómica. (*b*) ¿Cuál es la corrección fraccional en la frecuencia de los fotones α de Lyman emitidos por el hidrógeno cuando se toma en cuenta este efecto?

38-20. ¿Cuáles son (*a*) la energía, (*b*) el ímpetu y (*c*) la longitud de onda de los fotones emitidos cuando el hidrógeno sufre una transición α de Paschen? (*d*) Suponiendo que el átomo de hidrógeno estaba inicialmente en reposo, ¿con qué energía recula cuando se emite este fotón?

38-21. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia del fotón emitido por el átomo de hidrógeno que sufre una transición del estado $n = 11$ al $n = 10$? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia del electrón orbital clásico equivalente en el estado $n = 10$? (Ver el Prob. 38-16).

38-22. Un átomo permanece en cierto estado excitado por un tiempo promedio de 10^{-8} s antes de realizar una transición a un estado energético inferior. (*a*) ¿Cuál es la incerteza en la energía (en electrón-volts) del átomo en este estado excitado? (*b*) Si las transiciones consecuentes resultan en la emisión de un fotón de 5000 Å, ¿cuál es la incertidumbre fraccional en la frecuencia o en la longitud de onda, de la radiación emitida? (*c*) Suponga que una transición hacia un estado inferior resulta en la emisión de un fotón de 10 MHz de frecuencia, nuevamente con un tiempo de vida de 10^{-8} s en el estado superior. ¿Cuál es la incertidumbre fraccional en la frecuencia de la radiación emitida?

38-23. El fenómeno de la fluorescencia ocurre cuando radiación de una sola longitud de onda incide en un material y hace que éste irradie luz con una longitud de onda diferente. (Por ejemplo, en las lámparas fluorescentes comunes la luz ultravioleta produce la emisión de luz visible). (*a*) Demostrar que el fenómeno de fluorescencia puede interpretarse en términos de fotones de alta energía que llevan a los átomos hasta estados excitados relativamente altos, a partir de los cuales el átomo realiza transiciones hacia estados inferiores a través de estados excitados intermedios. (*b*) La regla de Stokes de la fluorescencia establece que la frecuencia de la luz emitida en la fluorescencia no excede a la de la luz excitadora. Demostrar que la regla de Stokes se sigue de la teoría cuántica cuando se aplica a los átomos.

38-24. Una partícula resbala en una escudilla sin fricción. (*a*) Si inicialmente la partícula se lanza desde un lado de la escudilla de tal forma que su

velocidad no está dirigida hacia el centro de ésta, demostrar que la partícula nunca puede encontrarse en el centro de la escudilla. (*b*) Usando el resultado clásico de la parte (*a*), demostrar que cualquier partícula que tenga un ímpetu angular finito con respecto a un centro de fuerzas debe de tener una función de ondas que es cero en la localización del centro de fuerza. Si una partícula está sujeta a una fuerza central atractiva y tiene un ímpetu angular cero, con respecto al centro de fuerza, la función de ondas correspondiente debe tener un valor diferente de cero en el centro de fuerza.

38-25. Los átomos pueden llevarse a estados excitados absorbiendo fotones de energías apropiadas. Que estos átomos también pueden sufrir transiciones cuánticas mediante colisiones con partículas fue demostrado, por primera vez, en el experimento de Franck y Hertz en 1914. Por ejemplo, un átomo de hidrógeno puede sufrir transiciones de su estado básico al primer estado excitado si es "golpeado" por un electrón cuya energía cinética es justo la energía de excitación (10.2 eV) y el electrón queda en reposo en esta colisión. En su experimento original, Frank y Hertz encontraron que los electrones con una energía cinética de 4.88 eV quedaban efectivamente en reposo cuando incidían sobre átomos de mercurio. La excitación de los átomos de mercurio por colisiones electrónicas acompañada por la emisión de radiación de los átomos de mercurio. ¿Cuál era la longitud de onda de esta radiación?

38-26. Una suposición fundamental de la teoría cinética de los gases es que las moléculas realizan colisiones *perfectamente elásticas*. Que estas colisiones pueden, de hecho, ser *perfectamente* elásticas, se sigue de la naturaleza cuántica de la estructura atómica y molecular: A menos que la molécula reciba suficiente energía como para permitir una transición cuántica a un estado excitado, debe permanecer independientemente de las colisiones de baja energía con otras moléculas, en su estado básico. La energía cinética traslacional promedio por molécula en un gas a temperatura absoluta T es $\frac{3}{2}kT$ (ver la Sec. 18-3); una energía de ionización típica de un átomo o de una molécula, es de algunos electronvolts. ¿Cuál sería la temperatura aproximada a la que se debería de calentar un gas para producir ionización de las moléculas?

38-27. ¿Cuál es la energía cinética mínima de los electrones para producir (*a*) emisión de la línea H_α cuando inciden sobre átomos de hidrógeno en su estado básico y (*b*) emisión de *todas* las líneas en el espectro del hidrógeno?

38-28. ¿Cuál es la energía cinética mínima de los electrones que pueden realizar colisiones inelásticas con átomos de litio doblemente ionizados ($^7_3$Li) en su estado básico?

38-29. (*a*) Dos átomos de hidrógeno en su estado básico que se mueven con la misma rapidez, sufren una colisión frontal, ¿cuál es la energía cinética mínima de cualquiera de los dos átomos (en términos de la energía de ionización E_I de los átomos de hidrógeno), necesaria para elevar a uno de los átomos a un estado excitado? (*b*) Un átomo de hidrógeno en su estado básico choca con un segundo átomo de hidrógeno, también en su estado básico, pero inicialmente en reposo; ¿cuál es la energía cinética mínima necesaria para elevar a uno de los átomos al primer estado excitado?

38-30. El fenómeno de la aurora boreal (luces del Norte) y de la aurora austral (luces del Sur), que consiste en el esparcimiento de luminosidad en el cielo cercano al polo terrestre, se produce cuando las partículas cargadas lanzadas por el Sol chocan con el oxígeno y el nitrógeno que se encuentran a 100 km o más por encima de la atmósfera terrestre, excitando y ionizando a estos átomos. (*a*) Se sabe que las partículas cargadas viajan los 1.5×10^{11} m desde el Sol hasta la Tierra en aproximadamente 24 h. Suponiendo que sean protones, ¿cuál es su energía cinética promedio? (*b*) ¿Por qué producen ionización apreciable del oxígeno y del nitrógeno sólo en la vecindad de los polos terrestres?

38-31. Los átomos de sodio irradian fuertemente dos líneas amarillas muy cercanas con longitudes de onda de 5,895.944 Å y 5,889.977 Å. Estas líneas provienen de las transiciones de dos niveles de energía excitados, muy cercanos, al estado básico del sodio. ¿Cuál es la diferencia energética aproximada entre estos dos niveles energéticos superiores?

38-32. Las observaciones espectroscópicas muestran que el vapor de sodio emite una radiación de 5893 Å de longitud de onda cuando se le bombardea con electrones que han sido acelerados desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 2.11 V (las, llamadas, líneas D del sodio, emitidas, provienen de las transiciones entre el primer estado excitado y el estado básico). Calcular el valor de h/e a partir de este dato.

38-33. ¿Cuál es la valencia química esperada de los átomos cuya única subcapa incompleta tiene una configuración electrónica p^4?

38-34. El espectro de rayos x de los átomos se emite después de que los electrones más internos han sido extraídos, según suele hacerse, por el bombardeo de electrones de varios miles de electron-volts; cuando se produce una vacancia electrónica interna, los electrones externos realizan un proceso de cascada hacia los niveles energéticos inferiores, y la disminución en la energía del átomo corresponde a la emisión de fotones de rayos x de energías relativamente grandes (o longitudes de onda pequeñas). Supongamos, por simplicidad, que uno de estos electrones ha sido extraído de la capa $n = 1$ del zinc; ($_{30}$Zn) entonces, un electrón en la capa $n = 2$ "mira" una carga nuclear efectiva $Z - 1$, en donde Z es el número de protones en el núcleo, ya que el segundo electrón $n = 1$ apantalla a la carga nuclear. ¿Cuál es la longitud de onda aproximada del fotón emitido cuando el electrón en $n = 2$ sufre una transición al sitio vacante en el estado $n = 1$?

38-35. Un átomo de $_3$Li se encuentra en su estado básico. (*a*) ¿Cuáles son los cuatro números cuánticos de cada uno de sus electrones? (*b*) ¿Cuáles son los números cuánticos del tercer electrón en los dos estados excitados más bajos del átomo?

Capítulo

39

LA ESTRUCTURA NUCLEAR

En lo que a la estructura atómica concierne, el núcleo atómico puede considerarse como una masa y una carga puntual. El núcleo contiene toda la carga positiva y casi prácticamente toda la masa del átomo; por lo tanto, proporciona el centro en torno al cual ocurre el movimiento electrónico e influye en la estructura atómica a través de la fuerza atractiva de Coulomb sobre los electrones.

Los experimentos de dispersión de partículas α- de Rutherford establecieron que, para distancias mayores que 10^{-14} m el núcleo interactúa con otras partículas cargadas a través de una fuerza coulombiana que varía inversamente con el cuadrado de la distancia. Sin embargo, se encontró que cuando las partículas α se aproximaban al centro nuclear a una distancia menor que 10^{-14} m, la distribución de las partículas dispersadas no podía explicarse tan sólo con la ley de Coulomb. Estos experimentos demostraron que a distancias menores que 10^{-14} m actúa un tipo de fuerza totalmente nuevo: la fuerza nuclear.

En este capítulo exploraremos algunos de los aspectos más simples de la estructura nuclear. Veremos que, además de las tremendas diferencias en los tamaños relativos (10^{-10} m en los átomos y 10^{-14} m en los núcleos) la estructura nuclear es diferente de la estructura atómica en algunos aspectos significativos.

39—1 LOS CONSTITUYENTES NUCLEARES

Las partículas de las cuales están compuestos todos los núcleos son el protón y el neutrón. Describiremos algunas propiedades fundamentales de estas partículas, tales como la carga, la masa y el espín.

La carga. El protón es el núcleo del átomo de ${}_1^1\mathrm{H}$ (el isótopo ligero del hidrógeno); tiene una sola carga positiva, igual en magnitud a la carga del electrón.

El neutrón recibe este nombre por que es eléctricamente neutro. Como no transporta carga, sólo tiene interacciones muy débiles con los electrones, no produce efectos de ionización directos y, por lo tanto, se detecta y se identifica sólo por los efectos que produce sobre las partículas cargadas.

La masa. Las masas del protón (que es el *núcleo libre* del átomo de ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$), y del neutrón, en las unidades de masa atómica unificadas (ver la Sec. 35-5), junto con las energías en reposo de estas partículas son, en unidades de MeV:

Masa en reposo de protón $= 1.00727661 \pm 0.00000008$ u
Energía en reposo del protón $= 938.259 \pm 0.005$ MeV
Masa en reposo del neutrón $= 1.0086652 \pm 0.0000001$ u
Energía en reposo del neutrón $= 939.553 \pm 0.005$ MeV

El protón y el neutrón tienen casi la misma masa, siendo mayor la del neutrón por algo más de 0.1%. Ambas partículas tienen energías en reposo de aproximadamente 1 GeV. Debido a que el protón tiene carga eléctrica, su masa puede medirse en forma directa con alta precisión mediante métodos de espectroscopia de masas; los campos eléctricos y magnéticos casi no tienen efectos sobre el neutrón y su masa se obtiene indirectamente de ciertos experimentos que se describirán en breve.

El espín. Tanto el protón como el neutrón tienen un ímpetu angular intrínseco, el llamado espín. El espín nuclear puede visualizarse, como en el caso del espín electrónico, en términos de la rotación de la partícula como un todo en torno a un eje rotacional interno. El ímpetu angular de espín nuclear L_I corresponde al número cuántico de espín nuclear I; su magnitud está dada por

$$L_I = \sqrt{I(I+1)}\,\hbar \tag{39-1}$$

que es análoga a la Ec. (38-23). Los números cuánticos de espín nuclear del protón y del neutrón son $I = \frac{1}{2}$.

Como en el caso del espín electrónico, el ímpetu angular de espín nuclear queda cuantizado espacialmente en un campo magnético externo, y las componentes permitidas a lo largo de la dirección del campo magnético son $+\frac{1}{2}\hbar$ y $-\frac{1}{2}\hbar$, como se muestra en la Fig. 38-10.

39—2 LA FUERZA ENTRE LOS NUCLEONES

Todos los núcleos consisten de protones y de neutrones unidos para formar sistemas más o menos estables; por lo tanto, es

importante tener cierto conocimiento de las fuerzas que actúan entre estos consituyentes nucleares fundamentales. Primero consideremos la fuerza entre dos protones. La forma más directa de examinar esta fuerza es mediante experimentos de dispersión de protones por protones, en los que se hacen incidir protones monoenergéticos sobre blancos que contengan principalmente átomos de hidrógeno y, por lo tanto, protones. De la distribución angular de los protones dispersados se puede inferir la fuerza que actúa entre las partículas incidentes y las partículas del blanco que, en este caso, son protones. Los experimentos de dispersión de protones por protones permiten representar a la fuerza en forma aproximada, mediante una curva de potencial semejante a la mostrada en la Fig. 39-1. A grandes distancias de separación, los protones se repelen mutuamente mediante una fuerza coulombiana. Cuando la distancia de separación es de alrededor de 3×10^{-15} m, existe una disminución bastante abrupta de la curva de potencial, que indica que la *fuerza nuclear* entre los protones ha entrado en acción. Esta fuerza es muy *atractiva* a distancias más pequeñas (aunque existe evidencia de una "coraza" repulsiva a distancias sumamente pequeñas). El "tamaño" del protón puede considerarse igual al *alcance* de la fuerza nuclear entre protones (3×10^{-15} m). La unidad común para medir las dimensiones nucleares es el *fermi,* en donde 1 fermi $= 10^{-15}$ m.

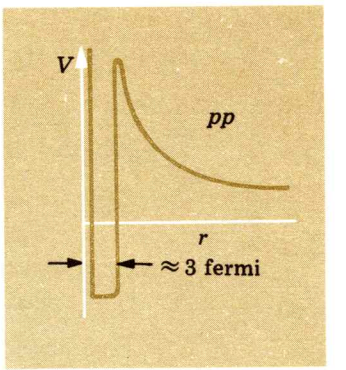


FIG. 39-1. Potencial entre dos protones.

La fuerza entre un neutrón y un protón puede investigarse mediante experimentos de dispersión de neutrones por protones. En estos experimentos, un haz monoenergético de neutrones bombardea a un blanco que contiene protones. Nuevamente, la distribución de los neutrones dispersados puede analizarse para inferir la fuerza que actúa entre el neutrón y el protón. La interacción entre el neutrón y el protón puede representarse en forma aproximada mediante la curva de potencial mostrada en la Fig. 39-2. A grandes distancias de separación *no* hay fuerza entre las dos partículas, pero a distancias de casi dos fermi, el neutrón y el protón se atraen mutuamente mediante una fuerza nuclear fuerte que tiene un alcance bastante bien definido y en el que, otra vez, aparece una coraza interna repulsiva. Es claro que la atracción nuclear no depende de la carga eléctrica, en la medida de que el neutrón es una partícula neutra.

La fuerza nuclear entre dos neutrones no puede investigarse directamente mediante experimentos de dispersión de neutrones por neutrones: es imposible preparar un blanco que consista de neutrones libres, pero existe una variedad de evidencias indirectas que indican que la fuerza entre dos neutrones es casi igual a la fuerza entre un neutrón y un protón, o entre un protón y un protón. Debido a que el neutrón y el protón son casi equivalentes en sus interacciones (sin tomar la fuerza coulombiana entre los protones), resulta común referirse al neutrón *o* al protón como *nucleones.* El término designa indistintamente al protón o al

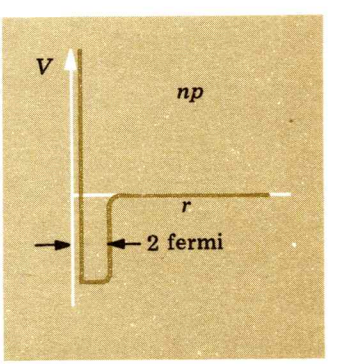


FIG. 39-2. Potencial entre un neutrón y un protón.

neutrón cuando la distinción entre ellos es de poca importancia. El hecho de que la fuerza nuclear no dependa de la carga de los nucleones particulares participantes se conoce como *independencia de carga* de la fuerza nuclear. Los tratamientos más elaborados de las interacciones de protones con neutrones demuestran que es posible considerar al protón y al neutrón como dos diferentes estados de carga de la *misma* partícula.

En una variedad de experimentos de dispersión, en particular, aquellos que emplean neutrones de gran velocidad, se demuestra que el radio nuclear R, definido como la distancia de separación que indica la presencia de la fuerza nuclear, está dado por

$$R = r_0 A^{1/3} \tag{39-2}$$

en donde $r_0 = 1.4$ fermi y A es el número de masa nuclear, o el número total de nucleones. Esta expresión del radio nuclear conduce a una importante conclusión relacionada con la densidad de la materia nuclear. Elevando al cubo la Ec. (39-2) y multiplicando por $4\pi/3$ obtenemos

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi r_0^3}{3} A$$

La cantidad $4\pi R^3/3$ es el volumen del núcleo, suponiendo que es una esfera, o casi una esfera, y podemos considerar que $4\pi r_0^3/3$ es el volumen de un nucleón. Por lo tanto, la Ec. (39-2) puede escribirse como:

$$\text{Volumen del núcleo} = \text{volumen de un nucleón} \times \text{número de nucleones}$$

El volumen nuclear total es simplemente la suma de los volúmenes de los nucleones que lo componen. Como todos los nucleones tienen casi la misma masa, *todos los núcleos* tienen la *misma densidad* de materia nuclear. En este aspecto, la materia nuclear, a diferencia de la materia atómica, se asemeja a un líquido, imaginado de tal forma que las moléculas se tocan e interactúan a través de fuerzas de corto alcance.

39—3 EL DEUTERON

El núcleo más simple que contiene más de una partícula es el *deuterón,* que es el núcleo del átomo de deuterio. El deuterón consiste de un protón y de un neutrón unidos por una fuerza nuclear atractiva para formar un sistema estable. El deuterón tiene una sola carga positiva $+e$. Su masa es aproximadamente el doble de la del protón o la del neutrón; en forma más precisa,

Masa en reposo de deuterón = 2.013553 u

Debe recalcarse que la masa del deuterón recién indicada, se refiere al *núcleo libre* del deuterio; la masa del átomo de deuterio neutro es mayor que la del electrón (que es 0.000549 u) y es, por lo tanto, 2.014102 u.

Resulta interesante comparar la masa del deuterón M_d, con la suma de las masas de sus constituyentes, que son el neutrón y el protón, M_p y M_n:

$$\begin{aligned} M_p &= 1.007277 \text{ u} \\ M_n &= 1.008665 \text{ u} \\ \hline M_p + M_n &= 2.015942 \text{ u} \\ M_d &= 2.013553 \text{ u} \\ \hline\hline M_p + M_n - M_d \text{ (diferencia en masa)} &= 0.002389 \text{ u} \end{aligned}$$

La masa total del protón y del neutrón separadas *es mayor* que la masa de las dos partículas cuando están ligadas formando al deuterón. Esta diferencia se interpreta fácilmente con base en la conservación relativista de la masa-energía (ver la Sec. 35-4). Cuando dos partículas *cualesquiera* se atraen, la suma de sus masas por separado es mayor que la del sistema ligado, ya que se debe añadir energía (o masa) al sistema para separarlo en sus partículas componentes. El valor de esta energía, llamado energía de amarre, puede calcularse de la diferencia de masas utilizando el factor de conversión de masa en energía: 1 u = 931.5 MeV/c^2. Así, la energía de amarre E_b del conjunto del neutrón más el protón, que forman al deuterón, está dada por

$$E_b + M_d c^2 = (M_p + M_n)c^2 \qquad (39\text{-}3)$$

$$\begin{aligned} E_b &= (M_p + M_n - M_d)c^2 \\ &= (0.002389 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u-}c^2)c^2 = 2.225 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Si se añaden 2.225 MeV al deuterón, el neutrón y el protón pueden separarse a una distancia mayor que la del intervalo de alcance de las fuerzas nucleares y ambas partículas quedan en reposo; por lo tanto, su energía cinética es cero.

La energía de amarre se manifiesta como una diferencia de masas medible en el sistema nuclear, debido a que la fuerza nuclear es muy grande y la energía de amarre es también muy grande. De hecho, las energías de amarre nucleares son aproximadamente un *millón* de veces mayores que las energías de amarre atómicas.

Supongamos que un gas de deuterio se irradia con un gas de fotones monoenergéticos de rayos γ de alta energía. Si la energía

de los fotones es igual a la energía de amarre de los deuterones, la absorción de los fotones producirá protones y neutrones libres. Si es superior a la energía de amarre, el deuterón se disociará en un neutrón y en un protón, ambos con energía cinética. Esta *reacción nuclear* puede escribirse de la siguiente manera:

$$\gamma + d \rightarrow p + n$$

La conservación de la masa-energía implica que

$$h\nu + M_d c^2 = M_p c^2 + M_n c^2 + K_p + K_n \qquad (39\text{-}4)$$

en donde K_p y K_n son, respectivamente, las energías cinéticas del protón y del neutrón liberados. El proceso en el que un protón y un neutrón se separan por la absorción de un fotón es el efecto fotoeléctrico nuclear o *fotodesintegración* nuclear. El umbral de esta reacción corresponde a $K_p = 0$ y a $K_n = 0$; entonces, de las Ecs. (39-3) y (39-4),

$$h\nu_0 = (M_p + M_n - M_d)c^2 = E_b \qquad (39\text{-}5)$$

Esto es, la energía del fotón es igual a la energía de amarre del deuterón*. Ver la Fig. 39-3. Si se mide la energía umbral $h\nu_0$ del

*En sentido estricto, la energía umbral del fotón para la fotodesintegración de un deuterón inicialmente en reposo es *mayor* que la energía de amarre del deuterón, debido al requisito impuesto por la conservación del ímpetu: El ímpetu total del fotón y del neutrón, después de la colisión, debe ser igual al ímpetu del fotón entrante $h\nu/c$. Un análisis demuestra que la energía umbral del fotón es $h\nu = E_b/(1 - E_b/M_d c^2)$, que es mayor que la energía de amarre del deuterón por una parte en 10^3.

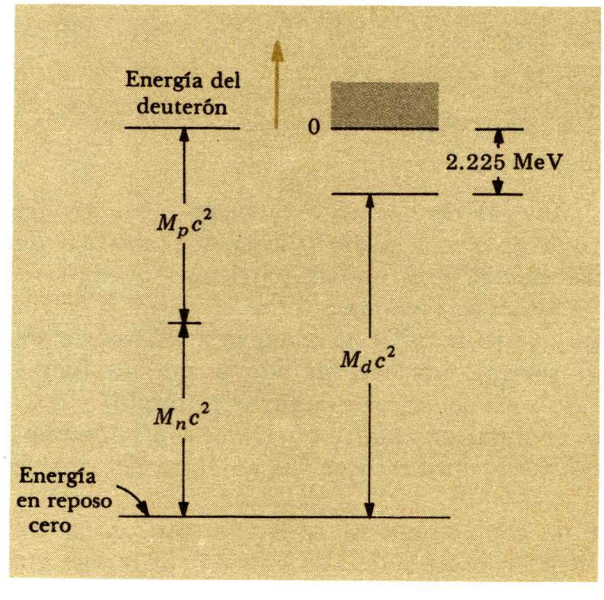


FIG. 39-3. Diagrama de niveles de energía del sistema de un neutrón y un protón, que forman un deuterón. (La magnitud de la energía de amarre del deuterón se ha exagerado).

fotón y se conocen los valores de M_p y M_d, se puede calcular la masa del neutrón a partir de la Ec. (39-5). Esta es una de las diferentes formas en las que se puede medir la masa del neutrón aplicando la conservación de la energía a las reacciones nucleares.

39—4 NUCLEOS ESTABLES

Consideremos a los núcleos estables que contienen más de dos nucleones. Representemos con Z, o *número atómico,* al número de protones en el núcleo; con A, o *número de masa,* al número total de nucleones y con $N = A - Z$ al número de neutrones. El término *nucleido* designa a una especie particular de un núcleo que tenga los mismos valores de Z, N, o A. Las especies que tienen el mismo número *protónico* Z son nucleidos conocidos como *isótopos;* aquellos que tienen el mismo número *neutrónico* N se llaman *isótonos* y los que tienen el mismo número *nuclear* A se llaman *isóbaros.* Por ejemplo el $^{37}_{17}$Cl, que tiene 17 protones, 20 neutrones y 37 nucleones, es un isótopo del $^{35}_{17}$Cl, un isótono de $^{39}_{19}$K, y un isóbaro de $^{37}_{18}$Ar.

La Fig. 39-4 es una gráfica de los nucleidos *estables* naturales, en la que el número de neutrones N se grafica contra el número de protones Z. Cada punto representa una combinación de protones y neutrones, formando un sistema ligado estable. Si nos concentramos en los aspectos generales, podemos determinar un número interesante y significativo de regularidades en este diagrama.

Los únicos nucleidos estables naturales en estado base son los que corresponden a aquella combinación de protones y neutrones que aparecen como puntos en la figura; cualquier otra combinación posible de nucleones es, hasta cierto punto, inestable, en el hecho de que decaen o se desintegran en otros núcleos. Por ejemplo, los nucleidos $^{16}_{8}$O, $^{17}_{8}$O, y $^{18}_{8}$O, son isótopos del oxígeno, y existen como sistemas nucleares estables, pero los isótopos $^{15}_{8}$O y $^{19}_{8}$O son inestables.

Los nucleidos estables de la Fig. 39-4, constituyen la *línea de estabilidad,* que indica la región general en la que ocurren la mayor cantidad de nucleidos estables. Resulta claro que para valores pequeños de N y de Z, los nucleidos estables se encuentran cercanos a la línea $N = Z$ de 45°. Por ejemplo, el $^{16}_{8}$O tiene $N = Z = 8$. Los nucleidos ligeros más estables, para un valor dado del número de masa A, son aquellos cuyo número de protones es aproximadamente igual al número de neutrones. Los núcleos ligeros tienen una tendencia a tener igual número de protones que de neutrones, debido a que tales agregados son más estables que aquellos en los que existe un marcado exceso de protones o de neutrones. En los núcleos pesados, la línea de estabilidad se desvia alejándose de la línea de 45°; esto es, $N > Z$ para grandes valores de A. Por ejemplo, el núcleo estable $^{208}_{82}$Pb tiene $Z = 82$ y $N = 126$. Por lo tanto, los nucleidos pesados tienen una marcada preferencia de neutrones sobre protones.

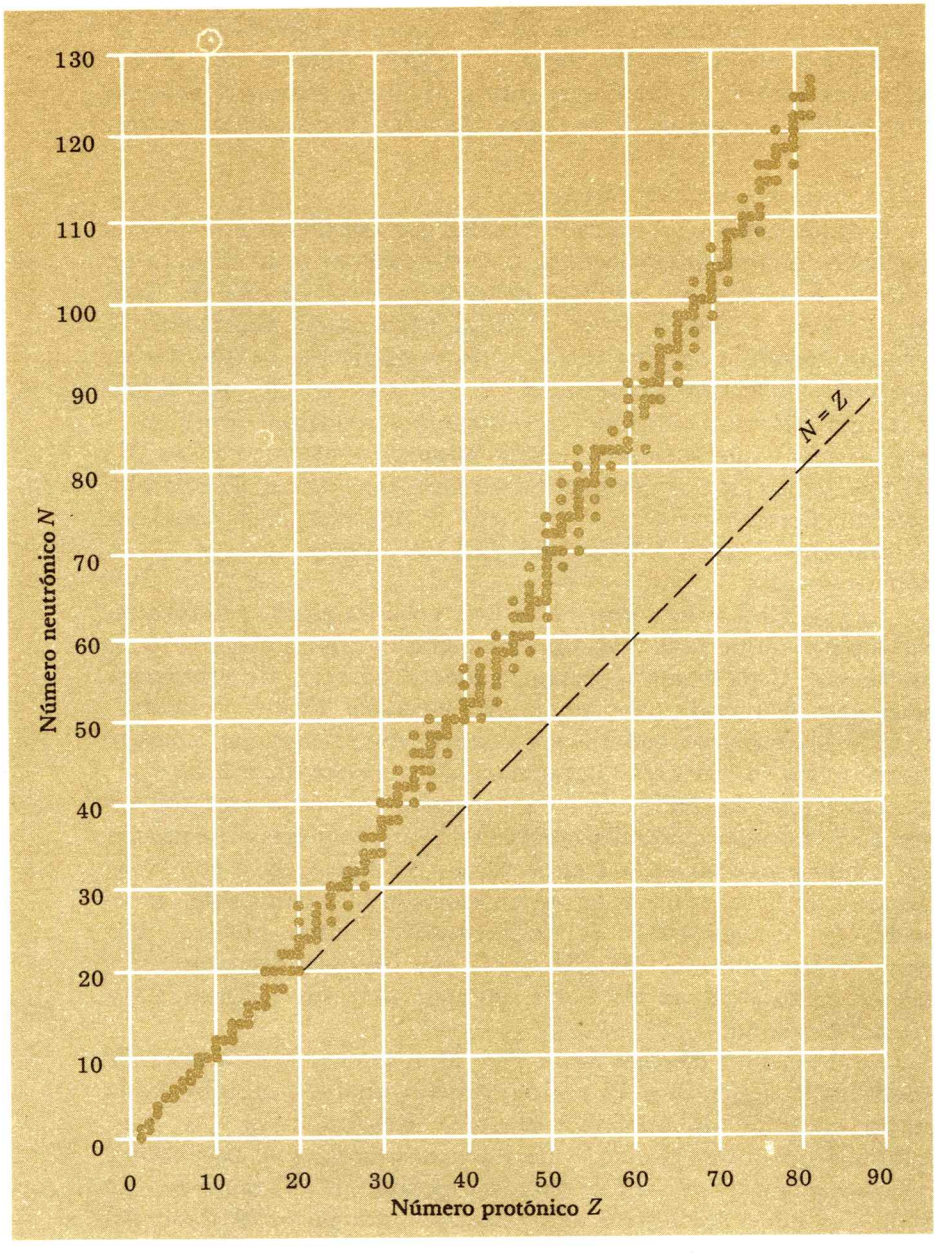


FIG. 39-4. Número de neutrones contra número de protones en los nucleidos estables.

El exceso de neutrones puede explicarse pensando en la fuerza coulombiana repulsiva que actúa entre los protones. Si partimos de un núcleo moderadamente pesado y tratamos de construir, a partir de él, un núcleo más pesado añadiendo un nucleón, la ligadura de un neutrón adicional será, por lo general, mayor que la ligadura de un protón adicional debido a que el neutrón sólo es atraído por la fuerza nuclear, en tanto que el protón es atraído por la fuerza

nuclear y repelido por las fuerzas coulombianas repulsivas de los protones ya existentes en el núcleo. El efecto repulsivo coulombiano compite notablemente con la fuerza nuclear atractiva fuerte sólo en los nucleidos pesados.

Considerando la forma en que el principio de exclusión de Pauli (Sec. 38-5) opera en la formación de los nucleidos estables, podemos entender la casi igualdad de Z y N para valores pequeños de A, y el valor más grande de N mayor que el de Z para grandes valores de A. Tanto el protón como el neutrón (por separado) cumplen con el principio: no pueden existir dos partículas idénticas en el mismo estado cuántico. No tenemos que preocuparnos de los detalles de la teoría cuántica de la estructura nuclear, pero simplemente reconoceremos que, si dos protones se encuentran en un estado que tiene los mismos (tres) números cuánticos espaciales, entonces los protones deben diferir en sus números cuánticos magnéticos de espín. Esto implica que los dos protones pueden ocupar el mismo estado cuántico sólo si sus espines nucleares son antiparalelos. La misma regla se aplica a los neutrones: En un estado cuántico definido por los tres números cuánticos espaciales, sólo pueden ocurrir dos neutrones: uno con espín hacia arriba y otro con espín hacia abajo. Además de la interacción coulombiana entre los protones, los estados disponibles para un protón o un neutrón son prácticamente iguales, ya que el protón y el neutrón son casi equivalentes en lo que a las interacciones nucleares se refiere.

Como la fuerza nuclear es tan grande que la masa de los sistemas nucleares ligados es más pequeña, en una cantidad medible, que la suma de las masas de sus componentes, se puede obtener información de la energía de amarre de los núcleos estables directamente a partir de la comparación de sus masas. Un átomo de ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ tiene una masa precisa de 12 u (por definición). La masa de un núcleo es la masa atómica menos la masa de Z electrones (ya que el número de electrones es igual al número de protones). La energía de amarre de los electrones atómicos al núcleo es generalmente muy pequeña, comparada con la energía en reposo del átomo, y podemos considerar que la masa del átomo neutro es la masa del núcleo más la masa de los electrones.

Considérese el núcleo de ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$, que tiene 6 protones y 6 neutrones. Queremos calcular la energía de amarre *total;* esto es, la energía necesaria para separar al núcleo de ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ en sus 12 nucleones componentes, quedando al final cada nucleón en reposo y efectivamente fuera del alcance de las fuerzas de los demás nucleones. En el cálculo siguiente utilizaremos la masa del *átomo de hidrógeno neutro,* que es 1.007825 u, y la masa del electrón, que es 0.000549 u.

$$6 \text{ protones} = 6(1.007825 - 0.000549) \text{ u}$$
$$6 \text{ neutrones} = 6(1.008665) \text{ u}$$

$$\begin{aligned}
\text{Masa total de los nucleones} &= 12.098940 - 6(0.000549)\ \text{u} \\
\text{Masa total del } {}^{12}_{6}\text{C} &= 12.000000 - 6(0.000549)\ \text{u} \\
\text{Diferencia de masas} &= 0.098940\ \text{u} \\
\text{Energía de amarre total} &= 0.098940\ \text{u} \times 931.5\ \text{MeV/u} = \\
&\quad 92.16\ \text{MeV}
\end{aligned}$$

Nótese que, debido a que las masas del electrón se cancelan, podemos utilizar las masas del átomo *neutro* de hidrógeno y del núcleo de carbono 12.

De este cálculo resulta que se deben añadir 92.16 MeV al núcleo de carbono para separarlo por completo en sus partículas constituyentes; por lo tanto, los 12 nucleones del átomo de carbono están ligados con una energía de amarre total E_b = 92.16 MeV para formar el núcleo en su estado energético más bajo. La energía de amarre *promedio* por nucleón E_b/A, es de 92.16/12 = 7.68 MeV.

La energía de amarre promedio por nucleón E_b/A, puede calcularse, en forma semejante, en cualquier núcleo estable. Cuando se grafican los valores calculados de E_b/A contra los valores correspondientes de las masas atómicas A, se obtiene el resultado mostrado en la Fig. 39-5. Además de los picos pronunciados de los nucleidos estables específicos, con grupos de 2 protones y de 2 neutrones ($^{4}_{2}$He, $^{12}_{6}$C, $^{16}_{8}$O), la curva se eleva rápidamente a partir de los nucleidos estables ligeros hasta valores $A \approx 20$ y a continuación sigue aumentando en forma suave, alcanza un máximo alrededor del elemento $^{56}_{26}$Fe, y disminuye poco a poco hacia los nucleidos más pesados. Es aproximadamente horizontal a partir

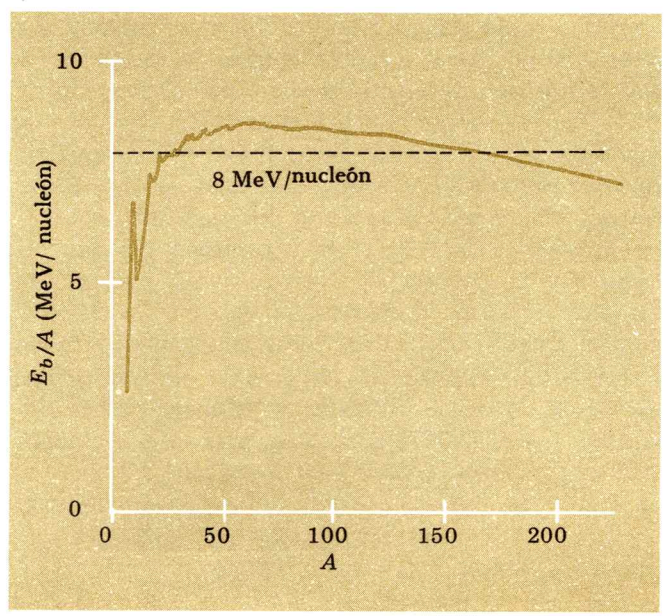


FIG. 39-5. Energía de amarre promedio por nucleón como función del número de masa en los nucleidos estables.

de $A \approx 20$, en adelante y E_b/A es casi constante e igual a 8 MeV/nucleón.

El hierro y los nucleidos próximos a él representan las configuraciones de nucleones más estables encontradas naturalmente; en todos los elementos, ya sea más pesados o más ligeros que el hierro, un nucleón típico está ligado con menor energía que en éste.

39—5 LA LEY DE DECAIMIENTO RADIACTIVO

Cualquier sistema inestable, incluyendo, por supuesto, a los núcleos inestables, decae en sus partes siempre y cuando las leyes de conservación fundamentales (masa-energía, ímpetu, carga eléctrica, etc.) no prohíban tal decaimiento. En la Sec. 39-6 consideraremos con detalle los modos de decaimiento principales de los núcleos inestables. Pero si los núcleos inestables *pueden* decaer, persiste la incógnita de la rapidez con la que ocurren estos decaimientos. Ahora trataremos la *ley de decaimiento radiactivo,* que cumplen los núcleos inestables, sin importar la diferencia en las partículas emitidas.

Llamaremos núcleo primitivo al núcleo inestable inicial y a los núcleos en los cuales decae el primitivo los llamaremos núcleos producto. La muerte del núcleo primitivo da lugar al nacimiento de los productos. La suposición fundamental de la ley del decaimiento radiactivo es que, en los núcleos inestables, un instante de tiempo es igual que otro, de tal forma que la probabilidad de que un núcleo inestable decaiga espontáneamente en una o más partículas de menor energía, es independiente de la historia pasada del núcleo primitivo, es la misma para todos los núcleos del mismo tipo y es casi independiente de las influencias externas (temperatura, presión, etc.).

No existe una forma de predecir el momento en el que un núcleo inestable decae y su supervivencia está sujeta a las leyes del azar; pero durante un periodo de tiempo infinitesimalmente pequeño dt, la probabilidad que decaiga es directamente proporcional a este intervalo de tiempo;

La probabilidad de que el núcleo *decaiga* en el tiempo $dt = \lambda\, dt$

en donde la constante de proporcionalidad λ se llama *constante de decaimiento* o *constante de desintegración.* Como la probabilidad total de que un núcleo sobreviva o decaiga en el tiempo dt es 1 (100%):

La probabilidad de que un núcleo *sobreviva* un tiempo dt
$$= 1 - \lambda\, dt$$
La probabilidad de que un núcleo *sobreviva* un tiempo $2\, dt$
$$= (1 - \lambda\, dt)(1 - \lambda\, dt) = (1 - \lambda\, dt)^2$$

Considérese ahora la probabilidad de que un núcleo sobreviva n periodos de tiempo, cada uno de duración dt:

Probabilidad de que un núcleo sobreviva un tiempo $n\ dt = (1 - \lambda\ dt)^n$

Entonces, haciendo $n\ dt = t$, que es el tiempo total transcurrido, y notando que a medida que $dt \to 0$, $n = t/dt \to \infty$, la ecuación anterior toma la forma

$$\text{Probabilidad de que un núcleo sobreviva un tiempo } t = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \qquad (39\text{-}6)$$

Ahora, la definición de e^{-x}, es

$$e^{-x} \equiv \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \qquad (39\text{-}7)$$

en donde e es la base de los logaritmos naturales. Comparando las Ecs. (39-6) y (39-7) vemos que

$$\text{Probabilidad de que un núcleo sobreviva un tiempo } t = e^{-\lambda t} \qquad (39\text{-}8)$$

Esta ecuación es la consecuencia necesaria de la suposición de que el decaimiento del núcleo inestable es independiente de la condición actual del núcleo y de su historia pasada. Aunque no se puede decir en forma precisa cuándo va a decaer *un* núcleo, podemos predecir el decaimiento estadístico de un número *grande* de núcleos inestables idénticos. Si al principio existen N_0 núcleos inestables que sufren un proceso de decaimiento caracterizado por una constante decaimiento λ, entonces el número N de núcleos que sobreviven después de un tiempo t es precisamente N_0 veces la probabilidad de que un núcleo haya sobrevivido. Por lo tanto, de la Ec. (39-8) tenemos

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad (39\text{-}9)$$

El número de núcleos inestables disminuye exponencialmente con el tiempo con un ritmo controlado por la magnitud de λ.

Se suele medir la rapidez de decaimiento en términos de la *vida media* $T_{1/2}$, definida como el tiempo en el que la mitad de los núcleos inestables han decaído y la otra mitad sobrevive. Consecuentemente, $t = T_{1/2}$ cuando $N = \frac{1}{2}N_0$, y la Ec. (39-9) resulta en

$$\tfrac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln_e 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \qquad (39\text{-}10)$$

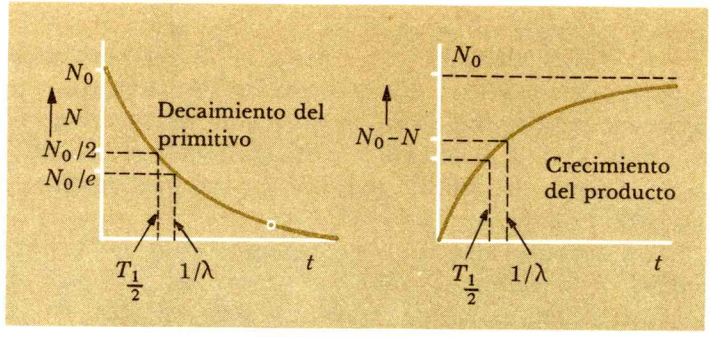


FIG. 39-6. (*a*) Decaimiento del número de núcleos radiactivos primitivos y (*b*) aumento en el número de núcleos producto, como función del tiempo.

Por lo tanto, si un material radiactivo decae con una vida media de 3 s, después de 3 s permanecen la mitad de los núcleos iniciales, después de 6 s permanece la cuarta parte de los núcleos iniciales y después de 9 s permanece la octava parte de los núcleos iniciales. La constante de decaimiento λ tiene unidades de tiempo recíproco- (por ejemplo s^{-1}), lo cual se sigue de su definición como la probabilidad de decaimiento por unidad de tiempo*.

El decaimiento del núcleo primitivo y el aumento consecuente en el número de núcleos producto se muestra en la Fig. 39-6. El número de núcleos producto producidos después de un tiempo t es $N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t})$, en donde N_0 es, de nuevo, el número inicial de núcleos primitivos.

Una cantidad útil al describir el decaimiento radiactivo es la *actividad,* definida como el número de decaimientos por segundo. De la Ec. (39-9) se sigue que

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda N$$

$$\text{Actividad} = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = (\lambda N_0)e^{-\lambda t} \qquad (39\text{-}11)$$

El signo menos que aparece en esta ecuación indica que el número de núcleos inestables *disminuye* con el tiempo. La actividad λN, que originalmente era λN_0, decae como $e^{-\lambda t}$. La actividad de los núcleos inestables que irradian partículas o fotones, la llamada *radiactividad,* puede medirse con un contador de radiación nuclear en periodos de tiempo que sean pequeños comparados con la vida media del decaimiento. Entonces, esto proporciona un método simple y directo de medir λ o $T_{1/2}$. La unidad común para medir la actividad es el *curie,* que está definido como exactamente 3.7×10^{10} desintegraciones por segundo.

*La vida media *no* es igual que la *vida promedio* T_{ave}, de un núcleo inestable. Un cálculo directo (ver Prob. 39-9) demuestra que $T_{ave} = 1/\lambda = T_{1/2}/\ln_e 2 = T_{1/2}/0.693$.

39—6 LOS DECAIMIENTOS α, β, γ

La designación de decaimiento α, β y γ para indicar los tres modos principales de decaimiento de los nucleidos inestables fue asignado, por primera vez, en el estudio de los materiales radiactivos naturales, que consisten principalmente de nucleidos pesados en el extremo de la tabla periódica, con vidas medias comparables a la edad del Universo ($\approx 10^{10}$ años).

Un sistema inestable, incluyendo a los nucleidos inestables, sufrirá un decaimiento sólo si el proceso no está prohibido por las leyes fundamentales de conservación. Además de las leyes de conservación del ímpetu, del ímpetu angular, de la masa-energía y de la carga eléctrica, todos los decaimientos nucleares satisfacen también la *conservación de nucleones* (que es un caso especial de una ley de conservación más general, la de los bariones; ver la Sec. 40-4). Por lo tanto, en cualquier proceso de decaimiento el número de nucleones permanece constante. Esta ley de conservación elimina, por ejemplo, el decaimiento de un protón en un positrón y un fotón, que, de no ser por esto, estaría permitido. De hecho, es la observación de que ciertos procesos (tales como el decaimiento del protón) nunca ocurren lo que conduce a la formulación de la ley de la conservación de nucleones.

Decaimiento γ. Normalmente, los núcleos estables, al igual que los átomos, se encuentran en sus estados de mínima energía, o estados básicos. Si tales núcleos se excitan ganando energía mediante el bombardeo con fotones o con partículas, pueden existir en uno cualquiera de sus estados cuantizados de energía. De hecho, todos los nucleidos radiactivos están inicialmente en estados excitados de energía, a partir de los cuales pueden decaer con la emisión de fotones o de partículas. El decaimiento de los núcleos a partir de estados excitados mediante la emisión de fotones se llama decaimiento γ.

En la Fig. 39-7 se muestran los niveles energéticos nucleares del elemento radiactivo talio, $^{208}_{81}\mathrm{Tl}$, (después consideraremos las transiciones α mostradas en esta figura) junto con las transiciones que dan lugar a los rayos α. El espaciamiento de los niveles energéticos nucleares se encuentra normalmente en el intervalo de decenas de KeV o de algunos cuantos MeV, en contraste con las energías, mucho menores, de las transiciones atómicas. Los niveles energéticos pueden, por supuesto, inferirse del espectro de emisión de rayos γ.

En la emisión γ de un núcleo excitado, inicialmente en reposo, la conservación del ímpetu requiere que el fotón y el núcleo producto se muevan en direcciones opuestas, de tal forma que el ímpetu total del sistema aislado continúe siendo cero. Como la masa del fotón $h\nu/c^2$ es mucho menor que la masa nuclear, casi toda la energía desprendida en el decaimiento aparece como la

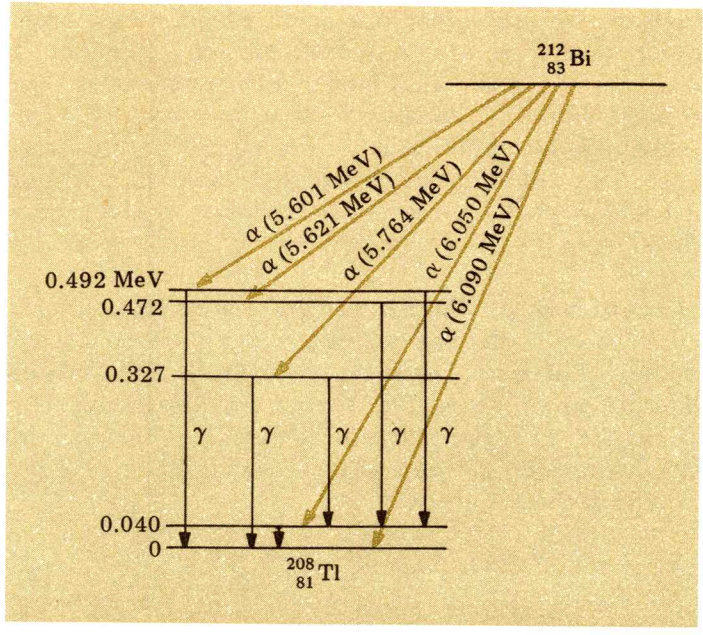


FIG. 39-7. Diagrama de niveles de energía en el que se muestran los estados excitados y las transiciones γ en el $^{208}_{81}$Tl, junto con las emisiones α del $^{212}_{83}$Bi.

energía $h\nu$ del fotón, y la energía del núcleo que recula es comparativamente insignificante.

En el decaimiento γ, la partícula se crea cuando el núcleo en el estado excitado, $^{A}Z^{*}$, decae a un estado inferior, digamos, al estado básico ^{A}Z. Utilizaremos la notación convencional en la que a un núcleo en el estado excitado se le denota mediante un asterisco. Simbólicamente podemos escribir

$$^{A}Z^{*} \rightarrow {}^{A}Z + \gamma$$

El decaimiento es consistente con la conservación de la carga (Ze antes = Ze después) y con la conservación de dos nucleones (A antes = A después).

Resulta útil tener un criterio para juzgar la rapidez relativa con la que ocurren los decaimientos nucleares. Con este propósito, podemos hablar del *tiempo nuclear* t_n como el tiempo necesario para que un nucleón típico, que tenga una energía cinética de varios MeV y que, por lo tanto, viaje con una rapidez $\approx 0.1c$, recorra una distancia de ≈ 3 fermi. Se sigue que $t_n = (3 \times 10^{-15}\ \text{m})/(3 \times 10^{7}\ \text{m/s}) \approx 10^{-22}$ s. Entonces, es de esperarse que cualquier decaimiento nuclear rápido tenga una vida media que no sea más que algunos órdenes de magnitud mayor que 10^{-22} s, que es un tiempo inconmensurablemente pequeño.

Se puede estimar que la vida media de un decaimiento γ típico es del orden de 10^{-14} s; un decaimiento tan rápido no puede rastrearse en el tiempo, pero algunos decaimientos γ están tan

fuertemente prohibidos que su vida media es mayor que 10^{-6} s, que es un tiempo que se puede medir con facilidad. Tales nucleidos, que tienen una vida media suficientemente grande como para medirse en un decaimiento γ, se llaman *isómeros*. Un isómero no es distinguible químicamente del núcleo de menor energía en el que decae con lentitud. Un ejemplo extremo del isomerismo es el del niobio $^{91}_{41}$Nb, que sufre un decaimiento γ con una vida media de 60 días.

Decaimiento α. Ciertos núcleos radiactivos, aquellos para los cuales $Z > 82$, decaen espontaneamente en un núcleo producto y un núcleo de helio. Como las partículas α tiene una configuración de nucleones muy estable, resulta poco sorprendente que tal grupo de partículas pueda existir dentro del núcleo primitivo antes del decaimiento α. Por ejemplo, el bismuto 212 decae por emisión α al talio 208:

$$^{212}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{208}_{81}\text{Tl} + {}^{4}_{2}\alpha$$

El decaimiento α es energéticamente posible sólo si la masa en reposo total del núcleo primitivo es mayor que la suma de las masas en reposo del núcleo producto y de la partícula α. El exceso en masa (multiplicado por c^2) es la energía desprendida en el decaimiento y compartida por las dos partículas salientes que, por la conservación del ímpetu, se mueven en direcciones opuestas, para asegurar que el ímpetu del sistema es cero. La mayor parte de la energía cinética liberada es transportada por la partícula ligera, que es la partícula α y, debido a que la energía liberada es la misma en una especie dada, todas las partículas α de un modo de decaimiento particular tienen una sola energía, como se muestra en la Fig. 39-8. Las partículas monoenergéticas emitidas son, de hecho, un aspecto característico de cualquier decaimiento en *dos* partículas. La Fig. 39-7 muestra el decaimiento por la emisión α a varios de los niveles energéticos discretos del núcleo hijo.

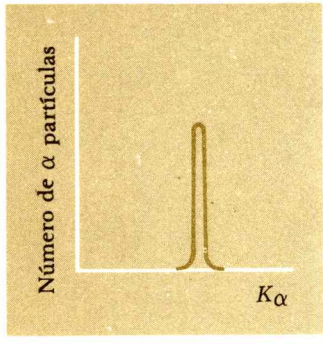


FIG. 39-8. Espectro de energía de partículas α de una sustancia radiactiva.

Se puede pensar que el agregado de dos protones y dos neutrones que constituye a la partícula α emitida existía como entidad discreta dentro del núcleo primitivo *antes* de la emisión. Tal partícula se enfrentaría a un pozo potencial y, clásicamente, nunca escaparía del interior del núcleo, de no ser por el efecto túnel de la mecánica cuántica (ver Sec. 37-7). Debido a que la función de ondas de la partícula α se extiende a través de la barrera de potencial al exterior del núcleo, como se muestra en la Fig. 39-9, la partícula α puede escapar, aunque con una probabilidad muy pequeña.

Se han identificado alrededor de 160 emisores α. Las partículas α emitidas tienen energías discretas, que van desde alrededor de 4 hasta 10 MeV (que constituye un factor de 2), pero sus vidas medias se encuentran en el intervalo de 10^{-6} s, a 10^{10} años, que es

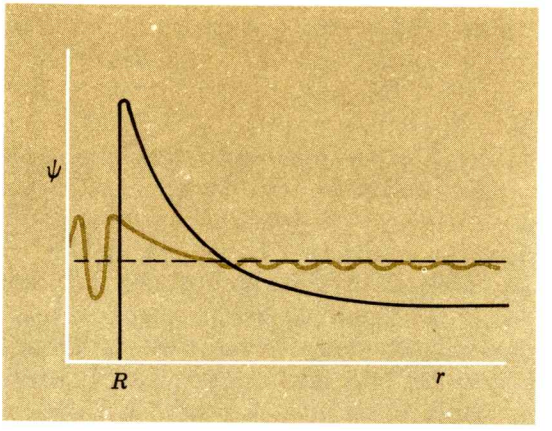


FIG. 39-9. Función de ondas correspondientes a la penetración de una partícula α a través de una barrera de potencial nuclear.

un factor de 10^{23}. Los emisores α de vida corta tienen mayores energías (y viceversa).

El decaimiento β. El decaimiento β puede definirse como el proceso de decaimiento radiactivo en el que la carga del núcleo cambia sin cambiar el número de nucleones. Consideremos, como ejemplo de la inestabilidad β, los siguientes tres nucleidos: Boro 12, carbono 12, y nitrógeno 12, cuyos estados protónicos y neutrónicos se muestran en la Fig. 39-10. Todos tienen 12 nucleones, pero difieren en el número de protones y de neutrones. Sólo el núcleo de carbono, con 6 protones y 6 neutrones, es estable. El núcleo de boro tiene muchos neutrones y el núcleo de nitrógeno tiene muchos protones, como para ser estables. El núcleo de boro puede decaer a un estado energético menor cambiando uno de sus nucleones de un neutrón a un protón, mediante el brinco cuántico del último neutrón al nivel protónico más bajo disponible. En este proceso el núcleo de $^{12}_{5}B$ se ha transformado en el núcleo estable de $^{12}_{6}C$ y, para conservar la carga eléctrica, se debe crear una unidad de carga negativa. El electrón no puede existir *dentro* del núcleo; por lo tanto, el electrón creado, o partícula β, debe

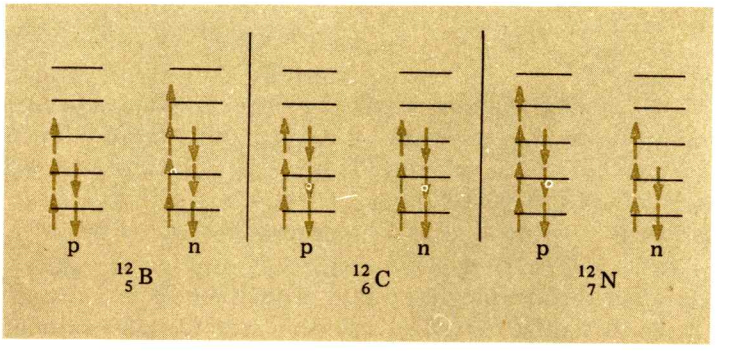


FIG. 39-10. Ocupación de los estados protónicos y neutrónicos en el boro 12, carbono 12 y nitrógeno 12.

emitirse del núcleo que decae, según la transformación

$$^{12}_{5}\mathrm{B} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \beta^{-}$$

en donde el signo menos indica la carga negativa.

El decaimiento del nitrógeno 12 es semejante. Tiene demasiados protones y pocos neutrones como para ser estable. Por lo tanto, decae a un estado energético menor convirtiendo uno de sus nucleones de un protón a un neutrón, mediante el brinco cuántico del último protón al nivel neutrónico más bajo disponible. En este decaimiento el núcleo inestable de $^{12}_{7}\mathrm{N}$ se transforma en el núcleo estable de $^{12}_{6}\mathrm{C}$ y la carga se conserva mediante la creación de una partícula β positiva, llamada positrón. Debido a que el positrón no puede existir en el núcleo, debe ser emitido. El decaimiento puede expresarse como

$$^{12}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \beta^{+}$$

Existe otro tipo de decaimiento β llamado *captura electrónica*. Un electrón orbital atómico se combina con un protón del núcleo que entonces se transforma en un neutrón. De nuevo, el número de nucleones permanece inalterado, pero el protón se convierte en neutrón, como en el decaimiento β^{+}. Los electrones del átomo tienen probabilidades finitas de encontrarse en el núcleo (ver la Fig. 37-20*b*), y uno de los electrones más internos, o electrón K, tiene una probabilidad muy alta de ser capturado dentro del núcleo. El decaimiento β resultante de la captura nuclear de un electrón de la capa K generalmente se conoce con el nombre de *captura K*.

En el decaimiento por captura electrónica no se emiten partículas cargadas. La absorción y la aniquilación de la partícula es equivalente a la creación y a la emisión de su antipartícula, en la captura K se absorbe un electrón, pero en el decaimiento β^{+} se emite una antipartícula del electrón, o positrón. Ambos procesos cambian al protón en un neutrón. Un ejemplo de la captura electrónica es el decaimiento del berilio 7, inestable, en litio 7:

$$e_{K}^{-} + {}^{7}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li}$$

Naturalmente que la captura electrónica no puede identificarse mediante la emisión de una partícula cargada. Puede inferirse del cambio en la identidad química del elemento que sufre el decaimiento, o puede detectarse observando los *fotones de rayos x* emitidos cuando ocurre el decaimiento. Cuando se absorbe un electrón en el núcleo, deja un agujero, o vacancia, en la capa electrónica más interna; esta vacancia se llena con algún electrón de las siguientes capas (exteriores), que realizan brincos cuánticos

a la vacancia interna, emitiendo, por lo tanto, espectros de rayos X característicos. Debido a que la emisión de rayos X debe ocurrir *después* de que se ha creado la vacancia electrónica (esto es, después de que ha ocurrido el decaimiento nuclear), los rayos X son característicos del elemento producto y no del primitivo.

Se conocen muchos cientos de nucleidos que decaen mediante la emisión de un electrón, de un positrón o por captura de un electrón orbital. De hecho, casi todos los nucleidos inestables con Z menor que 82 decaen por, al menos, uno de estos tres procesos. El decaimiento β difiere de los decaimientos α y γ en varios aspectos:

Los núcleos primitivo y producto tienen el mismo número de nucleones.
A diferencia de la emisión α, el electrón o el positrón se crean en el momento en que son emitidos.
En tanto que los fotones de los rayos γ y las partículas α son emitidos con espectros de energía discretos, las partículas β tienen un espectro de energías continuo.
Las vidas medias del decaimiento β nunca son menores que alrededor de 10^{-2} s, en contraste con el decaimiento γ (que pueden ser tan pequeñas como 10^{-17} s) y del decaimiento α (que pueden ser tan pequeñas como 10^{-7} s).
En todos los procesos de decaimiento β se emite un neutrino o un antineutrino.

¿Cuál es la evidencia de la aparición de otra partícula en el decaimiento β? Consideremos el decaimiento β^-, ilustrado por el decaimiento del núcleo de ${}^{12}_{5}\mathrm{B}$ en el núcleo ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ y un electrón. Si este decaimiento fuera semejante al decaimiento α en el hecho de que el núcleo estable se transforma en justamente dos partículas (en este caso un electrón y un núcleo producto), entonces las leyes de conservación del ímpetu y de la energía impondrían los siguientes requisitos: Por conservación del ímpetu, las dos partículas emitidas viajarían alejándose del sitio del decaimiento en direcciones opuestas con la *misma* magnitud de su ímpetu. Por la conservación de la energía, la energía total liberada en el proceso de decaimiento (la energía en reposo del núcleo primitivo menos la suma de las energías en reposo de los núcleos producto y del electrón) se repartiría entre las dos partículas en una forma consistente con los requisitos de la conservación del ímpetu. Como la masa del electrón es muy pequeña comparada con la de los núcleos producto, esencialmente toda la energía desprendida sería transportada por el electrón. En resumen, en el decaimiento, supuesto en dos partículas, los electrones del núcleo primitivo inestable de una especie particular deberían emitirse con *una sola energía,* que sería aproximadamente igual en magnitud a la energía total desprendida en el proceso de decaimiento.

¿Qué es lo que demuestra el experimento? Los electrones emitidos *no son* monoenergénticos (ver la Fig. 39-11). En lugar de

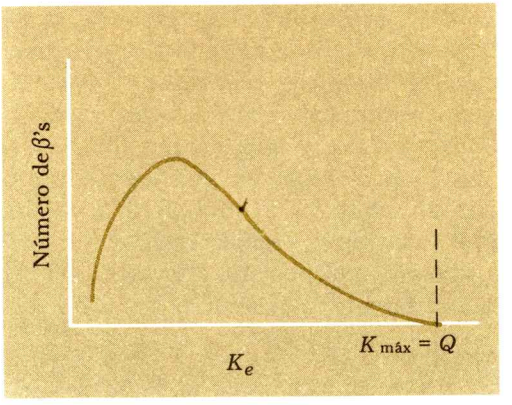


FIG. 39-11. Distribución de energías de las partículas β^- emitidas en el decaimiento del boro 12.

esto, existe una distribución en las energías cinéticas de los electrones que va desde cero hasta un máximo $K_{máx} = Q$, en donde Q representa la energía *total* desprendida en el decaimiento. Aquellos pocos electrones que tienen esta energía máxima, y sólo esos electrones, transportan la energía cinética esperada con base en el decaimiento en dos partículas. Todos los demás electrones (y esto significa la mayoría de los electrones emitidos) ¡parecen tener energías cinéticas demasiado pequeñas! En resumen, ¡existe una violación aparente de la conservación de la energía! Más aún, las observaciones de los decaimientos β^- individuales muestran que el electrón y el núcleo producto *no* necesariamente dejan el sitio del decaimiento en direcciones opuestas, ¡esto es una violación aparente de la conservación del ímpetu! Además de esto, la comparación de los ímpetus angulares del electrón y de los núcleos primitivo y producto indican ¡una violación de la ley de la conservación de ímpetu angular!

Nos apresuramos a asegurarle al lector que las leyes de la conservación fundamentales de la energía, el ímpetu lineal y el ímpetu angular, de hecho no son violadas en el decaimiento β^-

Esto es así debido a que en el decaimiento β^- también se emite un *neutrino* ("el pequeño neutro"). Su existencia fue sugerida por primera vez por W. Pauli en 1930 como una alternativa al abandono de los principios de conservación; su existencia se confirmó directamente en un experimento en 1956. Ahora se sabe que un núcleo radiactivo decae por emisión β^- en *tres* partículas: el núcleo producto, el electrón y el neutrino. Todas las dificultades que hemos mencionado antes desaparecen en virtud de la participación del neutrino en el decaimiento β^-

El neutrino tiene carga eléctrica 0, masa en reposo 0, ímpetu lineal p, energía relativista *total* $E = pc$, e ímpetu angular intrínseco $\frac{1}{2}\hbar$.

El neutrino tiene una carga eléctrica *cero;* en el decaimiento β^-, la carga se conserva aun *sin* el neutrino*. El neutrino no puede interactuar, con la materia produciendo ionización. Su interacción con los núcleos es muy débil y es virtualmente indetectable.

Como ya hemos visto, la energía se conserva en aquellos pocos electrones del decaimiento β^- que son emitidos con la energía cinética máxima $K_{\text{máx}} = Q$. Por lo tanto, la masa del neutrino debe de ser muy pequeña comparada con la masa del electrón y existen razones teóricas para suponer que es *exactamente cero.* Como el neutrino tiene una masa y una energía en reposo igual a cero, debe de viajar, al igual que el fotón, siempre con la rapidez de la luz. Por lo tanto, la energía relativista total E del neutrino está relacionada con su ímpetu relativista p por $E = pc$ [ver la Ec. (35-16)].

Consideremos de nuevo la conservación de la energía y del ímpetu lineal en el decaimiento β^-, suponiendo que durante el decaimiento se crea un neutrino, al igual que un electrón, que transporta energía e ímpetu. La conservación de la energía requiere que

$$Q = K_D + K_e + K_\nu \approx K_e + K_\nu \qquad (39\text{-}12)$$

Nótese que la energía cinética K_ν, del neutrino es igual a su energía total: $E_\nu = K_\nu$. La conservación del ímpetu lineal requiere que los *vectores* de los ímpetus de las tres partículas sumen cero, como se muestra en la Fig. 39-12. Al emitirse tres partículas, ya no es necesario que abandonen el sitio de decaimiento a lo largo de la *misma* línea recta; ahora existe una variedad de formas en las cuales los vectores de ímpetu separados pueden disponerse para

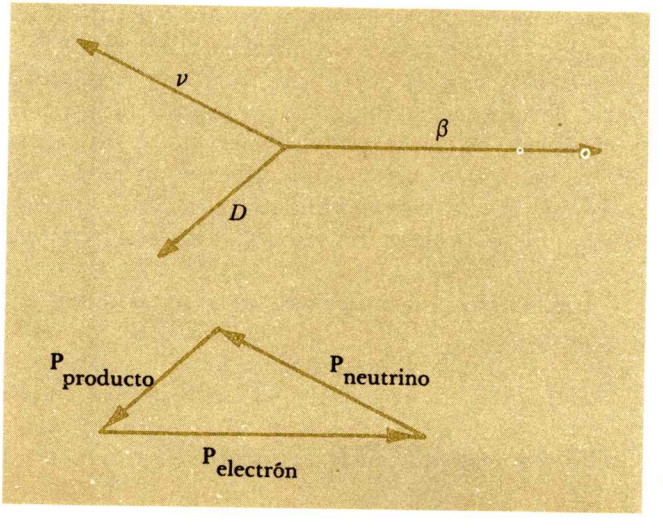


FIG. 39-12. Vectores de ímpetu lineal del núcleo producto, del electrón y del neutrino del decamiento β^-.

*Estrictamente, la partícula sin masa emitida en el decaimiento β^- es el antineutrino, en tanto que la partícula sin masa emitida en el decaimiento β^+ es el neutrino.

sumar cero, satisfaciéndose la Ec. (39-12) en todos los casos. El electrón y el núcleo producto *no* se moverán, por lo general, a lo largo de la misma línea en direcciones opuestas; pero si lo hacen, el ímpetu y la energía del neutrino pueden ser cero y de la Ec. (39-12) se tendrá $K_e = K_{máx} = Q$, de acuerdo con la observación correspondiente a los electrones más energéticos. En todos los demás decaimientos, el neutrino, virtualmente inobservable, transportará energía e ímpetu y el electrón tendrá necesariamente una energía cinética menor que $K_{máx}$. En el decaimiento en dos partículas, las partículas salientes son monoenergéticas; en el decaimiento en tres partículas son polienergéticas.

Por último, consideremos el ímpetu angular o espín, del neutrino. Su valor es de $\frac{1}{2}$ en unidades de $\hbar$. En el decaimiento β^- del ${}^{12}_{5}\mathrm{B}$ al ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$, el núcleo primitivo y el núcleo producto tienen espines nucleares enteros; el electrón tiene espín de $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, cuando se incluye el ímpetu angular del neutrino, el ímpetu angular total se conserva en el decaimiento β^-.

Los tres procesos de decaimiento β indicados anteriormente pueden escribirse en forma más completa como

$$\begin{aligned} \beta^-: &\quad {}^{12}_{5}\mathrm{B} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \beta^- + \nu \\ \beta^+: &\quad {}^{12}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \beta^+ + \nu \\ \text{Captura electrónica}: &\quad e_K^- + {}^{7}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + \nu \end{aligned}$$

Los argumentos para que también aparezca el neutrino en los procesos de decaimiento β^+ y de captura electrónica son los siguientes: En el decaimiento por positrón, también existe una distribución en la energía cinética del positrón y el neutrino desempeña un papel análogo, en las leyes de conservación, al que tenía en el caso de la emisión de un electrón. En la captura electrónica, que es un decaimiento en dos partículas, la mayor parte de la energía liberada es transportada por neutrinos monoenergéticos, en tanto que el núcleo producto retrocede con el resto de la energía, que es típicamente de unos cuantos eV, pero monoenergética. Sin el neutrino acompañante en la captura electrónica, este proceso de decaimiento sería por completo inexplicable.

Las cuatro reacciones básicas asociadas con el decaimiento son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Decaimiento } \beta^-: &\quad n \rightarrow p + e + \bar{\nu} \\ \text{Decaimiento } \beta^+: &\quad p \rightarrow n + \bar{e} + \nu \\ \text{Captura electrónica}: &\quad e + p \rightarrow n + \nu \\ \text{Absorción de neutrinos}: &\quad \bar{\nu} + p \rightarrow n + \bar{e} \end{aligned} \qquad (39\text{-}13)$$

El símbolo e representa al electrón (con carga -1), $\bar{e}$ representa al positrón (con carga $+1$), que es la antipartícula del electrón, ν representa al neutrino y $\bar{\nu}$ representa al *antineutrino*.

Hasta este punto habíamos reconocido un solo tipo de neutrino; en realidad existen dos, y uno es la antipartícula del otro*. Esta distinción puede parecer completamente formal, pero no lo es. Se ha confirmado, en experimentos sutiles, que el antineutrino, que es la antipartícula del neutrino, tiene la dirección de su espín o ímpetu angular intrínseco, a lo largo de la dirección de su ímpetu lineal. En el antineutrino, el sentido del espín es a favor de las manecillas del reloj, al verse por la parte de atrás, lo cual lo hace "derecho". Por otra parte, el ímpetu angular del neutrino y su ímpetu lineal están en direcciones opuestas, lo cual lo hace "izquierdo", y su espín gira contra las manecillas del reloj al observarse por atrás. Así, la naturaleza distingue entre el neutrino y el antineutrino. Esta falta de simetría (siendo el neutrino *sólo* izquierdo y el antineutrino *sólo* derecho) es una manifestación de la *no conservación de la paridad,* predicha por C. N. Yang y T. D. Lee, y confirmada experimentalmente en 1957 por C. S. Wu *et al.* El principio de que la naturaleza *no* distingue entre izquierdo y derecho, que es la conservación de la paridad, es violado en el decaimiento β (ver la Sec. 40-5).

En el proceso básico del decaimiento β^-, que es el decaimiento del neutrón en un protón, un electrón y un antineutrino, dado por la Ec. (39-13), ocurre en un *neutrón libre* y no en un neutrón ligado en un núcleo. El decaimiento es permitido energéticamente debido a que la masa del neutrón excede a la masa del protón y a la del electrón en 0.78 MeV/c^2. Se encuentra que la vida media de este decaimiento, en experimentos en extremo difíciles, es de 10.8 min. Debido a que el neutrón libre se absorbe tipicamente en menos de 10^{-3} s cuando pasa a través de los materiales, el decaimiento del neutrón, por lo general, no tiene importancia en las situaciones que involucran a neutrones libres.

El decaimiento β^+ básico, en el que un protón se convierte en un neutrón, un positrón y un neutrino, *no* está permitido, por la conservación de la energía, en protones libres. El decaimiento por positrones es posible sólo cuando los protones están ligados dentro del núcleo.

Por supuesto, la captura electrónica está muy relacionada cercanamente con el decaimiento β^+. Nótese que en la Ec. (39-13) la segunda reacción se transforma en la tercera reacción cuando el antielectrón se transfiere al miembro izquierdo, convirtiéndose entonces en un electrón. Aquí se sigue la regla general de que la emisión de una partícula es equivalente a la absorción de su antipartícula, y viceversa. Utilizando esta regla, junto con la inversión permitida de la flecha, se puede ver que las cuatro reacciones β son equivalentes.

*De hecho, la situación es aún más complicada: se asocia un neutrino y un antineutrino con el decaimiento β vía la emisión del electrón y del antielectrón. Otros neutrinos y antineutrinos diferentes está asociados con el decaimiento de las partículas elementales inestables conocidas con el nombre de muones (ver la Tabla 40-3).

La última reacción en la Ec. (39-13) es aquella en la que un antineutrino se combina con un protón para convertirse en un neutrón y en un positrón. Aunque la probabilidad relativa de la captura del neutrino es muy pequeña, esta captura fue observada directamente, con un flujo muy grande de neutrinos provenientes de un reactor nuclear; por C. L. Cowan y F. Reines en 1956, confirmando directamente la existencia del neutrino (en sentido estricto, del antineutrino). El antineutrino se identifica observando al neutrón y al positrón producidos en forma simultánea cuando el antineutrino es capturado por el protón; el neutrón se detecta observando el fotón emitido del núcleo excitado que ha absorbido al neutrón, y el positrón se detecta observando los fotones de aniquilamiento. La dificultad de este experimento puede apreciarse por el hecho de que el neutrino y el antineutrino tiene una sola oportunidad en 10^{12} de ser capturado al viajar a través de toda la Tierra. Debido a que los neutrinos tienen tan pequeña probabilidad de interactuar con la materia y de ser absorbidos, en el proceso de decaimiento β, se pierde efectivamente una fracción grande de la energía liberada.

39—7 LOS ACELERADORES DE PARTICULAS DE ALTAS ENERGIAS

Como las partículas constituyentes del núcleo están ligadas con energías de varios *millones* de electrón-volts, la estructura interna y el arreglo de los constituyentes nucleares pueden ser alterados, y la estructura del grupo estudiada, sólo si al núcleo se le comunican energías del orden de millones de electrón-volts. El método más directo para alterar la estructura del núcleo es el de bombardear blancos que contienen átomos (y por lo tanto núcleos) con partículas que han sido aceleradas hasta energías muy altas. El progreso en la física nuclear y en la física de las partículas elementales ha dependido, por lo tanto, de la invención y del diseño de máquinas que puedan acelerar partículas cargadas hasta energías cinéticas medidas en MeV, o aun en algunos cientos de GeV.

La motivación principal para construir tales aceleradores de muy alta energía es que las partículas pueden usarse para crear partículas inestables que no se encuentran fácilmente en la naturaleza y estas partículas pueden ser estudiadas. Por ejemplo, los antiprotones se crean con protones de 6 GeV que inciden sobre protones en reposo. Más aún, a medida que la energía y el ímpetu de una partícula aumenta, su longitud de onda $\lambda = h/p$ se reduce, así que, por ejemplo, un electrón de 20 GeV tiene una longitud de onda de menos de 10^{-16} m, en tanto que el tamaño nuclear típico es del orden de 10^{-14} m. De hecho, los electrones de alta energía pueden utilizarse para muestrear la distribución de carga eléctrica en un núcleo, o aun en un protón.

Todos los aceleradores de partículas cargadas están basados en el hecho de que una partícula cargada cambia su energía cuando

es actuada por un campo *eléctrico*. Un campo magnético *constante no* efectúa trabajo sobre una partícula en movimiento y no puede cambiar su energía; por otra parte, un campo magnético *variable* produce un campo eléctrico que a su vez puede acelerar a las partículas cargadas. Por lo tanto, todos los aceleradores de alta energía cambian la energía de las partículas cargadas sometiéndolas a un campo eléctrico que se obtiene ya sea directamente de partículas cargadas, o de modo indirecto mediante un campo magnético variable*.

Los dos tipos generales de aceleradores de partículas cargadas son los *aceleradores lineales* ("linacs")**, en los que las partículas se mueven a lo largo de una línea recta y los *aceleradores cíclicos*, en los que las partículas se mueven en trayectorias curvas y son recicladas. Ya hemos descrito los aspectos principales del acelerador lineal Van de Graff (ver la Sec. 23-6); acelera a las partículas mediante una diferencia de potencial *estática*. Las partículas con una sola carga pueden adquirir energías cinéticas hasta de casi 30 MeV y las partículas con carga múltiple pueden adquirir energías proporcionalmente más altas.

Para acelerar a las partículas hasta energías bastante altas en un acelerador lineal, se necesita que las primeras reciban aceleraciones *múltiples* de campos eléctricos a lo largo de la misma línea en la que viajan.

En el acelerador lineal del tipo de guía de onda, las ondas electromagnéticas de muy alta frecuencia se guían a lo largo de un tubo conductor y se puede pensar que las partículas cargadas viajan con las ondas, en tal forma que el campo eléctrico aumenta constantemente su energía cinética. Ver la Fig. 39-13, que muestra al linac de electrones de 20 GeV del Centro de Aceleradores Lineales de Stanford; la longitud de onda de los electrones de esta máquina es tan pequeña que con ellos se puede determinar la distribución de la carga eléctrica en un protón.

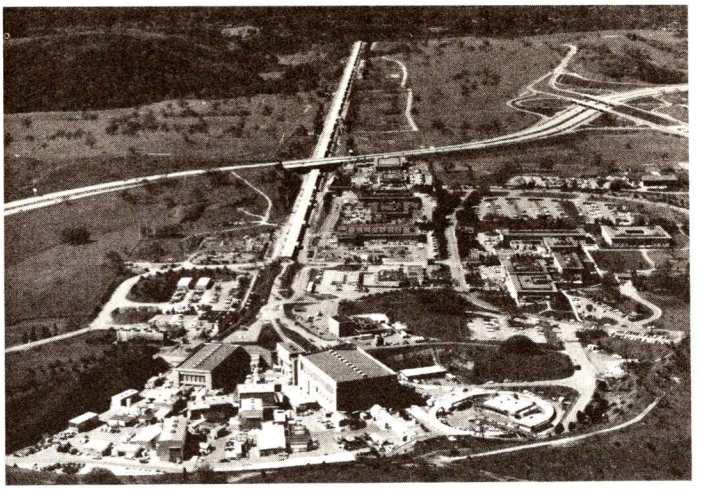
La clase de aceleradores conocidos como aceleradores cíclicos incluye al *ciclotrón*, al *sincrociclotrón* y al *sincrotrón*. En estas máquinas las partículas cargadas están restringidas a moverse en arcos circulares, mediante un campo magnético, y se les comunican aceleraciones múltiples.

La relación básica de una partícula de masa relativista m y carga Q, que se mueve perpendicularmente a un campo magnético B en un arco circular de radio r es

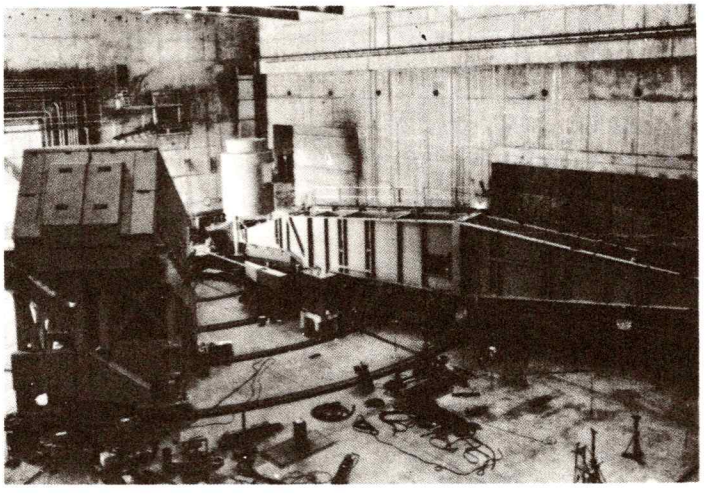
---

*Una máquina aceleradora que utiliza un campo magnético *variable* para producir un campo eléctrico es el *betatrón*, un acelerador de electrones de alta energía. No se discutirán sus características, ya que el betatrón no es, actualmente, una herramienta de investigación primaria en la física nuclear, sino que es un generador de rayos x.

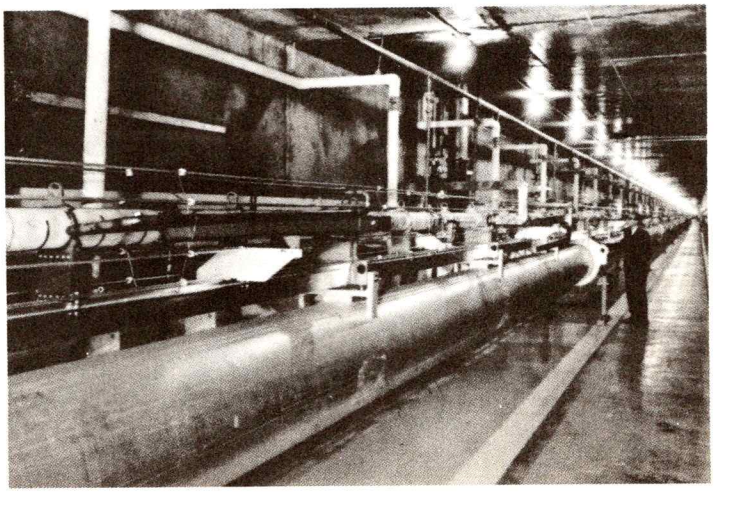
**De "*lin*ear *acc*elerators". (N. del T.)



(a)



(b)



(c)

FIG. 39-13. El acelerador lineal de electrones de 20 GeV de Stanford. (*a*) El área del blanco al final del acelerador de dos millas de longitud, en donde los electrones son desviados y analizados magnéticamente y se dirigen a dispositivos tales como las cámaras de chispas o de burbujas. (*b*) El área del blanco con el espectrómetro magnético de 8 GeV en primer plano y el espectrómetro de 20 GeV en la parte posterior. (*c*) Vista interior de la superficie de la envolvente del acelerador. (Cortesía del Centro de Aceleradores Lineales de Stanford, Universidad de Stanford.)

$$p = mv = QBr \qquad (35\text{-}10)$$

La velocidad angular ω de la partícula está dada por

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{Q}{m} B$$

y la frecuencia $f = \omega/2\pi$ del movimiento, que es el número de revoluciones por unidad de tiempo, está dada por

$$f = \frac{Q}{2\pi m} B \qquad (39\text{-}14)$$

Esta frecuencia se conoce con el nombre de *frecuencia de ciclotrón,* y la expresión se aplica a todos los aceleradores cíclicos Nótese que f depende de la relación entre la carga y la masa y la magnitud del campo magnético, pero no de la rapidez de la partícula o del radio de la trayectoria circular. Por lo tanto, todas las partículas de cierto tipo recorren las líneas de campo magnético con la misma frecuencia, sin importar las diferencias en su rapidez o en su energía. En sentido estricto, la frecuencia del ciclotrón es independiente de la energía cinética de la partícula sólo si la masa relativista m no difiere apreciablemente de la masa en reposo m_0.

La máquina cíclica más simple es el *ciclotrón,* inventado por E. O. Lawrence y M. S. Livingston en 1932. En este acelerador una partícula cargada está sujeta a un campo magnético *constante,* que la desvía en una trayectoria circular, mientras que es acelerada cada medio ciclo por un campo eléctrico.

Los iones positivos, tales como los protones los deuterones y las partículas α se introducen en la región central, en el punto C de la Fig. 39-14, entre dos conductores metálicos huecos, planos, en forma de D, (llamados "las *des*"). Entre las *des* se aplica un voltaje alterno de alta frecuencia que produce un campo eléctrico alterno en la región entre ellas. Durante el tiempo que la *de* izquierda es positiva y la *de* derecha es negativa los iones se aceleran hacia la derecha por el campo eléctrico entre las *des.* Al penetrar en el interior de la *de* derecha, quedan eléctricamente blindados del campo eléctrico y, por lo tanto, se mueven en un semicírculo con rapidez constante bajo la influencia de un campo magnético constante. Cuando salen de la *de* derecha, son aceleradas de nuevo a través de la separación entre ellas, si es que la *de* de la izquierda es ahora negativa. Esto requiere que la frecuencia del voltaje alterno aplicado a las *des* sea igual a la frecuencia orbital, o de ciclotrón, de los iones, que está dada por la Ec. (39-14). Durante cada aceleración los iones adquieren energía, se mueven con mayor rapidez y viajan en semicírculos de mayor radio. Conforme los iones siguen la espiral hacia afuera en las *des,* permanecen en resonancia con la fuente de ca, de frecuencia constante, siempre y

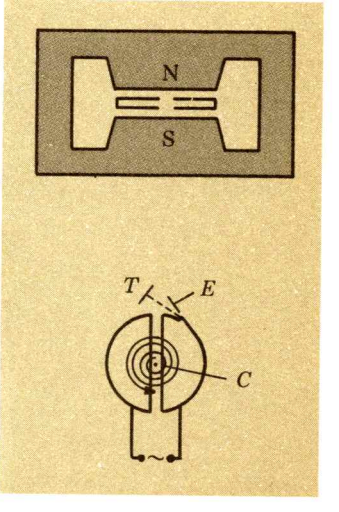


FIG. 39-14. Acelerador ciclotrón: (*a*) vista lateral; (*b*) vista superior.

cuando el tiempo que le tome a un ion moverse a través de 180° sea independiente de la rapidez o del radio, y esto se logra siempre y cuando la masa m en la Ec. (39-14) permanezca esencialmente igual a la masa en reposo. Cuando las partículas aceleradas llegan al perímetro de las *des,* son deflectadas por el campo eléctrico de una placa extractora E e inciden en el blanco T. Su energía cinética final E_c (cuando E_c es mucho menor que E_0, que es la energía en reposo) es

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{QBr_{\text{máx}}}{m}\right)^2 = \frac{Q^2B^2r_{\text{máx}}^2}{2m}$$

De aquí vemos que la energía cinética final de la partícula depende del cuadrado del radio de las *des* y del cuadrado del campo magnético B. Para alcanzar las energías más grandes posibles, las cantidades B y r_{max} deben hacerse lo más grandes posible. Al utilizar el mayor de los campos magnéticos obtenibles con hierro (alrededor de 2 Wb/m²), la frecuencia f, obtenida de la Ec. 39-14, es del orden de megahertz (radiofrecuencias). El diámetro de las *des,* que también es el diámetro de los polos del electroimán, puede ser de unos cuantos metros; se trata de un imán enorme (de 400 ton) y caro. El voltaje alternante típico a través de las *des* es de 200 KV.

Las partículas de masa considerable (protones, deuterones, y partículas α) pueden acelerarse en un ciclotrón hasta energías de casi 25 MeV. Las energías cinéticas finales de todos estos iones son mucho menores que sus energías en reposo (la energía en reposo de un protón es de aproximadamente 1 GeV). Por lo tanto, la masa no aumenta apreciablemente y las partículas, si son protones, permanecen en sincronía con el voltaje alterno hasta casi 12 MeV y si son deuterones, hasta casi 25 MeV. Los electrones pueden acelerarse con más facilidad hasta velocidades relativistas (su energía en reposo es de sólo 0.5 MeV); estas partículas ligeras no pueden sincronizarse con el voltaje aplicado, y por lo tanto, no se pueden acelerar a altas energías con un ciclotrón.

Un ciclotrón ordinario de frecuencia fija funcionará sólo si las energías cinéticas de las partículas aceleradas permanecen pequeñas con respecto a sus energías en reposo. La frecuencia de ciclotrón $f = (Q/2\pi m)B$ de las partículas orbitales es constante y está en resonancia con el campo eléctrico alterno entre las *des,* sólo si la masa relativista m es siempre esencialmente igual a la masa en reposo m_0. A medida que la rapidez y la energía cinética de una partícula aumentan, la masa relativista aumenta y su frecuencia de ciclotrón en un campo magnético constante disminuye. Por lo tanto, a medida que las partículas se mueven espiralmente hacia fuera en un ciclotrón con frecuencia y campo magnético constantes, se van retrasando poco a poco con respecto a la frecuencia

aplicada y finalmente llegan al espacio entre las *des* tan retrasadas que ya no son aceleradas con el campo eléctrico. Esta limitación se supera en el *sincrociclotrón,* en el que la frecuencia aplicada *disminuye* continuamente en tal forma que compensa la disminución en la frecuencia de ciclotrón de las partículas cuando aumenta su rapidez. Las partículas pueden, entonces, permanecer en sincronía con el campo eléctrico alterno.

Consideremos por último al *sincrotrón.* Para aumentar la energía cinética final de una partícula en una máquina aceleradora cíclica, se debe aumentar su ímpetu relativista final $p = QBr$. Existe un límite en la magnitud del campo magnético B que se puede obtener en regiones moderadamente grandes del espacio. Debido a las propiedades de los materiales magnéticos, B no puede ser mayor que aproximadamente, 2 Wb/m^2.* Por consiguiente, la única forma de aumentar en forma sustancial el ímpetu de la partícula y, por lo tanto, su energía cinética en una máquina cíclica, es haciendo el radio orbital final más grande. En un sincrociclotrón, la partícula se inicia en el centro de un electroimán y se mueve espiralmente hacia afuera, hacia su radio final; el electroimán produce el campo magnético en toda esta región. Así, si la energía final de la partícula en un sincrociclotrón debe aumentarse, el radio de la órbita final y, en consecuencia, el radio del electroimán debe aumentarse en forma correspondiente. Una máquina aceleradora de protones hasta casi 0.7 GeV tiene un diámetro de *des* de aproximadamente 5 m; para producir un campo magnético intenso en toda esta región interna se necesita de un electroimán de alrededor de 4 000 ton. Tamaños y energías mayores se vuelven económicamente insatisfactorios. Por lo tanto, se ha diseñado al sincrotrón, que utiliza campos magnéticos sólo en la región de un *radio orbital.*

Las partículas, preaceleradas hasta energías cinéticas relativamente altas, se inyectan al sincrotrón y a continuación se mueven en una órbita con radio *fijo.* Las relaciones básicas que gobiernan el movimiento de la partícula son

$$p = QBr \qquad (35\text{-}10)$$

$$f = \frac{Q}{2\pi m} B \qquad (39\text{-}14)$$

Como el radio r es fijo, el ímpetu de la partícula p aumentará sólo si aumenta el campo magnético B. Sin embargo, la Ec. 39-14 muestra que si B cambia, también lo hace la frecuencia f del campo eléctrico acelerador, con el que las partículas que orbitan

*Se pueden obtener campos magnéticos mayores con los superconductores, que son materiales que a bajas temperaturas tienen una resistencia eléctrica *cero*. Los imanes superconductores pueden emplearse en el futuro en las máquinas aceleradoras.

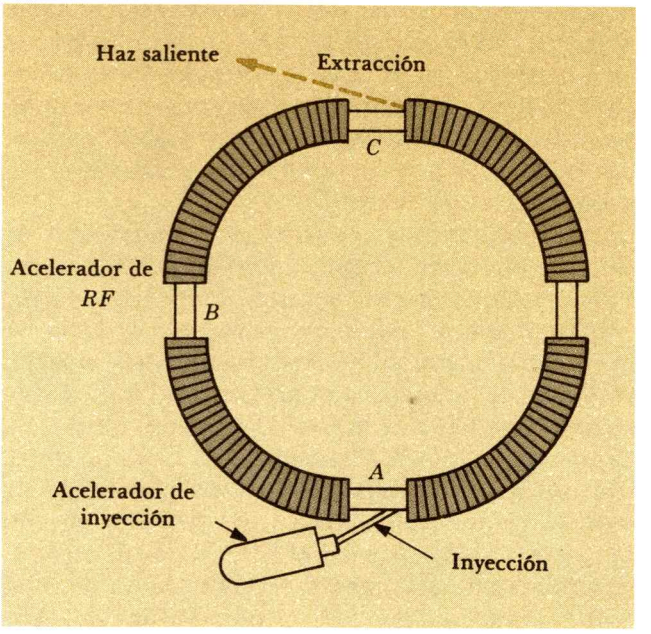


FIG. 39-15. Diagrama esquemático de un sincrotrón.

deben permanecer en sincronismo. Por lo tanto, en un acelerador sincrotrón, tanto el campo magnético como la frecuencia del campo eléctrico acelerador aumentan con el tiempo, a medida que

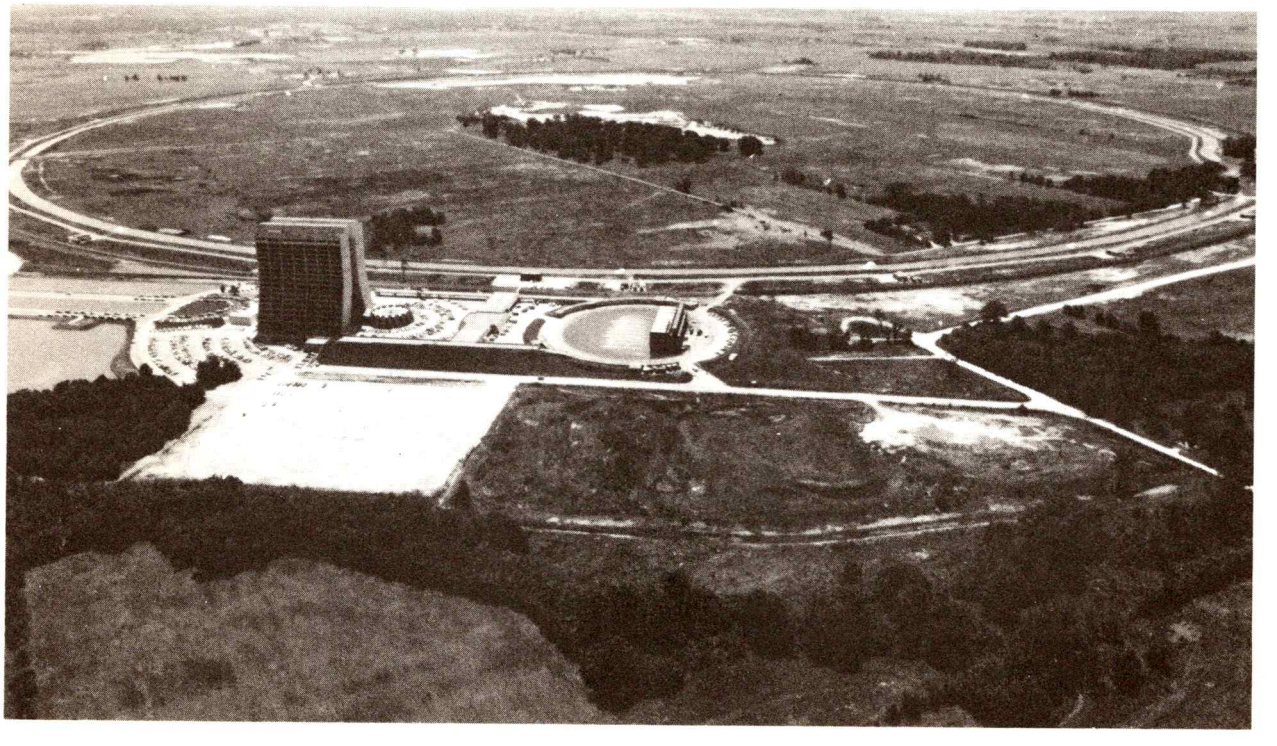


FIG. 39-16. Vista áerea del acelerador principal del Laboratorio Nacional de Aceleradores de Fermi en Batavia, Illinois. El sincrotrón tiene un diámetro de 1.24 millas y acelera protones hasta más de 500 GeV. (Cortesía del Laboratorio Nacional de Aceleradores de Fermi).

la partícula se acelera, moviéndose en un círculo de radio fijo, y ganando energía cinética.

La Fig. 39-15 muestra esquemáticamente las partes principales de un sincrotrón de protones, y la Fig. 39-16 es una fotografía de uno de ellos. Los protones se aceleran primero a una energía de varios MeV, mediante un linac que sirve como inyección al acelerador. Entonces entran en un tubo evacuado en forma de toroide, que no tiene más de un metro de dimensión transversal, y que está contenido en un electroimán que produce un campo magnético deflector en el tubo y en su vecindad, pero no en los puntos interiores. La energía es suministrada a las partículas una vez en cada revolución mediante una diferencia de potencial eléctrica alternante suministrada por una fuente variable de radiofrecuencia. A medida que las partículas aumentan su rapidez, su ímpetu y su energía cinética en órbitas sucesivas, la magnitud del campo magnético deflector y la frecuencia del campo eléctrico acelerador aumentan con el tiempo, de tal forma que las partículas continúan viajando en una trayectoria de radio constante y llegan en el tiempo justo a la zona donde se les suministra energía para una aceleración posterior. Después de que el campo magnético ha alcanzado su magnitud máxima y las partículas, su máxima energía cinética, éstas son deflectadas e inciden en un blanco externo. En la Fig. 39-16 se muestra una vista del sincrotrón de 500 GeV construido en el Laboratorio Nacional de Fermi, en Batavia, Ill.

39—8 LAS REACCIONES NUCLEARES

Los núcleos inestables decaen espontáneamente, cambiando su estructura nuclear, sin influencia externa. Sin embargo, se puede inducir un cambio en la identidad o en las características de los núcleos bombardeándolos con partículas energéticas. Este cambio se conoce con el nombre de *reacción nuclear*.

Se han producido e identificado miles de reacciones nucleares desde que Rutherford observó la primera en 1919. Las partículas proyectil fueron, hasta el desarrollo de los aceleradores de partículas cargadas en la década de 1930, aquellas emitidas por las sustancias radiactivas. Ahora es posible acelerar partículas cargadas a energías de cientos de GeV. Cuando las partículas de tan gran energía inciden en un núcleo, los perturban severamente y crean nuevas y extrañas partículas. Estas reacciones de alta energía y las partículas que participan en ellas, se discutirán en el Cap. 40.

Por el momento se tratarán las reacciones nucleares de *baja energía*, que son reacciones en las que las partículas incidentes tienen energías no mayores que, digamos, 20 MeV e ilustraremos varios tipos de reacciones nucleares mediante ejemplos que han sido importantes en la historia de la física nuclear.

En la primera reacción nuclear observada (1919), Rutherford utilizó partículas α de 7.68 MeV provenientes del elemento radiactivo natural $^{214}_{84}$Po. Cuando las partículas α se dirigieron a través de

un gas de nitrógeno, la mayoría de ellas pasaron sin deflección a través de los núcleos, o fueron dispersadas elásticamente en encuentros cercanos con ellos. Sin embargo, Rutherford encontró que en algunas colisiones (alrededor de 1 en 50 000) se producían protones, según la reacción nuclear

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{17}_{8}\mathrm{O}$$

En esta reacción, una partícula α incide en un núcleo de nitrógeno 14, produciendo un protón y un núcleo de oxígeno 17. Que las partículas emitidas en esta reacción son protones se puede establecer midiendo la relación de su carga a su masa, utilizando un campo magnético. La reacción representa una *transmutación inducida* del elemento nitrógeno a un isótopo estable del oxígeno; el decaimiento α- (o el β) representa, naturalmente, la *transmutación espontánea* de un elemento en otro.

Las leyes de la conservación de la carga eléctrica y de los nucleones se satisfacen en todas las reacciones nucleares; por lo tanto, los presubíndices, que indican la carga eléctrica de las partículas y los presuperíndices, que indican el número de nucleones en cada partícula, se suman para obtener la misma cantidad en ambos miembros de la ecuación. La reacción puede escribirse, en forma abreviada de la siguiente manera:

$$^{14}_{7}\mathrm{N}(\alpha, p)^{17}_{8}\mathrm{O}$$

en donde las partículas ligeras que intervienen en la reacción se escriben en paréntesis entre los símbolos del blanco y del núcleo producido.

Hasta 1932, todas las reacciones nucleares fueron producidas por las partículas α de energías relativamente altas o por rayos γ de materiales radiactivos naturales. En ese año, J. D. Cockcroft y E. T. S. Walton, usando un acelerador de 500 KeV, observaron la primera reacción nuclear producida por partículas cargadas aceleradas en forma artificial. Ellos encontraron que se emitían partículas α cuando un blanco de litio era atacado por protones con energías de 500 KeV, según la reacción

$$^{7}_{3}\mathrm{L} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

$$^{7}_{3}\mathrm{Li}(p, \alpha)^{4}_{2}\mathrm{He}$$

Las partículas α emitidas tenían una energía cinética total de 17.9 MeV; por lo tanto, a la reacción han entrado 0.5 MeV de energía y se han desprendido 17.8 MeV en forma de energía cinética de las partículas salientes. La energía desprendida corresponde exactamente al exceso de la masa en reposo del litio 7 y un protón con respecto a 2 partículas α. Se trata de un ejemplo

notable del desprendimiento de energía nuclear. Por supuesto que la cantidad total de energía desprendida no fue considerable, debido a que la mayoría de las colisiones entre los protones incidentes y los núcleos del blanco *no* resultaron en desintegraciones nucleares.

En las dos reacciones recién descritas, los núcleos producto fueron estables. La primera reacción nuclear que condujo a un núcleo producto inestable fue observada por I. Joliot-Curie y por F. Joliot en 1934. En esta reacción las partículas α incidían en un blanco de aluminio produciéndose la reacción

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{30}_{15}\mathrm{P}$$
$$^{27}_{13}\mathrm{Al}(\alpha, n)^{30}_{15}\mathrm{P}$$

El nucleido producto no es estable, sino que decae con una vida media de 2.6 min en un isótopo estable del silicio mediante la emisión β^+:

$$^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + \beta^+ + \nu$$

en donde ν es un neutrino. La producción de nucleidos inestables, que se desintegran espontáneamente por las leyes del decaimiento radiactivo, es una característica de muchas de las reacciones nucleares. Se dice que los nucleidos exhiben *radiactividad artificial*. De hecho, las reacciones nucleares son el único procedimiento para obtener de modo artificial isótopos radiactivos o *radioisótopos*. Los radioisótopos son químicamente idénticos a los isótopos estables del elemento. Si se añade una pequeña cantidad de radioisótopos a los nucleidos estables del mismo elemento, éstos pueden servir, a través de su actividad, como *trazadores* del elemento; esto es, la presencia de una concentración del elemento puede determinarse midiendo la actividad del radioisótopo.

El descubrimiento del neutrón fue resultado de una reacción nuclear observada, en 1930, por W. Bothe y H. Becker, que consistió en bombardear berilio con partículas α.

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{12}_{6}\mathrm{C}$$
$$^{9}_{4}\mathrm{Be}(\alpha, n)^{12}_{6}\mathrm{C}$$

Los neutrones se emiten en muchas reacciones nucleares y pueden utilizarse asimismo como partículas proyectil. Una de las reacciones importantes producidas por neutrones es aquella en la que el neutrón es capturado por el núcleo que sirve como blanco y se emite un fotón de rayos γ. Esta reacción se conoce como *captura radiactiva* de neutrón. Por ejemplo,

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{1}_{0}n \rightarrow \gamma + {}^{28}_{13}\mathrm{Al}$$
$$^{27}_{13}\mathrm{Al}(n, \gamma)^{28}_{13}\mathrm{Al}$$

El núcleo producto, que es un isótopo inestable del núcleo bombardeado decae mediante decaimiento β^-:

$$^{28}_{13}\mathrm{Al} \rightarrow {}^{28}_{14}\mathrm{Si} + \beta^- + \bar{\nu}$$

en donde $\bar{\nu}$ es el antineutrino.

Como el neutrón no tiene carga eléctrica, el proceso de captura radiactiva del neutrón puede ocurrir cuando un neutrón de cualquier energía incide en (casi) cualquier núcleo; el isótopo, más pesado, así producido a menudo es radiactivo y la absorción de neutrones es, por lo tanto, un procedimiento común para producir radioisótopos.

Otro tipo importante de reacción que resulta del bombardeo con neutrones es aquél en el que se emite una partícula cargada, tal como un protón o una partícula α. Tal reacción proporciona un método para detectar neutrones debido a que las partículas cargadas emitidas producen ionización detectable. Una de las reacciones utilizadas frecuentemente en la detección de neutrones es

$$^{10}_{5}\mathrm{B} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{7}_{3}\mathrm{Li}$$
$$^{10}_{5}\mathrm{B}(n, \alpha)^{7}_{3}\mathrm{Li}$$

La fotodesintegración es la reacción nuclear en la que la absorción de un fotón de rayos γ resulta en la desintegración del núcleo absorbedor. Un ejemplo de esta reacción es

$$^{25}_{12}\mathrm{Mg} + \gamma \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{24}_{11}\mathrm{Na}$$
$$^{25}_{12}\mathrm{Mg}(\gamma, p)^{24}_{11}\mathrm{Na}$$

seguida de $^{24}_{11}\mathrm{Na} \rightarrow {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + \beta^- + \bar{\nu}$.

La fisión nuclear es un tipo especial de reacción nuclear de baja energía. En esta reacción un neutrón de baja energía es capturado por un núcleo muy pesado y el agregado resultante se separa en dos núcleos moderadamente pesados y unos cuantos neutrones. Por ejemplo, el isótopo 235 del uranio puede sufrir una fisión al capturar a un neutrón según las reacciones

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{144}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{89}_{36}\mathrm{Kr} + 3\ {}^{1}_{0}n$$

o

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{94}_{38}\mathrm{Sr} + 2\ {}^{1}_{0}n$$

Cada uno de los fragmentos de la fisión, moderadamente pesados, tiene una energía cinética de hasta 100 MeV. Se desprende aún más energía conforme los fragmentos de alta inestabilidad decaen, sobre todo mediante la emisión de electrones. Nótese que además de los fragmentos, se producen dos o más neutrones en la reacción de fisión. Estos neutrones pueden iniciar otras reacciones de fisión, siempre y cuando el material fisionable que lo rodea tenga una masa crítica para automantener una reacción nuclear en cadena.

No sólo mediante la división de los núcleos más pesados en núcleos más pequeños se produce un desprendimiento relativamente grande de energía; esto ocurre también en la fusión de dos núcleos ligeros en una especie de mayor masa. Este resultado es inmediato del hecho de que la energía de amarre por nucleón es mayor en los nucleidos de masa intermedia (ver la Fig. 39-5). Un ejemplo del proceso de fusión nuclear, una reacción termonuclear que desprende energía en el Sol y en las estrellas semejantes, es el ciclo entre dos protones:

$$
\begin{aligned}
{}^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} &\rightarrow {}^2\mathrm{H} + \beta^+ + \nu \\
{}^1\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} &\rightarrow {}^3\mathrm{He} + \gamma \\
{}^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He} &\rightarrow {}^4\mathrm{He} + 2\ {}^1\mathrm{H}
\end{aligned}
$$

Este ciclo, que tiene tres reacciones nucleares distintas funde cuatro protones en una partícula α, dos positrones y dos neutrinos. La energía por nucleón desprendida es mayor en aproximadamente un orden de magnitud a la de las reacciones de fisión.

Las reacciones de fusión nuclear pueden ocurrir sólo si las partículas participantes, con carga positiva, se aproximan una a la otra hasta distancias del orden del alcance de las fuerzas nucleares, a pesar de la repulsión mutua debida a las fuerzas de Coulomb. Esto implica que las partículas se encuentran en estado gaseoso (o mas estrictamente, en un *plasma* de partículas con cargas positiva y negativa) a temperaturas, cuando menos, del orden de 10^7 K; se trata, por lo tanto, de reacciones *termonucleares*. Aunque la fisión nuclear se ha utilizado como una fuente práctica de energía durante muchos años, los esfuerzos para obtener una fusión nuclear controlada como fuente de energía, basada en materiales combustibles prácticamente inacabables, se han visto frustrados.

RESUMEN

Tabla 39—1. Propiedades de los constituyentes nucleares

Propiedad	*Protón*	*Neutrón*
Masa, u	1.007277	1.008665
Carga, e	1	0
Espín, $\hbar$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Propiedades de la Fuerza Nuclear

Es atractiva y mucho mayor que la fuerza coulombiana

Es de corto alcance, ≈ 3 fermi (3×10^{-15} m)

Es independiente de la carga; las tres interacciones entre nucleones *np*, *pp*, y *nn*, son aproximadamente iguales.

Nomenclatura

Nucleón: protón o neutrón

Número atómico Z: número de protones

Número neutrónico N: número de neutrones

Número de masa A: número total de nucleones ($Z + N$)

Nucleido: núcleo con un valor particular de Z y de N

Isótopos: nucleidos con la misma Z

Isótonos: nucleidos con la misma N

Isóbaros: nucleidos con la misma A

Propiedades de los nucleidos

Núcleos estables: $N \approx Z$ para pequeños valores de A, y $N > Z$ para valores grandes de A.

El radio nuclear está dado por $R = r_0 A^{1/3}$, en donde $r_0 = 1.4$ fermi. Todos los núcleos tienen la misma densidad nuclear.

Cuando $A > 20$, la energía de amarre promedio por nucleón es de aproximadamente 8 MeV/nucleón.

En el decaimiento de los núcleos inestables se satisfacen las leyes de la conservación de la carga eléctrica, del número de nucleones de la masa-energía y del ímpetu.

Tabla 39-2. Modos de decaimiento radiactivo

	Alfa (núcleo de helio)	*Beta* (electrón, positrón)	*Gamma* (fotón)
Vidas medias	10^{-6} s a 10^{10} años	$> 10^{-2}$ s	10^{-17} a 10^{5} s (isómero)
Energías	4 a 10 MeV	unos cuantos MeV	keV a unos cuantos MeV
Modo de decaimiento	${}^{A}_{Z}\mathrm{P} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{D} + {}^{4}_{2}\alpha$	β^-: ${}^{A}_{Z}\mathrm{P} \rightarrow {}_{Z+1}{}^{A}\mathrm{D} + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$ β^+: ${}^{A}_{Z}\mathrm{P} \rightarrow {}_{Z-1}{}^{A}\mathrm{D} + {}^{0}_{+1}e + \nu$ EC: ${}^{0}_{-1}e + {}^{A}_{Z}\mathrm{P} \rightarrow {}_{Z-1}{}^{A}\mathrm{D} + \nu$	${}^{A}\mathrm{Z}^{*} \rightarrow {}^{A}\mathrm{Z} + \gamma$
Distribución de energía de los productos de decaimiento	Mono energéticas	β^- y β^+: polienergética C. E: Monoenergética	Monoenergética

La ley del decaimiento radiactivo es $N = N_0 e^{-\lambda t}$, en donde la constante de decaimiento λ, que es la probabilidad por unidad de tiempo de que decaiga un núcleo cualquiera, está relacionada con la vida media mediante $T_{1/2} = 0.693/\lambda$.

Propiedades del Neutrino

Masa: 0
Carga: 0
Espín: $\frac{1}{2}$
Captura de neutrino: $\bar{\nu} + p \rightarrow n + \beta^+$

Las relaciones básicas que gobiernan la operación de los aceleradores cíclicos, tales como el ciclotrón y el sincrotrón, son la frecuencia de ciclotrón

$$f = \frac{Q}{2\pi m} B \qquad (39\text{-}14)$$

y la expresión del ímpetu relativista

$$p = mv = QBr \qquad (35\text{-}10)$$

PROBLEMAS

Ver el Apéndice IV para los valores de las masas atómicas.

39-1. Demostrar que en un experimento de dispersión elástica de un protón con otro, o de un neutrón con un protón, ninguna partícula es dispersada de la dirección de incidencia en más de 90° (considerese que las masas del protón y del neutrón son iguales y supóngase que la energía cinética de la partícula incidente es pequeña comparada con su energía en reposo).

39-2. Demostrar que si un protón choca frontalmente contra otro protón, inicialmente en reposo, las dos partículas intercambian sus velocidades; esto es, el protón que inicialmente se encontraba en movimiento queda en reposo en tanto que el otro protón adquiere toda la velocidad del que incide sobre él.

39-3. Un protón de 5.0 MeV choca frontalmente contra un neutrón de 5.0 MeV y se produce un deuterón. (*a*) ¿Cuál es la energía del fotón emitido? (*b*) ¿Con qué energía cinética retrocede el deuterón al emitir al fotón? Tómense como iguales a las masas del neutrón y del protón.

39-4. Un protón y un neutrón se aproximan con una rapidez relativa muy pequeña, hasta que se atraen mutuamente mediante una fuerza nuclear. Cuando las partículas forman a un deuterón en su estado básico se emite un fotón. ¿Cuál es la energía de este fotón?

39-5. (*a*) Demostrar que un nucleido con Z par generalmente tiene más isótopos estables que un nucleido con Z impar. (*b*) Entre el $^{16}_{8}O$ y $^{32}_{16}S$ existe un isótopo estable por cada nucleido con Z impar y 3 isótopos estables por cada nucleido con Z par. Explicar este efecto en términos de la forma en que se llenan las capas de neutrones y de protones.

39-6. (*a*) ¿Cuánta energía se necesita para desprender a un protón de un núcleo de $^{12}_{6}C$, dejando un

núcleo de $^{11}_{5}B$? (*b*) ¿Cuánta energía se necesita para separar a un neutrón del $^{12}_{6}C$, dejando un núcleo de $^{11}_{6}C$?

39-7. La actividad de cierto material radiactivo disminuye por un factor 10 en un intervalo de tiempo de 1 min. ¿Cuál es la constante de decaimiento de este radionucleido?

39-8. Se sabe que el carbono presente en la atmósfera es radiactivo, debido a la presencia del $^{14}_{6}C$. Antes del advenimiento de las armas nucleares, la actividad específica del carbono atmosférico era de 15.3 desintegraciones/(g)(min). La vida media del $^{14}_{6}C$ es de 5.74×10^3 años. (*a*) ¿Qué proporción del carbono atomosférico es de $^{14}_{6}C$? (*b*) La actividad del carbono en ciertas reliquias biológicas es de 2.5 desintegraciones/g)(min). ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde la muerte de este espécimen?

39-9. (*a*) Demostrar que la vida promedio T_{av} de un radionucleido que tiene una constante de decaimiento λ esta dada por

$$T_{av} = \frac{\int_{N_0}^{0} t\, dN}{\int_{N_0}^{0} dN} = \frac{1}{\lambda}$$

(*b*) De un grupo de átomos radiactivos con la misma constante de decaimiento, algunos sobrevivirán al decaimiento por un periodo de tiempo esencialmente infinito. Sobre esta base, demostrar que la vida promedio de las especies debe exceder a la vida media y demostrar que la vida promedio siempre excede a la vida media en 44%.

39-10. La constante de decaimiento o vida media, de un material radiactivo de larga duración puede determinarse midiendo la actividad A de un número N conocido de núcleos inestables, en vez de hacerlo notando la disminución de la actividad con el tiempo. (Como λ es muy pequeña y $T_{1/2}$ es muy grande, ni A ni N cambian significativamente en periodos de tiempo moderados). Demostrar que la constante de decaimiento está dada, entonces, por $\lambda = A/N$.

39-11. Un núcleo de $^{8}_{4}Be^{*}$ puede decaer a su estado básico mediante la emisión de un rayo γ de 17.6 MeV. ¿Con qué energía cinética retrocede? (El núcleo del berilio 8 es muy inestable y decae rápidamente en dos partículas α).

39-12. Un núcleo es inestable ante el decaimiento α y la energía total desprendida en el decaimiento del núcleo es Q (*a*) Demostrar que la masa atómica neutra del núcleo primitivo debe exceder a la del producto y a la de la partícula α por Q/c^2 (suponiendo que el decaimiento α es al estado básico nuclear del núcleo producto). (*b*) Demostrar que si el núcleo que decae está inicialmente en reposo, la energía cinética de la partícula α emitida es igual a $(A - 4)\, Q/A$, en donde A es el número de nucleones del núcleo primitivo.

39-13. Demostrar que de dos isóbaros vecinos (cuya Z y cuya N difieren en 1), uno debe ser inestable con respecto al decaimiento β

39-14. (*a*) Demostrar que si un nucleido va a sufrir un decaimiento por positrón, la masa atómica neutra del núcleo primitivo debe ser superior a la del núcleo producto por la masa de dos electrones. (*b*) Demostrar que si un nucleido particular sufre un decaimiento por positrón, entonces es siempre energéticamente posible que el mismo núcleo sufra una captura electrónica.

39-15. El nucleido $^{7}_{4}Be$ decae $^{7}_{3}Li$ por captura electrónica. (*a*) Demostrar, comparando las masas de los nucleidos, que la energía total desprendida en el decaimiento es de 0.86 MeV. (*b*) ¿Cuál es la energía aproximada del neutrino emitida en el decaimiento? (*c*) ¿Cuál es el ímpetu del neutrino? (*d*) ¿Con qué ímpetu retrocede el núcleo de $^{7}_{3}Li$ (*e*) ¿Con qué energía cinética retrocede el núcleo de $^{7}_{3}Li$

39-16. ¿Cuál es la energía mínima que puede tener un antineutrino para que, al ser capturado por un protón, se produzca un neutrón y un positrón?

39-17. ¿Cuál es la energía cinética máxima posible de un electrón emitido en el decaimiento del $^{14}_{6}C$?

39-18. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de diseño para deuterones en un ciclotrón con *des* de 1.0 m de diámetro y un campo magnético de 1.0 Wb/m²? (*b*) ¿Cuál es la energía cinética máxima que se puede obtener con tal ciclotrón?

39-19. Un ciclotrón se ajusta para acelerar protones. (*a*) Si la frecuencia de ciclotrón se mantiene fija, ¿por qué factor debe cambiar el campo magnético para permitir que la máquina acelere deuterones? (*b*)

¿Cuál es la relación entre la energía máxima de los deuterones y la de los protones (suponer que la masa del deuterón es el doble de la del protón)?

39-20. En el acelerador lineal de electrones de 20 GeV de la Universidad de Stanford, los electrones se aceleran de 30 MeV a 20 GeV a lo largo de un tubo acelerador de 2 mi. (*a*) En qué porcentaje es menor que *c* la rapidez del electrón? (*b*) ¿Cuál es la longitud total del tubo acelerador medida por un observador que viaja con el electrón de 20 GeV? (*c*) El haz de electrones en el blanco tiene una corriente electrónica de 15 μA y una potencia de 0.50 MW. ¿Cuál es el número promedio de electrones que inciden, por segundo, en el blanco?

39-21. Los protones de un acelerador lineal se inyectan a 50 MeV en el sincrotrón del CERN (que es el centro de investigaciones nucleares de Europa, cercano a Ginebra, Suiza). Los protones salen con energías cinéticas de 30 GeV. ¿En qué porcentaje se aumenta la rapidez del protón por el sincrotrón?

39-22. ¿En qué forma es posible que decaigan los productos inestables de las siguientes reacciones (*a*) (n, γ), (*b*) (p, n), (*c*) (d, p) y (*d*) (α, n)?

39-23. Imaginemos un sincrotrón de protones que tiene un diámetro igual al de la Tierra (126×10^4 km) y un campo magnético máximo de 1.6 Wb/m^2; el campo guía a los protones a lo largo de una trayectoria circular en torno a la Tierra. (*a*) ¿Cuál es la energía cinética máxima de este acelerador, que sería la energía "final" de un acelerador limitado por la Tierra (basado en elementos de diseño convencionales)? (*b*) El sincrotrón de protones de 500 GeV de Batavia, Ill., tiene un costo de aproximadamente 250 millones de dólares; suponiendo, por simplicidad, en forma conservadora, que el costo de un acelerador es proporcional a la energía cinética de las partículas aceleradas (o, en forma equivalente, al radio de la órbita), calcular el costo aproximado de este acelerador "final" en unidades del producto nacional bruto de los Estados Unidos en 1970 (aproximadamente 10^{12} dólares). (*c*) ¿En qué fecha aproximada podría alcanzarse la energía máxima, según la extrapolación de los siguientes hechos: empezando con una máquina para partículas de 1 MeV en 1932, el desarrollo de los aceleradores de alta energía ha avanzado de tal forma que la energía máxima obtenible de las partículas se ha aumentado por un factor de 20 en una década?

39-24. Verificar, utilizando las masas atómicas, que la energía desprendida en la reacción ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}(p, \alpha){}^{4}_{2}\mathrm{He}$ es de 17.9 MeV.

39-25. Antes de que Chadwick hubiera identificado apropiadamente al neutrón en 1932, se pensaba que el bombardeo del ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$ con partículas α conducía a la reacción ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}(\alpha, \gamma){}^{13}_{6}\mathrm{C}$. Se encontró que cuando la radiación penetrante del bombardeo incidía en parafina, se emitían protones con energías de 5.7 MeV. (*a*) Demostrar que, si se supone que los protones han obtenido su energía de colisiones Compton, la energía de los fotones de rayos γ debe ser de 55 MeV. (*b*) Chadwick encontró que, mientras que la radiación penetrante producía protones con energía de 5.7 MeV, la misma radiación que incidía en átomos de nitrógeno impartía una energía de 1.4 MeV a los átomos de nitrógeno. Aplicando las leyes de conservación del ímpetu y de la energía en una colisión frontal entre una partícula de la radiación penetrante (en realidad, un neutrón) con un protón y un átomo de nitrógeno, cuyas masas se encuentran en la relación 1:14, pero cuyas energías cinéticas se encuentran en la relación de 5.7: 4, demostrar que la masa del neutrón es esencialmente la misma que la masa del protón.

39-26. Escribir cuando menos tres reacciones nucleares en las que los blancos, hechos con nucleidos estables, pueden utilizarse para producir (*a*) nitrógeno 13 (*b*) neón 21 y (*c*) hierro 57.

39-27. Definición de la *sección transversal.* El decaimiento de los núcleos inestables está dado por $N = N_0 e^{-\lambda t}$ [Eq. (39-9)]; el número N de núcleos que sobreviven en un sitio decrece exponencialmente con el tiempo porque, para los núcleos inestables, un instante de tiempo es como cualquier otro. Se aplica una relación análoga a la disminución en el espacio del número de partículas en un haz (a lo largo de la dirección en la que viajan, en cualquier instante de tiempo) que pasa a través de un material, debido a la separación de las partículas incidentes de la dirección de avance por dispersión o por reacción nuclear: dentro de un material que sirve de blanco, que contiene un número grande de partículas blanco, una localización es como cualquier otra. El número N de partículas que sobreviven en el haz una distancia x, medida desde la superficie frontal del material del blanco, está dado por $N = N_0 e^{-\mu x}$, en donde μ, que se conoce como *coeficiente de absorción,* es una constante para un blanco dado. (*a*) ¿A qué distancia de la

superficie frontal de un material blanco ha disminuido por un factor $(1/e)$ el número de partículas? (*b*) Como la constante μ debe ser proporcional, en cada material, al número ρ de partículas del blanco por unidad de volumen, podemos escribir $\mu = \rho\sigma$, en donde σ es una constante para un material dado. Demostrar que σ debe tener dimensiones de área. De hecho a σ se le conoce como la *sección transversal* del proceso que elimina a las partículas del haz incidente; representa el área efectiva presentada por una partícula del blanco a la partícula incidente en el haz. (*c*) Demostrar que en un blanco suficientemente delgado, el número fraccional de partículas incidentes eliminadas de la dirección de avance del haz es igual a $\sigma\rho t$, en donde t es el ancho del blanco.

39-28. Dos núcleos de helio, cada uno con una energía cinética de 20 MeV, chocan frontalmente y producen la reacción ${}_2^4\mathrm{He}(\alpha,p){}_3^7\mathrm{Li}$. ¿Cuál es la energía cinética de los protones que salen de la reacción?

39-29. Demostrar que en una reacción nuclear de fisión se desprenden aproximadamente 200 MeV, considerando la energía de amarre promedio por nucleón de los fragmentos y del núcleo fisionable (ver la Fig. 39-5).

39-30. Suponer que en una fisión nuclear, el núcleo inestable se divide en dos fragmentos de casi la misma masa y que la relación entre neutrones y protones en los fragmentos es igual que en el núcleo fisionable. Demostrar que los fragmentos son muy inestables ante el decaimiento β y que decaen principalmente por emisión de electrón. (Sugerencia: ver la Fig. 39-4.)

39-31. Un núcleo de ${}_{94}^{240}\mathrm{Pu}^*$ decae en los framentos de fisión ${}_{56}^{144}\mathrm{Ba}$ y ${}_{38}^{94}\mathrm{Sr}$. Suponer que los dos fragmentos son esféricos y que se están tocando inmediatamente después de su formación. (*a*) ¿Cuál es la energía potencial coulombiana (en MeV) del par de fragmentos? (*b*) Comparar esta energía coulombiana con la energía total desprendida en el proceso de fisión.

39-32. (*a*) Demostrar que la energía desprendida en el ciclo de dos protones, dada en la Sec. 39-8, es aproximadamente 25 MeV. (*b*) ¿Cuál es la relación de la energía por nucleón desprendida en este conjunto de reacciones, a aquella de una reacción de fisión típica (200 MeV)?

39-33. En total, existen aproximadamente 10^{21} kg de agua en la Tierra, con una molécula de D_2O por cada 6 000 moléculas de H_2O Suponiendo que todo el deuterio se utilizara en la reacción de fusión ${}_1^2\mathrm{H}(d,\ p){}_1^3\mathrm{H}$, ¿cuál es la cantidad total de energía que puede extraerse?

39-34. Las reacciones de fusión termonuclear pueden ocurrir con alta probabilidad sólo si las partículas en el plasma chocan con una energía cinética suficiente como para que las partículas se aproximen hasta distancias de separación comparables con el intervalo en el que actúan la fuerzas nucleares. ¿A qué temperatura T la energía cinética promedio por partícula $\frac{3}{2}kT$ será igual a la energía potencial eléctrica ke^2/r entre dos protones separados por una distancia r, en donde r es el intervalo de la fuerza nuclear?

39-35. Aproximadamente el 10% de los 25 MeV desprendidos en el ciclo entre dos protones es transportado por los neutrinos emitidos en cada ciclo. La intensidad de la radiación del Sol en la superficie de la Tierra es de 1.4 kW/m²; la distancia de la Tierra al Sol es de 1.5×10^{11} m. (*a*) ¿Cuál es el ritmo al que se producen neutrinos en el interior del Sol por las reacciones de fusión termonucleares? (*b*) ¿Cuál es el flujo (número/ m²-s) de neutrinos en la superficie de la Tierra? (*c*) ¿Cuál es la densidad en la superficie de la Tierra (número/ m³) de neutrinos que se originan en el Sol?

Capítulo

40

LAS PARTICULAS ELEMENTALES

Las investigaciones humanas para determinar los constituyentes finales en la naturaleza se remontan a la noción griega de los cuatro elementos: la tierra, el agua, el aire y el fuego (y un posible quinto elemento etéreo, llamado "quintaesencia") que se suponía eran los componentes básicos de todos los demás materiales. Después surgieron las ideas de los elementos químicos, de las moléculas y de los átomos y, finalmente, de partículas en los átomos y aun dentro del núcleo. La esperanza final en la investigación de las partículas elementales es que, si se ha identificado a las verdaderas partículas elementales (que se espera que sean unos cuantos tipos distintos) y se han aprendido las reglas mediante las cuales unas afectan a las otras, entonces el resto de la física será un ejercicio directo, aunque posiblemente muy difícil. En la actualidad, toda la química, incluyendo las propiedades químicas y la tabla periódica, está implícita en la descripción de la mecánica ondulatoria de la estructura atómica.

Sin embargo, no hemos llegado al final y posiblemente nunca lo haremos. Actualmente, existen muchas partículas que, en cierto sentido, se consideran como elementales y pueden agruparse en formas diferentes para establecer patrones coherentes; pero los físicos no han podido establecer aún el gran patrón. De hecho, la motivación principal para construir máquinas aceleradoras de energías cada vez mayores, es la de producir más partículas y estudiar las propiedades de las que ya se han identificado. Por lo tanto, la física de las partículas elementales es también la física de las altas energías.

El estudio de la física de las partículas elementales es, en parte, el estudio de cuatro fuerzas fundamentales que actúan entre ellas: la interacción fuerte o nuclear, la interacción electromagnética, la interacción débil y la aún más débil interacción gravitacional.

También es el estudio de las leyes de conservación, que no sólo se refiere a las leyes clásicas, bien conocidas, de la conservación de la masa y de la energía, del ímpetu, del ímpetu angular y de la carga eléctrica, si no también de algunas otras cantidades más esotéricas. Finalmente, la física de las partículas elementales está relacionada con la forma en que las fuerzas fundamentales, las leyes de conservación, las propiedades intrínsecas de las partículas y aun las propiedades del espacio y del tiempo, pueden ajustarse para adoptar una forma apropiada.

40—1 LA INTERACCION ELECTROMAGNETICA

Consideraremos primero aquellas partículas que son más conocidas y que ya se han considerado, en cierta forma, como elementales; estas partículas son el electrón, el protón y el fotón (que es la partícula de la radiación electromagnética) y las dos antipartículas, el positrón (designado por e^+) y el antiprotón (designado por p^-). Todas estas partículas tienen ciertas propiedades intrínsecas, tales como una carga eléctrica definida, una masa en reposo definida (o una energía en reposo), un ímpetu angular intrínseco (o espín) definido, y una vida media antes de decaer en otras partículas elementales. Como se ha determinado que las cinco partículas son estables ante el decaimiento espontáneo, cada una de ellas tiene un tiempo de vida infinito (ver la Tabla 40-1).

Como demostramos en el Cap. 36, debemos considerar, al tratar la interacción entre la radiación electromagnética y una partícula cargada, que la radiación consiste de fotones que tienen características corpusculares. Las diferentes interacciones entre fotones y electrones se ilustran en la Fig. 36-15.

Resulta ilustrativo representar estas interacciones en un diagrama de espacio-tiempo, que es un diagrama en el que el tiempo es la ordenada y la posición es la abscisa. Por simplicidad, mostramos la localización espacial de la partícula en una sola dimensión; una gráfica bidimensional del tiempo contra una coordenada única revela aspectos importantes de las interacciones.

Tabla 40-1. Algunas propiedades de ciertas partículas elementales
Partícula

Particle	*masa en reposo,*† m_e	*Energía en reposo* MeV	*Carga en unidades de la carga eléctrica*	*Espín, ímpetu angular,* $\times\hbar$	*Tiempo de vida,* s
Fotón γ	0	0	0	1	∞
Electrón e^-	1	0.511	-1	$\frac{1}{2}$	∞
Positrón e^+	1	0.511	$+1$	$\frac{1}{2}$	∞
Protón p^+	1,836	938.259	$+1$	$\frac{1}{2}$	∞
Antiprotón $\bar{p}$	1,836	938.259	-1	$\frac{1}{2}$	∞

*En unidades de la masa m_e del electrón.

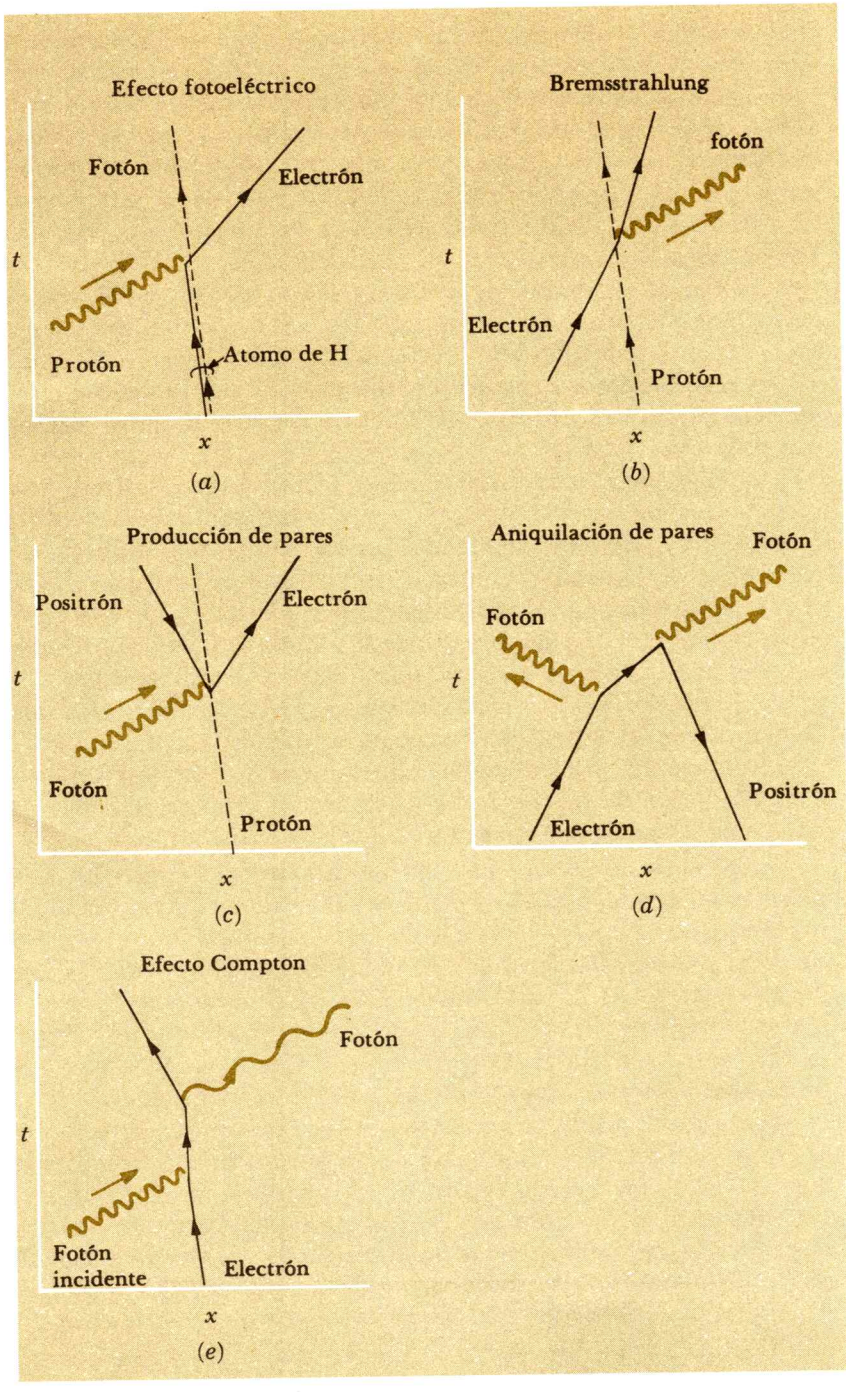


Fig. 40-1. Gráficas espaciotemporales de las interacciones básicas entre electrones y fotones. El electrón se representa por una línea, el fotón por una línea ondulada y el protón con una línea segmentada. Un positrón que se mueve a favor del tiempo corresponde a un electrón que se mueve en contra del tiempo. (*a*) Efecto fotoeléctrico; (*b*) producción de pares; (*c*) efecto Compton; (*d*) *bremsstrahlung*; (*e*) aniquilación de pares.

La historia de una partícula se muestra en un diagrama espaciotemporal mediante una línea, conocida como la *línea de universo*. Cuando la velocidad es constante, la línea es recta. Una

línea vertical representa a una partícula cuya coordenada x no cambia con el tiempo; se trata de una partícula en reposo. Una línea inclinada con respecto a la vertical representa a una partícula en movimiento y el ángulo entre esta línea y la vertical aumenta conforme lo hace la rapidez de la partícula. Como un fotón o cualquier otra partícula con masa en reposo 0, viaja a la máxima rapidez posible c, el ángulo de esta línea de universo con respecto a la vertical es el máximo.

La Fig. 40-1 muestra, en forma esquemática, los diagramas espaciotemporales de las interacciones básicas entre electrones y fotones, que corresponden a aquellas de la Fig. 36-15. El tiempo va del pasado hacia el futuro conforme aumenta la coordenada y los eventos se leen en estas gráficas de la parte inferior hacia la parte superior.

En el *efecto fotoeléctrico* (Fig. 40-1*a*) un átomo de hidrógeno, que consiste de un electrón y de un protón ligados, choca con un fotón. Después de la interacción, el fotón se ha aniquilado y el electrón y el protón se mueven como partículas separadas. El evento espaciotemporal que caracteriza a la interacción corresponde al vértice de la figura, en donde las líneas del fotón incidente y del electrón colapsan en una sola línea electrónica saliente (el movimiento del protón casi no resulta esencialmente afectado). Debido a que el átomo de hidrógeno consiste inicialmente de un electrón y de un protón ligados, el resultado neto de la interacción es la absorción de un fotón real. El número total de electrones (o de protones) antes y después de la interacción no cambia.

En el *bremsstrahlung* (Fig. 40-1*b*) un electrón crea a un fotón al chocar con un protón. De nuevo, la interacción es un evento instantáneo que ocurre en el vértice del diagrama espaciotemporal, en donde la línea del fotón se une con la línea del electrón; la línea del electrón se desvía para indicar el cambio en el ímpetu y en la energía del electrón. De hecho, podemos pensar que el electrón incidente se aniquila en el vértice y que simultáneamente se crea un segundo electrón cuyo ímpetu y energía son diferentes.

En la *producción de pares* (Fig. 40-1*c*), se aniquila un fotón y se crean un electrón y un positrón. El positrón, que es la antipartícula del electrón, queda representado por una línea de universo cuya flecha está *invertida;* se considera a la antipartícula como un electrón que se mueve en contra del tiempo. Tal representación, en la que una antipartícula que se mueve a favor del tiempo es equivalente a una partícula que se mueve en contra del tiempo, se justifica por consideraciones de la teoría cuántica del campo electromagnético. Se trata de una representación en la que la creación de una partícula es equivalente a la aniquilación de su antipartícula. Entonces, vemos que las líneas del electrón y del fotón, que representan el proceso de producción de pares, son básicamente las mismas que representan al efecto fotoeléctrico y al *bremsstrahlung:* Una línea electrónica inclinada unida a una línea

de un fotón en un vértice. Estos procesos, y otros adicionales, difieren sólo en la orientación de las líneas en la gráfica espacio-temporal.

En la *aniquilación de pares* (Fig. 40-1*d*) un electrón y un positrón se unen para crear a un fotón. Para poder conservar el ímpetu en la aniquilación de pares se crean, típicamente, dos o más fotones; esto se puede interpretar como la producción de un fotón, y después de otro, en dos eventos distintos, pero casi coincidentes.

Hemos considerado al *efecto Compton* como un solo proceso en el que el fotón interactúa con una partícula cargada para producir un fotón dispersado que se ha desviado. De hecho, como se muestra en la Fig. 40-1*e*, el efecto Compton ocurre como dos interacciones diferentes: el fotón incidente se une con el electrón incidente para producir un electrón intermediario; el electrón intermediario produce entonces un fotón y un electrón. Como antes, cada uno de los vértices corresponde a aquel punto en el espacio y en el tiempo en el que una línea de electrón se une con una línea de fotón.

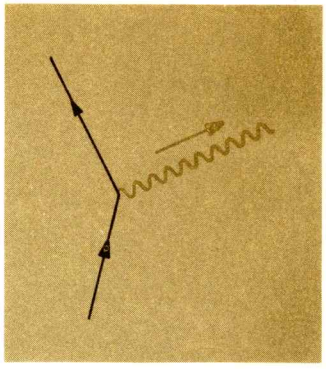


FIG. 40-2. Gráfica de la interacción electromagnética básica.

De hecho, según la teoría cuántica del campo, la interacción electromagnética básica puede considerarse como el evento instantáneo en el que una partícula cargada, o su antipartícula, se crea y se aniquila, o ambas se crean y se aniquilan, y se crea o se aniquila un fotón; ver la Fig. 40-2. Cuando la línea de universo de un electrón cambia de dirección, podemos pensar que se aniquila un electrón con una energía y un ímpetu y se crea otro electrón con un ímpetu y una energía diferentes. Todas las interacciones entre electrones y fotones contienen uno o más vértices de la misma gráfica básica, nada más haciéndola girar en el espacio-tiempo. Por supuesto, podemos dibujar gráficas exactamente semejantes para representar las interacciones electromagnéticas entre protones o antiprotones y fotones y la línea del universo representa entonces al protón o al antiprotón, en vez de representar al electrón o al positrón. De modo más general, las mismas gráficas se pueden utilizar para representar interacciones electromagnéticas, en forma esquemática, entre cualquier partícula con carga eléctrica y un fotón.

Las cinco partículas listadas en la Tabla 40-1 son estables ante el decaimiento espontáneo. En cualquier interacción entre ellas existe un número de propiedades físicas fundamentales que se conserva estrictamente: el ímpetu lineal, la masa energía, el ímpetu angular y la carga eléctrica. Más aún, en cada interacción, el número de electrones menos el número de positrones se conserva. En términos gráficos, esto significa que la línea de universo de un electrón no termina; por cada línea de electrón que va hacia un vértice, existe una línea de electrón que sale de él (una "línea de electrón" que retrocede en el tiempo significa que un positrón avanza en el tiempo). En forma semejante, en toda interacción, el número de protones menos el número de antiproto-

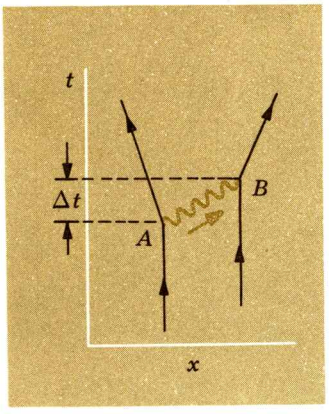


FIG. 40-3. Diagrama de Feynman de la interacción entre dos electrones.

nes es constante; en forma gráfica las líneas de protón son continuas*. Aunque estas leyes de conservación adicionales gobiernan los números de electrones menos positrones y de protones menos antiprotones, no existe una restricción en el número de fotones.

Hemos descrito la interacción entre la radiación electromagnética y una partícula cargada en términos de una gráfica básica en el espacio-tiempo. Pero, ¿qué pasa con la interacción entre dos partículas cargadas, que es una interacción que en la teoría electromagnética clásica se describe normalmente en términos de los campos eléctrico y magnético producidos por las dos partículas y en términos de las fuerzas eléctrica y magnética? En este caso, también podemos atribuirla a la creación y a la aniquilación de fotones.

Consideremos la Fig. 40-3, que muestra una colisión entre dos electrones. Un electrón crea espontáneamente a un fotón en el vértice *A* (en una forma semejante a la del proceso *bremsstrahlung* de la Fig. 40-1*b*) y el segundo electrón absorbe a este fotón en el vértice *B* (en una forma semejante a la del efecto fotoeléctrico de la Fig. 40-1*a*). Cada uno de los electrones que interactúan cambia su ímpetu y su energía en virtud del intercambio del fotón: Sobre cada partícula cargada ha actuado una fuerza electromagnética. El intercambio de esta partícula, llamada fotón *virtual,* que es inobservable, es el reponsable de la fuerza entre las dos partículas cargadas. Las partículas cargadas intercambian energía e ímpetu mediante el intercambio de fotones virtuales. Las representaciones gráficas de las interacciones en el espacio tiempo, semejantes a las de la Fig. 40-3, se llaman *diagramas de Feynman,* en honor a R.P. Feynman, quien introdujo tales diagramas para representar, en forma simple, y también para calcular en detalle, las interacciones electromagnéticas entre partículas cuánticas cargadas.

La fuerza de Coulomb y, en forma general, las fuerzas electromagnéticas, pueden atribuirse al intercambio continuo de fotones virtuales entre partículas cargadas. Pero los fotones virtuales (que actúan como intermediarios de la fuerza electromagnética entre partículas cargadas), difieren de los fotones reales. Mientras que los fotones reales son observables, los fotones virtuales no lo son.

Para ilustrar la forma en que una partícula inobservable es responsable de una interacción, recordemos que si un electrón libre en el espacio vacío emitiera espontáneamente a un fotón, la energía y el ímpetu total del sistema no se conservarían (es por esto que se requiere de una partícula de cierta masa en la colisión *bremsstrahlung* real); en forma análoga, un electrón libre no puede, sin violar la conservación de la energía y del ímpetu, absorber a un fotón (es por esto que el efecto fotoeléctrico ocurre cuando la partícula que se ha de liberar está inicialmente ligada).

*Las leyes de conservación de los electrones y de los protones son ejemplos, respectivamente, de unas leyes más generales de la conservación de los leptones y de los bariones (ver la Sec. 40-4).

Aunque la conservación del ímpetu y la de la energía se cumplen en la interacción *total* entre dos electrones, representada del vértice A al vértice B en la Fig. 40-3, no se pueden cumplir por separado en forma simultánea en cada uno de los vértices. Es la inobservabilidad del fotón virtual lo que permite la no conservación de la energía y del ímpetu durante el intervalo de tiempo entre la emisión de fotón y la absorción del mismo. La violación de estas leyes de conservación es consistente con la teoría cuántica en la medida que la energía ΔE y el ímpetu Δp "solicitados" por el evento de la emisión espaciotemporal, se regresan en el transcurso de intervalos de tiempo y de espacio consistentes con el principio de incertidumbre de Heisenberg (ver la Sec. 37-6): esto es, durante un intervalo de tiempo $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$ y durante un intervalo espacial $\Delta x \approx \hbar/\Delta p_x$. Por lo tanto, la energía total del sistema puede exceder a la energía inicial de los electrones incidentes en ΔE durante un intervalo de tiempo Δt , en donde $\Delta E \approx \hbar/\Delta t$.

El intervalo de tiempo entre la emisión y la absorción de un fotón virtual es Δt. En forma semejante, las incertidumbres en el ímpetu y en la posición están relacionadas por $\Delta p_x \approx \hbar/\Delta x$. Se pueden crear fotones virtuales de cualquier energía, desde cero hasta infinito. Por lo tanto, el intervalo de tiempo —y el intervalo de espacio asociado— entre el evento de la emisión y el evento de la absorción pueden variar desde intervalos muy pequeños (asociados con interacciones separadas por distancias pequeñas y con fotones virtuales que tienen energías muy altas) a intervalos muy grandes (asociados con grandes distancias y con fotones de muy baja energía).

En la interacción entre dos partículas cargadas, una de las partículas crea a un fotón virtual que es absorbido por la otra. ¿El fotón virtual puede ser absorbido por la misma partícula que lo ha creado? *Sí puede* ocurrir, siempre y cuando se satisfagan los límites impuestos por el principio de incertidumbre. La Fig. 40-4*a* muestra a un electrón (o a cualquier otra partícula con carga eléctrica) que emite y después absorbe a un fotón virtual. Más aún, el fotón, ya sea real o virtual, puede crear espontáneamente a un par electrón-positrón, como se muestra en la Fig. 40-4*c*, aunque su energía sea menor que la energía umbral para la producción de pares. De nuevo, ocurre que este proceso es posible según el principio de incertidumbre y limitado por él. El par virtual puede aniquilarse y crear, como producto, al fotón original. Se pueden construir procesos aaún más complicados, como los mostrados en la Fig. 40-4*c*; la cadena de procesos de creación y de aniquilación mostrada es, por supuesto, simplemente una colección de gráficas espaciotemporales cuya base es la Fig. 40-2. Por lo tanto, cada partícula con carga eléctrica, aun si está aislada de otras partículas, puede considerarse como emisora y absorbedora de fotones que, a su vez, pueden convertirse en pares de partícula y antipartícula. Aunque las partículas virtuales no pueden observarse direc-

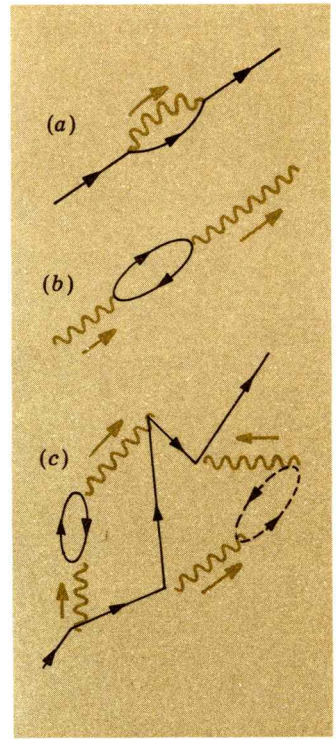


FIG. 40-4. Diagrama de Feynman de las interacciones electromagnéticas: (*a*) Un electrón crea espontáneamente a un fotón y después lo reabsorbe. (*b*) Un fotón crea espontáneamente a un par electrón-positrón y el par se aniquila creando un fotón; (*c*) una cadena compleja de procesos de creación y de aniquilación.

tamente, la validez de la concepción queda demostrada sin lugar a duda por los éxitos de los cálculos teóricos, de la teoría del campo, de ciertos efectos electromagnéticos sutiles basados en estas ideas. El éxito de la teoría del campo ha servido, de hecho, como modelo para entender a las otras fuerzas fundamentales, además de la interacción electromagnética, y a conducido a la predicción de partículas cuya existencia fue confirmada después en experimentos.

40—2 OTRAS INTERACCIONES FUNDAMENTALES

La interacción electromagnética entre partículas con carga eléctrica puede atribuirse a un intercambio virtual de fotones. Los fotones reales se pueden emitir o absorber en aquellos casos en los que no haya necesidad de hacer la "solicitud" de energía e ímpetu permitida por el principio de incertidumbre. Para explicar el largo alcance (fuerza que varía inversamente con el cuadrado de la distancia) de la interacción electromagnética, las partículas asociadas al campo tienen una masa en reposo igual a cero; entonces los fotones virtuales pueden tener energías infinitesimalmente pequeñas como para permitir el intercambio entre partículas cargadas separadas por distancias que pueden ser infinitas.

Si consideramos ahora a la fuerza nuclear o *interacción fuerte,* que actúa entre los nucleones (como también lo hace con otras partículas que discutiremos después), nos preguntamos si esta fuerza también puede ser descrita en términos del intercambio de partículas de campo. Como ya se vio (Sec. 39-2), la interacción fuerte tiende a cero a distancias mayores que aproximadamente 1.4 fermi.Entonces, ¿qué propiedades deben tener las partículas del intercambio? Esta pregunta fue propuesta por primera vez (y respondida) por el físico japonés H. Yukawa en 1935.

La Fig. 40-5 muestra la interacción entre dos nucleones que resulta del intercambio de una partícula virtual de campo, que aquí se denota por π^0 (un pion neutro). Como el alcance de la interacción fuerte es pequeño, las partículas de campo no pueden intercambiarse de los vértices A y B separados en el espacio por más de, aproximadamente, $R = 1.4$ fermi. Por consiguiente, existe una energía solicitada *mínima* ΔE que corresponde a una energía en reposo *mínima* $m_\pi c^2 = \Delta E$, en donde m_π es la masa en reposo de la partícula de intercambio. Suponiendo, por simplicidad, que la partícula de campo viaja con una rapidez c durante el intervalo de tiempo Δt del intercambio, tenemos

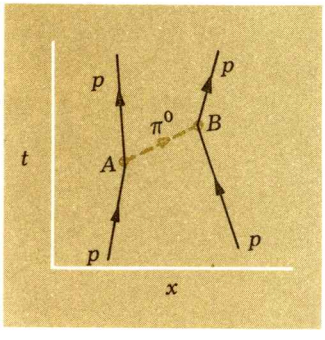


FIG. 40-5. Un nucleón que interactúa con un segundo nucleón a través del intercambio de un pion, que actúa como partícula virtual del campo.

$$\Delta t = \frac{R}{c}$$

y, del principio de incertidumbre, la incerteza en la energía $\Delta E = m_\pi c^2$, es

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\Delta t}$$

$$m_\pi c^2 = \frac{\hbar}{R/c}$$

o

$$m_\pi = \frac{\hbar}{R\,c} = \frac{10^{-34}\ \text{J-s}}{(1.4 \times 10^{-15}\ \text{m})(3 \times 10^{8}\ \text{m/s})} = 2 \times 10^{-28}\ \text{kg} \approx 200\ m_e$$

(En este caso, m_e es la masa del electrón). Por lo tanto, basados en este argumento, esperamos que las partículas de campo asociadas con las interacciones fuertes tengan una masa en reposo *finita* del orden de 200 veces la masa del electrón, que corresponde al carácter de corto alcance de la fuerza nuclear.

Se han observado directamente a los mesones, que son partículas inestables con masas intermedias entre la del electrón (y otras partículas ligeras de la familia del electrón) y los nucleones. Los más familiares son los mesones π (o piones) que ocurren en tres estados de carga π^+, π^-, y π^0 (en unidades de la carga electrónica). El kaón y la partícula eta son ejemplos de otros mesones de mayor masa; después, trataremos con más detalle las propiedades de estas partículas. Por el momento es suficiente decir que estas partículas tienen las propiedades necesarias para actuar como agentes de las interacciones fuertes, y pueden producirse en colisiones entre nucleones de alta energía (cuando menos de unos cuantos cientos de MeV), tales como: $p + n \rightarrow p + n + \pi^- + \pi^+$.

En la tabla 40-2 se muestran las cuatro interacciones fundamentales que gobiernan a las fuerzas entre las partículas elementales, junto con sus intensidades relativas y las partículas de campo que son los agentes responsables de estas fuerzas.

La interacción fuerte, ilustrada por la fuerza que actúa entre todos los nucleones, es la mayor de las fuerzas encontradas en la naturaleza; es de corto alcance y se produce por la mediación de mesones como partículas de campo. La fuerza electromagnética, más débil, actúa entre todas las partículas cargadas eléctricamente; es de largo alcance y se produce por la mediación de los fotones, que son partículas con masa en reposo cero.

Tabla 40-2. Las Interacciones Fundamentales

Interacción	*Intensidad relativa*	*Partícula de campo*
Fuerte	1	Mesón
Electromagnética	10^{-2}	Fotón
Débil	10^{-13}	Partícula W (?)
Gravitacional	10^{-14}	Gravitón (?)

Los procesos de decaimiento β (por ejemplo, el decaimiento relativamente lento de un neutrón en un protón, un electrón y un antineutrino), ilustran una fuerza, aun más débil, conocida como *interacción débil.* Su alcance no es mayor que 2×10^{-16} m, que es menor por un orden de magnitud al del alcance de la interacción fuerte. La partícula correspondiente (que no ha sido todavía observada) que actúa como la partícula de campo de las interacciones débiles, tendría una masa en reposo de cuando menos tres veces la de un nucleón. La *partícula W**, todavía no descubierta, también se conoce como el *vector bosónico intermediario.*

La más débil de las fuerzas conocidas de la naturaleza es la fuerza gravitacional. Actúa entre todas las partículas. Su pequeña intensidad queda ilustrada, por ejemplo, por el hecho de que un electrón y un positrón se atraen con una fuerza gravitacional que es menor, por un factor de 10^{40} que la fuerza eléctrica coulombiana entre ellos, separados a la misma distancia. Las ondas gravitacionales no han sido observadas directamente y su cuantización en partículas de campo, un efecto mucho más sutil, tampoco ha sido observado. Sin embargo, los físicos tienen confianza en que, por analogía con el electromagnetismo, las partículas del campo, conocidas como *gravitones,* deben estar asociadas con la interacción gravitacional. Debido a que la fuerza gravitacional varía inversamente con el cuadrado de la distancia, y por lo tanto tiene un alcance infinito, la masa en reposo del gravitón debe ser cero.

La intensidad relativa de las interacciones se manifiesta por la rapidez relativa con la que las partículas inestables decaen en otras partículas. Entre mayor sea la interacción, más rápidamente ocurre el decaimiento. Por ejemplo, los núcleos en estados excitados decaen a los estados de menor energía, con la emisión de fotones de rayos γ, con una vida media típica del orden de 10^{-14} s. Este es un ejemplo de un proceso que ocurre a través de una interacción electromagnética. Por otra parte, un núcleo inestable que decae por un proceso de decaimiento β, esto es, a través de una interacción débil, tiene vidas medias típicas mucho mayores, que son del orden de 10^{-2} s.

40—3 LAS PROPIEDADES DE LAS PARTICULAS FUNDAMENTALES

La Tabla 40-3 es una lista de las partículas que se cree que son fundamentales y que, directa o indirectamente, se han observado como partículas distintas por tiempos mayores que, más o menos, 10^{-21} s (que es casi 100 veces mayor que el tiempo en el

---

* *W* es la inicial de "weak," que quiere decir débil. (N. del T.)

Tabla 40-3. Las Partículas Fundamentales ($\tau > 10^{-21}$ s)

Nombre de la familia	*Nombre de la partícula*	*Símbolo (y carga eléctrica)*	*Energía en reposo* MeV *(masa en reposo x c^2)*	*Vida promedio* τ, s
Fotón	Fotón	γ	0	∞
Leptón	Neutrino	ν_e	0	∞
		ν_μ		
	Electrón	e^-	0.51100	∞
	Muón	μ^-	105.660	2.198×10^{-6}
Mesón	Pión	π^+	139.58	2.602×10^{-8}
		π^0	134.97	0.8×10^{-16}
	Kaón	K^+	493.8	1.237×10^{-8}
		$K^0 = \frac{1}{2}(K_S^0 + K_L^0)$	497.8	
		(K_S^0)		0.86×10^{-10}
		(K_L^0)		5.17×10^{-8}
	Eta	η^0	548.8	2.5×10^{-19}
Barión	Protón	p	938.259	∞
	Neutrón	n	939.259	0.93×10^3
	Lambda	Λ^0	1,115.6	2.5×10^{-10}
	Sigma	Σ^+	1,189.4	0.80×10^{-10}
		Σ^0	1,192.5	$<10^{-14}$
		Σ^-	1,197.4	1.49×10^{-10}
	Xi	Ξ^0	1,314.7	3.0×10^{-10}
		Ξ^-	1,321.3	1.66×10^{-10}
	Omega	Ω^-	1,672.5	1.3×10^{-10}

que la luz cruza las dimensiones nucleares). En secciones posteriores discutiremos algunas de las muchas partículas de corta duración.

Las partículas están colocadas en el orden en el que aumenta la energía en reposo o la masa en reposo. También están agrupadas conforme a una familia. El fotón es una categoría por sí

Impeta angular de espín	*Extrañeza*	*Isoespín*	*Modos principales de decaimiento (si la fracción > 5%)*
1	0	0 o 1	–
$\frac{1}{2}$	0	–	–
$\frac{1}{2}$	0	–	–
$\frac{1}{2}$	0	–	$\mu^- \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$
0	0	1	$\pi^+ \rightarrow \bar{\mu} + \nu_\mu$
0	0	1	$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ (98.8)
0	+1	$\frac{1}{2}$	$K^+ \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$ (63.8)
			$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ (20.9)
			$K^+ \rightarrow \pi^0 + \pi^+ + \pi^-$ (5.6)
0	+1	$\frac{1}{2}$	–
			$K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ (68.7)
			$K_S^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ (31.3)
			$K_L^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0$ (21.4)
			$K_L^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ (12.6)
			$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm + \mu^\mp + \nu_\mu$ (26.8)
			$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm + e^\mp + \nu_e$ (38.9)
0	0	0	$\eta_0 \rightarrow \gamma + \gamma$ (38.6)
			$\eta_0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0$ (30)
			$\eta_0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma$ (23)
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	–
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
$\frac{1}{2}$	−1	0	$\Lambda_0 \rightarrow p + \pi^-$ (64)
			$\Lambda_0 \rightarrow n + \pi^0$ (36)
$\frac{1}{2}$	−1	1	$\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$ (52)
			$\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$ (48)
$\frac{1}{2}$	−1	1	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$
$\frac{1}{2}$	−1	1	$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$
$\frac{1}{2}$	−2	$\frac{1}{2}$	$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$
$\frac{1}{2}$	−2	$\frac{1}{2}$	$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$
$\frac{3}{2}$	−3	0	$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$ (?)
			$\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \pi^0$ (?)
			$\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-$ (?)

mismo. La familia de los *leptones* incluye a los neutrinos, al electrón y al muón. La familia de los *mesones* incluye a los piones, a los kaones y a la partícula eta. La familia de los *bariones* consiste de los nucleones (el protón y el neutrón) y también de otras partículas de mayor masa llamadas *hiperones* (las partículas lambda, sigma, xi, y omega). Todos los bariones y los mesones partici-

pan en las interacciones fuertes y se les conoce, colectivamente, como *hadrones.*

Todas las partículas fundamentales familiares tienen uno de los tres valores posibles de la carga eléctrica: $+e$, 0, o $-e$, donde e es la magnitud de la carga del electrón. A menos que la carga de la partícula esté implícita en su símbolo (el protón p tiene carga $+e$), la carga eléctrica está indicada en la Tabla 40-3 por un superíndice después del símbolo.

A cada partícula listada en esta tabla corresponde una antipartícula con propiedades idénticas (excepto por el símbolo de su carga eléctrica). Una antipartícula queda representada por una barra sobre el símbolo de la partícula ($\bar{p}$ es el antiprotón, con carga $-e$) o por signo opuesto en la carga eléctrica (la antipartícula del π^+ es el pion negativo, π^-). Tanto el fotón γ como el pion neutro π^0 son su propia antipartícula.

Toda partícula elemental está caracterizada por una vida media precisa, que es infinita para partículas estables, tales como el fotón, los neutrinos, el electrón y el protón (y sus antipartículas). Estrictamente, las medidas demuestran que la vida media del protón, si no es infinita, es cuando menos de 10^{36} s.

En tanto que la vida *media* de algunas especies de partículas inestables es el tiempo transcurrido hasta que *la mitad* de ellas han decaído y la otra mitad todavía sobrevive (Sec. 39-5), la *vida promedio* es *el tiempo de vida promedio* desde la creación hasta el decaimiento de un número grande de partículas idénticas. Como algunas pocas partículas de una especie dada pueden sobrevivir al decaimiento por un tiempo infinito, bajo una ley de decaimiento exponencial, la vida promedio de las especies puede ser mayor que la vida media. Específicamente, la vida promedio τ está relacionada con la vida media $T_{1/2}$ mediante la relación $\tau = 1.44\ T_{1/2}$ (ver el Prob. 39-9). La vida promedio es una indicación de la interacción mediante la cual decae la partícula. Por ejemplo, la vida promedio del π^+ es mayor que la del π^0 por un factor de 10^8; esto corresponde al hecho de que el π^0 decae (en forma primaria) a través de una interacción electromagnética, en tanto que el π^+ decae con mucho más lentitud a través de la interacción débil.

Toda partícula elemental tiene un *ímpetu angular* intrínseco o *espín,* que se visualiza clásicamente como una rotación perpetua de la partícula en torno a un eje de rotación interno. El ímpetu angular de espín se especifica por el número cuántico de espín I, en donde la magnitud del ímpetu angular de espín es $\sqrt{I(I+1)}\,\hbar$. Los valores de I son enteros o semienteros. Algunas partículas, tales como el electrón, el neutrino, el muón, el protón y el neutrón, tienen espín 1/2 (ver las Secs. 38-4 y 39-1). Las partículas con valores semienteros de espín, llamadas *fermiones,* obedecen el principio de exclusión de Pauli (Sec. 38-5), que restringe a uno el número de partículas en un estado cuántico dado, y por lo tanto, actúa como una fuerza repulsiva intensa entre fermiones idénticos.

Por otra parte, las partículas con valores enteros de espín, conocidas como *bosones,* no están restringidas por el principio de Pauli y, por lo tanto, pueden ocurrir en un número irrestricto. Todas las partículas de campo, que sirven de mediador en las interacciones fundamentales, tienen valores de espín enteros y son bosones; algunos ejemplos son el gravitón (espín 2), el fotón (espín 1), los mesones (espín 0) y la partícula W (espín 1).

En la Sec. 40-5 trataremos brevemente el significado de los términos "extrañeza" e "isoespín" indicados en la Tabla 40-3.

La columna final en la tabla indica los modos *principales* de decaimiento. Naturalmente, si una partícula es estable y tiene una vida promedio infinita, no decae. Existen otros modos, adicionales a los que aparecen en la Tabla 40-3 y de gran importancia teórica, que se han excluido en la lista si la fracción de los decaimientos es menor al 5%. En cada entidad en la tabla existe un decaimiento complementario en el que las partículas y las antipartículas se han intercambiado, por ejemplo, como el neutrón decae en un protón, en un electrón y en un antineutrino:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

entonces un antineutrino decae en un antiprotón, en un positrón y en un neutrino:

$$\bar{n} \rightarrow \bar{p} + e^+ + \nu_e$$

Más aún, como se discutió en la Sec. 39-6 en el decaimiento β se puede transformar cualquiera de los procesos en un segundo proceso invirtiendo la flecha y cambiando a las partículas de un lado al otro y, al mismo tiempo, intercambiando a la partícula por la antipartícula, o inversamente. Por lo tanto, la relación de decaimiento anterior puede transformarse en la reacción permitida

$$\bar{p} + \nu_e \rightarrow \bar{n} + e^-$$

en la que un antiprotón captura a un neutrino de suficiente energía y produce un antineutrón y un electrón.

40—4 LAS LEYES DE CONSERVACION UNIVERSALMENTE VALIDAS

¿Por qué sucede que las partículas elementales ocurren en un número limitado de estados de carga? ¿Por qué tienen los valores específicos de sus masas, vidas promedio, espines y otras propiedades básicas indicadas en la Tabla 40-3 y no otros valores? ¿Qué patrones de coherencia pueden discernirse en sus propiedades y en sus interacciones? Aunque muchas de estas y de otras preguntas fundamentales permanecen sin respuesta, al menos un tipo de pregunta puede responderse en forma bastante directa: ¿Por qué las partículas fundamentales inestables decaen en los modos par-

ticulares mostrados en la Tabla 40-3 y no en otros modos de decaimiento posibles? O, si una partícula es estable, ¿por qué no decae?

La respuesta la proporcionan las leyes de conservación. Primero se debe tomar la actitud de que *cualquier* proceso concebible puede ocurrir, a menos que exista un principio físico básico que lo prohíba, reconociendo, sin embargo, que no todos los procesos concebibles ocurrirán con la misma probabilidad. O, inversamente, si un proceso concebible nunca se observa entonces debe de existir alguna ley física fundamental que lo prohíba.

Como un ejemplo simple consideremos la razón por la que un neutrón *no* decae en un protón y en un fotón. Tal proceso no violaría las leyes de conservación de la masa-energía, ímpetu lineal e ímpetu angular, pero naturalmente sería inconsistente, por supuesto, con la conservación de la carga eléctrica. Un neutrón no decae un protón y en un fotón, porque siempre se ha observado (hasta ahora) que la carga eléctrica neta de un sistema aislado permanece constante. Entonces, ¿qué ocurre con el decaimiento posible de un protón en un positrón y un fotón? Este decaimiento es consistente con las leyes de conservación mencionadas hasta ahora, pero nunca se ha observado. Se deben concluir que este proceso (y, como veremos, otros procesos relacionados) está marginado debido a la operación de una o más leyes de conservación adicionales —leyes que, de hecho, se formulan simplemente para resumir la no ocurrencia de ciertos procesos, que de otra forma serían concebibles.

Se piensa que dos leyes de conservación adicionales, junto con las bien establecidas leyes de conservación clásicas de la masa-energía, ìmpetu lineal, ímpetu angular y carga eléctrica, tienen validez universal y, por lo tanto, que son aplicables a *todas* las interacciones; se trata de las leyes de conservación del *número bariónico* y del *número leptónico* (este último subdividido en leyes de conservación separadas del *número de electrones* y del *número de muones*).

Una forma especial de la ley de conservación del número de bariones es la ley de conservación de nucleones (Sec. 39-6), según la cual el número total de nucleones (protones y neutrones) en cualquier decaimiento (o reacción) nuclear es constante. En la ley de conservación, más general, del número de bariones, se asigna un número de bariones como sigue: por cada partícula en la familia de los bariones, $+1$; por cada antipartícula en la familia de los bariones, -1; y por cualquier otra partícula, 0. Entonces, la ley de conservación es simplemente un enunciado de que el *número total de bariones* en cualquier proceso es *constante*.

Por ejemplo, si sobre un blanco de protones inciden protones energéticos (de varios GeV) se pueden crear partículas lambda y kaones según la relación:

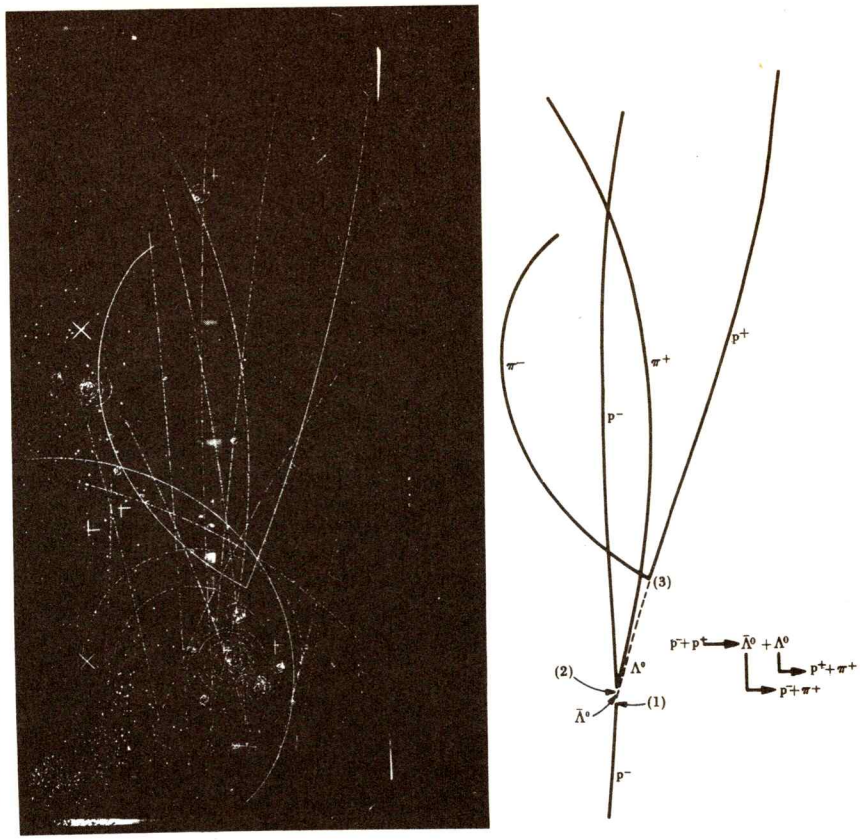


FIG. 40-6. Una fotografía de una cámara de burbujas en la que un antiprotón de 3.3 GeV entra en la cámara de burbujas por la parte inferior y choca contra un protón en el punto 1, creando un hiperón (Λ^0). La partícula Λ^0 decae en un protón y en un π^- en el punto 3; la antipartícula Λ^0 en un antiprotón y en un π^+ en el punto 2. (Cortesía del Laboratorio Nacional de Brookhaven).

$$p + p \rightarrow p + \pi^+ + \Lambda^0 + K^0$$

Número bariónico: $1 + 1 = 1 + 0 \quad + 1 \quad + 0$

Otro ejemplo es aquel en el que se crea una partícula lambda y una antilambda cuando un antiprotón energético interactúa con un protón y posteriormente decaen (ver la Fig. 40-6):

$$\bar{p} + \quad p \quad \rightarrow \Lambda^0 + \quad \overline{\Lambda^0}$$

Número bariónico: $1 + (-1) = 1 \quad + (-1)$

y entonces $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \qquad$ y $\qquad \overline{\Lambda^0} \rightarrow \bar{p} \quad + \pi^+$

Número bariónico: $1 = 1 + 0 \qquad\qquad -1 = -1 \quad + 0$

Existen otras ilustraciones adicionales de la conservación del número de bariones en los esquemas de decaimiento indicados en la Tabla 40-3.

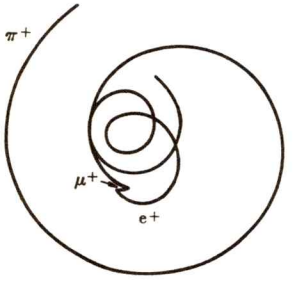
La ley de conservación del número de leptones se aplica a los miembros de la familia de los leptones: el electrón, el muón y *dos* variedades del neutrino (ν_e y ν_μ), junto con sus respectivas antipartículas. (Algunos ejemplos ilustraran el porqué, de hecho, es necesario distinguir cuatro tipos distintos de neutrinos: ν_e, $\bar{\nu}_e$, ν_μ y $\bar{\nu}_\mu$.) *El número electrónico* $+1$ se asigna al electrón e^- y al neutrino de tipo electrónico ν_e, en tanto que la positrón e^+ y al antineutrino de tipo electrónico $\bar{\nu}_e$ se les asigna un número electrónico -1. Todas las demás partículas tienen un número electrónico 0. En forma semejante, el *número muónico* $+1$ se asigna al μ^- y al neutrino tipo muón ν_μ, en tanto que el antimuón μ^+ y el antineutrino tipo muón $\bar{\nu}_\mu$ tienen un número muónico -1. Todas las demás partículas tienen un número muónico 0. Con estas designaciones, todas las observaciones son consistentes con la *ley de la conservación de los leptones: El número total de electrones es constante y el número total de muones es constante.*

Por ejemplo, en el decaimiento de las tres variedades del pion* se tiene

	$\pi^+ \rightarrow$	$\mu^+ + \nu_\mu$	$\pi^- \rightarrow \mu^- +$	$\bar{\nu}_\mu$	$\pi^0 \rightarrow e^- +$	e^+
Núm. electrónico:	$0 =$	$0 + 0$	$0 = 0 +$	0	$0 = 1 +$	(-1)
Núm. muónico:	$0 =$	$(-1) + 1$	$0 = 1 +$	(-1)	$0 = 0 +$	0

Entonces los muones decaen de la siguiente forma (ver la Fig. 40-7):

	$\mu^- \rightarrow e^- +$	$\bar{\nu}_e + \nu_\mu$	$\mu^+ \rightarrow$	$e^+ + \nu_e +$	$\bar{\nu}_\mu$
Núm. electrónico:	$0 = 1 +$	$(-1) + 0$	$0 =$	$(-1) + 1 +$	0
Número muónico:	$1 = 0 +$	$0 + 1$	$-1 =$	$0 + 0 +$	(-1)



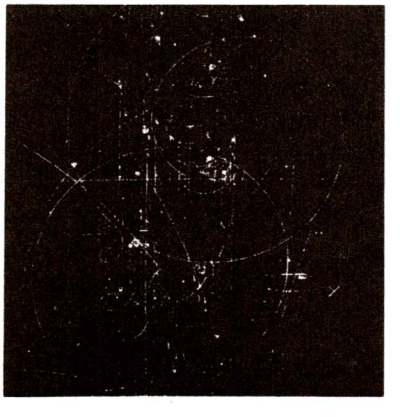


FIG. 40-7. Fotografía, en una cámara de burbujas de hidrógeno líquido, del decaimiento de π^+ en un μ^+, que decae en e^+. (Cortesía del Laboratorio Nacional de Brookhaven).

*El decaimiento más probable de un pion neutro es en dos fotones; el decaimiento en un electrón y en un positrón se observa en aproximadamente 1% de todos los decaimientos.

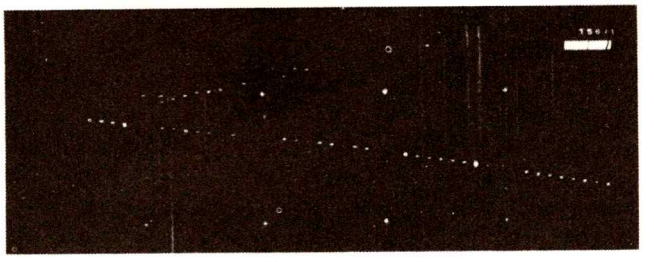


FIG. 40-8. Dos trayectorias en una fotografía en una cámara de chispas utilizada en experimentos para establecer la existencia del antineutrino asociado con el muón. (Cortesía del laboratorio Nacional de Brookhaven).

El decaimiento del neutrón ilustra la conservación tanto del número bariónico como del número electrónico, como también lo hace el proceso estrechamente relacionado en el que un protón captura a un antineutrino (electrónico):

	$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$
Número bariónico:	$1 = 1 + 0 + 0$	$0 + 1 = 1 + 0$
Número electrónico:	$0 = 0 + 1 + (-1)$	$(-1) + 0 = 0 + (-1)$

Cuando un antineutrino de la variedad muónica es capturado por un protón, el proceso observado es (ver la Fig. 40-8)

	$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$
Número bariónico:	$0 + 1 = 1 + 0$
Número muónico:	$(-1) + 0 = 0 + (-1)$

Nótese que cuando un protón captura a un antineutrino de la variedad *muónica* (aquél producido en el decaimiento de un pion) se produce un anti*muón,* en tanto que cuando un protón captura a un antineutrino de la variedad *electrónica* (uno producido en un decaimiento β), se produce un anti*electrón* o positrón. Esta observación fue de vital importancia al establecer que las variedades electrónicas de neutrino y del antineutrino son bastante distintas de las del neutrino y antineutrino de tipo muónico. En la siguiente sección indicaremos qué es lo que distingue al neutrino del antineutrino, además del número muónico y electrónico.

El muón juega un papel curioso entre las partículas fundamentales. Parece ser idéntico en todas sus propiedades al electrón, excepto por su mayor masa (y en el número electrónico y muónico).

En cierto sentido, las leyes de conservación de bariones y de leptones "explican" por qué el protón, el electrón y el neutrino son absolutamente estables: no existen partículas más ligeras en las que puedan decaer sin violar estas leyes de conservación. Mediante el mismo argumento, no hay leyes de conservación que se apliquen al número de fotones y mesones. Tales partículas pueden crearse en

un número ilimitado, sujeto sólo a las limitaciones impuestas por otras leyes de conservación.

40—5 EL ISOESPIN, LA EXTRAÑEZA Y LA PARIDAD

Estos tres términos se asocian con las leyes de conservación que, curiosamente, se aplican en forma rigurosa a las interacciones fuertes pero no de modo universal a las demás interacciones fundamentales.

El Isoespín. El isoespín (o espín isotópico) es análogo al ímpetu angular orbital o de espín, ordinario de la mecánica cuántica. Como se indicó en la Sec. 37-4, una partícula en un estado con un número cuántico de ímpetu angular orbital $l = 1$, tiene tres valores posibles del número cuántico magnético m_l: $m_l = +1, 0$. El vector de ímpetu angular puede tener tres orientaciones diferentes, o componentes en el espacio, correspondiendo a tres valores posibles de m_l. En general, para una l dada hay $2l + 1$ posibles valores de m_l.

De la Tabla 40-3 notamos que los mesones y los bariones (las partículas que interaccionan fuertemente, o hadrones) se agrupan en grupos de partículas con masas casi iguales; por ejemplo, los dos nucleones (p y n), los tres piones, la partícula lambda, las tres sigmas. Si uno atribuye la pequeña diferencia en masa entre cada grupo (o multiplete) a una diferencia en la carga eléctrica (y a la interacción electromagnética, relativamente más débil, asociada con ella), entonces las partículas en cada grupo pueden considerarse como *diferentes estados* de la *misma partícula*. Se asigna un número cuántico T de isoespín a cada grupo, de tal forma que la multiplicidad de las partículas dentro del grupo es igual a $2T + 1$. Entonces a cada una de las orientaciones posibles o componentes T_z del vector hipotético de isoespín $\mathbf{T}$ (en el isoespacio), le corresponde una partícula. Por ejemplo, en los dos nucleones (p y n), $T = \frac{1}{2}$; entonces $2T + 1 = 2(\frac{1}{2}) + 1 = 2$, y el protón se identifica con $T_z = +\frac{1}{2}$ y el neutrón con $T_z = -\frac{1}{2}$. Con esta base, los números cuánticos de isoespín se asignan como se muestra en la Tabla 40-3 y nuevamente en la Tabla 40-4. Los números de isoespín no se asignan a las partículas más ligeras, que no participan en las interacciones fuertes.

La ley de la conservación del isoespín, que se aplica *sólo* a las interacciones fuertes, es: La magnitud del isoespín total final en una reacción es igual al isoespín total antes de la reacción. Brevemente, *el isoespín total se conserva*. Esto simplifica, por ejemplo, las consideraciones de la interacción entre un π^- y un neutrón, comparada a la de un π^+ y un protón:

$$\pi^- + n: \qquad T_z(\pi^-) + T_z(n) = (-1) + (-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{3}{2}$$

$$\pi^+ + p: \qquad T_z(\pi^+) + T_z(p) = (+1) + (+\tfrac{1}{2}) = +\tfrac{3}{2}$$

Tabla 40-4

Partícula (hadron)	*Isoespín T*	*Multiplicidad* $2T+1$	*Estados de la partícula*	*Componente de isoespín* T_z
π	1	3	π^+	$+1$
			π^0	0
			π^-	-1
K	$\frac{1}{2}$	2	K^+	$+\frac{1}{2}$
			K^0	$-\frac{1}{2}$
η	0	1	η^0	0
Nucleón	$\frac{1}{2}$	2	p	$+\frac{1}{2}$
			n	$-\frac{1}{2}$
Λ	0	1	Λ^0	0
Σ	1	3	Σ^+	$+1$
			Σ^0	0
			Σ^-	-1
Ξ	$\frac{1}{2}$	2	Ξ^0	$\frac{1}{2}$
			Ξ^-	$-\frac{1}{2}$
Ω	0	1	Ω^-	0

Ambos sistemas tienen la *misma magnitud* del isoespín total y sus interacciones son las mismas.

Extrañeza. Otro número cuántico, relacionado estrechamente al isoespín, que se conserva de modo estricto en todas las reacciones y decaimientos que proceden de las interacciones fuertes, es el *número cuántico de extrañeza*. La asignación del número cuántico de extrañeza a varias partículas bariónicas y mesónicas, y sus antipartículas respectivas, se indica en la Tabla 40-5.

A la pareja (que *no* es extraña) protón-neutrón con "un centro de carga" de $+\frac{1}{2}e$ (el promedio entre $+e$ y 0) se le asigna una extrañeza de 0. A la partícula lambda neutra Λ^0 que tiene una carga 0, se le asigna una extrañeza -1 y así sucesivamente en otros grupos de bariones.

Tabla 40-5

Isoespín	*Carga eléctrica bariónica* $-e$	0	$+e$	*Carga eléctrica antibariónica* $-e$	0	$+e$	*Carga eléctrica mesónica* $+e$	0	$-e$
$\frac{1}{2}$		n	p	$\bar{p}$	$\bar{n}$				
0		Λ^0			$\overline{\Lambda^0}$				
1	Σ^-	Σ^0	Σ^+	$\overline{\Sigma^-}$	$\overline{\Sigma^0}$	$\overline{\Sigma^+}$	π^+	π^0	π^-
$\frac{1}{2}$	Ξ^-	Ξ^0			$\overline{\Xi^0}$	$\overline{\Xi^-}$	K^+	K^0 $\overline{K^0}$	K^-
0	Ω^-					$\overline{\Omega^-}$		$\eta^0\overline{\eta^0}$	
Extrañeza:	-3	-2 -1 0			0	$+1$ $+2$ $+3$		$+1$ 0	-1

La ley de conservación de la extrañeza es, pues, que la extrañeza en una reacción o decaimiento *gobernada por la interacción fuerte* es igual a la extrañeza total final en el decaimiento o en la reacción. Por ejemplo, cuando un protón de suficiente energía (de varios GeV) choca contra un blanco protónico, se puede producir la siguiente reacción:

$$p + p \rightarrow \quad \Lambda^0 + K^0 + p + \pi^+$$

Extrañeza: $\quad 0 + 0 = (-1) + 1 \quad + 0 + 0$

En este proceso se crean dos partículas extrañas, la lambda y el kaón, con extrañezas *opuestas*. El requisito de que aparezcan cuando menos *dos* partículas extrañas en una reacción determinada por la interacción fuerte es conocido como la *producción asociada*.

Ahora consideremos el decaimiento de una partícula lambda en un protón y un pion:

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$$

Extrañeza: $\quad (-1) \neq 0 + 0$

Este proceso *no* conserva la extrañeza y esta violación a la conservación corresponde a la observación de que el decaimiento es relativamente lento comparado con aquellos determinados por las interacciones fuertes. De hecho, la extrañeza no se tiene que conservar en todos los procesos, tales como el decaimiento de Λ^0, que ocurren *a través* de la interacción débil; en tales procesos, la extrañeza puede cambiar en uno o en cero.

Las diferentes simetrías exhibidas a través del isoespín y la extrañeza han conducido al análisis de las interacciones fuertes entre las partículas a través de una rama de las matemáticas conocida como la teoría de grupos; de hecho, las propiedades de la notable partícula Ω^-, con extrañeza -3, fueron predichas basándose en la teoría de grupos antes de que la partícula fuera observada. Sin embargo, no ha habido todavía una confirmación a otra predicción: que las partículas que interactúan fuertemente están compuestas de partículas aún más fundamentales, llamadas *quarks*, cuyas cargas eléctricas son de $\frac{1}{3}e$ y de $\frac{2}{3}e$.

La Paridad. La ley de la conservación de la paridad, en su forma más primitiva, implica que, al menos a nivel microscópico, la naturaleza no muestra una preferencia de la izquierda por la derecha. En otras palabras, si cierto proceso ocurre en la naturaleza, el proceso que se obtendría por la reflexión en un espejo también es un proceso posible.

Aunque la paridad se conserva estrictamente en las interacciones fuertes y electromagnéticas, existe una evidencia experimental

variada que demuestra la no conservación de la paridad en la interacción débil. La demostración más directa es la del decaimiento del pion en un antimuón y un neutrino. Considérese el decaimiento específico

$$\pi^+ \rightarrow \bar{\mu} + \nu_\mu$$

Si consideramos al π^+ en reposo antes del decaimiento, el $\bar{\mu}$ y el ν_μ deben abandonar el sitio del decaimiento en direcciones opuestas, con iguales magnitudes de sus ímpetus, para estar de acuerdo con la ley de la conservación del ímpetu lineal. El π^+ tiene espín 0 en tanto que el $\bar{\mu}$ y ν_μ tiene espín $\frac{1}{2}$; por lo tanto, los sentidos de los espines (o, en forma equivalente, la dirección de los vectores del ímpetu angular) de las partículas salientes deben ser opuestas. Existen, a priori, *dos* posibles orientaciones de los vectores de ímpetu lineal y de ímpetu angular, como se muestra en la Fig. 40-9. Los vectores de ímpetu lineal y de ímpetu angular se alinean (y las dos partículas $\bar{\mu}$ y ν_μ son "derechas") o estos vectores quedan antiparalelos (y las dos partículas $\bar{\mu}$ y ν_μ son izquierdas). Nótese que el decaimiento en partículas derechas es meramente la imagen especular del decaimiento en partículas izquierdas; la parte (*b*) de la Fig. 40-9 puede considerarse como la imagen en un espejo vertical de la parte (*a*).

Ahora bien, si la paridad se conservara estrictamente en la interacción débil y en el decaimiento del π^+, se esperaría encontrar, a partir de un número grande de piones iniciales, un número igual de partículas derechas que de izquierdas. Como los neutrinos casi no sufren absorción alguna a través de un absorbedor ordinario, se debe observar si los muones son izquierdos o derechos y se infiere que la propiedad correspondiente de los neutrinos es la misma. Los resultados de los experimentos son que sólo se emiten partículas *izquierdas* en el decaimiento de los piones y nunca se emiten partículas derechas. El decaimiento del pion sólo ocurre en la versión izquierda y nunca en la versión derecha, lo cual constituye una violación de la simetría izquierda y derecha en base a las implicaciones de la conservación de la paridad.

Como consecuencia resulta que los *neutrinos* son exclusivamente *izquierdos,* en tanto que los *antineutrinos* sólo son *derechos,* tanto en el tipo muón como en el tipo electrón. Aunque sólo se emiten antimuones izquierdos en el decaimiento del π^+ es fácil ver que cualquier partícula con una masa en reposo *finita,* tal como el muón, no puede tener una característica izquierda o derecha. Supóngase que un antimuón viaja hacia arriba con su ímpetu angular de espín también hacia arriba, constituyendo entonces a una partícula derecha, como se muestra en la Fig. 40-9*a*. Si se observa a la partícula desde un marco de referencia que viaja hacia arriba, a lo largo de la dirección del movimiento del antimuón, pero con una rapidez mayor que la de éste, entonces,

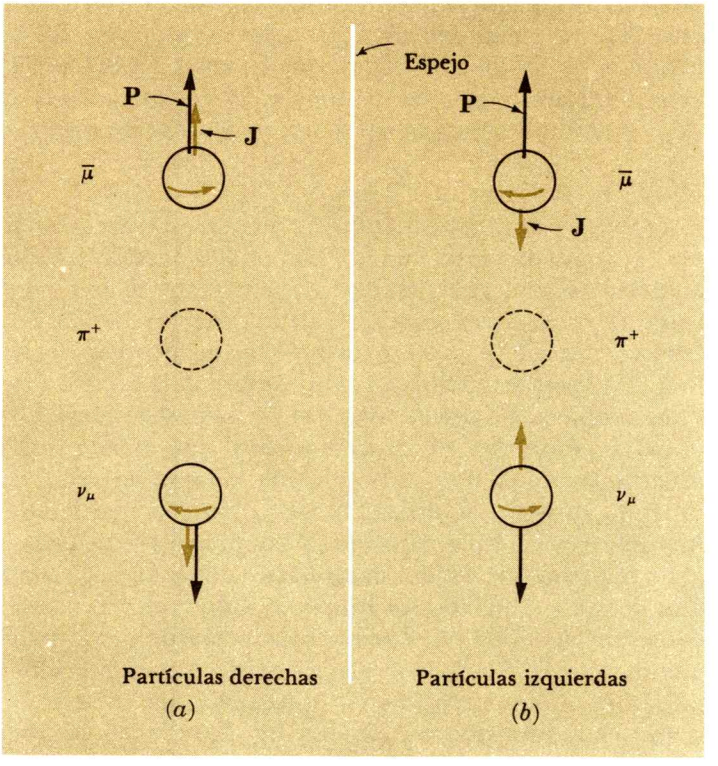


FIG. 40-9. Dos posibilidades, a priori, del decaimiento del π^+ en un antimuón $\bar{\mu}$ y en un neutrino ν_μ. (*a*) Los vectores de ímpetu lineal P y de ímpetu angular J son paralelos, correspondiendo al hecho de que las dos partículas son *derechas*; (*b*) P y J son antiparalelos, correspondiendo a que las dos partículas son *izquierdas*. Nótese que (*b*) es la imagen especular de (*a*) con respecto a una línea *vertical* que las divide. Experimentalmente, sólo se observa el decaimiento correspondiente a (*b*), en el que las dos partículas son izquierdas.

en este marco de referencia, el antimuón se mueve hacia abajo; el vector de ímpetu lineal de la partícula se ha invertido, pero no lo ha hecho su vector de ímpetu angular, y en el segundo marco de referencia se observa como una partícula izquierda. Como los antimuones pueden ser derechos o izquierdos, la aparición de sólo partículas izquierdas en el decaimiento del π^+ implica que el neutrino siempre debe ser izquierdo. Más aún, esto está de acuerdo con el hecho de que, como el neutrino tiene masa en reposo cero y siempre viaja con la rapidez de la luz *c*, *no* hay un marco de referencia desde el cual el vector velocidad del neutrino pueda invertirse por observación a una rapidez mayor que la de la partícula.

La no conservación de la paridad *P* en la interacción débil provocó la reconsideración de otras dos leyes de conservación, estrechamente relacionadas: La conservación de la *conjugación de la carga C*, que indica que las interacciones y los procesos no cambian cuando cada partícula se reemplaza por su antipartícula, y viceversa; y la *invariancia del tiempo T*, según la cual cualquier proceso puede producirse sin cambio alguno tanto en el sentido en el que avanza el tiempo como en el que retrocede (en términos más específicos, si una película animada representa a un proceso posible, entonces el movimiento animado que uno observa cuando

la película se pasa en sentido contrario, también es un proceso posible). Es suficiente decir que la conjugación de la carga, la invariancia del tiempo y la paridad parecen violarse en la interacción débil aunque, aparentemente, la combinación *CPT* se mantiene como un principio de conservación exacto y general.

40—6 PARTICULAS RESONANTES

Además de las partículas elementales mostradas en la Tabla 40-3 se han observado cuando menos 100 partículas fundamentales adicionales, con vidas medias menores que 10^{-21} s*, y se conocen como *partículas resonantes*. Tales partículas tienen una vida media muy pequeña, de tal forma que no pueden dejar una traza bastante larga y medible en una cámara de burbujas y su existencia y sus propiedades deben inferirse de métodos menos directos.

Para entender el procedimiento que puede utilizarse para identificar a una partícula con una vida en extremo corta, consideremos primero la situación análoga en la que los electrones de una energía cinética controlada bombardean a átomos de hidrógeno inicialmente en su estado básico. Debido a que la energía del átomo está cuantizada, el átomo de hidrógeno no puede absorber y convertir en energía de excitación interna una cantidad de energía menor que 10.2 eV, que es la energía de excitación del primer estado excitado del átomo de hidrógeno (Sec. 38-3). Por lo tanto, si los electrones que inciden en los átomos de hidrógeno tienen energías menores que 10.2 eV, las colisiones son perfectamente elásticas, hasta que los electrones alcanzan la energía de 10.2 eV, en cuyo caso un electrón puede quedar efectivamente en reposo en la colisión, en tanto que el átomo de hidrógeno sobre el cual ha incidido sufre una transición cuántica a su primer estado excitado, a partir del cual puede decaer luego, a través de la emisión de un fotón. Este fenómeno fue estudiado, por primera vez en 1914, por J. Franck y G. Hertz en el llamado, *experimento de Franck-Hertz.*

La excitación a un estado cuantizado por el bombardeo de una partícula muestra un comportamiento resonante (Sec. 14-5): La probabilidad* del proceso de excitación es máxima cuando la energía cinética del electrón es igual a la energía de excitación y disminuye para energías electrónicas mayores o menores. Nótese que cuando el átomo de hidrógeno existe en, digamos, el primer estado excitado, puede considerarse apropiadamente como una partícula distinta a la del átomo de hidrógeno en su estado base.

---

*La partícula η^0, con una vida media de 2.5×10^{-19} s, y que se muestra en la Tabla 40-3, es una partícula resonante. A diferencia de la mayoría de las partículas resonantes, decae a través de una interacción electromagnética, en vez de hacerlo a través de una interacción fuerte, y su vida media es, en consecuencia, relativamente grande.

*La probabilidad de ocurrencia de un proceso de reacción se expresa frecuentemente en términos de la *sección transversal* de la reacción, que es el área efectiva presentada por la partícula del blanco a la partícula incidente (ver el Prob. 39-27). El pico de resonancia es la sección transversal medida como función de la energía de la partícula incidente.

Después de todo, su masa es mayor por exactamente 10.2 eV/c^2 y su ímpetu angular atómico también puede diferir del correspondiente al átomo en su estado básico.

Las partículas resonantes pueden producirse en una forma análoga bombardeando los nucleones con electrones o con piones, pero con energías cinéticas del orden de GeV. Como en el caso atómico, la existencia de la partícula se infiere de la energía de la partícula incidente en el pico de resonancia. Por ejemplo, si sobre un grupo de protones inciden electrones de 1.2 GeV, se produce una partícula de resonancia representado por Δ (1236)

$$e^- + p \rightarrow \Delta(1236)$$

en donde el número en el paréntesis indica la energía en reposo de la partícula, medida en MeV. Esta partícula, que es la partícula resonante de menor masa en el grupo bariónico, decae rápidamente en un protón y en un electrón:

$$\Delta(1236) \rightarrow e^- + p$$

La vida media de la partícula resonante puede calcularse del ancho del pico de resonancia. Si una partícula existe por un tiempo finito Δt, entonces, del principio de incertidumbre, su energía en reposo tiene una incertidumbre de $\Delta E = \hbar/\Delta t$, en donde ΔE también es el ancho de la resonancia. En el caso de la partícula Δ (1236), $\Delta E \approx 100$ MeV, y el cálculo de Δt es de 7×10^{-24} s. Otras partículas de resonancia, en el grupo de los bariones, son: Δ (1950), N^* (1520), N^* (1670), N^* (1688); en estas partículas, y en otras partículas, se han determinado las propiedades fundamentales tales como el ímpetu angular de espín, el isoespín y la extrañeza, al igual que la energía en reposo, la vida media y los esquemas de decaimiento. Entre las partículas resonantes del grupo de mesones, que también decaen sobre todo a través de la interacción fuerte, se encuentran: $\rho(765)$, $\omega(784)$, $\phi(1019)$.

PROBLEMAS

40-1. Dibujar las gráficas de los diagramas espacio-temporales de los siguientes procesos: (*a*) Un electrón y un positrón se atraen y finalmente se aniquilan y se produce un fotón; (*b*) un antiprotón y un protón se atraen y por último se aniquilan produciendo piones.

40-2. La Fig. P40-2 muestra cuatro gráficas espacio-temporales. (*a*) Describir la secuencia de los eventos (yendo del pasado hacia el futuro) en cada gráfica. (*b*) Ahora imaginemos que cada gráfica se hace girar 90° con respecto a los ejes de espacio y tiempo (las líneas de fotón se ajustan al ángulo adecuado con

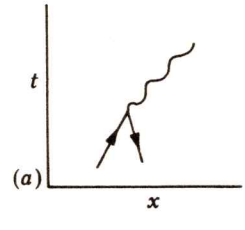
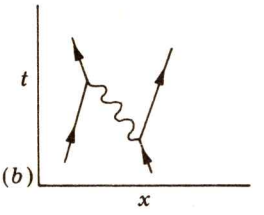


FIG. P40-2



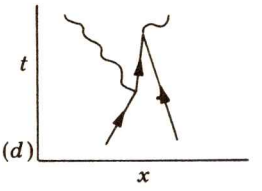
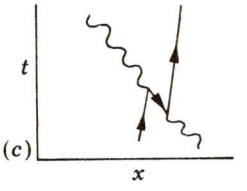


FIG. P40-2, *cont.*



respecto a la vertical); describir nuevamente la secuencia de los eventos en cada gráfica.

40-3. Considérese a un protón en reposo. Si el protón se transforma espontáneamente en un neutrón y en un π^+, (*a*) ¿cuál es el cambio ΔE en la energía (medida en MeV) del sistema? y (*b*) ¿cuál es el intervalo de tiempo Δt en el que se "solicita" energía? (*c*) mostrar estos efectos en un diagrama espaciotemporal.

40-4. Cualquier partícula inestable que vive durante un tiempo finito tiene una incerteza en su energía total y, por lo tanto, una incerteza en su masa. ¿Cuál es la incerteza en la masa de una partícula que tiene una vida media τ?

40-5. La energía potencial entre dos nucleones puede aproximarse mediante la relación $V = (a/r)e^{-r/r_0}$, en donde r es la distancia internucleónica y a y r_0 son constantes. Esta función se llama potencial de Yukawa. ¿Cuál es la masa aproximada de la partícula de campo intermediaria de la fuerza entre dos nucleones? Indicar esta masa en términos de los parámetros que describen el potencial internuclear.

40-6. Demostrar que el radio de curvatura, en centímetros, de una partícula con carga z (en múltiplos de la carga electrónica e) y con un ímpetu P (en MeV/c) cuando viaja perpendicularmente a un campo magnético B (en gauss), está dada por $r = (3.33 \times 10^3)P/zB$.

40-7. ¿Cuáles son los radios de curvatura, en un campo magnético de 2.0 Wb/m^2 de (*a*) electrones de 10 keV (*b*) electrones de 10 GeV (*c*) protones de 10 keV y (*d*) protones de 10 GeV?

40-8. Recordando los argumentos originales que condujeron a la suposición de la existencia del neutrino en el decaimiento β ¿cómo se comprobaría experimentalmente que (*a*) un pion cargado decae en un muón y en un neutrino (*b*) un muón decae en un electrón y en dos neutrinos?

40-9. Una partícula π^+ de 0.50 GeV, existe por un tiempo igual al de su vida media en un marco de referencia en el que el pion está en reposo. ¿Qué longitud de traza dejaría un π^+ de 0.50 GeV en una cámara de burbujas, suponiendo que no hay pérdida de energía a lo largo de la trayectoria?

40-10. ¿Cuál es el radio de curvatura, en un campo magnético de 2.0 Wb/m^2 de (*a*) un protón de 10 GeV (*b*) un pion cargado de 10 MeV y (*c*) un electrón de 1.0 MeV, suponiendo que, en cada caso, la partícula se mueve perpendicularmente a las líneas del campo magnético?

40-11. Si un pion neutro se encontrara en reposo, ¿cuáles serían las energías de los fotones en los que decaen?

40-12. Considérese a un neutrón en reposo. Si el neutrón se transforma espontánea en un protón y en un kaon menos, (*a*) ¿cuál es el cambio ΔE en la energía (medida en MeV) del sistema? y (*b*) ¿durante qué intervalo de tiempo Δt se puede solicitar esta energía? (*c*) Mostrar estos efectos en un diagrama espaciotemporal.

40-13. Un método para medir la diferencia de masas entre el π^- y el π^0 es el de observar la captura de mesones π^- de baja energía por protones. Una reacción posible es $\pi^- + p \rightarrow n + \pi^0$, en donde las dos partículas incidentes están inicialmente en reposo. El neutrón abandona la reacción con una energía cinética de 0.50 MeV. (*a*) Utilizando las masas conocidas del protón y del neutrón (Tabla 40-3) y aproximando a la masa del pión por un séptimo de la masa del nucleón, determinar la diferencia en masas entre el

π^- y el π^0 y compararla con los datos de la Tabla 40-3.

40-14. Un π^0 de 30 MeV decae rápidamente en dos fotones. Si los fotones se mueven en direcciones paralela y antiparalela a la dirección del movimiento del pion, ¿cuáles serán sus energías observadas en el marco de referencia del laboratorio?

40-15. Un pion libre, con carga negativa, que se encuentra en reposo, puede decaer directamente en un electrón y en un neutrino, o puede decaer en un muón y en un neutrino, y el muón puede decaer en un electrón y dos neutrinos (ver la Tabla 40-3). (*a*) Calcular la energía cinética del electrón en el decaimiento directo del π^-. (*b*) ¿Cuál es la máxima energía cinética que puede tener el electrón en el decaimiento, a través de dos procesos, del π^-?

40-16. ¿Cuál es la dispersión en la energía de los mesones K^+ del decaimiento $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$, si el μ^+ se encontraba inicialmente en reposo?

40-17. ¿Qué evidencia experimental demuestra que el Σ^- no es la antipartícula del Σ^+, esto es, que el Σ^- y el $\overline{\Sigma^-}$ son partículas elementales diferentes?

40-18. Si se tuviera un haz de partículas Σ^0 y un segundo haz de partículas $\overline{\Sigma^0}$ ¿cómo se podría determinar cuál de los dos haces contiene a las partículas Σ^0's?

40-19. Demostrar que la longitud de onda de cualquier partícula cuya energía cinética sea grande comparada con su energía en reposo, está dada por $\lambda = 1.24$ GeV-fermi/E; en donde E es la energía total de la partícula, medida en GeV.

40-20. (*a*) Demostrar que la constante de Planck dividida entre 2π puede expresarse como 6.58×10^{-22} MeV-s. (*b*) ¿Cuál es el ancho de línea aproximado de un estado nuclear excitado con un tiempo de vida igual al tiempo nuclear?

40-21. Dado un haz de partículas K^0 y un haz de partículas $\overline{K^0}$, ¿cómo se podría identificar el haz con las partículas K^0 ?

40-22. Un haz de mesones K^- incide en un blanco estacionario de protones. ¿Cuál es la energía umbral de la producción de partículas Ω^- ?

40-23. ¿Cuáles de las siguientes reacciones *no pueden* ocurrir? Indicar la (s) razón (es) en cada caso.

(*a*) $5 \text{ GeV} + \Omega^- \rightarrow \Sigma^- + \Lambda^0 + \pi^0$
(*b*) $\pi^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^- + e^+ + \bar{\nu}_e$
(*c*) $\Lambda^0 \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e + n$
(*d*) $\Lambda^0 + \overline{\Lambda^0} \rightarrow p^+ + p^- + 3\pi^+ + 3\pi^-$
(*e*) $\Omega^- \rightarrow \Sigma^- + \pi^+ + \pi^- + e^+ + e^-$

40-24. (*a*) Demostrar que, si una partícula tiene carga eléctrica q (en unidades de la carga elemental e), número bariónico B, componente del espín isotópico T y número de extrañeza S, se aplica la siguiente relación: $S = 2(q - B/2 - T)$. (*b*) ¿Cuál es la componente del espín isotópico T de las partículas Σ^-, Σ^0, y Σ^+?

40-25. Considérese a una partícula Ω^- que decae en el vacío (*a*) Escribir uno de los conjuntos posibles de ecuaciones del decaimiento mediante el cual la partícula puede decaer en partículas estables. (*b*) Indicar la cantidad y la clase de estas partículas estables.

APENDICES

Apéndice I

CONSTANTES FUNDAMENTALES

Los valores que aparecen a continuación se tomaron del *Handbook of Chemistry and Physics* (54a. Ed, 1973-74), The Chemical Rubber Co., Cleveland. La última cifra significativa puede, en ciertos casos, estar indefinida.

Nombre de la cantidad	*Símbolo*	*Valor*
Aceleración debida a la gravedad (valor normal)	g	9.80665 m/s^2 = 32.174 ft/s^2
Constante de gravitación universal	G	6.673×10^{-11} N-m^2/kg^2
Masa de la Tierra	m_E	5.9763×10^{24} kg
Radio promedio de la Tierra	r_E	6.370949×10^6 m = 3959 mi
Distancia promedio de la Tierra a la Luna	r_{EM}	3.84400×10^8 m $\approx$ 60 radios terrestres
Distancia promedio de la Tierra al Sol (1 unidad astronómica)	1 AU	1.4957×10^{11} m = 92.94×10^6 mi
Masa del Sol	m_S	1.991×10^{30} kg
Densidad del agua (a 3.98°C)		1.00000 g/ml
Presión atmosférica normal	1 atm	1.01325×10^5 N/m^2 = 76 cmHg = 760 torr
Constante universal de los gases	R	8.3143 J/g mol–K = 0.0821 litro-atm/g mol - K = 1.986 g cal/g mol–K
Volumen de 1 gramo mol de gas ideal a PTN		2.2414×10^{-2} m^3
Temperatura del cero absoluto		–273.15°C

Punto triple del agua		273.16 K
Número de Avogadro	N_A	6.02217×10^{23} g-mol^{-1}
Constante de Boltzmann	k	1.38062×10^{-23} J/K
"Equivalente mecánico del calor"	J	4.18400 J/cal
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	5.6696×10^{-8} J/m^2-s-K^4
Constante de la fuerza de Coulomb	$k = 1/4\pi\varepsilon_0$	8.987554×10^9 N-m^2/C^2
Permitividad del espacio vacío	ε_0	8.854185×10^{-12} C^2/N-m^2
Permeabilidad del espacio vacío	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A-m
Rapidez de la luz (en el vacío)	c	2.99792456×10^8 m/s
Carga del electrón	e	1.602192×10^{-19} C
Electrón volt	1 eV	1.602192×10^{-19} J
Factor de conversión de la masa en energía (unidad de masa atómica = u)	1 u = $(\frac{1}{12})^{12}_6$C	931.481 MeV/c^2 1.6604×10^{-27} kg
Masa del electrón	m_e	9.10956×10^{-31} kg 0.000548593 u 0.511004 MeV/c^2
Masa del protón	m_p	1.67261×10^{-27} kg 1.00727661 u 938.259 MeV/c^2 = 1836.11 m_e
Masa del neutrón	m_n	1.67492×10^{-27} kg 1.0086652 u 939.553 MeV/c^2
Constante de Planck	h	6.626196×10^{-34} J-s
	$\hbar = h/2\pi$	1.054591×10^{-34} J-s

Apéndice II

FACTORES DE CONVERSION

Longitud

	m	cm	km
1 metro	1	10^{2}	10^{-3}
1 centímetro	10^{-2}	1	10^{-5}
1 kilómetro	10^{3}	10^{5}	1
1 pulgada	2.540×10^{-2}	2.540	2.540×10^{-5}
1 pie	0.3048	30.48	3.048×10^{-4}
1 milla	1609	1.609×10^{5}	1.609

	plg	pie	mi
1 metro	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1 centímetro	0.3937	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1 kilómetro	3.937×10^{4}	3.281×10^{3}	0.6214
1 pulgada	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 pie	12	1	1.894×10^{-4}
1 milla	6.336×10^{4}	5,280	1

1 pie = 1200/3937 m
1 año luz = 9.460528×10^{12} km
1 parsec = 3.08572×10^{13} km
1 unidad astronómica (distancia promedio de la Tierra al Sol) = 1 UA = 1.4957×10^{11} m
1 micra = 1 μm = 10^{-6} m
1 milimicra = 1 mμ = 10^{-9} m
1 angstrom = 1 Å = 10^{-10} m
1 unidad X = 1 U X = 10^{-13} m

Angulo Plano

1 rev = 2π rad = 360°

Masa

	kg	g	slug	u
1 kilogramo †	1	10^{3}	6.852×10^{-2}	6.024×10^{26}
1 gramo	10^{-3}	1	6.852×10^{-5}	6.024×10^{23}
1 slug (libra/g)	14.59	1.459×10^{4}	1	8.789×10^{27}
1 unidad de masa atómica	1.660×10^{-27}	1.660×10^{-24}	1.137×10^{-28}	1

† 1 libra = peso de 0.45359237 kg

Tiempo

	s	min	h
1 segundo	1	1.667×10^{-2}	2.778×10^{-4}
1 minuto	60	1	1.667×10^{-2}
1 hora	3600	60	1
1 día	8.640×10^{4}	1440	24
1 año (a)	3.156×10^{7}	5.259×10^{5}	8.766×10^{3}

	día	año
1 segundo	1.157×10^{-5}	3.169×10^{-8}
1 minuto	6.994×10^{-4}	1.901×10^{-6}
1 hora	4.167×10^{-2}	1.141×10^{-4}
1 día	1	2.738×10^{-3}
1 año (a)	365.2	1

Rapidez

	m/s	cm/s	pie/s	mi/h
1 metro/segundo	1	10^{2}	3.281	2.237
1 centímetro/segundo	10^{-2}	1	3.281×10^{-2}	2.237×10^{-2}
1 pie/segundo	0.3048	30.48	1	0.6818
1 milla/hora	0.4470	44.70	1.467	1

1 mi/min = 60 mi/h = 88 pies/s

Fuerza

	N	dina	libra
1 newton	1	10^{5}	0.2248
1 dina	10^{-5}	1	2.248×10^{-6}
1 libra	4.448	4.448×10^{5}	1

Trabajo, Energía, Calor

	J	erg	libra-pie
1 joule	1	10^{7}	0.7376
1 erg	10^{-7}	1	7.376×10^{-8}
1 libra-pie	1.356	1.356×10^{7}	1
1 eV	1.602×10^{-19}	1.602×10^{-12}	1.182×10^{-19}
1 g cal	4.186	4.186×10^{7}	3.087
1 Btu	1.055×10^{3}	1.055×10^{10}	7.779×10^{2}
1 kWh	3.600×10^{6}	3.600×10^{13}	2.655×10^{6}

	eV	caloría	Btu	kWh
1 joule	6.242×10^{18}	0.2389	9.481×10^{-4}	2.778×10^{-7}
1 erg	6.242×10^{11}	2.389×10^{-8}	9.481×10^{-11}	2.778×10^{-14}
1 libra-pie	8.464×10^{18}	0.3239	1.285×10^{-3}	3.766×10^{-7}
1 eV	1	3.827×10^{-20}	1.519×10^{-22}	4.450×10^{-26}
1 g cal	2.613×10^{19}	1	3.968×10^{-3}	1.163×10^{-6}
1 Btu	6.585×10^{21}	2.520×10^{2}	1	2.930×10^{-4}
1 kWh	2.247×10^{25}	8.601×10^{5}	3.413×10^{2}	1

Presión

	N/m^2	$dina/cm^2$	atm
1 newton/metro^2	1	10	9.869×10^{-6}
1 dina/metro^2	10^{-1}	1	9.869×10^{-7}
1 atmósfera	1.013×10^{5}	1.013×10^{6}	1
1 centímetro de mercurio†	1.333×10^{3}	1.333×10^{4}	1.316×10^{-2}
1 libra/pulgada^2	6.895×10^{3}	6.895×10^{4}	6.805×10^{-2}
1 libra/pie^2	47.88	4.788×10^{2}	4.725×10^{-4}

	cmHg	libra/pulgada^2	libra/pie^2
1 newton/metro^2	7.501×10^{-4}	1.450×10^{-4}	2.089×10^{-2}
1 dina/metro^2	7.501×10^{-5}	1.450×10^{-5}	2.089×10^{-3}
1 atmósfera	76	14.70	2.116×10^{3}
1 centímetro de mercurio†	1	0.1943	27.85
1 libra/pulgada^2	5.171	1	144
1 libra/pie^2	3.591×10^{-2}	6.944×10^{-3}	1

*A 0°C y en una localización en donde la aceleración de la gravedad tiene su valor "normal" de 9.80665 m/s^2.

Potencia

1 caballo de potencia = 550 lb-pie/s = 0.7457 kW

Apéndice III

UNIDADES Y FACTORES DE CONVERSION ELECTRICOS Y MAGNETICOS

Además del sistema SI de las unidades electromagnéticas (también conocido como sistema mksa o Giorgi), en el trabajo científico también se usa, con frecuencia, el sistema gaussiano de unidades eléctricas y magnéticas. En el sistema gaussiano, las unidades mecánicas son las del sistema cgs absoluto; por ejemplo, la de longitud es el cm, la de la fuerza es la dina, la del trabajo es el erg. El sistema gaussiano se subdivide en el sistema de unidades electrostáticas (ues) para efectos estrictamente eléctricos y en el sistema de unidades electromagnéticas (uem) para efectos estrictamente magnéticos.

La relación básica que define a la unidad de carga eléctrica en el sistema de ues la ley de Coulomb, escrita en la forma siguiente:

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \text{(III-1)}$$

en donde q_1 y q_2 se miden en ues (o estatcoulombs), r en cm y F en dinas. Así resulta, por definición, que dos cargas puntuales iguales tienen una carga de 1 ues si la fuerza mutua que ejercen es de 1 dina cuando están separadas una distancia de 1 cm. Para expresar las relaciones eléctricas del sistema SI en una forma apropiada para las unidades ues, se sustituye la constante $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ por 1. Las unidades derivadas llevan el prefijo "estat" seguido del nombre típico de la unidad en el SI. Así, la corriente se expresa en estatamperes, y 1 estatampere = 1 estatcoulomb/s, etc. Sin embargo, a veces ocurre que las unidades eléctricas en el sistema de ues se indican simplemente como ues; por lo tanto, 1 ues de carga por segundo representa una corriente de 1 ues.

La unidad de carga en el sistema de uem se llama abcoulomb y está relacionado con la unidad de corriente eléctrica (el abampere) de la siguiente forma: 1 abampere = 1 abcoulomb/s, en donde, por definición, la fuerza por unidad de longitud entre dos conductores rectos, paralelos y de extensión infinita, separados una distancia d queda expresada como

$$\frac{F}{L} = \frac{2I^2}{d} \qquad \text{(III-2)}$$

en donde I está en abamperes, (F/L) en dinas/cm y d en cm. Por lo tanto, por definición, dos corrientes iguales en dos conductores rectilíneos

paralelos separados 1 cm son de 1 abampere cuando la fuerza magnética entre ellos es de 2 dina/cm. Las demás unidades uem derivadas normalmente llevarán el prefijo "ab" seguido del nombre de la unidad en el SI; por ejemplo, 1 abvolt = 1 erg/abcoulomb. Sin embargo, de nuevo ocurre que las unidades de las cantidades en el sistema de uem se pueden expresar simplemente como uem; así, 1 erg por unidad uem de carga corresponde a una diferencia de potencial que simplemente puede expresarse como 1 uem, o bien, como 1 abvolt.

Las magnitudes y las unidades de la carga eléctrica en el sistema de ves y en el de uem resultan diferentes. De hecho, su relación numérica es, aproximadamente

$$1 \text{ abcoulomb}/1\text{estatcoulomb} = 3 \times 10^{10}$$

Este factor numérico es la rapidez de la luz en el vacío expresada en unidades cgs, $c = 3 \times 10^{10}$ cm/s. Por lo tanto, las relaciones que contengan tanto cantidades eléctricas como magnéticas (tales como las ecuaciones de Maxwell) pueden contener explícitamente a la rapidez de la luz c.

Debido a que las Ecs. (III-1) y (III-2), que definen a las unidades de carga en los sistemas de ues y de uem, son diferentes a las ecuaciones correspondientes del sistema SI (Ecs. (20-7) y (27-10), respectivamente), puede ocurrir que otras ecuaciones del electromagnetismo difieran en forma. A continuación se listan algunas de las relaciones básicas en su forma apropiada en el sistema SI y en el sistema gaussiano y en seguida aparece una tabla con los factores de conversión. Cuando aparezca el factor 3 (o su cuadrado, 9) en los factores de conversión, se debe considerar como el factor numérico 2.9979256 que resulta de la rapidez de la luz expresada en unidades métricas, $c = 2.99792456 \times 10^8$ m/s.

Relación	*Forma en el SI*	*Forma gaussiana*
Ley de Coulomb (20-7)	$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$	$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$
Relación de Biot y Savart (27-4)	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}$	$d\mathbf{B} = \frac{i\,d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}$
Fuerza de Lorentz (26-8)	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$	$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$
Ley de Gauss (22-3)	$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$	$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi q$
Ley de Faraday (28-10)	$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$	$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{d\phi_B}{dt}$
Ley de Ampère (30-6)	$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \varepsilon_0\mu_0\frac{d\phi_E}{dt}$	$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi i}{c} + \frac{1}{c}\frac{d\phi_E}{dt}$
Los vectores de campo	$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$

Cantidad	*Unidad del* SI	*Unidad* UES	*Unidad* UEM
Carga eléctrica	1 coulomb =	3×10^9 statcoulomb =	$\frac{1}{10}$ abcoulomb
Campo eléctrico (E)	1 volt/m =	$\frac{1}{3} \times 10^4$ statvolt/cm =	10^6 abvolt/cm
Potencial eléctrico	1 volt =	$\frac{1}{300}$ statvolt =	10^8 abvolt
Capacitancia	1 farad =	9×10^{11} statfarad =	10^{-9} abfarad
Corriente	1 ampere =	3×10^9 statampere =	$\frac{1}{10}$ abampere
Flujo magnético	1 weber =	$\frac{1}{300}$ erg/statampere =	10^8 maxwell
Inducción magnética (B)	1 weber/m^2 =	$\frac{1}{3} \times 10^{-6}$ dyn/statampere-cm =	10^4 gauss
Intensidad de campo magnético (H)	1 ampere-vuelta/m =	$3(4\pi) \times 10^7$ esu =	$4\pi \times 10^{-3}$ oersted
Resistencia	1 ohm =	$\frac{4\pi}{9} \times 10^{-12}$ statohm =	10^9 abohm

Apéndice IV

LAS MASAS ATOMICAS

Aquí se indican las masas de los átomos neutros de todos los nucleidos estables y las de algunos nucleidos inestables (designados con un asterisco a continuación del número de masa A). Las masas se indican en unidades de masa atómica unificadas (u) en las que, por definición, M es exactamente 12 u para el $^{12}_{6}C$.

Los datos se obtuvieron de J.H. E. Mattauch, W. Thiele y A. H. Wapstra, *Nuclear Physics, 67,* 1 (1965). Las incertidumbres son menores que 0.000001 u en muchos de los nucleidos, y llegan a ser de 0.001500 u en algunos nucleidos con número de masa grande.

Elemento	*A*	*Masa atómica* u	*Elemento*	*A*	*Masa atómica* u
$_0n$	1*	1.008 665	$_6$C	10*	10.016 810
$_1$H	1	1.007 825		11*	11.011 432
	2	2.014 102		12	12.000 000
	3*	3.016 050		13	13.003 354
$_2$He	3	3.016 030		14*	14.003 242
	4	4.002 603		15*	15.010 599
	6*	6.018 893	$_7$N	12*	12.018 641
$_3$Li	6	6.015 125		13*	13.005 738
	7	7.016 004		14	14.003 074
	8*	8.022 487		15	15.000 108
$_4$Be	7*	7.016 929		16*	16.006 103
	9	9.012 186		17*	17.008 450
	10*	10.013 534	$_8$O	14*	14.008 597
$_5$B	8*	8.024 609		15*	15.003 070
	10	10.012 939		16	15.994 915
	11	11.009 305		17	16.999 133
	12*	12.014 354		18	17.999 160
				19*	19.003 578

Elemento	*A*	*Masa atómica* u	*Elemento*	*A*	*Masa atómica* u
$_{9}$F	17*	17.002 095		47	46.951 769
	18*	18.000 937		48	47.947 951
	19	18.998 405		49	48.947 871
	20*	19.999 987		50	49.944 786
	21*	20.999 951	$_{23}$V	48*	47.952 259
$_{10}$Ne	18*	18.005 711		50*	49.947 164
	19*	19.001 881		51	50.943 962
	20	19.992 440	$_{24}$Cr	48*	47.953 760
	21	20.993 849		50	49.946 055
	22	21.991 385		52	51.940 514
	23*	22.994 473		53	52.940 653
$_{11}$Na	22*	21.994 437		54	53.938 882
	23	22.989 771	$_{25}$Mn	54*	53.940 362
$_{12}$Mg	23*	22.994 125		55	54.938 051
	24	23.990 962	$_{26}$Fe	54	53.939 617
	25	24.989 955		56	55.934 937
	26	25.991 740		57	56.935 398
$_{13}$Al	27	26.981 539		58	57.933 282
$_{14}$Si	28	27.976 930	$_{27}$Co	59	58.933 190
	29	28.976 496		60*	59.933 814
	30	29.973 763	$_{28}$Ni	58	57.935 342
$_{15}$P	31	30.973 765		60	59.930 787
$_{16}$S	32	31.972 074		61	60.931 056
	33	32.971 462		62	61.928 342
	34	33.967 865		64	63.927 958
	36	35.967 090	$_{29}$Cu	63	62.929 592
$_{17}$Cl	35	34.968 851		65	64.927 786
	36*	35.968 309	$_{30}$Zn	64	63.929 145
	37	36.965 898		66	65.926 052
$_{18}$Ar	36	35.967 544		67	66.927 145
	38	37.962 728		68	67.924 857
	40	39.962 384		70	69.925 334
$_{19}$K	39	38.963 710	$_{31}$Ga	69	68.925 574
	40*	39.964 000		71	70.924 706
	41	40.961 832	$_{32}$Ge	70	69.924 252
$_{20}$Ca	40	39.962 589		72	71.922 082
	41*	40.962 275		73	72.923 463
	42	41.958 625		74	73.921 181
	43	42.958 780		76	75.921 406
	44	43.955 488	$_{33}$As	75	74.921 597
	46	45.953 689	$_{34}$Se	74	73.922 476
	48	47.952 531		76	75.919 207
$_{21}$Sc	41*	40.969 247		77	76.919 911
	45	44.955 919		78	77.917 314
$_{22}$Ti	46	45.952 632		80	79.916 528

Elemento	*A*	*Masa atómica* u	*Elemento*	*A*	*Masa atómica* u
	82	81.916 707	$_{48}$Cd	106	105.906 463
$_{35}$Br	79	78.918 330		108	107.904 187
	81	80.916 292		110	109.903 012
$_{36}$Kr	78	77.920 403		111	110.904 189
	80	79.916 380		112	111.902 763
	82	81.913 482		113	112.904 409
	83	82.914 132		114	113.903 361
	84	83.911 504		116	115.904 762
	86	85.910 616	$_{49}$In	113	112.904 089
$_{37}$Rb	85	84.911 800		115*	114.903 871
	87*	86.909 187	$_{50}$Sn	112	111.904 835
$_{38}$Sr	84	83.913 431		114	113.902 773
	86	85.909 285		115	114.903 346
	87	86.908 893		116	115.901 745
	88	87.905 641		117	116.902 959
$_{39}$Y	89	88.905 872		118	117.901 606
$_{40}$Zr	90	89.904 700		119	118.903 314
	91	90.905 642		120	119.902 199
	92	91.905 031		122	121.903 442
	94	93.906 314		124	123.905 272
	96	95.908 286	$_{51}$Sb	121	120.903 817
$_{41}$Nb	93	92.906 382		123	122.904 213
$_{42}$Mo	92	91.906 811	$_{52}$Te	120	119.904 023
	94	93.905 091		122	121.903 066
	95	94.905 839		123	122.904 277
	96	95.904 674		124	123.902 842
	97	96.906 022		125	124.904 418
	98	97.905 409		126	125.903 322
	100	99.907 475		128	127.904 476
$_{44}$Ru	96	95.907 598		130	129.906 238
	98	97.905 289	$_{53}$I	127	126.904 470
	99	98.905 936	$_{54}$Xe	124	123.906 120
	100	99.904 218		126	125.904 288
	101	100.905 577		128	127.903 540
	102	101.904 348		129	128.904 784
	104	103.905 430		130	129.903 509
$_{45}$Rh	103	102.905 511		131	130.905 086
$_{46}$Pd	102	101.905 609		132	131.904 161
	104	103.904 011		134	133.905 398
	105	104.905 064		136	135.907 221
	106	105.903 479	$_{55}$Cs	133	132.905 355
	108	107.903 891	$_{56}$Ba	130	129.906 245
	110	109.905 164		132	131.905 120
$_{47}$Ag	107	106.905 094		134	133.904 612
	109	108.904 756		135	134.905 550
				136	135.904 300

Elemento	*A*	*Masa atómica* u	*Elemento*	*A*	*Masa atómica* u
	137	136.905 500		167	166.932 060
	138	137.905 000		168	167.932 383
				170	169.935 560
$_{57}$La	138*	137.906 910			
	139	138.906 140	$_{69}$Tm	169	168.934 245
$_{58}$Ce	136	135.907 100	$_{70}$Yb	168	167.934 160
	138	137.905 830		170	169.935 020
	140	139.905 392		171	170.936 430
	142	141.909 140		172	171.936 060
				173	172.938 060
$_{59}$Pr	141	140.907 596		174	173.938 740
$_{60}$Nd	142	141.907 663		176	175.942 680
	143	142.909 779	$_{71}$Lu	175	174.940 640
	144*	143.910 039		176*	175.942 660
	145	144.912 538			
	146	145.913 086	$_{72}$Hf	174	173.940 360
	148	147.916 869		176	175.941 570
	150	149.920 915		177	176.943 400
				178	177.943 880
$_{62}$Sm	144	143.911 989		179	178.946 030
	147*	146.914 867		180	179.946 820
	148	147.914 791			
	149	148.917 180	$_{73}$Ta	181	180.948 007
	150	149.917 276	$_{74}$W	180	179.947 000
	152	151.919 756		182	181.948 301
	154	153.922 282		183	182.950 324
				184	183.951 025
$_{63}$Eu	151	150.919 838		186	185.954 440
	153	152.921 242			
$_{64}$Gd	152	151.919 794	$_{75}$Re	185	184.953 059
	154	153.920 929		187*	186.955 833
	155	154.922 664	$_{76}$Os	184	183.952 750
	156	155.922 175		186	185.953 870
	157	156.924 025		187	186.955 832
	158	157.924 178		188	187.956 081
	160	159.927 115		189	188.958 300
				190	189.958 630
$_{65}$Tb	159	158.925 351		192	191.961 450
$_{66}$Dy	156	155.923 930			
	158	157.924 449	$_{77}$Ir	191	190.960 640
	160	159.925 202		193	192.963 012
	161	160.926 945	$_{78}$Pt	190*	189.959 950
	162	161.926 803		192	191.961 150
	163	162.928 755		194	193.962 725
	164	163.929 200		195	194.964 813
				196	195.964 967
$_{67}$Ho	165	164.930 421		198	197.967 895
$_{68}$Er	162	161.928 740			
	164	163.929 287	$_{79}$Au	197	196.966 541
	166	165.930 307	$_{80}$Hg	196	195.965 820

Elemento	*A*	*Masa atómica* u	*Elemento*	*A*	*Masa atómica* u
	198	197.966 756		206	205.974 468
	199	198.968 279		207	206.975 903
	200	199.968 327		208	207.976 650
	201	200.970 308	$_{83}$Bi	209	208.981 082
	202	201.970 642			
	204	203.973 495	$_{90}$Th	232*	232.038 124
$_{81}$Tl	203	202.972 353	$_{92}$U	234*	234.040 904
	205	204.974 442		235*	235.043 915
$_{82}$Pb	204	203.973 044		238*	238.050 770

Apéndice V

RELACIONES MATEMATICAS

Desarrollo en series

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \equiv e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \qquad \left(\text{para } \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

Identidades Trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$
$$\operatorname{sen}\,(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$$
$$\cos\,(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

Constantes Numéricas

$$\pi = 3.14159$$
$$e = 2.71828$$
$$\sqrt{2} = 1.414$$
$$\sqrt{3} = 1.732$$

Apéndice VI

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS NATURALES

Angulo				
Grados	*Radianes*	*Seno*	*Coseno*	*Tangente*
0°	0.000	0.000	1.000	0.000
1°	0.018	0.017	1.000	0.018
2°	0.035	0.035	0.999	0.035
3°	0.052	0.052	0.999	0.052
4°	0.070	0.070	0.998	0.070
5°	**0.087**	**0.087**	**0.996**	**0.087**
6°	0.105	0.105	0.995	0.105
7°	0.122	0.122	0.993	0.123
8°	0.140	0.139	0.990	0.141
9°	0.157	0.156	0.988	0.158
10°	**0.175**	**0.174**	**0.985**	**0.176**
11°	0.192	0.191	0.982	0.194
12°	0.209	0.208	0.978	0.213
13°	0.227	0.225	0.974	0.231
14°	0.244	0.242	0.970	0.249
15°	**0.262**	**0.259**	**0.966**	**0.268**
16°	0.279	0.276	0.961	0.287
17°	0.297	0.292	0.956	0.306
18°	0.314	0.309	0.951	0.325
19°	0.332	0.326	0.946	0.344

Angulo				
Grados	*Radianes*	*Seno*	*Coseno*	*Tangente*
20°	**0.349**	**0.342**	**0.940**	**0.364**
21°	0.367	0.358	0.934	0.384
22°	0.384	0.375	0.927	0.404
23°	0.401	0.391	0.921	0.425
24°	0.419	0.407	0.914	0.445
25°	**0.436**	**0.423**	**0.906**	**0.466**
26°	0.454	0.438	0.899	0.488
27°	0.471	0.454	0.891	0.510
28°	0.489	0.469	0.883	0.532
29°	0.506	0.485	0.875	0.554
30°	**0.524**	**0.500**	**0.866**	**0.577**
31°	0.541	0.515	0.857	0.601
32°	0.559	0.530	0.848	0.625
33°	0.576	0.545	0.839	0.649
34°	0.593	0.559	0.829	0.675
35°	**0.611**	**0.574**	**0.819**	**0.700**
36°	0.628	0.588	0.809	0.727
37°	0.646	0.602	0.799	0.754
38°	0.663	0.616	0.788	0.781
39°	0.681	0.629	0.777	0.810

1 rad = 57.3°
Cuando θ es pequeño (en radianes), sen $\theta \approx \theta$ y tan $\theta \approx \theta$

Angulo				
Grados	*Radianes*	*Seno*	*Coseno*	*Tangente*
40°	**0.698**	**0.643**	**0.766**	**0.839**
41°	0.716	0.656	0.755	0.869
42°	0.733	0.669	0.743	0.900
43°	0.751	0.682	0.731	0.933
44°	0.768	0.695	0.719	0.966
45°	**0.785**	**0.707**	**0.707**	**1.000**
46°	0.803	0.719	0.695	1.036
47°	0.820	0.731	0.682	1.072
48°	0.838	0.743	0.669	1.111
49°	0.855	0.755	0.656	1.150
50°	**0.873**	**0.766**	**0.643**	**1.192**
51°	0.890	0.777	0.629	1.235
52°	0.908	0.788	0.616	1.280
53°	0.925	0.799	0.602	1.327
54°	0.942	0.809	0.588	1.376
55°	**0.960**	**0.819**	**0.574**	**1.428**
56°	0.977	0.829	0.559	1.483
57°	0.995	0.839	0.545	1.540
58°	1.012	0.848	0.530	1.600
59°	1.030	0.857	0.515	1.664
60°	**1.047**	**0.866**	**0.500**	**1.732**
61°	1.065	0.875	0.485	1.804
62°	1.082	0.883	0.469	1.881
63°	1.100	0.891	0.454	1.963
64°	1.117	0.899	0.438	2.050

Angulo				
Grados	*Radianes*	*Seno*	*Coseno*	*Tangente*
65°	**1.134**	**0.906**	**0.423**	**2.145**
66°	1.152	0.914	0.407	2.246
67°	1.169	0.921	0.391	2.356
68°	1.187	0.927	0.375	2.475
69°	1.204	0.934	0.358	2.605
70°	**1.222**	**0.940**	**0.342**	**2.748**
71°	1.239	0.946	0.326	2.904
72°	1.257	0.951	0.309	3.078
73°	1.274	0.956	0.292	3.271
74°	1.292	0.961	0.276	3.487
75°	**1.309**	**0.966**	**0.259**	**3.732**
76°	1.326	0.970	0.242	4.011
77°	1.344	0.974	0.225	4.331
78°	1.361	0.978	0.208	4.705
79°	1.379	0.982	0.191	5.145
80°	**1.396**	**0.985**	**0.174**	**5.671**
81°	1.414	0.988	0.156	6.314
82°	1.431	0.990	0.139	7.115
83°	1.449	0.993	0.122	8.144
84°	1.466	0.995	0.105	9.514
85°	**1.484**	**0.996**	**0.087**	**11.43**
86°	1.501	0.998	0.070	14.30
87°	1.518	0.999	0.052	19.08
88°	1.536	0.999	0.035	28.64
89°	1.553	1.000	0.017	57.29
90°	**1.571**	**1.000**	**0.000**	∞

Apéndice VII

EL ALFABETO GRIEGO

Alfa	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilón	ε	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	θ, ϑ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
My	μ	M
Ny	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omicrón	o	O
Pi	π	Π
Rho	ρ	P
Sigma	σ, ς	Σ
Tau	τ	T
Ipsilón	υ	Υ
Fi	ϕ, φ	Φ
Ji	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

Apéndice VIII

CALCULOS DE MOMENTOS DE INERCIA

El momento de inercia de un sólido con una distribución continua de masa es

$$I = \int r^2 \, \mathrm{dm} = \int \rho r^2 \, dv \qquad \text{(VIII-1)}$$

en donde ρ, que es la densidad del sólido, está relacionada con el elemento de masa dm y con el elemento de volumen dv mediante $dm = \rho \, dv$. Si ρ es constante a través del sólido, puede salir del signo de integral de la Ec. (VIII-1).

En los tres ejemplos siguientes se ilustra la utilidad de las Ecs. (VIII-1) y (II-14). En la Fig. VIII-1 se indican las fórmulas de los momentos de inercia de algunas formas simples.

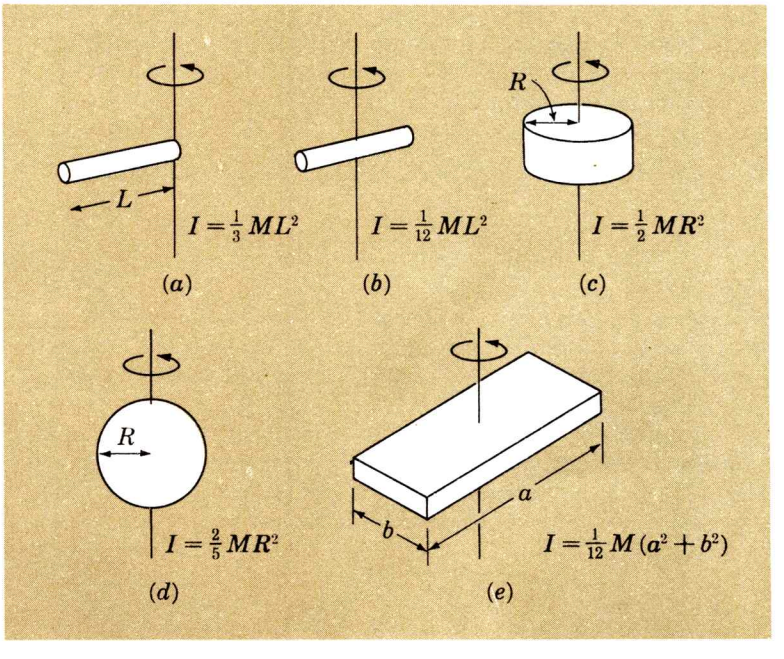


FIG. VIII-1. Momentos de inercia de diferentes formas simples, cuando la densidad es constante: (*a*) una varilla delgada con respecto a un eje perpendicular al de la misma y que pasa por uno de sus extremos, (*b*) una varilla delgada con respecto a un eje perpendicular al suyo y que pasa por su centro, (*c*) un cilindro circular recto con respecto al eje de simetría; (*d*) una esfera con respecto a un eje diametral y (*e*) una placa rectangular de lados a y b con respecto a un eje perpendicular a la placa en su centro.

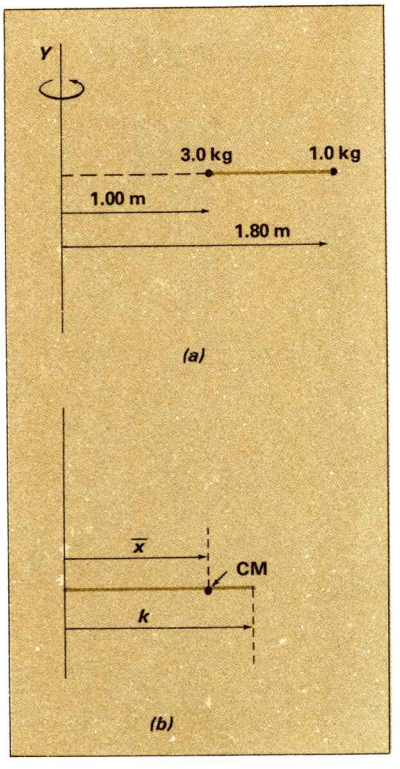


FIG. VIII-2. (*a*) Una varilla sin masa con una partícula en cada extremo. (*b*) La coordenada del centro de masas x y el radio de giro k.

Ejemplo VIII-1

Sobre una varilla sin masa están sujetas masas de 3.00 y 1.00 kg colocadas en $x = 1.00$ m y $x = 1.80$ m, respectivamente. Ver la Fig. VIII-2. (*a*) ¿Cuál es el momento de inercia de las dos masas con respecto al eje Y? (*b*) ¿A qué distancia del eje se debería colocar toda la masa para obtener el mismo momento de inercia? (*c*) ¿Cuál es la localización del centro de masas con respecto a ese eje? (*d*) ¿Cuál es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa a través del centro de masas perpendicularmente a la varilla?

(*a*) De la Ec., (12-11)

$$I = \Sigma m_i r_i^2 = (3.00 \text{ kg})(1.00 \text{ m})^2 + (1.00 \text{ kg})(1.80 \text{ m})^2 = 6.24 \text{ kg-m}^2$$

(*b*) Si toda la masa estuviera a una distancia k, llamada *radio de giro,* del eje de rotación, el momento de inercia sería $I = Mk^2$. Por lo tanto

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{6.24 \text{ kg-m}^2}{4.00 \text{ kg}}} = 1.25 \text{ m}$$

(*c*) La localización del centro de masas está dada por

$$\overline{X} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} = \frac{(3.00 \text{ kg})(1.00 \text{ m}) + (1.00 \text{ kg})(1.80 \text{ m})}{4.00 \text{ kg}} = 1.20 \text{ m} \quad (6\text{-}4)$$

Nótese que el centro de masas y el radio de giro *no* se encuentran en el mismo sitio (ver la Fig. VIII-2*b*); esto es, el punto en el cual se puede pensar que está concentrada toda la masa, para propósitos del movimiento de traslación, no es el mismo punto en el cual se puede pensar que está concentrada toda la masa para propósitos de rotación. Más aún, el centro de masas es un punto fijo en el cuerpo rígido, en tanto que el radio de giro depende del eje escogido.

(*d*) El momento de inercia con respecto al centro de masas podría calcularse escogiendo un nuevo origen en el centro de masas y después aplicando la Ec. (12-11), pero resulta más simple utilizar el teorema de los ejes paralelos, Ec. (12-12)

$$I_{CM} = I - Md^2 = 6.24 \text{ kg-m}^2 - (4.00 \text{ kg})(1.20 \text{ m})^2 = 0.48 \text{ kg-m}^2$$

Ejemplo VIII-2

¿Cuál es el momento de inercia de una varilla delgada, uniforme, de longitud L y masa M, con respecto a un eje de rotación perpendicular a la varilla y que pasa (*a*) a través de su centro y (*b*) a través de uno de sus extremos?

(*a*) Consideremos la contribución al momento de inercia de una rodaja de anchura dx a una distancia x del eje de rotación. Ver la Fig. VIII-3. Si la densidad de la varilla es uniforme, la masa considerada es $dm = M\,(dx/L)$. Entonces el momento de inercia es, con $r = x$,

$$I_{CM} = \int r^2\,dm = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} x^2\,dx = \frac{M}{L}\frac{L^3}{12} = \tfrac{1}{12}ML^2$$

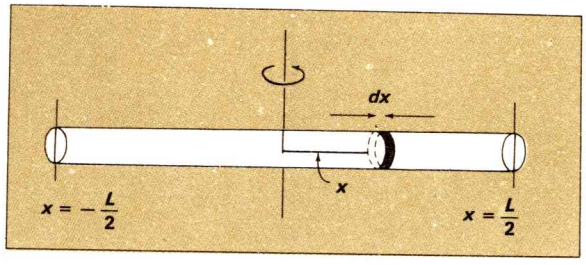


FIG. VIII-3. Cálculo del momento de inercia de una varilla delgada de longitud L en torno a un eje perpendicular a la misma y que pasa por su centro. La rodaja delgada de espesor dx esta en x.

en donde la integración se efectúa del extremo izquierdo al extremo derecho de la varilla; esto es, de $x = -L/2$ a $x = +L/2$.

(*b*) Podemos calcular el momento de inercia con respecto a un extremo de la varilla simplemente cambiando los límites de la integral definida anterior por $x = 0$ y $x = L$:

$$I_{\text{ext}} = \frac{M}{L}\int_0^L x^2\,dx = \tfrac{1}{3}ML^2$$

Este resultado es consistente con el teorema de los ejes paralelos

$$I_{\text{ext}} = I_{\text{CM}} + Md^2 \qquad (12\text{-}12)$$

$$I_{\text{ext}} = \tfrac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{3}ML^2$$

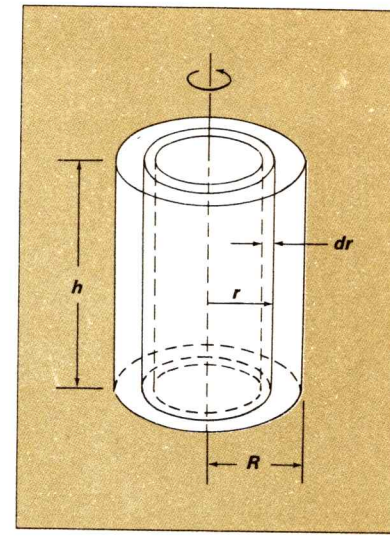


FIG. VIII-4. Cálculo del momento de inercia de un cilindro circular recto de radio R y altura h, en torno a un eje de rotación que coincide con el eje de simetría del cilindro. Se muestra un casquete cilíndrico de radio r y ancho dr.

Ejemplo VIII-3

¿Cuál es el momento de inercia de un cilindro circular recto de masa M y radio R en torno a su eje de simetría?

Como elemento de volumen escogemos un casquete cilíndrico de ancho dr. Ver la Fig. VIII-4. Toda la masa en este elemento de volumen se encuentra a la misma distancia r del eje de rotación. El volumen dv de este elemento es el producto de su altura h por su circunferencia $2\pi r$, por su anchura dr; esto es, $dv = 2\pi\ hr\ dr$. Entonces, de la Ec. (VIII-1)

$$I = \rho\int r^2\,dv = \frac{M}{\pi R^2 h}\int_0^R 2\pi h r^3\,dr = \tfrac{1}{2}MR^2$$

en donde se ha reemplazado a la densidad ρ por la masa total M dividida entre el volumen total $\pi R^2 h$, y los límites de la integral se tomaron de $r = 0$ a $r = R$.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS IMPARES

CAPITULO 2

2-1. (*a*) 12 m hacia el sur; (*b*) 6.0 m hacia el norte; (*c*) 4.0 m hacia el sur
2-3. (*a*) −52.0 m, −30.0 m; (*b*) 17.3 m, 10.0 m; (*c*) 156 m, 90.0 m
2-5. (*a*) 10.4 m; (*b*) 6.0 m
2-7. 3.4 m a 4.4° del este hacia el norte
2-9. 9.0 m a 162°
2-11. 12 millas a 17° del este hacia el norte
2-13. **A** y **B** son perpendiculares
2-15. (*a*) 40; (*b*) 9.24 unidades
2-21. (*a*) −43; (*b*) 25 hacia abajo
2-23. 10

CAPITULO 3

3-1. (*a*) 6.93 m/s; (*b*) 15.5 mi/h; (*c*) 3 min 52.0 s
3-3. (*a*) 0; (*b*) 83 km/h; (*c*) 160 km; (*d*) 192 km/h
3-5. (*a*) 26 m/s²; (*b*) 9.6 s
3-7. *(a)* 8.0×10^{15} m/s²; *(b)* 1.0×10^{-8} s
3-9. (*a*) 12 s; (*b*) 360 m
3-11. *(a)* $v = v_0 - \frac{1}{3}At^3, x = v_0t - \frac{1}{12}At^4, A: LT^{-4}$ *(b)* $v = v_0 + (B/C)\operatorname{sen} Ct, \quad x = v_0t - (B/C^2)\cos Ct, \quad B: LT^{-2}, \ C: T^{-1}$ *(c)* $v = v_0 + Dt + \frac{1}{4}Et^4, \ x = v_0t + \frac{1}{2}Dt^2 + \frac{1}{20}Et^5 \ D: LT^{-2}, E: LT^{-5}$
3-15. (*a*) mayor que $30\frac{5}{8}$ m ≈ 30.9 m
3-17. (*a*) 40.6 m; (*b*) 50.6 m
3-21. (*a*) 19.6 m/s; (*b*) 19.6 m
3-23. (*a*) 1.53 s; (*b*) 31.4 m
3-25. (*a*) 0.78 s

CAPITULO 4

4-1. (*a*) (1 m/s, −2 m/s); (*b*) (2 m/s, 5 m/s); (*c*) (−2 m/s, 3 m/s) (*d*) (0.33 m/s, 2 m/s); (*e*) (0,4 m/s)
4-3. (*a*) direcciones invertidas; (*b*) sin cambio; (*c*) direcciones invertidas
4-5. 31 m
4-7. *(a)* $(v_0 \sin\theta)^2/2g$; *(b)* $(2v_0/g)\sin\theta$
4-9. (*a*) 6.37 s; (*b*) 287 m/s dirigida 49° por abajo de la horizontal
4-11. (*a*), (*b*) y (*c*) mayores por un factor de 6.1
4-13. 2.0×10^{13} m/s²
4-17. 1.8 h
4-21. *(a)* 0; *(b)* $8\pi r/T^2$
4-23. *(a)* 9.1×10^{22} m/s²; *(b)* 6.6×10^{15}
4-25. *(a)* 7.27×10^{-5} rad/s; *(b)* 4.63×10^{2} m/s; *(c)* 2.32×10^{2} m/s
4-27. *(c)* 3.7×10^{2} días
4-31. 670 rev/min

CAPITULO 5

5-1. (*a*) (100/3) en la dirección en la que se movía la camioneta antes del impacto
5-3. 0.83 m/s
5-5. 125 kg m/s hacia el norte
5-7. 3.0 m/s
5-9. *(b)* 6×10^{13} kg
5-11. 46 m/s dirigida 27° al norte del este
5-13. 1.85 kg m/s hacia abajo

5-15. 2.4×10^4 m/s
5-17. (*b*) opuesta
5-19. (*a*) $\frac{1}{6}$ m/s; (*b*) 0; (*c*) $\frac{6}{31}$ m

CAPITULO 6

6-1. 545 m/s en la dirección en la que viaja el electrón
6-3. (*a*) 90.1 m/s a 33.7° con respecto a la dirección positiva de X; (*b*) igual que la parte (*a*)
6-5. (*a*) (−1.2 m, −0.4 m); (*b*) (0, 1.2 m/s)
6-7. $\bar{x} = 1.67, \bar{y} = 2.83$ con el origen en la enquima inferior izquierda
6-9. 755 km/h a 23.4° al este del norte
6-11. 34.6 m/s hacia la lluvia de granizo
6-13. (*a*) A 90° (el movimiento es a 36.9°); (*b*) A 138.6° (el movimiento es a 48.6°); (*c*) 180° (no cruza)
6-15. 6.5 m/s a 19° al norte del este
6-17. (*a*) la base del mástil, (*b*) 17.1 m/s directamente hacia abajo; (*c*) 17.9 m/s (dirigido a 73.7° por abajo de la horizontal; (*d*) 8.75 m
6-19. Se mueve hacia la izquierda y se detiene; se mueve hacia la derecha hasta su posición inicial y se detiene. Se repite el movimiento
6-23. (*a*) 0, 2*v*; (*b*) 0°; (*c*) 180°
6-25. (*a*) 200 kg m/s hacia la derecha; (*b*) 6.7 m/s; (*c*) 8.3 m/s hacia la derecha, 16.7 m/s hacia la izquierda; (*d*) 16.7 kg m/s hacia la derecha, 16.7 kg m/s hacia la izquierda

CAPITULO 7

7-1. (*a*) 0; (*b*) 3 N; (*c*) 0; (*d*) −1 N; (*e*) −2 N; (*f*) 0
7-3. (*a*) 6.0×10^3 N; (*b*) 6.0 mm
7-5. $mv/\Delta t$
7-7. (*a*) 120 millas/hora; (*b*) 440 libras
7-9. 1.0×10^3 N
7-11. (*a*) 8.4 N; (*b*) 0.42 m/s
7-13. (*a*) 9.9×10^3 N hacia arriba; (*b*) 9.8 N hacia abajo; (*c*) 0
7-15. (*a*) 19.8 N−s hacia abajo; (*b*) 17.2 kg m/s a 59° por abajo de la horizontal
7-17. (*a*) 1.99 m/s²; (*b*) 10.5 s
7-19. (*a*) 2 *mv*; (*b*) 2 *mv* cos θ
7-21. 1.3×10^4 kg/s

CAPITULO 8

8-1. (*a*) $T_{máx}/(g + a)$; (*b*) $T_{máx}/(g - a)$
8-3. El aeroplano se acelera hacia la derecha con $a = 0.25g$
8-5. a/b
8-7. (*a*) 65.3 m del origen a 13.3° del norte hacia el oeste; (*b*) 42.7 m/s dirigida a 6.7° del norte hacia el oeste
8-9. 51.5 N
8-11. $a_x = -1.20$ m/s², $a_y = 0.80$ m/s²
8-13. (*a*) 30 N; (*b*) 10 N; (*c*) 1.34 m/s²
8-15. 1.0 m/s²
8-17. 0.75 *g*
8-19. 0.64
8-21. $(\mu_s g/r)^{1/2}$
8-23. $\tan^{-1}(v^2/rg)$
8-25. (*a*) 4.2×10^3 N, 1.7×10^4 N, 9.8×10^3 N; (*b*) abandona la vía en el punto *a*
8-27. (*a*) 3 mg_0 dirigido radialmente hacia adentro; (*b*) $-\frac{3}{4}mg$ dirigido radialmente hacia afuera, en donde g_0 es la aceleración debida a la gravedad terrestre a una distancia r_0 del centro de la Tierra

CAPITULO 9

9-1. $p_A/p_B = (m_A/m_B)^{1/2}$
9-3. (*a*) −270 J; (*b*) +270 J; (*c*) 0
9-5. (*a*) +4.0 J; (*b*) 0; (*c*) −4.0 J; (*d*) 0
9-7. $\frac{1}{2}mv^2$
9-9. (*a*) 0; (*b*) 312 J; (*c*) 0; (*d*) 0; (*e*) −312 J
9-11. (*a*) 9 *D*; (*b*) 3 Δt
9-13. (*a*) $mgl(1 - \cos\theta)$; (*b*) $-mgl(1 - \cos\theta)$; (*c*) 0
9-15. (*a*) 5.0 J; (*b*) 5.0 J; (*c*) 12.8 J
9-17. $kq_1q_2(1/r_1 - 1/r_2)$
9-19. 4.0 kg
9-21. 5.4 W
9-23. -4.05×10^{-2} J
9-25. (*a*) $(k_1 + k_2)x^2/2$; (*b*) $-(k_1 + k_2)x$
9-27. (*a*) −576 W; (*b*) −288 W; (*c*) 0
9-29. (*a*) 1.5 J por gravedad, 0 por tensión; (*b*) 1.5 J, 3.1 m/s; (*c*) 2 *mg* = 5.9 N

CAPITULO 10

10-1. 0.60 m
10-3. 2
10-5. (*a*) 1.63×10^{14} kg; (*b*) 5.46 km

10-7. 153 m
10-9. 2
10-11. *(a)* mv; *(b)* $\frac{1}{2}mv^2$; *(c)* $\frac{1}{2}v$; *(d)* 0; *(e)* $\frac{1}{4}mv^2$; *(f)* $v(m/2k)^{1/2}$
10-13. *(a)* r; *(b)* $\frac{3}{2}r$
10-15. *(a)* 7.6×10^2 kg; *(b)* 8.4×10^5 kg; *(c)* 2.0×10^5 kg
10-17. 2.4 m/s
10-19. *(a)* 0.46; *(b)* 4.0 m/s
10-21. 34 J
10-23. 29 W
10-25. *(a)* $\frac{1}{2}mv^2$; *(b)* $\frac{1}{4}mv^2$; *(c)* $\frac{1}{2}$; *(d)* $v/2$
10-27. kq_1q_2/r^2
10-31. *(a)* 12 m/s; *(b)* explosiva
10-33. *(a)* 4.78 MeV; *(b)* 86.2 keV

CAPITULO 11

11-1. 2.9 J-s dirigido hacia la izquierda del lanzador (hacia la primera base).
11-3. x = −1.5 m
11-5. 12 J-s perpendicular al plano horizontal.
11-9. *(a)* $L = (mv_0{}^3/2g)\text{sen}^2\,\theta\cos\theta$, $\tau = mv_0{}^2\text{sen}\,\theta$; *(b)* $L = (2mv_0{}^3/g)\text{sen}^2\,\theta\cos\theta$, $\tau = 2mv_0{}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$, a lo largo de la horizontal.
11-11. 3.2 J-s
11-13. *(a)* 15/8 kg-m² ≈ 1.88 kg-m²; *(b)* 1.67×10^2 kg; *(c)* 16 rad/s = 2.55 rev/s
11-17. *(a)* 7.1×10^{33} J-s; *(b)* 2.7×10^{40} J-s
11-19. 6 partes en 10^5
11-21. *(a)* 20 rev/min; *(b)* 658 J; *(c)* no

CAPITULO 12

12-1. *(a)* 15.0π rad/s² = 47.1 rad/s²; *(b)* 660 rev
12-3. *(a)* 0.733 cm/s; *(b)* 7.68×10^{-2} cm/s²; *(c)* 0.105 rad/s; *(d)* 0
12-5. *(a)* 2.6×10^6 m/s² ≈ 2.6×10^5 *g*; *(b)* -1.7×10^{-4} rad/s²; *(c)* 1.0×10^4 h
12-13. *(a)* 2.6×10^{29} J; *(b)* 2.7×10^{33} J
12-17. *(a)* 4.43 rad/s; *(b)* 4.12 rad/s
12-19. $2FL/\omega^2$
12-25. (*a*) esfera; (*b*) cilindro; (*c*) espira.
12-27. (*a*) 7.5 kg-m²; (*b*) 3.0 Nm; (*c*) 0.40 rad/s²; (*d*) 2.0 rad/s; (*e*) 6.0 J; (*f*) 6.0 J
12-31. (*a*) 945 libras; (*b*) 824 libras; (*c*) hacia abajo 11.5° con respecto a la vertical
12-33. (*a*) 1.59×10^3 lb dirigida a 10.9° por encima de la horizontal y hacia la derecha; (*b*) 15 pies.
12-35. *(a)* $w[(2h/R) - (h/R)^2]^{1/2}$ a un ángulo por encima de la horizontal de $\text{sen}^{-1}[(2h/R) - (h/R)^2]^{1/2}$; (*b*) wh

CAPITULO 13

13-1. $\sqrt{3}\,Gm^2/d^2$
13-3. *(a)* 3.8×10^{12} kg; *(b)* 1.5×10^{29} N-m²/kg²
13-5. 4.3×10^7 m
13-7. *(a)* 1.4×10^5 g/cm³; *(b)* 5.9×10^5 m/s²
13-9. *(a)* 6.8×10^{-3}; *(b)* 3.4×10^{-3}
13-11. 0.634 d
13-15. $-mgr_e$
13-17. *(a)* 8.94×10^3 km; *(b)* horizontal
13-19. $(GM/d)^{1/2}$
13-27. 90.0%
13-29. (*a*) hacia afuera del papel; (*b*) hacia el interior del plano del papel.

CAPITULO 14

14-1. *(a)* $\pi/2$; *(b)* 2.53×10^3 N/m; *(c)* 0.503 m/s: *(d)* +1.90 cm; *(e)* −12.0 m/s²; *(f)* 15.5 cm/s
14-3. *(a)* 142 N/m; *(b)* 1.90 Hz
14-5. *(a)* 6×10^3 m/s; *(b)* 4×10^{17} m/s²
14-9. *(a)* 2.2 N/m; *(b)* 10.5 cm/s, 11.0 cm/s²; *(c)* ±8.38 cm/s, 6.58 cm/s²
14-11. 2.48×10^{-7} m
14-13. $2k$
14-17. $\omega^2 r$
14-23. *(a)* 2.01 s; *(b)* 1.79 s; *(c)* infinito
14-25. 7.90 km/s
14-27. 8.4 g

CAPITULO 15

15-1. 45 m/s
15-3. (*a*) se expande a lo largo de la cuerda por un factor de $(2)^{1/2}$; (*b*) no cambia; (*c*) aumenta por un factor de $(2)^{1/2}$
15-7. *(a)* (2.0 cm)$(\rho_1/\rho_2)^{1/2}$; *(b)* 100 Hz; *(c)* 2.0 m/s; *(d)* (2.0 m/s)$(\rho_1/\rho_2)^{1/2}$
15-9. *(a)* 2.0 mm, 0.63 m, 32 Hz; *(b)* 20 m/s; *(c)* 0.28 m/s
15-11. *(a)* 3.5×10^{-5} kg-m/s; *(b)* 9.1×10^{-4} N
15-13. En energía cinética de las partículas no desplazadas de la cuerda
15-15. $T_D/T_A = 25/16$
15-17. 0.72 m

15-19. 12.6 N
15-21. *(a)* 500 m/s; *(b)* 2,000 Hz

CAPITULO 16

16-1. 3.0 km/s
16-3. 71 ms
16-5. 30°C
16-7. 27.6 Hz (at 0°C)
16-9. *(b)* +0.606 (m/s)/C°
16-11. $c/400\ s^{-1}$ (que es 82.8 cm a 0°C)
16-13. *(a)* 200 Hz; *(b)* 360 m/s; *(c)* 50°C = 323°K
16-15. 334 m/s
16-17. *(a)* 60 db; *(b)* 120 db
16-21. 2.0×10^{-9} J

CAPITULO 17

17-1. *(a)* −40°; *(b)* $(2.7 \times 10^5)°$
17-3. *(a)* 1 H° = 0.660 C°; *(b)* $t_H = 1.52\ t_C = 59.0$
17-5. 5×10^{18} kg
17-9. *(a)* nR/p; *(b)* 3.6610×10^{-3}/K°
17-11. 72.0 g/g-mol
17-13. 4.41 kg
17-15. *(a)* 909°K = 636°C; *(b)* 48.5 atm
17-17. 299 m/s

CAPITULO 18

18-1. $\approx 3 \times 10^{-10}$ m
18-3. (2 *mv*)N
18-7. 162 m/s
18-9. 2.7 km/s
18-13. 3.74×10^3 J
18-15. *(a)* 2.0 J; *(b)* aumenta
18-17. 1.7×10^{-27} kg
18-19. *(a)* 10^{-3}; *(b)* 10^{-24}; *(c)* $\frac{1}{2}$; *(d)* $(\frac{1}{2})^{10^8}$; *(e)* $(10^{-24})(\frac{1}{2})^{10^8}$

CAPITULO 19

19-1. 3.2×10^{-2} C°
19-3. 0.16 cal/g-C°
19-5. 48 g
19-7. $\frac{1}{4}\Delta t$
19-9. 3.3 m
19-11. 849 W
19-17. *(a)* 11.3 kW; *(b)* 6.3 kW
19-19. *(a)* 53.2 mm²; *(b)* 2.85×10^3 K
19-21. 4.09×10^3 K

CAPITULO 20

20-3. 5.0 cm de la carga de 0.30 μC 15 cm de la carga de −2.7 μC
20-5. 2.5×10^9 m
20-7. 2.7×10^{-11} C
20-9. +8 μC and −4 μC
20-11. En el centro
20-13. 4.8×10^{-15} m
20-15. $F_A = 12.5$ N, $F_B = 16.1$ N, $F_C = 13.1$ N
20-17. $Q = 3.4\ \mu$C
20-19. $(q/\pi d)\sqrt{k/md}$, en donde d es la distancia entre cargas adyacentes
20-21. *(a)* 8.2×10^{-8} N; *(b)* 2.2×10^6 m/s
20-25. Núcleo pesado

CAPITULO 21

21-1. (*a*) A lo largo de la línea de los centros a 30 cm de q_1 y a 20 cm de q_2, (*b*) a lo largo de la línea de los centros entre las cargas: 6.0 cm de q_1 y 4.0 cm de q_2
21-3. 1.2×10^8 N/C a 77° por abajo del eje $+X$
21-9. 1.3×10^{-13} C/m
21-11. 43
21-15. 1.0 cm de cada uno; 3.4×10^{-7} s para el electrón, 1.4×10^5 s para el protón
21-21. (*a*) 1.0×10^4 N/C; *(b)* $\pm 0.18\ \mu$C/m²
21-23. (*a*) Hacia arriba; (*b*) 1.6×10^{-15} kg
21-25. 0.10 mm/s hacia arriba

CAPITULO 22

22-7. $1.13 \times 10^{15}\ Q$ líneas
22-9. $f = (1/2\pi)(\frac{4}{3}\pi\rho kq/\text{m})^{1/2}$
22-11. *(a)* 0; *(b)* 5.0×10^6 N/C; *(c)* 1.25×10^6 N/C
22-13. *(a)* $E = \rho x/\varepsilon_0$ para $-\frac{1}{2}t \leq x \leq \frac{1}{2}t$; *(b)* $f = (1/2\pi)\sqrt{q\rho/\text{m}\varepsilon_0}$
22-15. (*a*) Cero; (*b*) 7.2×10^5 N/C radialmente hacia afuera; (*c*) 2.6×10^5 N/C radialmente hacia adentro
22-17. 1.0×10^{-8} C/m²
22-21. (*a*) Cero; (*c*) es mayor en las superficies esféricas cercanas a las placas conductoras
22-23. (*b*) carga/(longitud)$^{n+2} = Q/L^{n+2}$.

CAPITULO 23

23-1. *(a)* 3.5×10^4 m/s; *(b)* 6.5 eV

23-3. *(a)* 0; *(b)* 2 kQ^2/L; *(c)* 3 kQ^2/L; *(d)* 3 kQ^2/L
23-5. 6.0 V
23-7. *(a)* −44 eV; *(b)* +10 eV; *(c)* 0; *(d)* +44 eV
23-9. *(a)* 1/1; *(b)* 1/42.8; *(c)* 42.8/1
23-11. *(c)* Inestable
23-13. 5.9×10^6 m/s
23-15. *(a)* 14 eV; *(b)* 14 MeV
23-17. *(a)* 2×10^7 N/C
23-19. *(a)* 0; *(b)* 28 J; *(c)* 3.2×10^{-16} kg
23-25. *(b)* 7.1×10^{-4} F
23-27. $[(2\kappa_1\kappa_2)/(\kappa_1 + \kappa_2)]\varepsilon_0(A/d)$
23-29. (*a*) Cuatro en serie; (*b*) 3.0 pF
23-31. (*a*) Cuatro capacitores; dos grupos en paralelo, cada grupo compuesto por dos capacitores en serie; (*b*) diez capacitores; dos grupos en paralelo, cada grupo compuesto por cinco capacitores en serie
23-33. (*a*) Tres en serie; (*b*) 33.8×10^{-12} J

CAPITULO 24

24-1. 2.3 μA en la dirección del electrón
23-3. (*a*) 1.6 μA, 3.2 W; (*b*) 2.0×10^3 años
23-5. (*a*) 1.2 mA; (*b*) menor que 1.4×10^{-16} s
23-7. 0.10 A, 5.0 V
24-9. 24 h
24-11. *(a)* 0.80 A; *(b)* 80 W; *(c)* 0.80 A; *(d)* 160 W
24-13. *(a)* 72.0×10^{-7} V/m; *(b)* 0.900 W/m
24-15. 33.4 m
24-17. (*a*) 49. 8 kg; (*b*) el cobre cuesta 5.0 veces más que el aluminio
24-19. *(a)* 10; *(b)* $\frac{1}{10}$; *(c)* 1; *(d)* $\frac{1}{10}$
24-21. *B*
24-23. 1.2×10^5 m/s
24-25. *(b)* 1.0×10^6 A/m^2, 1.7×10^{-2} V/m
24-27. *(a)* 0.119 kg; *(b)* 0.123 kg

CAPITULO 25

25-1. 6.0 V
25-3. *(a)* 8.13 W; *(b)* 8.80 V; *(c)* 7.74 W; *(d)* 0.39 W
25-5. 130 V
25-7. *(a)* 10.0 Ω; *(b)* $I_1 = 1.8$ A, $I_2 = 0.60$ A, $I_3 = 0.72$ A, $I_4 = 0.48$ A, $I_5 = 1.20$ A *(c)* 32.4 W
25-9. *(a)* $\frac{3}{8}\Omega$; *(b)* $\frac{1}{2}I$ a través de cada resistencia conectada a la entrada o a la salida y $\frac{1}{6}I$ a través de las otras seis resistencias
25-13. (*a*) 2.0 A hacia la izquierda a través de la batería de 5 V, 1.0 A hacia arriba a través de la batería de 2 V y 1.0 A hacia la izquierda a través de la resistencia de 1-Ω (*b*) −1.0 V
25-15. *(a)* 6.7 Ω; *(b)* 11 Ω
25-17. *(a)* Cero; *(b)* 9×10^3 Ω; *(c)* 9×10^4 Ω
25-19. *(a)* 0.01 Ω; *(b)* 46 cm
25-21. *(a)* $R_{sh} = 3.39$ Ω, $R_{se} = \frac{2}{3} \times 10^3$ Ω; *(b)* $\frac{1}{3} \times 10^3$ Ω

CAPITULO 26

26-1. kg/C-s
26-3. *(a)* Positrón; *(b)* 1.8×10^7 m/s; *(c)* 8.8×10^2 eV
26-5. (*a*) Un arco circular cuyo plano es perpendicular al campo magnético terrestre; (*b*) 5.8 m
26-7. *(a)* 3.8×10^{-8} T; *(b)* 1.4×10^{-8} *T*
26-11. 1.41 *R*
26-13. (*a*) Horizontal, a lo largo de la línea este-oeste; (*b*) la corriente electrónica dirigida hacia el oeste; (*c*) 14.3×10^3 A
26-15. 10 eV
26-19. 2.8×10^{10} V/m dirigida hacia el este
26-21. $(q/m)B^2R$
26-25. 3.5 A
26-27. 4.7×10^{-5} m-N

CAPITULO 27

27-1. *(a)* 2.0×10^{-10}T; *(b)* 2.9×10^{-1} N/C
27-3. *(a)* 2.3×10^{-14} N; *(b)* 2.6×10^{-19} N
27-7. *(a)* 3.46×10^{-7} *i/L*; *(b)* 2.0×10^{-7} *i/L*
27-9. $(\mu_0 iL/2\pi) \ln (1 + L/R)$
27-11. 8.1×10^{22} A-m^2
27-13. $\frac{1}{2}\mu_0 ni$
27-15. 1.1×10^{-11} C/m
27-17. 10 cm
27-19. $B = 0$ hacia adentro; $B = (\mu_0/4\pi)(2Ni/r)$ hacia afuera
27-23. (*b*) 0.352 *a*
27-25. $(\mu_0 ni/2)$, en donde *n* es el número de alambres por unidad de ancho; el campo magnético es paralelo a la superficie conductora y perpendicular a la corriente
27-27. (*a*) 10 G; (*b*) 5.0 G

CAPITULO 28

28-1. (*a*) 0.22 V; (*b*) 1.9×10^{-20}
28-5. Polo Sur
28-7. (*a*) 3.2×10^{-5} V
28-9. 1.3×10^2
28-11. 20 m/s
28-13. La varilla sale con una velocidad $v/2$. Al penetrar al campo magnético, 3/4 partes de la energía cinética original se transforman en

calor y en energía potencial eléctrica debido a la separación de carga. Al salir, la energía potencial eléctrica se transforma en calor

28-15. *(a)* $(BL)^2v/R$
28-17. *(a)* 2.0 H; *(b)* 5.0 Ω
28-21. *(a)* 14 mH; *(b)* 2.8×10^{-2} J
28-23. $\mu_0(Ni)^2/8r^2$

CAPITULO 29

29-1. 1.8 μF
29-3. 5
29-5. *(a)* 5.0 A; *(c)* 1.2×10^{-2} J
29-7. 2.2×10^7 Ω
29-9. 1.2×10^6 s
29-11. *(b)* 1.0
29-13. *(a)* 30 mH; *(b)* 10 Ω
29-15. 6.0×10^{-2} J
29-17. *(a)* 4.6×10^{-2} H; *(b)* 0.40 ms

CAPITULO 30

30-1. *(a)* 1.0×10^{-11} T; *(b)* 2.4×10^{-8} W/m² hacia el sur
30-3. *(a)* 5.0 A; *(b)* 5.7×10^{11} V-m/s; *(c)* 1.8×10^{15} N/C-s; *(d)* 1.8×10^{12} V/s; *(e)* 5.0 A
30-5. *(a)* 4.9×10^2 V/m; *(b)* 1.6×10^{-6} T
30-7. 2.0×10^{29} J
30-9. 10 m
30-11. *(a)* 9.9×10^3 N/m²; *(b)* 2.7×10^{-5} N-s/m³
30-13. *(a)* 9.4×10^{15} W; *(b)* 3.0×10^{23} W/m²; *(c)* 1.0×10^{15} J/m³; *(d)* 1.1×10^{13} V/m, 3.5×10^4 T
30-15. 16 cm
30-17. 3.9°
30-19. *(b)* 2.8×10^{-17} m
30-21. 3.4×10^{-11} s

CAPITULO 31

31-3. 3.0 pies
31-5. 20°
31-7. 1.8 m
31-9. *(a)* 1.1 %; *(b)* 5.1 %
31-13. 0.75 mm
31-15. 1.1 m
31-19. *(a)* Imagen real a + 60 cm; *(b)* imagen real a +80 cm; *(c)* imagen real en $+\infty$; *(d)* imagen virtual a −40 cm
31-25. 33 cm
31-27. 124 cm del objeto en el lado opuesto de las lentes
31-33. *(a)* Mayor; *(b)* verde

CAPITULO 32

32-3. 1.5 m
32-5. 30° y 60°
32-9. 60° al este o al oeste del sur
32-11. 2.5 cm
32-13. 1.0 km
32-15. 1.5 mm
32-17. 1.8×10^{-2} mm
32-19. 1.1×10^{-4} mm
32-21. *(a)* 82°; *(b)* 38°
32-23. 0.60 mm
32-25. El patrón se reduce en tamaño por un factor n para ángulos pequeños
32-27. 7.6×10^{-2} mm
32-29. 1.3×10^{-2} mm

CAPITULO 33

33-1. 22.5° por encima del eje X
33-3. 45°
33-5. Vertical
33-7. Este-oeste

CAPITULO 34

34-3. *(a)* 2.23 km; *(b)* 4.46 km
34-5. *(a)* 5.3×10^5 m/s; *(b)* mayor por un factor de
34-7. *(a)* 17.2×10^9 yr; *(b)* 6,173 Å (rojo)
34-9. 1.2×10^{-8} s
34-11. $\theta_2 = \tan^{-1}\{\tan\theta_1/[1 - (v/c)^2]^{1/2}\}$
34-17. *(a)* 68 s; *(b)* 14 s
34-19. *(a)* 17.6 m; *(b)* 3.5 m
34-21. *(a)* 6.67×10^{-5} s; *(b)* 16.0 km; *(c)* 9.6 km
34-23. *(a)* 0.673c; *(b)* 2.97×10^{-6} s; *(c)* 444 m
34-25. (160/164)c
34-27. $\lambda = \lambda_0[1 - (v/c)^2]^{-1/2}$
34-29. *(a)* 0.3 c a lo largo de la dirección positiva de X; *(b)* $x = 0$, $t = 0$; $x = 1.14$ km, $t = 2.09 \times 10^{-6}$ s

CAPITULO 35

35-3. *(a)* 2.45; *(b)* 0.981c
35-5. *(a)* 33.3 m; *(b)* 0.238 m; *(c)* 34.1 m

35-7. *(a)* 0.99999824*c*; *(b)* 8 MW
35-9. *(a)* 1.00; *(b)* 9.0×10^{-3}; *(c)* 26.5
35-11. *(a)* 5.0 keV; *(b)* 1 MeV/*c*
35-13. *(a)* $\frac{16}{9}$; *(b)* $\frac{8}{3}$
35-15. *(a)* 1.2 MeV; *(b)* 47 MeV/*c*
35-17. *(a)* 38 keV; *(b)* 0.37 *c*
35-19. *(a)* 1.0 GeV/*c*; *(b)* 5.0 GeV/*c*
35-21. *(a)* 24 μA; *(b)* 1.6×10^{-3} N
35-23. *(a)* 0.99995*c*; *(b)* 5.1 MeV; *(c)* 93 GeV
35-25. *(a)* 1.19×10^{22} J; *(b)* 1.32×10^{5} kg; *(c)* 1.32×10^{7} kg $\approx$ 220 $\times$ masa total
35-29. (*a*) 2.2×10^{-14} kg disminuye; (*b*) 4.7×10^{-12} kg aumenta; (*c*) 3.7×10^{-12} kg, aumenta

CAPITULO 36

36-1. *(a)* 3.23 eV; *(b)* 2.97 eV
36-3. 9.0 eV
36-5. *(a)* 2.0×10^{15} s^{-1}; *(b)* 3.0×10^{24} s^{-1}; *(c)* 5.1×10^{11} s^{-1}; *(d)* 6.3×10^{6} s^{-1}
36-7. *(a)* 7×10^{-30} J/s; *(b)* 3×10^{3} años (experimentalmente $\approx 10^{-9}$ s)
36-13. $\propto 1/r^2$
36-15. Electrón 1
36-17. *(a)* 7.9×10^{5}; *(b)* 1.3×10^{-21} kg-m/s
36-19. *(a)* 6,200 Å; *(b)* 8.67 Å
36-23. 0.0016 mm
36-25. *(a)* 0.08626 Å; *(b)* 0.1105 Å; *(c)* 56.2 keV; *(d)* 8.78 keV
36-27. 1.67×10^{-27} kg (un protón o un neutrón)
36-29. 55 MeV
36-31. 3.91×10^{-3} Å
36-33. 195

CAPITULO 37

37-1. *(a)* 1.24×10^{-12} m; *(b)* 7.09×10^{-13} m; *(c)* 2.86×10^{-14} m
37-7. 3.95×10^{-4} rad
37-9. 32.8° en la difracción de los planos de Bragg a lo largo de la diagonal a 45°
37-11. (*c*) *c*
37-13. Las energías en el pozo potencial de altura *finita* son *menores*
37-15. $\approx$1 m/s
37-17. *(a)* 4.1×10^{-11} eV; *(b)* 2.1×10^{-11}; *(c)* 2.1×10^{-20}
37-19. (*a*) 60 m; (*b*) 3×10^{11} m $\approx$ diámetro de la órbita terrestre; (*c*) 1 cm; (*d*) 10^{-8} m
37-21. 2.1×10^{-2} eV
37-23. (*a*) 25 keV/*c*, 0.61 keV; (*b*) 25 keV/*c*, 25 keV; (*c*) las partículas tienen menor energía para la misma longitud de onda (ímpetu)
37-25. (*b*) La velocidad de la partícula es pequeña en el lado derecho; por lo tanto, la probabilidad de encontrar en ese sitio a la partícula, y la amplitud de la función de ondas, deben ser grande ahí.
37-27. *(a)* $n^2\hbar^2/2mR^2$; *(b)* $n\hbar$

CAPITULO 38

38-1. *(a)* 8.0 MeV; *(b)* 8.5×10^{-15} m
38-3. 8.5×10^{-15} m
38-5. (*a*) 7.8 %; (*b*) 100 %, (*c*) 0.055 %
38-9. *(a)* 10; *(b)* 25,000
38-17. *(a)* -54.3 eV y -13.6 eV; *(b)* 54.3 eV
38-19. *(b)* 5.4×10^{-9}
38-21. *(a)* 5.7×10^{12} Hz; *(b)* 6.6×10^{12} Hz
38-25. 2,536 Å
38-27. *(a)* 12.1 eV; *(b)* 13.6 eV
38-29. *(a)* $\frac{3}{8}E_I$; *(b)* $\frac{3}{2}E_I$
38-31. 2.2×10^{-3} eV
38-33. -2
38-35. Los números cuánticos (n, l, m_l, m_s): (*a*) $(1, 0, 0, -\frac{1}{2})$, $(1, 0, 0, \frac{1}{2})$ y $(2, 0, 0, -\frac{1}{2})$; (*b*) $(2, 0, 0, \frac{1}{2})$ y $(2, 1, 0, -\frac{1}{2})$

CAPITULO 39

39-3. *(a)* 12.2 MeV; *(b)* 79 keV
39-7. 3.8×10^{-2} s^{-1}
39-11. 20.8 keV
39-15. *(b)* 0.86 MeV; *(c)* 0.86 MeV/*c*; *(d)* 0.86 MeV/*c*; *(e)* 57 eV
39-17. 157 keV
39-19. *(a)* 2; *(b)* 2
39-21. $\sim$200 %
39-23. (*a*) B^-; (*b*) B^+ y captura electrónica; (*c*) B^-; (*d*) B^+ y captura electrónica
39-31. (*a*) 224 MeV; (*b*) es igual
39-33. $\sim 10^{30}$ J = 10^{24} kW-h
39-35. (*a*) 2×10^{38} neutrinos/s; (*b*) 8×10^{14} neutrinos m^2-s; (*c*) 3×10^{6} neutrinos /m^3 $\approx$ 3 neutrinos cm^3

CAPITULO 40

40-3. *(a)* 141 MeV; *(b)* 0.44×10^{-23} s

40-5. $\hbar/r_0 c$

40-7. *(a)* 0.17 mm; *(b)* 16.7 m; *(c)* 7.22 mm; *(d)* 18.2 m

40-9. 26 m

40-11. 67.49 MeV

40-13. $11m_e$

40-15. *(a)* 69 MeV; *(b)* 52 MeV

40-17. Σ^- y $\overline{\Sigma}^-$ tienen números de extrañeza y productos de decaimiento *diferentes*

40-21. Un haz de mesones $\overline{K}^0$ que incide en un blanco puede producir la reacción $\overline{K}^0 + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$, en tanto que el mesón K^0 no la podría producir, pues violaría la conservación de la extrañeza

40-23. Violación de las leyes de conservación de (*a*) la extrañeza; (*b*) la carga; (*c*) la energía y la extrañeza; (*d*) la energía la extrañeza; (*e*) la extrañeza

40-25. *(b)* $2\gamma + 2e^- + 2\bar{\nu}_e + 2\nu_\mu + 2\bar{\nu}_\mu + p$

INDICE ALFABETICO

"A"

Aberración:
de la luz estelar, 104, 592
estelar 104, 532
Absorbedor perfecto (*ver en* Cuerpo negro)
Absorción de la radiación, 370
espectro de, 795
Aceleración:
angular, 221
carácter vectorial de la, 56
como pendiente de la curva *v-t*, 41
como una derivada, 41
constante, 42, 47, 56
componentes de la, 65
centrípeda, 64
debido a la gravedad (lunar), 69
debido a la gravedad (terrestre), 47, 114
de las cargas eléctricas como fuente de radiación, 370
del centro de masas, 134
dimensiones de la, 41
instantánea, 41,56
lineal, 41
paralela a la trayectoria, 66
promedio, 41
radial, 64, 67, 223
resultante, 223
rotación (*ver en* Angular)
tangencial, 66, 223
total, 223
y los marcos de referencia, 98
Acelerador:
cíclico, 845
de alta energía, 844
de electrones:
sincrotrón, 461
Van de Graaff, 437, 450
lineal (*ver en* Impetu)
Aceleradores, 844
ciclotrón, 845
lineales, 845
sincrotrón, 849
sincrotrón de electrones, 461
Van de Graaff, 437
Actividad, 833
Acústica(o) 316
espectro, 316, 320, 321
lente, 620
Afelio, 253, 255
Agente externo, 148
Aislantes:
eléctricos (*ver en* Materiales dieléctricos)
el papel de los electrones libres, 367
térmico, 367, 374
Alcance horizontal, 62, 68
Alfabeto griego, 911
Amortiguadas, oscilaciones, 381
Ampere, A.M., 454, 517
(unidad), 454
definición del, 518
Amperímetro, 454, 478, 484
Amplificación de la luz, 637
Amplitud, 271
Análisis dimensional, 276
prueba necesaria, 46
Analizador, 664
de analogías electromecánicas, 558
Analogías
electromecánicas, 558, 559
rotación-traslación, 232
Análogos electromecánicos, 558 (tablas), 558, 559
Anderson, C. D., 741
Angstrom (unidad), 340
Angular
momento
aspectos cualitativos del, 196
como el momento lineal, 209
componentes rectangulares (cartesianas del), 216
constante, 204
cuantización del, 796
de las ondas electromagnéticas, 584, 669
del espín nuclear, 822
del fotón, 747
del giro, 217
de (muchas) partículas, 208
de una partícula, 198, 204
dimensiones del, 202
dirección (sentido) del, 199
ley de la conservación del, 197, 210
magnitud del, 201
orbital, 217
sentido (dirección) del, 199
teoría cuántica del, 201
unidades del, 202
velocidad angular, 197
y la segunda ley de Kepler, 255
y torca, 199
rapidez, 195

Angulo:
crítico, 610
de declinación, 506
Anillos:
de Newton, 123, 656
de Van Allen, 495, 507
Aniquilación, 89, 387, 741
en pares, 386, 741, 865
Anodo, 463
Antebrazo, 241
Anteojos, 625
Antineutrino, 841
Antinodo o vientre de presión, 314
Antipartícula, 386, 739, 873
Año
luz (unidad), 893
(unidad), 894
Apogeo, 253
Apolo 15, misión, 294
Armónicas, frecuencia, 301, 314
Ashkin, A., 580n
atm (unidad), 329
Atómicas, masas (tabla), 901
Atómico, reloj, 20
Atomo de hidrógeno:
espectro del, 792
teoría de Bohr del, 796
Aumento:
angular, 626
lateral, 616
Å (unidad Angstrom)
Ausencia de peso, 138
Autoinductancia, 543
Avance de una trayectoria helicoidal, 507
a (*ver en* Aceleración)
A (ver en Ampere)
A (*ver en* Número de masa nuclear), 824, 827
Avogadro, ley de, 357

"B"

Balanza:
de brazo (*ver en* Balanza gravitacional)
de corriente, 518
de torsión, 249, 381, 623
de espejo, 623
en el experimento de Cavendish, 248, 381
en el experimento de Coulomb, 380
para la medida de la fuerza de radiación, 583
gravitacional, 77, 115
inercial, 76
Balístico, péndulo, 188
Balmer:
J. J., 793
serie de, 793, 794
Bariones, 872
ley de la conservación de los, 875
Barkla, C. G., 669
Barómetro:
aneroides, 328n
de mercurio, 329
Batería
de almacenamiento (de ácido y plomo), 483
descargado, 467
diferencia de potencial de una, 467
envejecimiento de una, 467
fem de una, 465
potencia de una, 466
resistencia interna de una, 466
valuación con manivela fría, 483
Bativia Illinois, 850, 859
Beams, J. W., 853
Becker, H., 853
BeV, 713
Bevatrón, 749
Bíceps (músculo), 241
Biot, J. B., 515
Bobinas de Helmholtz, 529
Bohr:
modelo átomico de, 796
N., 761, 796, 798n, 817
Bomba de difusión, 358
Bombeo óptico, 636
Born, M., 765
Bosón, 874
Bothe, W., 853
Bradley, J., 104, 592
Bragg:
ley de, 753, 755
planos de, 754
reflexiones de, 754
W. H., 754
W.C., 754
Brazo:
de palanca, 226
huesos del, 241
Bremsstrahlug, 730, 864
Brillantes, espectro de líneas, 793
Browm, S. C., 495
Brújula, 506
Btu (*ver en* Unidad británica de calor)
Bucherer, A. H., 703
B (*ver en* Campo de inducción magnética)
B (*ver en* Módulo volumétrico)

"C"

Caballo de potencia (unidad), 895
CA (corriente alterna), 454
Caída libre, 47
experimento en, 244
cal (unidad), 364, 895
Cálculo(s)
en la cinemática, 45
en la mecánica relativista, 247
integral, su inventor, 247
invención del, 123
Calentamiento de Joule, 459
Calor, 323
capacidad calorífica, 365
definición como energía térmica en tránsito, 349
de fusión, 365, 373
"dirección" del, 355
específico, 363, 364
latente, 365
máquina de, 366
rapidez, 368
y tubería, 368
unidades de, 349
y trabajo comparados, 348, 349
Caloría, 349, 363
gramo, 333, 349, 364
kilogramo (unidad), 364
Calórico, 323
Calorimetría, 366, 373
Cámara:
de burbujas, 88, 497, 499, 740
de niebla, 187, 497
Cambio de estado:
de un gas, 335
en general, 365
Campo(s):
de inducción magnética:
definición de la, 487
definida mediante la fuerza de Lorentz, 571
de la Tierra, 491, 506
de una bobina circular, 527
de una bobina cuadrada, 529
de una carga en movimiento, 509, 511
de una espira circular de corriente, 513
de unas bobinas de Helmholtz, 529
de un conductor cilíndrico, 528
de un conductor coaxial, 522
densidad de flujo, 491
de un elemento de corriente, 512
de un imán permanente, 519

de un solenoide, 523, 527
de un toroide 529
dirección, 488
flujo, 490
fuentes de, 509
intensidad del, 898, 899
Ley de Biot y Savart, 510
líneas de, 490
su comparación con el campo eléctrico, 489
unidades del, 489
eléctrico, 391, 570
y la estructura de cepas electrónicas, 419
E y B cruzados, 496
geomagnético, 491, 506, 527
ángulo de inclinación, 506
cinturones de Van Allen, 495
componentes horizontales, 506
configuración del, 491, 495
momento dipolar magnético, 527
posición de los polos geomagnéticos, 527
gravitacional, 233, 250
magnético, 487, 570 (*ver en* Campo de inducción magnética)
partícula de, 868
vectorial:
de inducción magnética, 487
eléctrico, 391
gravitacional, 233, 250
Cañón de electrones, 403
Caos molecular y la energía interna, 347
Capacitancia, 438
de cilindros coaxiales, 441, 451
de esferas concéntricas, 451
de la Tierra, 451
de una esfera aislada, 451
de un cable coaxial, 451
de un capacitor de placas paralelas, 439, 451
de un circuito en paralelo, 444
de un circuito en serie, 443
Capacitor, 439
energía de un, 445
Capacitores:
en paralelo, 444
en serie, 442
Captura:
K, 838
radiactiva, 853
Características voltaje vs corriente, 457
Carga(s)
aceleradas y las ondas electromagnéticas, 584
campo eléctrico estático, 586
campo eléctrico radiado, 586
diagrama polar de la intensidad, 586
de prueba, 391
(de un circuito eléctrico), 456
eléctrica, 377
puntual, 380
electrónica, medida realizada por Millikan, 385
fuentes de, 391
gravitacional, 243
gravitacional (*ver en* Masa gravitacional)
inducida, 416
puntual, 380
Cátodo, 463
Cavendish, H., 243, 249, 380, 416
CD:
amperímetro, 454, 478, 484
corriente, 454
circuito de:
convención de los signos de V y de i, 469
de muchas mallas, 475
de una sola malla, 468
galvanómetro, 478, 503
instrumento, 478
ohmetro, 485
potenciómetro, 481, 485
puente de Wheatstone, 480
voltímetro, 478, 484
c (centi), 21
Celsius grados (C°) vs grados Celsius (C°), 326n
Centígrado, (*ver en* Celsius)
Centrífuga, 71
ultracentrífuga, 238
Centrípeta fuerza, 139
Centro:
de curvatura, 288
de masa
aceleración del 134, 225
de una distribución continua de masa, 94
localización del, 93
velocidad del, 91, 135
y el centro de gravedad, 233
y el movimiento de rotación, 231
y el movimiento de traslación, 225, 231
y las fuerzas externas, 135
y los marcos de referencia, 101
CERN, 859
Cero:
absoluto, 332
espectro, de orden, 649
partícula de masa en reposo, 707
Cesio-133, patrón de tiempo, 20, 594
"Cargado" a un objeto, 379
Celda
electroquímica, 430, 466
de Daniell, 463
fotovoltaica, 468
Ciclo:
de Carnot, 366
de dos protones (en la fusión), 855
Ciclotrón, 845
frecuencia de, 494, 847
resonancia de 495
Cielo azul, 668
Cinemática, 73
aceleración constante, 42, 47
de la rotación, 221
en dos dimensiones, 53
en una línea recta, 35
rectilínea, 35-50
relativista, 671
Cinta magnética, longitud de onda registrada, 321
Circuito
abierto, 467
de mallas múltiples, 475
de una sola malla, 468
LC, 556
LCR, 561, 564
LR, 561, 564
RC, 560
cm Hg (unidad), 895
cm (unidad), 893
CM (*ver en* Centro de masas)
Cockroft, J. D., 852
Coeficiente:
de absorción, 859
de fricción, 132
de una película, 574
Coherente, fuente, 634
laser, 636
Cohete, 90, 113
de fotones, 583, 597, 748
ecuación de un, 90
empuje, 66
energía de un, 261
impulsor, 122
pistola espacial, 121
rapidez de lanzamiento crítico, 262
Saturno 5, 122
Tsiolkovsky, 90
velocidad de expulsión, 90, 122

Colisión elástica, 185
teoría cuántica de la, 817
Colores específicos, 363
de varios materiales (tabla), 364
Cometa Halley, 256, 266
y la tercera ley de Kepler, 257
Complacencia, 285
Complementariedad, principio de, 759
Componente(s)
de la fuerza:
radial, 124
tangencial, 124
de un vector, 26
rectangulares de un vector, 27, 33
Compresional, onda, 309-321
Compuesto, microscópico, 620
Computadora analógica, 478
Compton, A.H., 734, 737
Concepto de línea de campo eléctrico y la ley de Gauss, 412
Condensación, 310
Condensador, 442
Condiciones en los límites, 300
Conducción térmica, 367, 374
a través del vidrio, 374
en una película de aire, 374
su relación con la conducción eléctrica, 367
Conductancia eléctrica, 460
Conductividad
eléctrica, 460
térmica, 369
(tabla), 309
Conductor
eléctrico
como un blindaje perfecto, 416
distribución de carga en un, 415, 436
potencial eléctrico en un, 435
térmico, 367
su relación con los conductores eléctricos, 367
Conductora, campo magnético de una lámina, 528
Configuración
electrones de, 813
electrónica, 812
Conjugación de la carga, 386
"al cargar" un objeto, 379
teorema de Kirchhoff para las uniones, 475
Conservación:
de la energía, 167, 182, 421
en la ecuación de mallas de Kirchhoff, 476
de la energía y el principio de incertidumbre, 770
de la masa-energía, 706
del ímpetu y el principio de incertidumbre, 770
Conservación de la energía y el principio de incertidumbre, 769
Conservativa, fuerza no, 179, 183
Constante(s):
de Boltzmann, 345
de decaimiento, 831
de desintegración, 831
de estructura fina, 816
de Faraday, 388
de la fuerza de Coulomb, 382
de la ley de los gases, 333, 345
rapidez de las ondas sonoras, 314
de Planck, 216, 725, 775
de rigidez (*ver en* Constante de resorte)
de tiempo:
L/R, 561
RC, 560
dieléctrica, 441 (tabla), 422, 451
fundamentales (tabla), 891
relación en la permitividad eléctrica universal
de gravitación, (*ver en* Constante gravitacional)
de los gases (*ver en* Constante de los gases)
Constructiva, interferencia, 292, 299, 313, 628
Contador Geiger, 450
Contracción del espacio, 680, 689
y la rotación, 689
Convariancia en la relatividad, 693
Convección de signos en las lentes delgadas, 622
Convección térmica, 370
Coordenadas, conjunto derecho de ejes, 30
Copérnico, N., 105
Corriente:
alterna (cal), 454
convencional, 453, 465
de desplazamiento, 567, 596
prueba experimental de Hertz, 570
de desplazamiento de Maxwell (*ver en* Corriente de desplazamiento)
Cosmología:
copérnica, 105
heliocéntrica, 105
Coulomb:
C.A., 380
(unidad), 384
definición del, 518
Cowan, C. L., 844
Cristal, 753
Criterio de Rayleigh, 654
Cualidad del sonido, 316
Cuántica electrodinámica, 744
Cuantización, 719
de la carga, 387, 401
de la energía, 778, 799
del espacio, 808
y el ímpetu angular, 216, 788, 797, 798, 803, 805-809
Cuanto de radiación (fotón), 725
Cuarenta Eridani B, 315
Cúbito (hueso), 241
Cuerdas de violín, 304, 307
Cuerpo:
rígido de gravedad, 233
centro de masa, 91, 93, 94, 101, 134, 135, 224, 231, 233
cinemática, 221-222
dinámica del, 221-222
energía del, 235
equilibrio del, 235
momento angular del, 208
momento de inercia del, 208
negro, 371, 375
radiación del, 720
Cuña de aire, interferencia en una, 641, 656
Curie, (unidad), 833
Curvatura, 288
c (*ver en* Calor específico)
C (*ver en* Capacitancia)
C (*ver en* Celsius)
C (*ver en* Coulomb)

"CH"

Chadwick, J., 859
Chamberlain, O., 749
Charles, J.A.C., 334
Choques:
completamente inelásticos, 188
elásticos, 185
en dos y en tres dimensiones, 84
en el marco del ímpetu cero, 101
explosivos, 185
frontales, 78
fuertes y suaves, 81
inelásticos, 185
perfectamente elásticos, 185
rotacionales, 214
y la velocidad del Centro de masa, 91

"D"

Dalton, ley de, 357
Datos astronómicos:
(figura), 257
(tablas), 253, 256
Davisson, C., 752, 758
d (deci), 21
de Broglie, L., 752
Decaimiento:
alfa, 836
beta, 837
gamma, 834
Decibel, 321
Densidad:
de corriente, 463
de energía del campo eléctrico, 447
de energía del campo electromagnético, 577
de enrgía del campo magnético, 546
de energía magnética, 547, 551
de masa, 94
superficial de carga, 397
vectorial de corriente, 463
Derivación, resistencia de, 479, 484
Descarga corona, 437
Descripción cuántica de una partícula restringida:
en una caja, 776
en un pozo potencial unidimensional, 776
su longitud de onda en un poza potencial, 779
Desplazamiento:
angular, 66, 196
convención de signo para el, 196
como un área, 42
Destructiva, interferencia, 242, 292, 299, 313, 628
Desvanecimiento en la radiorrecepción, 656
Deuterio, 191
Deuterón, 187, 824
Día:
sidal, 239
solar, 20, 239
Diagrama:
de cuerpo libre, 125
de Feyman, 866
de niveles de energía, 778
del hidrógeno, 802
polar, 630, 632
Diamante, 611
Diatómica, escalar, 321
Dicroísmo, 665
Diferencia:
de longitudes de camino, 631, 643
en el punto de observación, 631, 643
en la longitud de la trayectoria, 631, 643
intrínseca, 631, 643
Difracción, 600
de electrones, 755
de Fraunhofer, 646
de Fresnel, 647
de rayos X, 755
de una orilla recta, 651
de una rendija simple, 646, 647, 765
de un arreglo lineal de fuentes puntuales, 643
diseño de, 646, 647
en una abertura circular, 652
en una cratícula, 648, 753
en una doble rendija, 647, 765
su dependencia con la longitud de onda, 600
teoría cuántica de la, 765, 770
variación de la intensidad en la, 646, 651
y la resolución, 652
Dilatación del tiempo, 674
Dimensiones de una cantidad física, 21
Dina (unidad), 110, 894
Dinámica, 73
de la rotación, 221
relativista, 693
Diodo túnel, 782
Dirac, P.A.M., 741, 809
Directa, corriente (*ver en* Corriente)
Disco fonográfico, longitud de onda registrada, 321
Diseño de radiación, 602
de dos fuentes puntuales, 629, 655, 853
de una fuente puntual, 652
de una hilera de fuentes puntuales, 646
de un oscilador dipolar eléctrico, 588
Disipativa, fuerza, 179
Dispersión:
coulombiana, 381, 449
de la luz:
por una rejilla de difracción, 649
por un prisma, 609, 650
de ondas electromagnéticas:
clásica, 666, 732
cuántica, 734
de partículas alfa, 690
de Rutherford, 89, 380
Dispositivos:
para la medida de la corriente:
acumulación electrolítica de masa, 455
amperímetro, 454, 478, 484
galvanómetro, 478, 503
para medir el potencial eléctrico:
electrómetro, 385, 446, 452
potenciómetro, 481, 485
voltímetro, 478, 484
Distancia focal, 614
equivalente, 626
Distribución maxweliana, 353
Dualidad onda corpúsculo, 759

"E"

Ecuación:
de las lentes delgadas (*ver en* Ecuación de las lentes)
de Schrödinger, 765, 781, 803
Ecuaciones:
de las lentes:
convención de signos en la, 622
gausiana, 617n, 625
de Maxwel, 570
intensidades relativas, 604
predicción de las ondas electromagnéticas, 571-578
y la velocidad de la luz, 578
de transformación:
en la rotación de ejes, 33
galileanas, 97, 106, 682
lorentzianas, 682, 685
E (energía), 167
Efecto(s):
Compton, 732, 865
cuánticos, 79
aspectos ondulatorios de las partículas, 751, 752, 779
de la latitud en la radiación cósmica, 492
de Tiro de honda, 105
Doppler, 321, 594
este-oeste de los rayos cósmicos, 492
fotoeléctrico, 721, 864
interpretación cuántica del, 724
Hall, 500
Oersted, 504
túnel, 781, 836
Zeeman, 809

Einstein, A., 191, 671, 679, 706, 725
Eje(s):
de coordenadas rectangulares:
en dos dimensiones, 26
en tres dimensiones, 30
su transformación en rotaciones, 34
óptico, 617
Eléctrica:
carga:
comparación de dos cargas, 381
comparada con la carga gravitacional, 381
conservación de la, 386
cuantización de la, 387, 401
inducida, 416
positiva y negativa, 378
su relación con el número atómico, 388
Técnica de igual repartición de Coulomb, 382
total en el universo, 390
conductancia (*ver en* Conductancia)
conductividad (*ver en* conductividad)
cuantización de la carga (*ver en* Cuantización de la carga)
densidad de carga:
lineal, 396, 410
por unidad de volumen, 490
superficial, 396, 403, 410
dispositivos para medir la carga:
electrómetro, 385, 446, 452
electroscopio, 385, 416
energía potencial, 423
de dos cargas puntuales, 423
de un sistema de cargas puntuales, 426
selección de origen de la, 424
intensidad, 392
Eléctrico:
campo:
como densidad de flujo eléctrico, 412
como la derivada de un potencial, 434
concepto de, 392
debido a un flujo magnético variable, 540
de dos hojas paralelas, 398
definición del, 391
definido a través de la ecuación de Lorentz de la fuerza, 571
del casquete de una esfera hueca de carga, 413, 420
densidad de energía del, 447
desprendido, 393
de una carga acelerada, 385
de una carga puntual, 392, 396
de una distribución lineal infinita de carga, 496, 411
de una esféra dieléctrica, 413, 420
de una superficie de carga, 390
de una superficie dieléctrica, 400
de una superficie infinita de carga, 344
de un cilindro dieléctrico, 419
de un no conductor, 400
efecto Hall, 500
flujo de, 405
líneas de, 394, 411
no conservativo, 541
radiado, 585
superposición, 392
su relación con el campo magnético (en las ondas), 577
su relación con el potencial eléctrico, 492
transversal, 586
unidades del, 392
velocidad de propagación, 393
y la inducción electromagnética, 540
y la ley de Ampere, 519, 567, 569, 571
y la ley de Faraday, 540
y los conductores, 399
y un casquete esférico conductor, 420
circuito (*ver en* Circuito)
dipolo, 404
campo, 404
momento dipolar, 404
potencial, 450
libre, oscilador, 553
continuo, 662
propiedades de polarización de las ondas emitidas, 660, 661
propiedades de radiación de un, 586, 588
Electrodinámica cuántica, 744
Electrólisis, 455
Electromagnética, fuerza, 108, 377, 862, 870
Electromagnético, espectro, 590, 591 729
Electromagnetismo, 377
Electrómetro, 385, 446, 452
absoluto de Kelvin, 452
Electrón:
carga del, 385
de conducción, 378
espín del, 809
ímpetu angular intrínseco del, 809
libre, 367, 379, 399
en la conducción eléctrica, 367, 379
en la conducción térmica, 367
en los semiconductores, 379
su papel en el equilibrio electrostático, 399
microscopio (electrónico), 787
números cuánticos magnéticos del, 807, 809
volt (unidad), 426, 430
Electrones:
de conducción (*ver en* Electrones libres)
difracción de, 755
sincrotón de, 461
Electrónica, captura, 838
Electrónico, microscopio, 786
Electroscopio, 385, 416
Electrostática, 378
energía potencial (*ver en* Energía potencial eléctrica)
lente, 620
Elementos halógenos, 814
Elíptica, polarización, 660
e (Magnitud en la carga electrónica), 365
Emisión:
de espectro, 792, 793
térmica de radiación, 370
Empuje de un proyectil, 121
Energéticos:
en el movimiento armónico simple, 273, 278
en los objetos proyectados, 173
Energía:
atómica, 184, 800
cinética, 145, 704
definición de la, 145
de giro, 210
de rotación, 230
de un fotón, 725
relativista, 704
total, 231
unidades y dimensiones de la, 146
y el ímpetu lineal, 146
y el trabajo, 47
cuantización de la, 778, 779

de enlace, 428, 710, 711, 801, 830
nuclear, 829
de excitación, 801
de ionización, 428, 800
en el átomo de hidrógeno, 428
del campo eléctrico, 445
del campo magnético, 546
del punto cero, 779
vibracional, 788
densidad (*ver en* Densidad)
de una masa en reposo, 706
distribución maxweliana de, 353
electromagnética, 185
en reposo, 705
externa, 800
factores de conversión, 896
interna, 362
de un sistema, 346
sus cambios y la primera ley de la termodinámica, 347
ley de la conservación de la, 182
mecánica o no mecánica, 184
nuclear, 184, 830
ordenada:
y desordenada, 360
y movimiento, 347, 348
potencial, 167, 176
definición de la, 176
de una loma, 263, 266
elástica, 168
electrostática, 192, 361
forma de escoger el origen, 178
gravitacional, 169, 192, 258
intermolecular, 360
propiedades de la, 178
química, 430, 467
química, 184
relativista, 705
ritmo de consumo en los EE.UU., 190
térmica, 184, 347, 359
capacidad (*ver en* Capacidad calorífica)
de los gases, 359
de los líquidos, 359
de los sólidos, 359
en una resistencia, 458
transferencia (*ver en* Transferencia de calor)
y el desorden, 360
total, 167
en la mecánica clásica, 167
relativista, 705
Entropía, 367
Equilibrio, 124, 234, 235, 240
de traslación, 124, 235
de un cuerpo rígido, 235
dinámico, 125, 235
estable e inestable, 234
estático, 125, 235
rotacional, 235
térmico, 324
Equinoccios, precisión de los, 267
Equivalencias:
entre la masa y la energía, 709
propio de, 69, 77
Equivalente:
capacitancia:
de un circuito en paralelo, 444
de un circuito en serie, 443
en masa de un fotón (h W/*c*), 78, 709, 725
mecánico del calor, 892
Erg (unidad), 146n
Escalas:
de temperatura:
absoluta (Kelvin), 331
Celsius (centígrada), 325
Fahrenheit, 326
Rankine, 337
musical, diatónica y bien temperada, 321
Escalar, 23
Espacial:
cuantización, 808
en la relatividad, 671
pistola, 121
proyectil (*ver en* Proyectil)
sonda, 105
Espaciamiento de red, 753
Espacio-tiempo:
continuo, 684
diagrama de, 864
Espectro:
acústico, 316, 320, 321
audible, 316, 320
de absorción, 795
de emisión, 792, 793
del hidrógeno, 792
de líneas, 793
de líneas obscuras, 795
de orden cero, 649
de primer orden, 650
de rayos X, 590, 819, 839
electromagnético, 590, 591, 729
orden de un, 650
rotacional, 788
Espectrógrafo, 793
Espectrómetro, 793
Espectroscopia, 793
Espejo(s): 605, 623
de Lloyd, 633
en los láseres, 637
Espín:
ímpetu angular de (*ver en* Número cuántico de ímpetu angular de espín)
isotópico, 879
Estado(s):
básico, 799
degenerados, 811
de la materia, cambios en el, 365
de un gas, cambios en el, 335
estacionario, 777, 800
excitado, 639, 800
miscroscópico, 534
Estática, 124
de los cuerpos rígidos, 235
fricción, 132, 228
Estéreo, ajuste de fase en bobinas, 665
Estrategia:
al aplicar las leyes de Newton, 125
al resolver problemas, 46
Estratosfera, 320
Estrella(s)
aberración de la luz estelar, 104
del Norte, 267
de neutrones, 265
enana blanca, 265, 375
fusión termonuclear en una, 855
luminosidad de las, 375, 596
Sirio, 265
Sistema binario, 265
Supernova, 265
Estructura atómica, 789
Eta, partícula, 872
Eter, 672, 688
Evento, 19
E (*ver en* Campo eléctrico)
e (*ver en* Rapidez de la luz en el vacío)
eV (*ver en* Electrón volt)
Exclusión, principio de, 809
Expansión térmica:
del mercurio, 325
de los gases, 335, 337, 338
Experimento(s):
de Cavendish, 249, 380, 389
de Franck-Hertz, 884
de Joule, 459
de la gota de aceite de Millikan, 385, 400, 404, 499
de la hielera de Faraday, 418
del arrastre del éter, 673, 688
de Michelson y Morley, 643, 673, 688
de Thomson para determinar *em*, 499

en la física, 17
para determinar la relación e/m, 499
para la relación carga/masa, 499
Externa:
fuerza, 134, 223
torca, 213, 225
Extrañeza, 879
número cuántico de, 879, 880

"F"

Factores de conversión (tabla de), 893
para unidades eléctricas y magnéticas, 897
Farad (unidad), 439, 441
Faraday, M., 416, 439
Fase:
cambio de, 299
constante, 271, 298
rapidez de, 296, 786
retrasado de 295
su ajuste en bocinas estéreo, 655
su cambio en la reflexión, 313, 633
Fem, 466
asiento de una, 468
autoinducida, 543
contraria, 544, 553
definición, 540
de movimiento, 531
de una batería, 465
de una celda fotovoltaica, 468
de un generador eléctrico, 467
en la inducción electromagnética, 540
inducida, 540
inversa, 543, 553
termoeléctrica, 468
Fermat, P., 625
Fermi (unidad), 823
Fermión, 873
Feynman, R. P., 866
Física:
clásica, 15, 17, 73
vs. física cuántica, 775
de altas energías, 861
experimental, 17
ley de la, 17
moderna (definición), 18
teórica, 18
Fisión nuclear, 191, 358, 390, 854
desprendimiento de energía de una, 449
papel de la repulsión coulombiana, 381, 390, 449
Fizeau, A. H. L., 593
Flecha del tiempo, 356
Flujo:
de energía (*ver en* Vector de intensidad o vector de Poynting)
eléctrico, 405
en la hidrodinámica, 419
en la inducción magnética, 490
magnético:
cambiante, 535
campo eléctrico, 540
definición del, 491
densidad de, 491
y la ley de Gauss, 518
Fluorescencia, 817
Foco, 613
principal, 613
Forma de Maxwell de la ley de Ampere, 570
Forzadas, oscilaciones, 281, 303
Fotodesintegración, 854
Fotoelectrón, 721
Fotón, 88, 725
cohete del, 583, 597, 748
flujo de, 748, 763
ímpetu angular del, 747
ímpetu del, 734
su interacción con un electrón, 743, 862
virtual, 866
Fotosfera (del Sol), 358
Foucalt, J.B.L., 609
Fragmento de fisión, 854
Franck, J., 884
Franklin, Benjamín, 416
Fraunhofer:
J., 648
difracción de, 646
Frecuencia:
angular de oscilaciones libres, 555
armónica, 301, 314
del espectro acústico, 316, 320
del espectro electromagnético, 590
de resonancia, 303
fundamental, 301
natural (de un oscilador), 304
permitida, 301, 314
sobretono, 303, 314
umbral, 723
Frente(s):
de onda cilíndricos, 317
dependencia de la intensidad con la distancia, 317
de onda esférico, 317
variación de la intensidad con el ángulo (*ver en* Patrón de radiación)
de onda, planos, 317
variación de la intensidad con el ángulo (*ver en* Patrones de radiación)
variación de la intensidad con la distancia, 317
Fresnel, difracción de, 647
Fricción, 131
cinética, 132, 228
coeficiente de, 132
estática, 132, 228
torca de, 214
trabajo negativo, 156
Fuente(s):
coherente, 634
e incoherente, 634
laser, 636
Fuerte, fuerza nuclear (*ver en* Interacciones fuertes)
Fuerza(s):
central, 206, 225, 255
de Coulomb, 380
gravitacional, 245, 255
centrífuga, 140
centrípeta, 139
conservativas, 178, 181, 182, 185
eléctricas, 382, 425
gravitacionales, 258
constante de la (*ver en* Constante de un resorte)
coulombiana, 383
de acción y de reacción, 112
de Coulomb, 380, 383, 792, 866
en la física atómica, 143
en la física nuclear, 381, 390
definición de la, 108
de la interacción débil, 108, 377, 882
de Lorentz, 495, 571
de radiación, 580
medida de la, 580, 583
de un resorte, 111
diagrama, 125
disipadora de energía, 179
eléctrica, 108, 380
conservativa, 381, 425
y E no conservativa, 541
electromagnética, 108, 377, 862, 870
electromotriz (*ver en* Fem)
electrostática (*ver en* fuerza de Coulomb)
entre dos neutrones, 823
entre dos protones, 823
entre un neutrón y un protón, 823
externa, 134, 225
factores de conversión (tabla), 894

fricción, 131
generador de energía, 179
gravitacional, 108, 114, 245, 377, 862, 870
central, 245, 255
conservativa, 179, 258
en la física átomica, 143
leyes de Kepler, 252-258
impulsiva, 117
inercial, 140
instantánea, 109
interna, 134, 212, 225
magnética, 108, 488
carácter no central, 526
efecto fundamental, 517
entre dos cargas en movimiento relativo, 512
entre dos cargas que transportan corriente, 500, 516
en una carga móvil, 488
en un conductor que transporta corriente, 499
fuerza de movimiento, 532
propiedades especiales, 488
sin trabajo, 492
y las líneas de campo magnético, 490
y la torca en una espira de corriente, 502
y su dependencia con la velocidad, 480, 492
no conservativa, 179, 183
normal, 116, 128
nuclear, 108, 377, 883, 868, 869
alcance de la, 246, 823
independencia de la carga de la, 823
orígenes fundamentales de la, 107
principio de superposición, 110
propio, 109
que varían inversamente con el cuadrado de la distancia:
entre cargas puntuales, 515
entre masas puntuales, 246, 250
química, 466
radial, 137
restitución, 156
su relación con la energía potencial, 818
tangencial, 137
tipos fundamentales, 108, 114, 377, 862, 870
y peso, 114
Función (es):
de Bessel, 653
de trabajo, 726
trigonométricas (tabla), 908
Fusión nuclear:
producida por un laser, 596
reactor de, 191
termonuclear, 855
°F (Grado Fahrenheit)
F (*ver en* Constante de Faraday)
f (*ver en* Distancia focal)
F (*ver en* Farad)
f (*ver en* Frecuencia)
F (ver en Fuerza)
F (*ver en* Punto focal)

"G"

Galileanas, relaciones de transformación, 96, 106, 683
para velocidad, 686
usadas para obtener la rapidez de las ondas transversales, 290
Galileo, G., 18, 47n, 52, 68, 73, 105, 124
Galvanómetro, 478, 503
Gas(es):
ideal, 332
cambios de estado en un, 335, 337, 338
ley general de los gases, 334
otras leyes de los gases, 334
propiedades microscópicas, 332
rapidez de las ondas de compresión, 338
y el trabajo
ley general de los, 332, 244
presión de un, 328, 241
Gauss (unidad), 490
Gay-Lussac
J. L., 334
ley de Charles y, 334
Geiger, H., 790, 792
Generador:
eléctrico, 468, 549
electrostático, 437, 450
Van de Graff, 437, 450
tándem, 438, 450
Geos, 253
Germer, L. H., 752, 758
GeV (unidad), 713
G (giga), 21
Giroscopio, movimiento del, 219
Goudsmit, S. A., 809
Gradiente, 435
de campo eléctrico, 435
de temperatura, 368
Gramo (unidad), 894
Gran viaje, sistema solar, 105
Gravedad:
aceleración de la, 47, 114
centro de, 233
dependencia inversa con el cuadrado de la distancia
efectos de la forma y de la Tierra, 265
valor normal, 78, 115, 251
variaciones de la, 48, 251, 265
Gravitación, 114, 243
Gravitacional:
balanza, 77, 115
campo, 233, 250, 251
constante, 246
efectos de una cepa esférica, 266
energía potencial:
de dos partículas, 258
definición, 258
de una cepa esférica, 266
de un casquete esférico, 266
de un sistema de partículas, 259
forma de escoger el origen, 258
fuerza, 245
interacción, 108, 377, 869
líneas de campo, 251
masa, 243, 378
ondas, 252, 870
Gravitón, 869
Grimaldi, F.M., 651
g (*ver en* Aceleración de la gravedad)
G (*ver en* Constante de gravedad universal)
G (*ver en* Gauss)
g (*ver en* Gramo)

"H"

Hadrón, 873
Haz de electrones, osciloscopio (*ver en* Osciloscopio de rayos catódicos)
Heisenberg, W., 765, 767
Helios, 253
Henry:
J., 545
(unidad), 545, 550
Herapatita, 663
Hertz:
G., 884
H., 557, 570, 591, 722
su prueba de la teoría de Maxwell, 557, 570, 591
h ($h/2\pi$), 797
Hidrógeno:
modelo clásico del átomo de (*ver en* Modelo de Bohr)
pesado, 191

Hiperón, 872
Hooke:
ley de, 156n, 269n, 309, 312, 505
R., 156n, 269n
Hora (unidad), factores de conversión, 894
Huellas, 187n
Huesos de brazo, 241
Húmero (hueso), 241
Huygens:
C., 318
construcción de, 646
ondillas, 604
principio de, 318, 604
h (*ver en* Constante de Planck)
H (*ver en* Henry)
h (*ver en* Hora)
H (*ver en* Intensidad de campo magnético)
Hz (*ver* Hertz)

"I"

Imagen:
distancia de la, 616
especular, (*ver en* Fuente virtual)
real, 616, 617, 620, 625
virtual, 605, 618, 620, 625
Imán permanente, 488, 519 (*ver en* Permanente imán)
la tierra como un, 492, 506, 527
Impetu:
angular (*ver en* Angular momento)
conservación del, 79, 101, 106, 136, 694
de la luz, 88
de las ondas electromagnéticas, 583
de un fotón, 734
de un sistema, 91
dimensiones del, 80
en el marco del ímpetu cero, 98
en el marco del centro de masas, 101
en la mecánica clásica, 80
lineal, 80
relativista, 81n, 696, 701, 714
su forma clásica en términos de la energía en reposo, 714
unidades del, 80
y el impulso, 116
y las transformaciones galileanas, 106
y los marcos de referencia, 106
Impulsiva, fuerza, 117
Impulso, 116
Incoherentes, fuentes, 635
exitación térmica en las, 636
Indice de refracción, 603, 606
dependencia con la frecuencia, 607
de varios materiales (tabla), 606
relativo, 606, 609
Inducción electromagnética, 536
ejemplos de, 537
fem de movimiento, 531
ley de Faraday de la, 537
ley de Lenz, 538
Inducida:
corriente, 533
fem, 540
Inductancia(s)
autoinductancia, 543
de conductores cilíndricos concéntricos, 550
de inductancias en paralelo, 550
de inductancias en serie, 550
densidad de energía en las, 548
de un solenoide, 545
de un solenoide tiroidal, 545
energía de las, 546
su definición mediante la ley de Ampere, 544
su definición mediante la ley de Faraday, 544
unidades de la, 545
Inercia, 75
ley de la, 74
momento de, 208, 224, 913
Inercial
fuerza, 140
marco de referencia no, 137, 140
Instantánea:
aceleración, 41, 56
rapidez, 40, 54
velocidad, 37, 54
Instrumentos:
de nulos:
balanza inercial, 76
balanza gravitacional, 77, 115
potenciómetro, 481, 485
puente de Wheatstone, 480
ópticos, 617
cámara fotográfica, 618
el ojo, 617
lupa, 618
microscopio compuesto, 620
telescopio astronómico, 621
Integral de línea:
en las ecuaciones de Maxwell (tabla), 571
forma de Maxwell de la ley de Ampere, 569
ley de Ampere, 520
ley de Faraday, 540
y el trabajo, 150
y la energía potencial, 177
y la fem, 540
y las fuerzas conservativas, 179
y las fuerzas no conservativas, 179
Intensidad:
de campo magnético, 898, 899
de la radiación solar, 575, 596
de las ondas electromagnéticas, 577, 579
del campo eléctrico, 392
dependencia con la distancia, 317
de sonido, 316, 321
diseño o pauta de intensidad (*ver en* Diseño de radiación)
eléctrico, 392
magnética, 898, 899
radiada por una carga acelerada, 586
variación con el ángulo (*ver en* Diseño o pauta de radiación)
vectorial de las ondas electromagnéticas (*ver en* Vector Poynting)
Interferómetro de Michelson, 642, 673
en el experimento de Michelson y Morley, 643, 673
y el patrón de longitud, 643
Interacción(es)
débil 108, 377, 869, 882
eléctrica entre dos cargas comparada con la interacción magnética, 512
electromagnética, 862
fuertes, 108, 377, 823, 868, 870
independencia de la carga en las, 824
saturación de las, 390
fuerza:
electromagnética, 108, 377, 809, 862
gravitacional, 108, 377, 869
nuclear débil, 108, 377, 862, 869
nuclear fuerte, 108, 377, 823, 868
magnética (*ver en* Fuerza magnética)
comparada con la interacción eléctrica, 512
sistema de partículas en, 134
entre dos cargas puntuales, 512

Interferencia:
anillos de Newton, 641
constructiva y destructiva, 292, 313, 628
cratícula o rejilla de difracción, 649
de dos fuentes puntuales, 629
de franjas, 628
de onda de radio, 656
de ondas electromagnéticas, 627
doble rendija, 637, 647
ecuaciones de intensidad, picos y ceros, 638, 639, 641, 644
en ondas mecánicas, 291
en películas delgadas, 639
en una cuña, 641
papel de las fuentes puntuales, 643
Interferómetro:
capacidad de medida de un, 639
de Michelson, 642, 673
en general, 639
y su relación con el patrón de longitud de SI, 642
Intermolecular:
colisiones, 359
energía potencial, 360
fuerza, 360
fuerza recuperadora, 312
Interna, torca, 212, 225
Internas, fuerzas, 134, 212, 225
Invariancia en la relatividad, 693
Ionización, 800
Ionosfera, 656
Irreversibles, procesos, 352, 356
Isobara, 827
Isoespín, 879
Isómero, 836
Isotono, 827
Isótopo, 827
i (*ver en* Corriente eléctrica)
I (*ver en* Intensidad de onda y en Vector de Poynting)
I (*ver en* Momento de inercia)
I (*ver en* Número cuántico de espín nuclear)

"J"

Joliot:
-Curie, K., 853
F., 853
Joule:
J. P., 262, 459
(unidad), 146
J (*ver en* Equivalencia mecánica de calor)
J (*ver en* Joule)
J (*ver en* Número cuántico rotacional)
j (*ver en* Vector de densidad de corriente)

"K"

Kaón, 872
Kepler:
J. 253
leyes de, 213, 252
keV (unidad), 713
kg (*ver en* Kilogramo)
Kilogramo (unidad), 21, 77, 894
Kirchhoff, aplicaciones de las reglas de:
a circuitos de muchas mallas, 476, 484
a un circuito *LC*, 554
a un circuito *LR*, 562
a un circuito *RC*, 560
k (kilo), 21
Km (unidad) 893
k (radio de giro), 914
Kriptón 86, línea espectral del, 19, 594, 643
K (*ver en* Conductividad térmica)
k (*ver en* Constante de Boltzmann)
k (*ver en* Constante de la fuerza de Coulomb)
K (*ver en* Energía cinética)
k (*ver en* Número de onda)
K (*ver en* Temperatura Kelvin)
kWh (unidad), 895

"L"

Laboratorio Nacional de Aceleradores de Fermi, 850, 851
La física clásica contra la física cuántica, 775
La ley de Gauss del magnetismo, 518
líneas de campo magnético formando lazos cerrados, 518
la no existencia de monopolos magnéticos, 519
Lámpara incandescente de filamento, 462
La nota de concierto, 307
Laser, 636, 662
amplificación de la luz, 836
bombeo óptico, 637
de neodimio y vidrio, 596
emisión estimulada, 637
en experimentos de fusión nuclear, 596
fuente coherente, 634
medidas de la presión de radiación, 580n
medidas de la rapidez de la luz, 593
modulación, 656
propiedades de la luz emitida por un, 637
Las lunas de Júpiter y la tercera ley de Kepler:
(gráfica), 25
(tabla), 256
Lawrence, E. O., 847
Livermore Laboratory, 597
Lawton, 416
L (dimensión de longitud)
Lebedev, P.N., 580
Lee, T.D., 843
Lentes:
acústicos, 620
combinación de, 620, 626
convergentes, 614, 620
de aumento (*ver en* Lupa simple)
delgados, 611
bicóncava, 619, 620
cóncava-convexa, 614
construcción de rayos, 616
convención de signos, 618, 622
convergentes, 615
convexa 612
distancia de la imagen, 616
distancia del objeto, 616
distancia focal
divergente, 618
eje de la lente, 617
eje óptico, 617
imagen real, 617
imagen virtual, 618
objeto real, 617
plano convexa, 614
puntos conjugados, 617
puntos focales principales, 614
superficie esférica, 612
versión rudimentaria, 612
divergentes, 619
electrostática, 620
magnéticas, 620
método de construcción de rayos, 616
objetivo, 620, 625, 653
ocular, 620
recubiertas, 657
Lenz, H. F. E., 538
Leptón, 871
conservación del número, 875
Ley(es):
asociativa, suma de vectores, 25
cero de la termodinámica, 324

conmutativa:
en el producto escalar, 31
en el producto vectorial, 33
en la suma de vectores, 25
de Ampere, 519, 567, 571, 572
comparada con la ley de Faraday, 570
forma generalizada de la 567
forma original de la, 520
de Avogadro, 587
de Biot y Savart, 510
de Boyle, 324
de Bragg. 753, 755
de Charles y de Gay Lussac 334
conservación local en la relatividad, 692
de la carga eléctrica, 386
de la energía, 167, 182, 425
de la extrañeza, 880
de la masa, 78
de la masa-energía, 184, 710
del ímpetu lineal, 80, 106
del isoespín, 879
del número de nucleones, 834
del número muónico, 877
en la física clásica (lista), 387
las reglas de Kirchhoff, 475
momento angular, 210
primera ley de la termodinámica, 351
validez universal, 874
y el principio de incertidumbre, 769, 770
de Coulomb, 380
intervalo de validez de la, 381
prueba experimental de la, 416
de Dalton (de las presiones parciales), 357
de Faraday, 54, 570
su comparación con la ley de Ampere generalizada, 569
de Gauss:
de la electricidad, 408
como una integral del volumen, 420
de una carga puntual, 407
de una distribución de carga con simetría esférica, 413
de un alambre infinito, 410
de una lámina plana infinita uniformemente cargada, 411
en conductores, 414
en los dieléctricos, 414, 420
suposiciones importantes, 410
y el cambio eléctrico, 407
y su relación con las líneas de campo eléctrico, 411
de gravitación universal, 123
de Hooke, 156n, 269n, 309, 312, 504
de inercia, 74, 91
de Kepler, 243, 252
de la inducción electromagnética (*ver en* Ley de Faraday)
del algebra vectorial, 24, 26, 27, 29, 30
de las áreas, 207
de la termodinámica, 324, 347, 351
de Lenz, 558
y el signo menos en la ley de Faraday, 540
y la conservación de la energía, 539
de Maxwell, 665
y de Ampere, 569
de Newton:
de la gravitación universal, 124, 245
del movimiento, 111, 123
aplicaciones de las, 123-125, 221-242
en marcos no inerciales, 137, 140
en la rotación, 199, 224
estrategia para su aplicación, 125
forma relativista de la segunda ley, 702
primera, 123
segunda, 111, 123, 199, 224
tercera, 112, 123, 212
de Ohm, 457, 463
forma puntual, 463
forma vectorial, 463
intervalo de validez, 458
de Snell, 603, 608
modelo corpuscular de la, 623
de Stefan y de Boltzmann, 371, 375
e invariancia, 693
distributiva:
en el producto escalar, 31
en el producto vectorial, 33
en la física, 694
físicas, 17
general de los gases, 332, 544
Boyle, 334
Charles y Gay-Lussac, 334
Libra (unidad), 78, 110, 115n
Libres, frecuencias angulares de las oscilaciones, 555
L_I (magnitud del ímpetu angular nuclear), 822
Límite de serie, 793
Líquido, propiedades térmicas de un, 359
caloría definida con un, 364, (tabla), 365, 369
Linac, 845
Línea(s)
D, del sodio, 818
de campo eléctrico, 394, 411
cuya fuente es un flujo magnético cambiante, 541
densidad de, relacionadas con *E*, 395
y las cargas eléctricas, 540
de campo magnético, 490
configuración espacial, 518
de imanes permanentes, 488
espiras cerradas, 518
de estabilidad, 827
de fuerza eléctrica (*ver en* Líneas de campo eléctrico
de universo, 863
espectro de, 793
nodales, 632, 633, 655
recta, definición, 35
Livingston, M.S., 847
Lluvia en cascada, 744
L (magnitud del ímpetu orbital), 806
Longitud:
como una dimensión, 21
del camino óptico, 640
de onda de campo de Compton, 736
de onda de una partícula, 752
de onda en el espacio vacío, 640
de onda registrada:
en una cinta magnética, 321
en un disco de larga duración, 321
factores de conversión (tabla), 893
patrón de, 19
propio, 681
Lorentz:
fuerza de, 495, 571
H.A., 495
L_0 (*ver en* Longitud propia)
Lp, disco de larga duración, longitud de onda registrada, 321
L/R, constante de tiempo, 562
L_s (magnitud de ímpetu angular de espín del electrón)
Luminosidad estelar, 375, 596
del Sol, 191, 375, 596
Luna(s):
de la Tierra:
como un satélite terrestre, 70, 247, 257
diámetro (tabla), 253

distancia de la Tierra, 891
distancia de la Tierra, medida, 597
masa (tabla), 253
periodo orbital, 265
y la tercera ley de Kepler, 258
de Júpiter, 257
y la tercera ley de Kepler (gráfica), 257
satélites de la, 69
periodo orbital
Lupa, 618, 626, 657
simple, 618, 626, 657
Luz:
amplificación de la, 637
curvatura de la, 69
espectro de, 591
infrarroja, 591
peso de la, 69
presión de, 88, 580, 583
rapidez de la (*ver en* Rapidez de la luz)
tubería de, 611
ultravioleta, 590, 591
y la resonancia de los electrones átomicos, 667
visible, 591
L (vector de Momento angular), 199
L (*ver en* Inductancia)
L (*ver en* Número cuántico de ímpetu angular orbital)
Lyman, serie de, 794

"M"

Macroscópicas, propiedades de un gas ideal, 332
Magnética:
intensidad, 898, 899
lente, 506, 620
Malus:
E. L., 665
ley de, 665
Malla:
ecuación de Kirchhoff, 476
(*ver en* Antinodo)
Máquina:
de movimiento continuo, 183
de vapor ideal, 366
Diesel, 337
Marco de referencia, 75, 96, 98, 124, 137, 694
acelerado (*ver en* Inercial)
de ímpetu cero, 101
del centro de masas, 101
del laboratorio, 103
inercial, 75, 98, 137
no inercial, 137, 140
transformaciones galileanas del, 97, 106
Marsden, E., 790, 792
Masa(s):
atómicas (tabla), 901
de la Tierra, 249
dinámica, 285
en reposo, 700
cero, 707
factores de conversión, 894
gravitacional, 243, 244, 378
comparación de dos masas, 382
su relación con la masa inercial, 244
inercial, 75, 243, 244
su relación con la masa gravitacional, 244
la ley de la conservación, 894
molecular (*ver en* Peso molecular)
patrón de, 21, 77
relativista, 696, 701
suma escalar de, 77
unidad átomica, 78, 714
unidades de, 78, 894
Matemáticas como lenguaje de la física, 17
Materiales dieléctricos, 441
electrones ligados en los, 379
propiedades de los, 379
y los capacitores, 439
Maxwelliana distribución, 353
Maxwell. J. C, 353n, 568
Mecánica:
clásica, 18,73
estadística, 325, 353
newtoniana, 18, 73
aplicada al movimiento de rotación, 221-242
aplicada al movimiento de traslación, 123-125
teoría cinética, 360-361
teoría molecular de los gases, 323
ondulatoria vs. mecánica clásica, 773
relativista: 693-697
cálculos en la, 712
cinemática, 671-718
dinámica, 693-718
energía en la, 714
ímpetu, 81n, 696, 701
la relatividad de los eventos simultáneos, 684
masa 81n, 696, 701
relaciones entre las velocidades, 684
Media, velocidad, 832, 858
Medida(s):
de la distancia entre la Tierra y la Luna, 597
de la velocidad de la luz:
de Bradley (aberración estelar), 592
de Fizeau, 593
de Foucault, 609
de National Bureau of Standars (resonancia del laser), 593
de Michelson, 597
de Roemer, 597
en el agua, 609
en la física, pasos para las, 20
Medidor de presión, 328, 337
Medio elásticamente deformable, 310
m_e (masa en reposo del electrón), 892 892
Mesón, 869
Metales alcalinos, 814
Método vectorial analítico, 26
Metro (unidad), 19, 893
MeV (unidad), 432, 713
mho (unidad), 460
Michelson, A. A., 597, 642, 673
Micra (unidad), 893
Microondas, 591
patrones de interferencia de las, 656
Microscopio:
compuesto, 620
electrónico, 786
Milla (unidad), 893
Millikan:
experimento de la gota de aceite, 499
R. A., 400
min (unidad), 894
Mksa, sistema de unidades, 384
m_l, (número cuántico magnético orbital), 807
m (masa, dimensión), 21
M (mega), 21
m (mili), 21
m_n (masa en reposo del neutrón), 892
Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, 70, 216, 264, 389, 427
campo magnético en el núcleo, 529
corriente electrónica equivalente, 529
energía de ionización, 428
radio, 799

Moderador, 187
de agua pesada, 187
Moderna, física (definición), 18
Modificada, onda, 737
Modo(s)
de desplazamiento, 313
permitidos de oscilación, 302, 303
Módulo volumétrico, 312
Molar, calor específico, 364
Molécula(s):
temperatura y energía cinética, diámetro de las, 340
diatómica, 217
y la energía de las, 353
distribución de energía de las, 353
masa de las, 332
"peso" de las, 313, 332
tamaño de las, 339
344
Mole (unidad), 332
Momento:
angular orbital:
definición del, 216
de la Tierra, 218
bipolar magnética, 503n, 527
brazo, 266
de inercia, 208, 224
cálculos del, 340, 913
del momento (*ver en* Momento angular)
de una fuerza, 209n
dipolar magnético, 503, 527 (*ver en* Momento dipolar magnético)
Monómetro, de tubo cerrado, 329
Monopolo
eléctrico (*ver en* Carga eléctrica puntual) 404
magnético, 577
Monte
San Antonio, 597
Wilson, 597
Morley, E. W., 673
m_0 (*ver en* Masa en reposo)
Movimiento
armónico simple, 269-284
como generador de ondas sinusoidales, 294
de fase constante, 271
de una partícula en un túnel terrestre, 279, 285
dinámica y cinemática del, 269
energía del, 273, 277
frecuencia angular del, 272
pequeñas oscilaciones, 277
superposición, 278, 284, 659
su relación con el movimiento circular uniforme, 273
teorema de Fourier en el, 278
circular uniforme:
cinemática del, 63, 137
dinámica del, 137
partícula cargada en un campo magnético, 492
su relación con el movimiento armónico simple, 273, 284
y el movimiento armónico simple, 273
de proyectiles:
cinemática del, 68
energía en un, 173
y las fuerzas, 153
de rotación (*ver en* Rotación, movimiento de)
cinemática del, 195n, 221
de un giroscopio, 219
dinámica del, 223
energía cinética del, 230
leyes de Newton del, 211, 213, 224, 235
potencia en el, 230
trabajo en el, 230
desordenado y la energía térmica, 347
de un gas, 348, 359
de un líquido, 361
de un sólido
y la entropía, 367
de traslación:
armónico simple, 269-285
cinemática de dos dimensiones, 53-71
cinemática unidimensional, 35-52
dinámica del, 124-143
energía del, 165-193
ímpetu (*ver en* Impetu)
leyes de Newton, 125
periódico, 277
trabajo y energía cinética, 145, 164
fem de, 531
planetario (*ver en* Leyes de Kepler)
rectilíneo, 35
y aceleración constante, 42
relativo, 97
notación nemotécnica, 98
m_p (masa en reposo del protón), 892
m_S (masa del Sol), 891
m_s (número cuántico magnético del espín), 809
m_T (masa de la Tierra), 891
Multiplicaciones de vectores:
por un escalar, 26
producto escalar, 30
producto vectorial, 32
Múltiplos de diez, prefijos de los, (tabla), 21
Muón (tabla), 871
decaimiento del, 679
número de, 877
Músculos:
bíceps y tríceps, 241
M (vector de magnetización), 898
m (*ver en* Metro)

"N"

Navegación de las abejas, 668
N_A (*ver en* Número de Avogadro)
Neutrino, 840, 843
aspecto izquierdo o derecho, 882
del tipo muónico o eléctrónico, 878
Negativo, vector, 25
Neutrón, 1, 18, 65, 70, 73, 123, 243, 246, 248, 253
carga eléctrica, 378
decaimiento, 843
descubrimiento del, 859
estrella neutrónica, 265
fuerza entre un protón y un, 823
lento, 68
moderado, 187
rápido, 187
térmico, 785
(unidad), 109
Neutrones térmicos, 372
rapidez rmc, 358
n (nano), 21
No conservación de la paridad, 843
Nodo (punto nodal), 299
Normal, fuerza, 116, 128
NTB, 333n
Nuclear:
constituyentes, 821
densidad, 824
espín, 822
estructura, 821
fisión, 191, 358, 390, 854
fotodesintegración, 826
masas (tabla), 901
número de masa, 827
radio, 824
reacción, 851
reactor, 187, 191
tamaño, 20
Nucleidos, 827
radioactivos naturales, 834

Núcleo(s), 378, 789
  atómico (*ver en* Núcleo)
  estables, 827
  inestables, 390, 854
  primitivo, 831
  producto, 831
  radiactivo naturales (inestables), 834
Nucleón, 823
  conservación de los, 834
Número(s)
  atómico, 388, 827
  cuántico(s), 777
    de extrañeza, 880
    de ímpetu angular de espín:
      de las partículas fundamentales (tabla), 871, 872
      del electrón, 809
      del fotón, 747
      nuclear, 822
  de Avogadro, 339, 344, 388, 455
  de ímpetu angular del espín del electrón, 809
    de ímpetu angular de rotación, 788
    de ímpetu angular orbital, 806
    de isoespín, 879
    del espín nuclear, 822
    magnético de espín (del electrón), 809
    magnético orbital, 807
    principal, 805
    rotacional, 787
    y la estructura átomica, 804
  de masa, 827
  electrónico, 877
N (*ver en* Fuerza normal)
n (*ver en* Indice de refracción)
N (*ver en* Newton)
n (*ver en* Número cuántico principal)
N (*ver en* Número neutrónico)

"O"

Objetivo, lente, 620, 625, 653
Objetos
  cargados negativamente, 379
  con carga positiva, 379
Obscuras, espectro de líneas, 795
Ocular, lente, 620
Oersted, H. C., 509
Ohm
  G.S., 457
  (unidad), 457
Ohmetro, 483
Oído humano:
  frecuencias audibles al, 312, 317
  intensidades audibles al, 316
Ojo, 617
  difracción en el, 654
  interpretación de las imágenes, 605
  lentes de corrección, 625
  punto próximo, 657
  resolución del, 657
  sensibilidad espectral, 591
Onda(s):
  amplitud, 271
  aspectos ondulatorios de una partícula, 751
  compresional, 309-321
  concepto, 759
  -corpúsculo, dualidad, 759
  corrimiento de fase, 299
  de Broglie, 751
    interpretación probabilística de los, 762
    longitud de onda de las, 798
  densidad de energía, 577
  de partículas, 751
  de sonido, 213, 316, 320, 356, 657
  difracción, 600, 648
  elástica, 309-321 (*ver en* Onda compresional)
  electromagnética(s), 570, 587
    cargas aceleradas como fuentes de, 584
    cargas de fase de la reflexión, 634
    circularmente polarizadas, 660, 669, 747
    izquierdo o derecho, 660
    densidad de energía de las, 577
    dispersión de:
    clásica, 732
    cuántica, 734
    doble dispersión, 668
    ecuaciones de Maxwell de las, 571
    fuentes de, 584
    fuerza de radiación, 580
    ímpetu angular de espín, 584, 669
    ímpetu lineal de las, 583
    intensidades de las, 583
    longitud de onda, 589
      en un medio refractor, 640
    presión de radiación, 580, 583
    propiedades de las, 393
    prueba experimental de Hertz, 557
    rapidez de propagación, 576
    relación entre *E* y *B*, 576
    relaciones especiales entre C, E y B, 589
    sinusoidales, 587
      oscilador dipolar eléctrico como fuente, 588
      superposición de, 577, 627 629
    superposición de, 627
    vector de Poynting, 579
  en una cuerda, 287-308
  en un gas, 312, 315
  estacionarias, 248, 298
    longitudinal, 313
    transversal, 299
  fase, 294
  fase constante, 296
  frecuencia y período, 271-272
  frente de ondas, 316, 318
  gravitacional, 870
  ímpetu, 580
  ímpetu angular, 669
  intensidad, 317, 578
  interferencia, 291
  longitud de onda, 296, 752 (*ver en* Onda de compresión)
  longitudinal, 309-321
  mecánica de, 773
  mecánicas, 287-321
    compresionales, 309-321
    definición de, 287
    elásticas, 309-321
    longitudinales (*ver en* compresionales)
    sinusoidales:
      longitudinales, 309
      superposición, 302, 313
      transversales, 293
    transversales en una cuerda, 287-308
  modificada, 737
  nodos, 299, 314
  no modificada, 737
  número de, 295, 316
  óptica de, 627, 651, 773
  paquete de, 767, 769
  potencia, 581
  pulso de, 572
  rapidez de, 289, 296
  rayos, 316
  reflexión, 292, 299, 313, 582, 603
  refracción, 603, 607
  reversibilidad óptica, 601, 613
  sinusoidal, 294, 307
  sonoras
    en tubos:
    abiertas en ambos extremos, 315, 320

cerrados en un extremo, 314, 320
de órgano, 320
intensidad, 317
rapidez de las ondas, 312, 358, 657
variaciones de la intensidad con la distancia, 317
superposición de, 291, 302, 313
transversales, 288-308
comportamiento básico, 287
ímpetu lineal, 583
interferencia, 299
ondas estacionarias, 298
reflexión, 292
superposición, 172, 302
velocidad transversal, 291
viajeras, 295
Ondulada, raya, 24
Optica
de rayos, 559-626, 773
alcance de las longitudes de onda, 600
construcción de rayos, 616
falta de información de las intensidades relativas, 604
principio de Fermat del tiempo mínimo, 625
transición a la óptica ondulatoria, 652
física (*ver en* Optica ondulatoria)
geométrica (*ver en* Optica de rayos), 599, 773
ondulatoria, 627-657
cambios de fase en la reflexión, 633
difracción, 643, 651, 652
experimento de la doble rendija de Young, 637
interferencia, 627, 629
interferómetro de Michelson, 642
películas delgadas, 639
reflexión, 633
rejilla de difracción, 647
rendija de difracción, 646
resolución, 652
superposición, 627, 629
Orbital, número cuántico magnético, 807
Orden de la reflexión, 755
Oscilación(es)
amortiguadas, 281
de los átomos en los sólidos, 285
de un circuito *LC*, 553
dipolares eléctricas, 588, 597, 600, 661
eléctricas libres, 553
energía de las, 284
forzadas, 281, 303
modos permitidos de, 302, 303
pequeñas, 277
resonantes, 281
Oscilador
de microondas, 558
de radiofrecuencia, su evolución a partir de un circuito *LC*, 557
dipolar eléctrico, 588, 597, 660, 661
eléctrico
impulsora, 559
libre, 553
eléctrico libre, 553
ecuación diferencial del, 555
frecuencia angular del, 555
LCR, frecuencia de resonancia, 559
LC (*ver en* Oscilador eléctrico libre)
mecánico, 269-285
Osciloscopio (*ver en* Rayos catódicos, osciloscopio)

"P"

Palanca, clase III, 241
Palomar, telescopio de Monte, 657
Pantalla fosforecente, 488
Paquete de ondas, 767, 769
Par(es), 239
de partículas y antipartículas, 386, 387
electrón-positrón
aniquilación del, 387, 741, 863, 864
conservación de la carga, 366, 739
producción del, 386, 739, 864
Paradoja de los gemelos, 679
Paridad, no conservación de la, 843
Parsec (unidad), 893
Partícula
alfa, 89, 790
efecto túnel de las, 781
aspecto ondulatorio, 751
cargadas en campos E y B uniformes, 495
concepto de, 35, 759
de campo, 868
de radiación elecromagnética, 719
elemental(es), 387, 861
tabla de sus propiedades, 871, 872
en una caja (cuántica), 775-777, 787
equivalente de un sistema, 91
lambda, 872
masa en reposo cero, 707
omega, 872
resonante, 884
sigma, 872
W, 869
Xi, 872
Paschen, serie de, 794
Patrón:
batería, 480
de la aceleración debida a la gravedad, 78, 115, 250
de la longitud, 19
de la presión atmosférica, 328
de masa, 21, 77
de tiempo, 19
tono, 308
Pauli, W., 810, 840
Péndulo:
balístico, 188
(casi) isócrono, 276
de torsión, (*ver en* Balanza de torsión)
isócrono, 276
simple, 275, 285
análisis dimensional, 276
(casi) isócromo, 276
energía del, 277
Penetración de la barrera, 781
Pequeñas, oscilaciones, 277
Perfecto, gas (*ver en* Gas ideal)
Perigeo, 253
Perihelio, 253, 257
Periodo, 65, 271
Permeabilidad magnética, 510
Permitividad eléctrica:
del espacio vacío, 385
valor experimental, 576
de un dieléctrico, 442
su relación con la constante de la fuerza de Coulomb, 384
Peso, 114
de la luz, 69
de un gas, 122, 357
Pie:
-libra (unidad), 146n, 895
P (ímpetu total de un sistema de partículas), 75
Pión, 869
Pirómetro de radiación, 375
Planck, M., 721
Planetas:
como satélites solares, 70
densidad promedio de los, 265
(tablas), 253, 256, 257

Plano:
de polarización, 659
focal, 615
inclinado:
liso, 128
rugoso, 133
tratamiento de la mecánica ondulatoria, 785
Plasma, 855
Plimpton, 416
Polar, 267
Polarización:
analizador, 664
circular, 660, 669
de la luz visible, 662
dipolar eléctrica, 660
dirección de, 662, 663
dirección de fácil absorción, 661
doble dispersión, 668, 669
elíptica, 660
extinción de la, 664
lineal, 659
luz no polarizada, 662
plana, 659
polarizador, 664
por dispersión, 666
por reflexión, 666
superposición, 659-669
Polarizador, 664
Polaroide, 663
dirección de polarización, 663
en los anteojos, 669
Positrón, 89, 386, 739
aniquilación del, 838
Positronio, 742, 749
Potencia:
de una onda electromagnética, 557, 579
eléctrica: (*ver en* Eléctrica, potencia)
capacidad instalada de los EE.UU., 597
disipada en una resistencia, 458, 470
suministrada por una fuente, 456, 466
Potencial:
de Yukawa, 886
eléctrico, 428
de cargas puntuales, 430
de conductores, 435
de un alambre uniformemente cargado, 433
de un casquete esférico dieléctrico, 435
modelos del, 435
selección del origen del, 430
superficies equiponenciales del, 433
su relación con el campo eléctrico, 432
unidades del, 429
retardador, 449, 497
Potenciómetro:
como un divisor de voltaje, 482
como un instrumento de nulo, 480, 485
Poynting, J. H., 579
Pozo de potencial, 180
en la teoría cuántica, 775, 782
p (pico), 21
Precesión, 219
de los equinoccios, 267
Precipitador eléctrico, 450
Prefijos de los múltiplos de diez (tabla), 21
Presión:
absoluta, 328
atmosférica, 328, 329
valor normal, 329
definición de la, 328
de radiación, 88, 583
de un gas, 328, 341
dispositivos para medir la, 328
factores de conversión, 895
medidor de, 328
parcial, ley de Dalton de la, 357-358
Presubíndices y presuperíndices, 419
tiempo, 20, 835
Prima, 609, 611, 624
ángulo de desviación de un, 609
ángulo de desviación mínima, 624
dispersión, 609, 650
espectro de, 609
inversor, 624
Probabilidad y las ondas de Broglie, 762
Primera ley de la termodinámica, 347, 362
conservación de la energía, 351
Principal, número cuántico, 805
Principio:
de combinación de Ritz, 816
de complementariedad, 759
de correspondencia, 798, 817
de equivalencia, 69, 77
de exclusión de Pauli, 809
en un núcleo, 829
de Fermat, 625
del tiempo mínimo, 625
ley de la reflexión, 625
ley de Snell, 625
de incertidumbre, 766, 867
de indeterminación, 767
de superposición (*ver en* Superposición, principio de)
Proceso(s):
adiabéticos, 335
en ondas sonoras, 313
de transferencia de calor:
conducción, 367
convección, 370
radiación, 370
isobáricos, 335
isotérmicos, 335
isovolumétrico, 335
reversibles, 352, 356
termodinámicos, 335
Producción
asociada, 881
de pares, 386, 739, 864
Producto(s)
con vectores:
de un vector por un escalar, 26
escalar (punto), 30
vectorial (cruz), 30
cruz (*ver en* Producto vectorial), 32
escalar, 30
el flujo como, 406, 418, 490, 579
el trabajo como, 147
la potencia como, 147
leyes conmutativa y distributiva, 31
punto, 30
torca, 200
vectorial, 31
fuerza magnética, 489, 492, 495, 500, 512
ímpetu momento, 201
su relación con el área de un paralelogramo, 34
Profundidad aparente, 623
Promedio, velocidad, 35, 50, 53
Propio:
longitud, 681
tiempo, 678
Protón, 388, 390
propiedades del, 821
Proyección ortogonal, 26
Pruebas de superficies ópticamente planas, 641
Puente de Wheatstone, 480
Puestas de sol rojas, 668
Pulgada (unidad), 893
Punto(s):
conjugados, 617
de ebullición del agua, 325
de fusión del hielo, 325
fijos, 325

focal (*ver en* foco)
próximo, 657
triple, 332
P (*ver en* Impetu)
p (*ver en* Momento dipolar eléctrico)
P (*ver en* Potencia)
P (*ver en* Presión)

"Q"

q (carga eléctrica puntual), 382, 383
Q (carga total de cualquier objeto), 387
Q (energía total desprendida en el decaimiento beta), 839

"R"

Racionalizadas, unidades, 384, 511
Radiación:
cósmica, 491, 674n, 744
de sustancias radiactivas, 834, 836, 837
electromagnéticas: 371, 571, 577, 590, 719, 728
teoría clásica:
pulsada, 572
sinusoidal, 587
teoría cuántica, 719
aspectos corpusculares, 719
estimulada, 636
fuerza de, 580
medida de la, 580, 583
infrarroja, 591
pirómetro de, 375
presión de, 88, 583
térmica, 372
Radiador perfecto (*ver en* Cuerpo negro)
Radián, 66
de curvatura, 288
espectro, 591
(hueso), 241
telescopio, 657
vector, 63
Radiactividad, 193, 833
artificial, 853
Radiactivo decaimiento, 831
alfa,
beta, 837
gamma, 834
ley del, 831
Radio, 193
Radioisótopo, 853
Radiorreceptor:
desvanecimiento, 656
sintonización, 564
Radón, 193
Raíz cuadrática media:
de la corriente, 464
de la rapidez, 343
Rankine, W., 337
Rapidez:
angular, 195
como área, 42
como un vector, 53
constante, 37
crítica de lanzamiento, 262
de escape, 261, 266
del centro de masas, 91, 135
dimensiones, 37
instantánea, 37, 54
promedio, 35, 53
relativa, 96
terminal, 141, 401, 404
transversal, 292
rcm, 343
unidades, 37, 894
uniforme rotacional, 235
uniforme traslacional, 37
y la pendiente, 37, 42
Rarefacción, 311
Raya ondulada, 24
Rayo(s):
catódicos, osciloscopio de, 403, 488, 506
cósmicos, 492, 679, 744
gamma, 591
decaimiento gamma, 834
paralelos, 614
X, 730
difracción de, 755
espectro de, 732, 819, 839
producción de, 730
RC
circuito, 560
constante de tiempo, 561
Rcm, (*ver en* Raíz cuadrática media)
Reacción:
fuerza de acción, 112
termonuclear, 855
Reactor:
de fisión de uranio, 191
reacciones de fisión, 844
nuclear de fisión, 187, 191
nuclear de fusión, 191
Real, imagen, 616, 617, 620, 625
Recipiente magnéticas, 495
Reciprocidad, principio de, 601, 613
Recubiertas, lentes, 657
Referencia, marco inercial de, 75, 96, 98, 124, 137, 694
Reflector:
de esquina, 606
parabólica, 602
Reflexión:
de las ondas electromagnéticas, 582, 603
cambio de fase, 634
de una superficie conductora, 633
difusa, 603
especular, 603
reglas de la, 603
total interna, 610
de ondas mecánicas:
cambio de fase, 314
ondas longitudinales, 314
ondas transversales, 293
difusa, 358
especular, 603
magnética de partículas cargadas, 495
total interna, 610
ángulo crítico, 610
Refracción de ondas electromagnéticas, 603, 607
en una superficie esférica, 612
índice de 603, 606 (*ver en* Indice de refracción)
punto de vista atómico, 610
reglas de la, 603
Regla(s):
de Kirchhoff, 475
del pulgar (*ver en* Regla de la mano derecha)
de Stokes, 817
nemotécnica para las velocidades relativas, 98
Reines. F., 521n, 844
Rejilla:
de difracción para ondas sonoras, 648, 657
de transmisión, 647
Relación:
entre el campo magnético y el eléctrico en las ondas, 576
entre la fuerza eléctrica y la fuerza gravitacional, 381, 386
entre las masas:
de dos objetos que se orbitan mutuamente, 254
de los planetas y satélites, 264
del Sol y la Tierra, 248
Relaciones:
de transformación de coordenadas:
de Lorentz, 682
en las galileanas, 34
galileanas, 96
de velocidad

galileanas, 98
relativistas, 684
matemáticas, 907
Relatividad
de la simultaneidad, 684
teoría especial, 18, 81n, 671-718
teoría general, 69, 528, 694n
Relativo, índice de refracción, 606, 609
Reloj atómico, 20
Rendija, difracción en una doble, 647, 765
experimento de Young, 637
Reposo, masa en, 700
cero, 707
Resistencia, 457
de alambre enrollado, 462
de derivación, 479, 484
de los superconductores, 458
depositada al vacío, 462
de resistencias en paralelo, 471
de resistencias en serie, 471
de un conductor cilíndrico, 459
disipación de potencia, 458
ecuación de la, 459
equivalente:
de un circuito en paralelo, 472
de un circuito en serie, 472
interna, 466
de una batería, 446
de una bobina, 565
de una inductancia, 562
medidas de la, 479, 485
no lineal (no óhmica), 458
óhmica, 458
Resistividad, 459
(tabla), 459
Resolución, 652
criterio de Rayleigh, 654
del ojo, 657
poder de, 673
Resonancia, 282
de ondas, 304, 320
frecuencia de, 303
oscilador *LCR*, frecuencia de, 559
partículas de, 884
Resorte:
constante de un, 156, 163
energía potencial de un, 165, 168, 180
fuerza recuperadora, 156
trabajo, 168
Resplandor azul de un cuarto lleno con humo, 668
Resultante, vector, 24
Retardador, potencial, 449, 497
Reversibilidad óptica (*ver en* Principio de reciprocidad)
rev (unidad), 893
Rigidez magnética, 497
Roemer, O., 592
Rompimiento eléctrico, descarga corona, 437
Rosser, W.G.V., 495
Rotación
y la contracción del espacio, 689
y la traslación, tabla de cantidades análogas, 232
Rotacional, espectro, 788
*r*TM (distancia promedio entre la Tierra y la Luna)
Rutherford, E., 789, 796, 851
r (vector de desplazamiento), 53
R (*ver en* Constante de los gases)
R (*ver en* Radio Curvatura)
r (*ver en* Radiovector)
R (*ver en* Resistencia)
Rydberg:
constante de, 794, 801
ecuación de, 794
fórmula de, 881

"S"

"Sacudida" del movimiento, medida de, 42
Sadeh, D., 749
SAE, 483
Satélite(s), 70, 138, 261, 265
de la Luna, 69
de la Tierra, 65
de la Tierra, sincrónico(s), 264
del Sol, 52, 256
de Júpiter, 256, 257
terrestre, 65, 138, 143, 217
análisis dimensional, 285 (dibujo), 257
energía de un, 261, 266
movimiento orbital, 65, 217
rapidez orbital, 65, 217, 262
reingreso, 265
(tabla), 256
y las leyes de Kepler, 252
Saturación de la fuerza nuclear, 390
Saturno 5, cohete, 122
Savart
ley de Biot y, 510
F., 515
Schrödinger, E., 765
s' (distancia de la imagen), 616
S (distancia del objeto), 616
Sección transversal, 859
Segrè, E., 749
Segunda ley de la termodinámica, 351
la dirección del tiempo, 356
Segundo (unidad), 21
Selector:
de energía cinética, 497, 507
del ímpetu, 496, 507
de masas, 498, 507
de velocidades, 496, 507
Semiconductores, 379, 457, 460
curvas de *V* vs *i*, 457
propiedades de los, 457, 460
Semieje mayor, 256
Serie
de Balmer, 793, 794
de Lyman, 794
de Paschen, 794
Símbolo(s)
delta (Δ), 36
en negrillas, 24
Simple, difracción de una rendija, 646, 647, 765
teoría cuántica de la, 765, 770
Sincrociclotrón, 845, 849
Sincrónicos, satélites terrestres, 264
Sincrotón:
de electrones, 461
de protones, 851, 859
Sinusoidal:
movimiento, 271
ondas electromagnéticas, 587
oscilaciones eléctricas libres, 553
Sirio, 265
Sistema(s)
binario de estrellas, 265
conservativos, 182
de coordenadas, derecho, 30
para el producto vectorial, 32, 33
para la velocidad angular, 196
de navegación de las abejas, 668
de partículas en interacción, 134
de referencia:
inercial(es), 75, 98, 124, 693, 694
no inercial(es), 138, 694
y la aceleración, 99, 100
de unidades acostumbrado en los EE.UU. 19, 20
de unidades inglesas, 20
gaussiano c.g.s. de unidades, 384n, 490, 897
Internacional de unidades (SI), 19, 384
factores de conversión, 893
unidades eléctricas y magnéticas, 897, 898
ligados, 709

métrico, 19
eléctrico y magnético, 897
factores de conversión, 793, 899
patrones del, 19, 20, 21, 77
no conservativo, 183
SI (*ver en* Sistema Internacional de unidades)
slug (unidad), 115n
Snell, W., 603
Sobretono, 303
Sol:
atmósfera del, 358
como cuerpo negro, 375
constante solar, 596
energía radiada interceptada por la Tierra, 321
fotosfera del, 358
fuerza de radiación sobre la Tierra, 596
intensidad de radiación a la distancia de la Tierra (*ver en* Constante solar)
luminosidad del, 191, 375, 596
Solar:
atmósfera, 358
constante, 596
día, 20, 239
radiación, 191, 321, 375, 596
Solenoide, 523
inductancia, en un, 545
toroidal (*ver en* Toroide)
Sólidos, propiedades térmicas, 359
calores específicos, 364 (tabla)
conductividad, 369
energía, 360
radiación, 370
Sonar, 318
Stefan-Boltzmann, ley de, 371, 375
Stevinus, S., 141
Substancias termométricas, 326
sus propiedades que dependen de la temperatura (tabla), 327
Suma escalar de las masas, 77
Superconductores, 460, 849n
Superficie:
equipotencial, 433
su relación con las líneas de campo eléctrico, 434
gaussiana, 405
y la simetría de la distribución de cargas, 410
Supernova, 265
fuerza de radiación de una, 583
Superposición, principio de:
de las fuerzas, 110, 124, 292
en el campo eléctrico, 410
en fuerzas eléctricas, 383, 392
en las ondas, en general, 627
en las ondas mecánicas, 291, 302, 313
en los movimientos armónicos simples, 278, 284, 659
en ondas electromagnéticas, 577, 627
en ondas polarizadas, 659
s (*ver en* Número cuántico de ímpetu angular de espín del electrón)
s (*ver en* Segundo)

"T"

Tabla periódica, 809
Tangencial:
aceleración, 223
rapidez, 233
Tanque de ondas, 608, 816
Taquión, 683n
t_C (*ver en* Temperatura centígrada o Celsius)
T (dimensión temporal), 21
Telescopio
astronómico, 621, 626
ventajas de los de gran diámetro, 654
de Monte Palomar, 657
radio, 657
Televisión, tubo de imagen de la, 50
Temperada, escala bien, 321
Temperatura, 323
absoluta, 332
su relación con la energía, 344
Celsius, 325
equilibrio térmico, 324
Fahrenheit, 325
gradiente de, 368
Kelvin, 331
Rankine, 337
y la distribución de la energía, 353
y la energía cinética, 323
y la ley cero de la termodinámica, 324
Tensión, 126
y las ondas transversales, 288
Teorema:
de ejes paralelos, 224
de Fourier, 278
del binomio, 123
del impulso-ímpetu, 116
de los ejes perpendiculares, 239
de los nados de Kirchhoff, 475
de trabajo y energía cinética, 147-155
en la rotación, 231
Teoría:
cinética, 340-361
de Bohr, 796
postulados de la, 803
de la relatividad especial, 18, 81n, 671-718
de la relatividad general, 69, 528, 694n
molecular de los gases, 323
Térmica, radiación, 372
Térmico, equilibrio, 324
Termodinámica:
conceptos fundamentales, 344
ley cero, 324
primera ley, 347
segunda ley, 351
Termometría, 325
calibración, 325, 328
Termómetro
de gas o volumen constante, 330
de líquido en vidrio, 325
Termopar, 467
Tesla (unidad), 490, 505
t_F (*ver en* Temperatura Fahrenheit)
Thomson, J.J., 499
Tiempo, 20
de vuelo, 62, 68
dilatación del, 674, 689
en la relatividad, 671
factores de conversión, 894
flecha del, 356
invariancia del, 883
inversión del, 601, 613
nuclear, 835
propio, 678
Tierra:
atmósfera de la, 337
campo magnético de la, 492, 505, 527
capacidad de la, 451
comba ecuatorial de la, 251, 265
como un marco inercial de referencia aproximada, 75
densidad de masa promedio de la, 250
densidad promedio de la, 250
energía cinética rotacional de la, 239
torca gravitacional de la, 267
T (número cuántico de isoespín), 879
Tono:
de un concierto, 307
internacional, 307
musical, 307, 316
Torca, 200
cero, 204

como el momento de la fuerza, 209n
constante, 503
externa, 213, 225
gravitacional, 249
interna, 212, 225
magnética, 502, 503
de una espira de corriente 502
de un dipolo magnético, 503
recuperadora, 249, 503
y el equilibrio, 235
y el ímpetu angular, 199
y el trabajo, 230
y la energía cinética, 231
y la potencia, 230
y la segunda ley de Newton, 226
Toroide, 529, 545
inductancia en un, 245
Torr (unidad), 330
Torre de Pisa, el experimento de Galileo en la, 244
Torsión, péndulo de (*ver en* Balanza de torsión)
T_0 (*ver en* Tiempo propio)
Trabajo:
como una área, 157
como un producto escalar, 148
definición, 146
de una fuerza conservativa, 178
de una fuerza de fricción, 155
de una fuerza eléctrica, 163
de una fuerza magnética, 492
de una fuerza no conservativa, 179
de un agente externo, 148
en el movimiento de rotación, 230
en un gas, 313, 337, 338
en un resorte, 155
y calor comparados, 348, 349
y la primera ley de la termodinámica, 349
y potencia, 159
Transformaciones de Lorentz:
de coordenadas, 682
de velocidades, 685
Transformador, efecto fundamental, 535
Transiciones permitidas, 806
Transmisión de energía en un gas, 348
Transmutación, 852
Transportadores de carga, 454
Traslación, equilibrio de, 124, 235
Trayectoria:
helicoidal de una carga en un campo magnético, 493, 494
paso de la hélice, 507
parabólica, 43, 60, 65
Trazador, 853
tríceps (músculo), 241
Tritio, 191
Tropopausa, 320
t_R (*ver en* Temperatura Rankine)
Tsiolkovsky, 90
T (tera), 21
t (tiempo), 36
Tubo de rayos catódicos, 47
Tumakina, 665
T (*ver en* Periodo)
T (*ver en* Temperatura absoluta)
T (*ver en* Tensión)
T (*ver en* Tesla)

"U"

UA (*ver en* Unidad astronómica)
Uem (unidad), 897
U (energía interna de un gas), 346
Ues (unidad), 897
Uhlenbeck, G. E., 809
Ultracentrífuga, 238
Umbral:
de la audición, 316
de la visión, 747
frecuencia, 723
Unidad(es)
astronómica, 893
británica de calor, 364n
del SI (*ver en* Sistema Internacional de Unidades)
de masa atómica, 78, 714
eléctricas y magnéticas, 897
en la mecánica relativista, 712
las acostumbradas en los EE UU., (Inglesas), 19, 511
racionalizadas, 384, 511
x 893
Universal ley de Newton de la gravitación, 123, 245
Universo, 20
U (*ver en* Energía potencial)
u (*ver en* Unidad de masa atómica)
UX (*ver en* Unidad)

"V"

Van de Graaff:
en línea, 438, 450
generador electrostático, 437, 450
Vector(es)
álgebra, 23-33
bosónico intermediario, 870
de desplazamiento, 23, 53
su diferencia con la distancia, 36
como vector prototipo, 23
de densidad de corriente, 463
de intensidad de ondas electromagnéticas (*ver en* Vector de Poynting)
de Poynting, 579
de velocidad angular, 195
dirección del, 196, 199
magnitud del, 196
sentido de rotación del, 196
dirección, 24, 27
ecuación, 30, 59
igualdad de, 25
leyes conmutativas, 25, 31, 33
leyes distributivas, 31, 33
magnitud, 24
multiplicación, por un escalar, 26
negativo, 25
producto, 31
propiedades, 23
prototipo, 23
radio, 63
resultante, 24
suma, 24
suma y resta, 24
Velocidad:
angular, 66
de arrastre, 454
en el cobre, 451
en la plata, 463
en materiales óhmicos, 458
de escape, 260
de la Luna, 266
de la Tierra, 266
de fase, 296, 786
definición de la, 38
del afelio, 225
de la luz:
constancia de la, 672
en el agua, 609
en el vacío, 576, 593, 892
del sonido, 312-313, 316, 320, 358
medidas de la, 320, 657
en el perihelio, 255
factores de conversión, 894
instantánea, 38
rcm, 343
tangencia, 66, 223
terminal, 141, 401
Vibración compresional de un temblor, 319
Vida media, 832, 858
Virtual, imagen, 605, 618, 620, 625
Visible, luz, 591

Volt (unidad), 429
Volta, A., 429
Voltaje, "potenciómetro" divisor de, 482
Voltímetro, 478, 484
Volumen, módulo de, 312
Von Laue, M., 753
v (rapidez instantánea), 40
v (velocidad instantánea), 54
V (*ver en* Potencial eléctrico)
V (volumen), 333

"W"

Walton, E. T. S., 852
Watt (unidad), 160
Wb (*ver* Weber)
Weber (unidad), 490, 491
Wiegend, 749
Wu, C.S., 843
w (*ver en* Peso)
W (*ver en* Trabajo)
W (*ver en* Watt)

"Y"

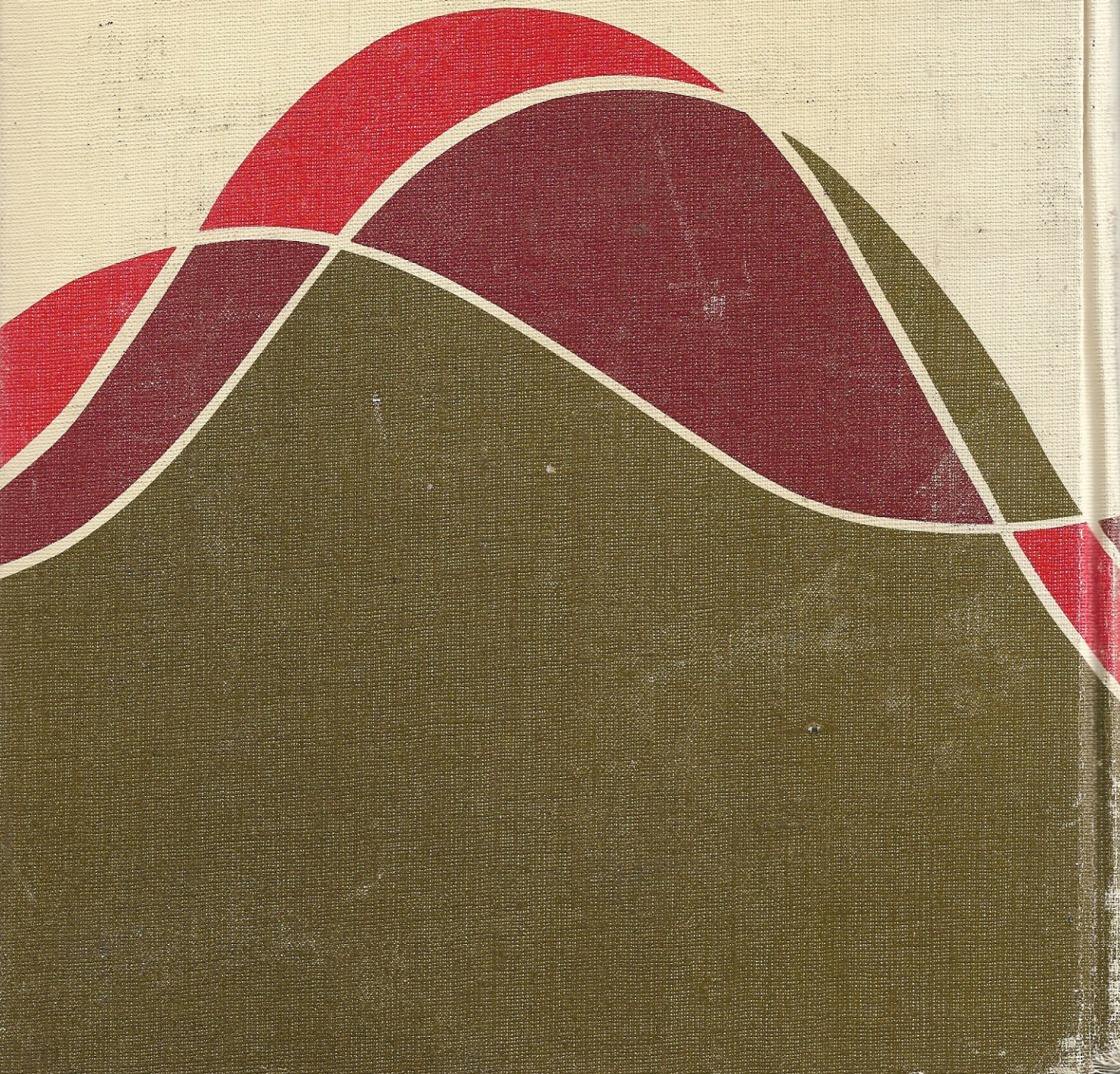
Yang, C. N., 843
Yarda (unidad), 20.
Yosilantis, 749
Young:
  experimento de la doble rendija, 637, 649
    diseño de interferencia, 638
    efectos de difracción, 638
  T., 638
Yukawa, H., 868

"Z"

z (número), 827

N O T A S

N O T A S

N O T A S

ESTA EDICION DE 5,000 EJEMPLARES
SE TERMINO EN AGOSTO DE 1979, EN
LOS TALLERES DE LA CIA. EDITORIAL
CONTINENTAL, S. A., MEXICO